



ELHUYAR  
edizioak

Ekaitz Zulueta Guerrero

# ORDENAGAILU BIDEZKO SYSTEMEN KONTROLA

Unibertsitatea





# ORDENAGAILU BIDEZKO SYSTEMEN KONTROLA

**Ekaitz Zulueta Guerrero**

Elektronikako industria-ingeniari teknikoa

UPV/EHUko irakaslea



ELHUYAR  
edizioak



HEZKUNTZA, UNIBERTSITATE  
ETA IKERKETA SAILA

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN,  
UNIVERSIDADES E INVESTIGACIÓN

Hezkuntza, Unibertsitate eta Ikerketa Sailaren laguntzaz argitaratu da.

Debekatuta dago liburu hau osorik edo honen zati bat erreproduzitzea, sistema informatiko batean biltegitratzea eta edonola edo edozein euskarritan –elektronikoa, mekanikoa, fotokopia edo bestelakoa– transmititzea, Elhuyar Fundazioaren alde aurretiko idatzizko baimenik gabe.

Koordinazioa eta maketa: Elhuyar Edizioak  
Zuzentzailea: Elhuyar Hizkuntza Zerbitzuak  
Azalaren diseinua: Olatz Goenaga

© Edizio honena: Elhuyar Fundazioa. Zelai Haundi, 3. Osinalde industrialdea.  
20170 USURBIL (Gip.) (2006)  
[elhuyar@elhuyar.com](mailto:elhuyar@elhuyar.com) - [www.elhuyar.org](http://www.elhuyar.org)

© Ekaitz Zulueta Guerrero

ISBN: 978-84-92457-46-5

# aurkibidea

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| HITZAURREA.....                                         | 5   |
| 1 SARRERA.....                                          | 9   |
| 2 LAGINKETA.....                                        | 31  |
| 3 SISTEMA DISKRETUAK .....                              | 51  |
| 4 Z TRANSFORMATUA.....                                  | 91  |
| 5 BEGIZTA ITXIKO SISTEMEN TRANSFERENTZIA-FUNTZIOA ..... | 151 |
| 6 ERANTZUN HARMONIKOA .....                             | 189 |
| 7 EGONKORTASUNA.....                                    | 215 |
| 8 DIGITALIZAZIOA .....                                  | 269 |
| 9 SINTESI DISKRETUA .....                               | 297 |
| 10 RST ERREGULADOREA.....                               | 379 |
| 11 IDENTIFIKAZIOA.....                                  | 449 |
| 12 KONTROL MOLDAKORRA.....                              | 497 |
| 13 EGOERA-ADIERAZPENA .....                             | 525 |
| 14 ZENBATESPENA .....                                   | 625 |
| 15 HOBETZE-KONTROLA .....                               | 661 |
| 16 KONTROL ESTOKASTIKOA ETA IRAGARTZE-KONTROLA.....     | 685 |



# Hitzaurrea

Esku artean duzun liburua konputagailu bidezko automatikari buruz euskaraz kaleratu den lehen lana da. Berez, liburuak automatikari buruzko oinarritzko kontzeptuak besterik ez du azaltzen. Hala ere, nire ustean, kontzeptu horiek ezagutuz gero, gaur egungo automatikaren teknika garrantzitsuenei buruzko ezagutza-maila ertaina lortuko litzateke.

Liburu hau zenbait irakasgaitan bana daiteke.

Lehenengo irakasgaiak hasierako bederatzi atalak har ditzake. Konputagailu bidezko automatikaren oinarritzko teknikak azaltzen dira horietan:

1. Sistema dinamikoen kontzeptua.
2. Sistema dinamikoen zenbait propietate garrantzitsu: egonkortasuna.
3. Sistema dinamikoa linealak aztertzeko tresna matematikoen definizioa.
4. Sistemen maiztasun-erantzuna.
5. Sarrera eta irteera bakarrekako sistemen kontrola: berrelikadura-egitura eta oinarritzko kontroladoreen sintesia.

Irakasgaia hiruhileko bakarrekoa izango litzateke.

Bigarren irakasgaiak 10., 11., 12. eta 13. atalak har ditzake. Kontroladore aurreratuaren egiturak aztertzen dira horietan:

1. Egoera-adierazpenean oinarritutako kontroladoreen sintesia.
2. Sistemen parametroen zenbatespena.
3. RST kontroladoreen sintesia.

Bigarren irakasgai hau ere hiruhileko bakarrekoa izan daiteke.

Azkenik, hirugarren irakasgaia teknika aurreratueterako eta berezietarako zuzendua egon daiteke. Honelako irakasgaiak azter daitezke:

1. Hobetze-kontrola
2. Kontrol estokastikoa
3. Kontrol iragarlea.
4. Sistemen egoeraren zenbatespena.

Bestalde, liburu honetan ez dut ia ezer azaldu sistema ez-linealen gaineko teknikei buruz, nahiz eta sistema ez-linealen egonkortasuna aztertzeko baliabide batzuk azaldu ditudan (13.

atalean). Badira aipatu ere egin ez ditudan beste zenbait teknika. Adibidez, Fuzzy Logikan oinarritutako kontroladoreak (*Fuzzy Logic Control* eta *ANFIS controllers*) edota garun-sareetan oinarritutako kontroladoreak (*Artificial Neural Networks for Control* edota *NeuroFuzzy Controllers*). Liburu honetan ez dut landu automata diferentzialen bitartez ereduizatutako sistemen kontrola (*Hybrid systems*). Halaber, ez dut azaldu anabasa deterministari buruzko inolako kontzepturik (*Chaos Theory*), ez eta bereizketa-teoriari buruzko tekniken berri eman ere (*Bifurcation Theory*). Bestetik, kontrol sendoa (*Robust Control*) ere ez dugu aztergai izan.

Hala ere, liburu honetan azaldutako teknikak ongi ezagutuz gero, azken teknika horiek aztertzeko gai izan behar genuke. Bestalde, ezin daiteke jakin zer nolako eragina izango duten teknika horiek hurrengo urteotako automatikan oinarritutako industrian. Izan ere, liburuan azaldu ez ditudan teknika horiek guztiak berri-berriak ez izan arren, oraindik ez dute zabalkunde handirik automatikaren munduan. Gainera, zientzialari eta ingeniari asko teknika horiek garatzen ari dira, eta oraindik ez ezin daiteke jakin noraino helduko diren horrelako tekniketan oinarritutako kontroladoreak. Ikus daitekeenez, aldatzen, hedatzen eta moldatzen ari den ezagutza-esparru bat da automatika. Liburuan azaldu ditudan teknikak benetan garrantzia duten eta guztiz garatuta dauden ezagutzak dira, eta aplikazio zuzena dute industrian.

Bestalde, liburu honetan nola edo hala parte hartu duten pertsona guztiak aipatu nahi ditut lerro hauen bitartez. Lehenik eta behin, Ander Etxeberria doktorea eskertu nahi nuke eman didan laguntzagatik. Izan ere, hari zor diot 13. kapitulua, egoera-espazioaren arloko sistemen ereduizatzen, analisi eta kontrolari buruzko gaiari dagokiona, hark sortutako txosten batean oinarrituta eginda baitago. Hari eskertu behar zaizkio, era berean, liburuak zituen akats askoren zuzenketa. Pedro Maria Iriondo Bengoa doktoreari eskerrak eman nahi nizkioke berak proposaturiko eta emandako iradokizun guztiengatik, bai eta bere adiskidetasunagatik ere; hari dagokio, halaber, kontroladoreen sintesiari zuzenduriko 9. atalaren garapena. Lerro hauen bitartez, Miren Karmele Lopez de Ipiña doktoreari bere adiskidetasuna eta ikerketa-munduan eman didan bultzada eskertu nahi dizkiot. Ez legoke ongi nire esker ona ez adieraztea liburu hau argitaratzen lagundu didaten Elhuyarko Sagrario Barandiarani eta Lurdes Ansari, eginiko zuzenketa eta moldaketengatik eta nirekin izan duten pazientzia bukaezinagatik.

Azkenik, nire sendiari zuzendu nahi dizkiot hitz batzuk. Eskerrik asko, Joxe Miel, nire begitako aita, matematikaren, fisikaren eta, oro har, zientzien edertasuna erakusteagatik eta ingeniartzari diodan zaletasuna transmititzeagatik. Eskerrak, gure ama Txarori, gure hizkuntzari, gure euskarari, eta gure euskal aberriari zor zaien maitasuna izaten erakutsi zidalako, bai eta anai-arreba guztiok euskotarrak izaten erakutsi zigulako. Amaia arreba eskertu nahi nuke ematen dizkidan animoengatik eta barre-algarengatik. Aitor anaiak zientziari buruz hitz egiteko izan ohi duen gogoia goraiatu nahi nuke. Ainhoa arreba nirekin beti izan dituen animo-hitzak ere eskertu nahi nizkioke, hark jakin badakielako zer hitz esan aldartearen hobetzeko. Asier anaia aipatu nahi dut, harekin egin baititut barrerik eta mus-jokaldirik onenak. Azkenik nire loba guztiak ere aipatu nahi ditut. Eta, bereziki, Maialeni besarkada handi bat bidali nahi diot.

Liburu hau nire bihotzeko Amaia Algorta bermeotarrari eskaini nahi diot, hark eman baitit liburu hau hasi eta bukatzeko adorea, eta hark eman baitio zentzua nire biziori. Azken batean, Amaiak oso hitzaurre ederrak eginen ditu!!

**Ekaitz Zulueta**

Gasteizen, 2006ko apirilaren 15ean

*Gure seme-alabentzat*



# 1

## Sarrera

### 1.1 AUTOMATIKAREN DEFINIZIOA ETA ORDENAGAILU BIDEZKO KONTROLA

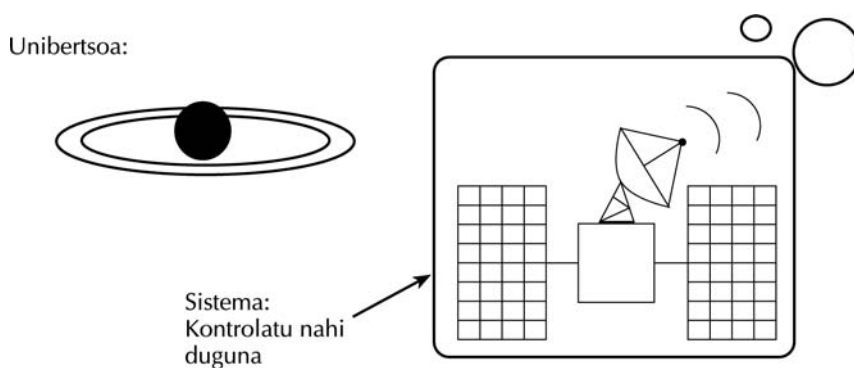
Automatika deritzo sistemen kontrola lantzen duen ingeniartzako atalari. Definizio horrekin batera beste zenbait galdera datozkigu burura. Lehenik, zer da sistema bat?, eta, gero, zer esan nahi du kontrola hitzak? Automatikaren esparruan, sistemaren kontzeptua oso garrantzitsua da. Gure ingurune fisikoaren atal bat edo zati bat besterik ez da sistema. Gure ingurune fisikoan, makina bat, hegazkin bat, auto bat edo makina-multzo bat izan dezakegu; sistema biologiko bat ere izan dezakegu. Beraz, gure ingurune fisikoko atal bat da sistema.

Automatikan sistema bat kontrolatu nahi dugunean, argi izan behar dugu zein den kontrolatu nahi dugun sistema, bai eta zein diren gure sistemaren mugak, beste ingurune fisikoetatik ongi bereizi ahal izateko. Sistemaren aukeraketa aztertu eta landu nahi dugunaren arabera da. Beraz, aplikazioaren arabera, sistema bat edo beste bat aukeratu beharko dugu.

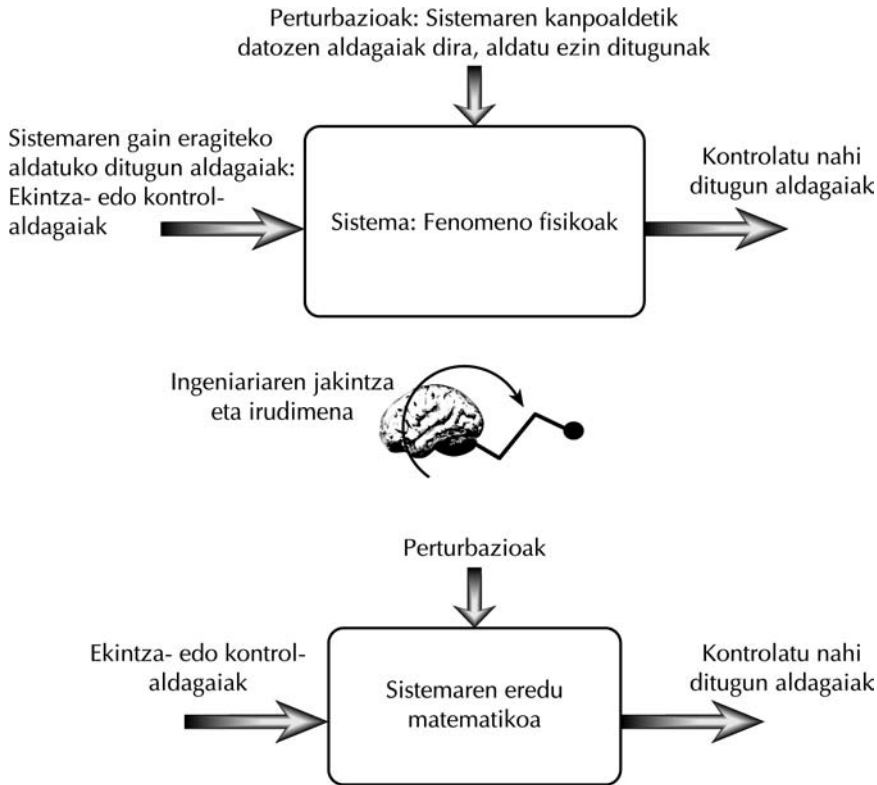
Kontrola da beste kontzeptu garrantzitsu bat. Sistemei egotzi beharreko tekniken multzoa da kontrola, sistema batek era jakin batean lan egin dezan, gizakien inolako eragin zuzenik gabe. Teknika horiek multzo fisikoak eta algoritmoak lantzen dituzte. Multzo fisikoen artean daude, adibidez, konputagailuak, zirkuitu elektronikoak, motor baten abiadura neurtzen duen egitura mekanikoa (*in.:* *encoder*); beste era batera esanda, sistema kontrolatzeko aztertu beharreko aspektu fisiko guztiak daude.

Kontrolaren barruan beste alde garrantzitsu bat ere badago: sistema baten kontrola egiteko ez da nahikoa neurgailu edota eragingailu on batzuk izatea (*in.*: *actuators*; adibidez, potentzia elektronikoaren artezgailuak *–in.*: *AC/DC converters*–, zilindro pneumatikoak, etab.); horrez gain, beharrezkoa da konputagailuan edo mikroprozesadorean sartuko ditugun programak egitea. Programa horiek kalkulatzan dute, algoritmo baten bitartez, sistemaren gainean nola eragin behar dugun. Beraz, ondorengo irudian ikus daitekeen modura, sistema da guk kontrolatu nahi dugun unibertsoa atala.

Irudian, bestalde, komunikazio-satelite bat ere ikus daiteke. Satellite hori espazioan nola higitzen den kontrolatu nahi dugu; beraz, satellite hori inguruko guztiez bereizi eta gure sistema definitzen dugu.

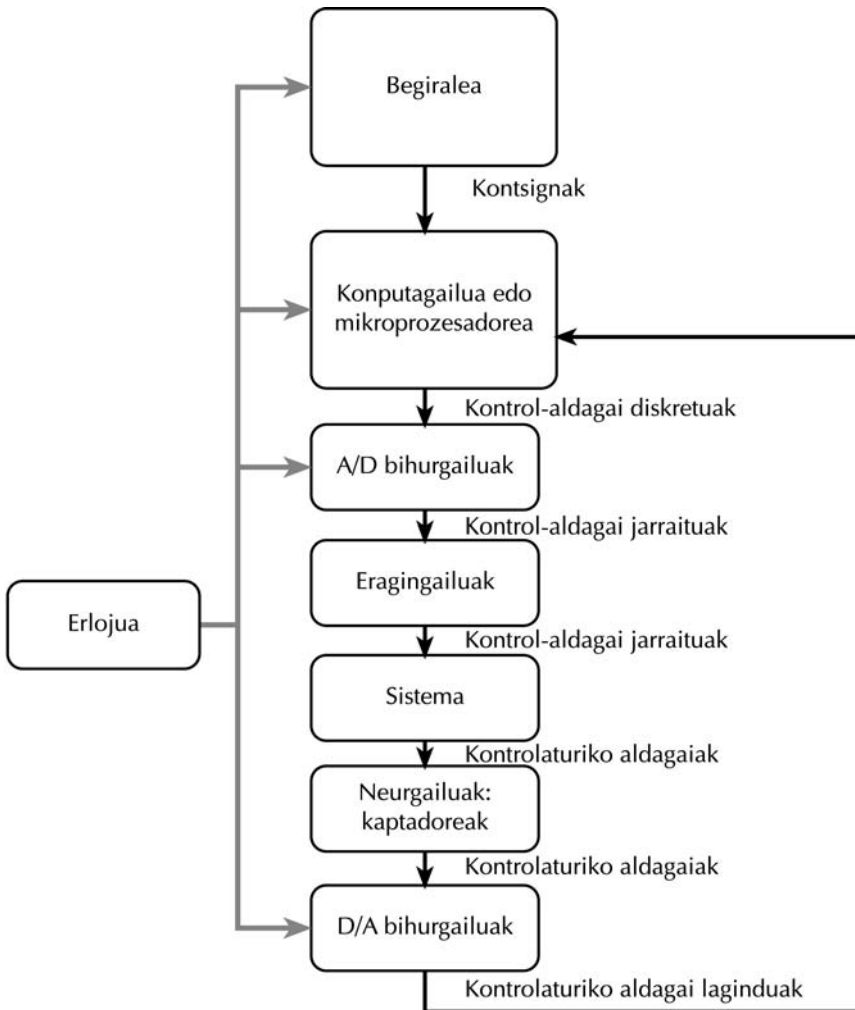


Ondoren, sisteman eragiten duten fenomeno fisiko garrantzitsu guztiak aztertuko ditugu. Horretarako, ingeniariaren jakintza eta esperientzia jokoan sartzen dira. Une horretan aukeratzen dira kontrolatu nahi ditugun aldagaiak ere. Bestalde, guk kontrolatu nahi ditugun aldagaiez gain, guk kontrola ditzakegun aldagaiak ere aztertu behar ditugu. Aldagai horien bitartez, guk kontrolatu nahi ditugun aldagaiak aldatu ahal izango ditugu. 'Sarrera-aldagai' horiei ekintza-aldagai edo kontrol-aldagai deritze. Horrez gain, perturbazioak ditugu, sistemaren inguruak sistemari berari eragiten dizkionak. Perturbazioak, ekintza- edo kontrol-aldagaiak bezala, 'sarrera-aldagaiak' dira, baina aldagai horiek normalean ezin dira neurtu era zuzen eta zehatz baten bitartez. Bestalde, ezin ditugu perturbazioak aldatu. Guk erraz aldatu ahal izango bagenu, ekintza- edo kontrol-aldagaitzat hartuko genituzke. Aldagaiak era egoki batean identifikatu eta gero, ongi aztertu behar ditugu sistemaren dinamika finkatzen duten fenomeno garrantzitsuenen nondik norakoak, hots, sistemaren lege fisikoak. Hausnarketa edo azterketa horren bidez, sistemaren irudia izango den eredu matematikoa finkatuko dugu. Hortaz, ongi bereizi behar ditugu sistema eta guk kalkulaturako eredu matematikoa. Gogoratu, sistema guretzat atal fisikoa dela, eta eredu matematikoa guk sistema horretaz dugun irudi ideal bat besterik ez dela.



Sistemaren eredu matematikoa kalkulatu eta gero, eredu horretan oinarritutako kontrola eraikiko dugu. Kontrolak bi atal nagusi ditu: batetik, kontrolaren atal fisikoa, hots, hardwarea (*fr.*: *realisation*); eta, bestetik, kontrolaren programak eta algoritmoak, hots, softwarea (*fr.*: *logicielle*). Irudian ikus daitekeenez, kontrolak kontrolatu nahi ditugun aldagaiak neurtzen ditu, eta, beste aldagai laguntzaile batzuen bitartez, neurketa bektore bat osatzen du. Normalean, kontrolatu nahi diren aldagaiak neurtzen dira zuzenean, baina sarritan hori ez da posible izaten; horregatik, aldagai laguntzaileen bidez kontrolatu nahi ditugun aldagaiak zenbatetsi eta hobeto kontrola dezakegu. Bestetik, neurketa horiek kontrolaren konputagailuan sartzen dira analogikotik digitalerako bihurgailu batzuen bitartez (*in.*: *A/D converters*). Konputagailua, normalean, zirkuitu elektroniko bat da. Zirkuitu elektroniko horrek mikroprozesadore bat du; mikroprozesadore horrek algoritmo bat exekutatzen du sarrerako datuekin. Programa horrek denbora-eten bat du (*in.*: *time interruption*), eta eten hori exekutatzen den bakoitzean, 5 kontrol-algoritmoa exekutatzen du mikroprozesadoreak. Eten horrek sistemaren datuak neurtzen ditu eta kontrol-aldagaien balioak kalkulatzeko. Etenaren bukaeran, kontrol-aldagaiak sistemari bidaltzen dizkio D/A bihurgailuen (*in.*: *D/A converters*) bitartez. D/A bihurgailuak ez du behar adina potentzia sistemaren gain, beraz, mikroprozesadore baten D/A



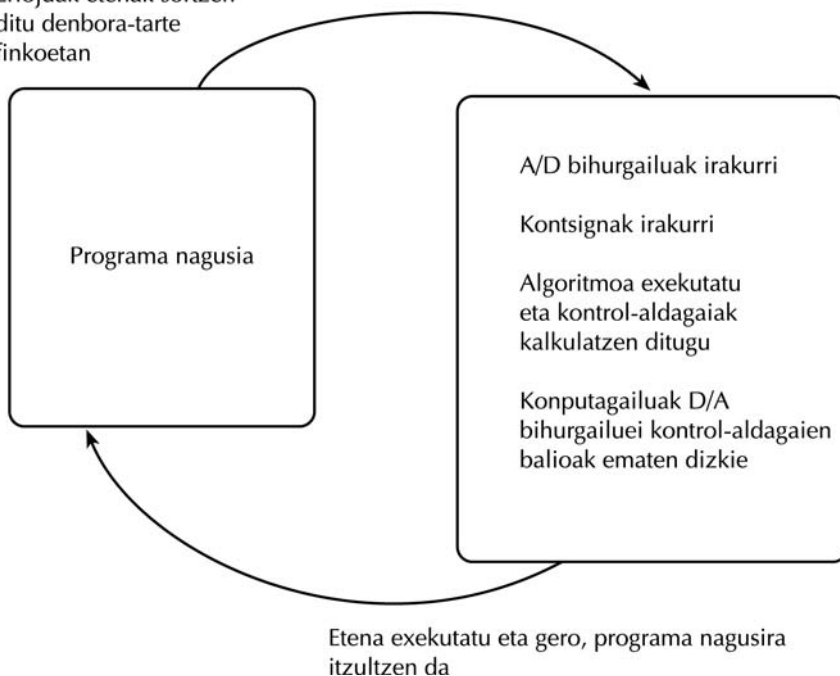


diezaiela egin behar dugu. Lan egiteko teknika horri **berrelikadura** deritzo (in.: *feedback*). Bestetik, kontsignak sortzeko begirale bat behar dugu (in.: *supervisor*); normalean, begiraleak kontsignak sortzeaz gain beste eginkizun batzuk ere badiu. Eginkizun horien artean dago sistemaren lan-egoera (adibidez, alarma-egoera, produkzio-egoera, etab.). Horrelako begiraleak dira, esate baterako, automata programagarriak (in.: *PLC*) edota zenbakizko kontrolak (in.: *CNC*). Kontsignaren kalkulua eta sistemaren kontrola konputagailu berebete egon daitezke. Gaur egun, horrelakoak egiteko, ordenagailu industrialak erabiltzen dira, eta aldagai asko kontrolatu behar ez direnerako erabaki merkeena dira. Irudian ikus daiteke nola lan egiten duen kontrol digital batek. Erlojuak (in.: *clock*) begiralea, konputagailua, eta A/D eta D/A bihurtzailuak sinkronizatzen ditu. Beraz, erlojuko denbora-tarte finkoetan,

begiraleak kontsignak ematen dizkio konputagailuari. Aldi berean, A/D bihurgailuak sisteman kontrolaturiko aldagaiak neurtzen ditu, eta konputagailuari ematen dizkio neurtutako lagin guztiak. Ondoren, konputagailuak datu horiek guztiak irakurri eta kontrol-aldagaiak kalkulatzen ditu algoritmo baten arabera. Konputagailuak balio horiek D/A bihurgailura bidaltzen dizkio, eta bihurgailuak, erlojuaren onespena duenez, balioa ateratzen du eta balio horiek mantentzen ditu erlojuaren hurrengo zikloa hasi arte. Irteera bat baino gehiago baldin badira, bihurgailu bat baino gehiago behar ditugu, edota irteera anitzeko D/A bihurgailuak. Eragingailuek, normalean, ez dute erlojuaren beharrik, baina zenbait kasutan beharrezkoa dute erlojuaren seinalea izatea eta konputagailuarekin sinkronizaturik egotea. Horren adibide ditugu potentzia elektronikoaren eragingailuak. Neurgailuetan, berriz, ez dugu A/D bihurgailuaren beharrik, neurgailuek zuzenean balio digitala ematen dutelako. Adibidez, abiadura-neurgailuek (*in.*: *encoder*) zuzenean balio digitalak ematen dituzte. Beraz, nolabait, A/D bihurgailu bat aurrezten dugu. Bestalde, argi utzi behar dugu eragingailuek eta neurgailuek berezko dinamika dituztela, eta haien dinamika kontuan eduki behar dugula kontrolaren algoritmoa egiteko. Horrez gain, eragingailuek nahitaez potentzia handia izan behar dute sistemaren gain eragiteko.

Hona hemen konputagailuaren kontrola nola exekutatzen den ulertzeko irudi bat. Hor ikus daitezke mikroprozesadorearen pausoak, erlojuaren bitartez eten bat jasotzen duenean (*in.*: *time interruption*). Normalean, erloju hori konputagailuarena izaten da. Lehenik, kontsignak eta A/D bihurgailuak irakurtzen ditu eta, ondoren, kontrol-algoritmoa exekutatzen du. Algoritmoak kontrol-aldagaiak kalkulatzen ditu eta D/A bihurgailuetara bidaltzen ditu balio horiek. Etena exekutatu ondoren, beste ataza (*in.*: *task*) batzuk egiten jarraitzen du, harik eta erlojuak hurrengo etena sortu arte. Erlojuak berriz etena sortutakoan, mikroprozesadoreak etena exekutatzen du. Berriz A/D irakurri eta berriro kalkulatzen ditu kontrol-aldagaiak D/A bihurgailuetatik ateratzeko. Ziklo hori behin eta berriz exekutatzen da.

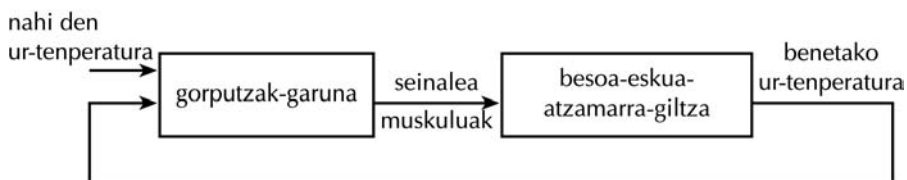
Erlojuak etenak sortzen  
ditu denbora-tarte  
finkoetan



Ikus daitekeenez, automatikak ingeniartzako esparru askori eragiten die. Batetik, mekanika eta, bestetik, elektronika eta elektrizitatea. Informatikak ere zeresan handia du automatikan, automatika digitalean batez ere. Automatikan zientzietako beste arlo garrantzitsu batzuk ere parte hartzen dute, hala nola matematikak, sistema dinamikoen teoriarik, eta fisikak, sistemen eredu matematikoak kalkulatzeko.

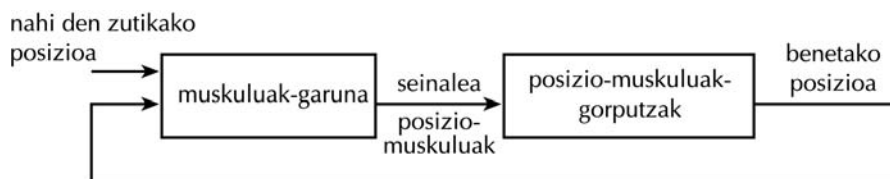
## 1.1 ariketa

Demagun dutxan zaudela eta ura tenperatura zehatz batean izan nahi duzula. Irudikatu, marrazki baten bidez, nahi dugun uraren tenperatura eskuz kontrolatzeko parte hartzen duten atalen eskema edo bloke-diagrama. Zehaztu eskemako atalen arteko aldagaiak.



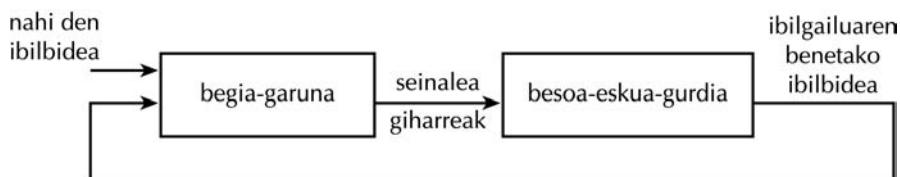
### 1.2 ariketa

Demagun etxera itzultzean etxeko atea ireki behar dugula. Horretarako, etxeko giltza ateko sarrailan sartu behar dugu. Irudikatu giltzaren posizioa kontrolatzeko parte hartzen duten atalen eskema edo bloke-diagrama. Zehaztu eskemako atalen arteko aldagaiak.



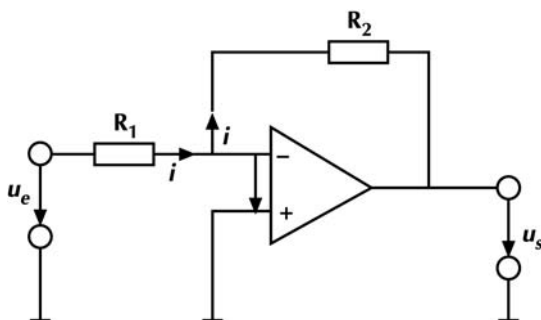
### 1.3 ariketa

Demagun gurdia bat gidatzen ari garela. Horretarako, gurdia daramaten zaldiak gidatu behar ditugu. Irudikatu gurdiaaren posizioa kontrolatzeko parte hartzen duten atalen eskema edo bloke-diagrama. Zehaztu eskemako atalen arteko aldagaiak.



### 1.4 ariketa

Demagun zirkuitu-anplifikadore bat dugula. Ondoko irudian agertzen den bezala, zirkuitu hori anplifikadore operazional baten bitartez egingo dago (*in.*: *Operational Amplifiers*). Aztertu zirkuituaren berrelikadura; eta aztertu, orobat, zirkuituaren dinamika, zirkuituaren erresistentziak ezagunak direla suposatuz. Zirkuitua deskribatzen duen ekuazioaren bloke-diagrama.



Hau dugu:

$$u_s = -Ku$$

$$u_e = R_1 i + R_2 i + u_s$$

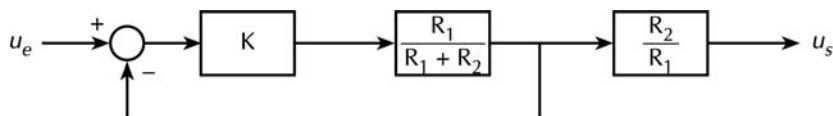
$$u_e = R_1 i + u$$

$u$  eta  $i$  desagerrarazten baditugu:

$$\frac{u_s}{u_e} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_1 + R_2}{KR_1}}$$

$$u_s = -\frac{R_2}{R_1} K \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left( u_e + \frac{R_1}{R_2} u_s \right) \text{ ekuazioak deskribatzen duen funtzioaren}$$

eskema ondorengo irudian agertzen da:



$k > 1$  denean:

$$\frac{u_s}{u_e} = -\frac{R_2}{R_1}$$

## 1.2 DENBORA JARRAITUKO SISTEMA: OINARRIZKO TEORIA

Hurrengo orrialdeetan oinarritzko automatika aztertuko dugu. Lehenik eta behin, sistema jarraitu eta linealen azterketarako hain garrantzitsua den tresna matematiko bat azalduko dugu: Laplace-ren transformatua, hain zuzen ere. Tresna horrek

sistema jarraituak eta linealak oso erraz ebazten ditu. Egia esanda, sistema horiei beste muga batzuk ere jartzen dizkiegu; adibidez, ekuazio diferentzialen koefizienteak konstanteak izan behar dutela denboran zehar edo sistemak kausalak izan behar dutela. Hau da, horrelako sistemek ezin dutela sarreraren eraginei esker beren egoera aldatu sarrerako aldaketak eman baino lehen.

Laplaceren transformatuari esker, sistema jarraituen eta linealen zenbait propietate garrantzitsu ere azaldu genitzake. Bestalde, tresna matematiko horrek dituen gauza erabilgarrienetarikoa hauexek dira:

1. Sistema lineal eta jarraituen dinamika polinomioen azterketara mugatu daitekeela.
2. Geroago ikusiko dugun transferentzia-funtzioei esker, sistemaren abstrakzio maila lortzen dugula, hau da, ez dugula sistemaren barne-muina ezagutu beharrik kontroladorea edo konpentsadorea kalkulatu ahal izateko.

### 1.2.1 Laplaceren transformatua

Laplaceren transformatua funtzio bati aplikatzen zaio, eta funtzio horretan, eskuarki, aldagai askea (aldagai aske horrek beti du izaera erreala) denbora izan ohi da. Bestalde, funtzioa gehienetan funtzio erreal bat izaten da. Dena den, funtzioak ez du zertan funtzio erreala izan, konplexua ere izan daiteke. Berez, lortutako transformatua  $F(s)$  funtzio konplexu gisa definitzen da. Transformatuan agertzen den  $s$  aldagaia konplexua da eta aldagai berri hori  $F(s)$ ren aldagai askea izango da.

Definizioa: Demagun funtzio hau dugula:  $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ . Izatez, funtzio horrek denbora izango du aldagai asketzat, eta honela izendatuko dugu:  $f(t)$ .

Laplaceren transformatua honela definituko dugu:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad s \in \mathbb{C}$$

**Laplaceren transformatuak hainbat ezaugarri matematiko ditu:**

1. **Linealtasuna.** Funtzioen konbinazio lineal baten transformatua funtzio bakoitzaren transformatuen konbinazio lineala da:

$$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 L(f_1) + \alpha_2 L(f_2)$$

$L(f(t))$  da  $f(t)$  aldagaiaren Laplaceren transformatua.

Linealtasun-ezaugarri hori integralaren linealtasun-ezaugarriari esker egiaztatzen dugu:

$$\int_0^{+\infty} [\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] \cdot e^{-st} dt = \alpha_1 \int_0^{+\infty} f_1(t) \cdot e^{-st} dt + \alpha_2 \int_0^{+\infty} f_2(t) \cdot e^{-st} dt$$

- 2. Deribatuaren transformatua.** Ezaugarri honek ere oso garrantzi handia du, ekuazio diferentzial linealetarako ezaugarri erabilgarria delako. Berez, ezaugarri honek hau dio: aldagai baten deribatuaren transformatua lehen mailako polinomio bihurtzen du.

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = s \cdot F(s) - f(0^+)$$

Egiaztapena honelakoa da; zatikako integrazioaren irizpidea erabiliz, berdintza honetara iritsiko gara:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} [f(t)] \cdot e^{-st} dt &= [u \cdot v]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} v \cdot du = \left[ e^{-st} \cdot f(t) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} s \cdot f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = \\ &= sF(s) - f(0^+) + e^{-s \cdot \infty} \cdot f(+\infty) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0^+) \quad \text{Baldin eta } s = a + ib; a > 0$$

$$u = e^{-st} \Leftrightarrow du = -s \cdot e^{-st} \cdot dt$$

$$dv = \frac{d}{dt} [f(t)] \cdot dt \Leftrightarrow v = f(t)$$

- 3. n-garren deribatuaren transformatua.** Aurreko legea era errepikakorrean erabilia egiazta daiteke ezaugarri matematiko hau. Hau da,  $n$ -garren deribatuari transformatua egokituta lortuko genuke  $sF_{n-1} - f^{n-1}(0)$ . Baina,  $F_{n-1}$  kalkulatu ahal izateko, lehen deribatuaren legea erabili beharko genuke. Beraz, aurreko ezaugarria behin eta berriz erabilia honera iritsiko ginateke:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) &= s \mathcal{L}\left(\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}\right) - f^{n-1}(0^+) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) &= s \left[ s \mathcal{L}\left(\frac{d^{n-2} f}{dt^{n-2}}\right) - f^{n-2}(0^+) \right] - f^{n-1}(0^+) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}\right) = s\mathcal{L}\left(\frac{d^{n-2}f}{dt^{n-2}}\right) - f^{n-2}(0^+)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = s^2 \mathcal{L}\left(\frac{d^{n-2} f}{dt^{n-2}}\right) - s f^{n-2}(0^+) - f^{n-1}(0^+)$$

deribatuaren ezaugarria  $n$  aldiz errepikatuz, hau lortuko dugu:

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = s^n \cdot F(s) - f^{n-1}(0) - s \cdot f^{n-2}(0) - s^2 \cdot f^{n-3}(0) - \dots - s^{n-1} \cdot f(0)$$

- 4. Integralaren transformatua.** Ezaugarri hau integralaren transformatua datza. Ezaugarri hau honela egiazta daiteke: denborarekiko integratzean, aldagai laguntzaile bat erabil dezakegu. Guk  $\tau$  erabiliiko dugu. Integrala beti era mugatua adieraziko dugu, baina hasierako balio bat egokituta. Hala, integral mugatueterako zein mugagabeetarako aplikatu ahal izango dugu. Horrenbestez, honela adieraziko dugu integrala:

$$I_y(t) = \int y(\tau) \cdot d\tau \Rightarrow \text{Integral mugagabea}$$

$$\int_{-\infty}^t y(\tau) \cdot d\tau = \int_0^t y(\tau) \cdot d\tau + \int_{-\infty}^0 y(\tau) \cdot d\tau = \int_0^t y(\tau) \cdot d\tau + k_i$$

$I_y(0)$ ,  $k_i$ : integralaren hasierako balioa

Integral mugatuaren lehen atalaren transformatua honelakoa da:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\int_0^t y(\tau) \cdot d\tau\right) &= \int_0^\infty \left(\int_0^t y(\tau) \cdot d\tau\right) \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty y(\tau) \cdot e^{-st} \cdot dt\right) d\tau = \int_0^\infty y(\tau) \left(\int_\tau^\infty e^{-st} \cdot dt\right) d\tau \\ \mathcal{L}\left(\int_0^t y(\tau) \cdot d\tau\right) &= \int_0^\infty y(\tau) \left(\frac{e^{-s\tau}}{s} - \frac{e^{-s\infty}}{s}\right) \cdot d\tau = \frac{1}{s} \int_0^\infty y(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau = \frac{\mathcal{L}(y(t))}{s} \end{aligned}$$

Izate-eremua:  $s = a + ib$ ;  $e^{-s\infty} = e^{-(a+ib)\infty} < e^{-a\infty} \in \mathbb{C} \Rightarrow a > 0$

Integral mugatuaren bigarren atala konstante bat denez, bere transformatua oso erraz kalkula daiteke:

$$\int_0^{\infty} k_i \cdot e^{-st} \cdot dt = \frac{k_i}{s} (1 - e^{-s\infty}) = \frac{k_i}{s} = \frac{\int_{-\infty}^0 y(\tau) \cdot d\tau}{s}$$

Izate-eremua:  $e^{-s\infty} \in \mathbb{C} \Rightarrow e^{-s\infty} = e^{-(a+ib)\infty} \leq e^{-a\infty} \Rightarrow a > 0$

$$\mathcal{L}\left(\int f(t) \cdot dt\right) = \frac{F(s)}{s} + \frac{k_i}{s}$$

ki: integralaren hasierako balioa

Izate-eremua:  $s = a + ib \in \mathbb{C} : a > 0$ , hots, planu konplexuko eskuinaldea

5. **Hasierako balioaren teorema.** Teorema hau garrantzi handiko ezaugarria da, sistema linealek denboran duten erantzuna kalkulatu ordez, hasierako balioa zuzenean kalkulatzeko erabil litekeelako.

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{df}{dt}\right) \cdot e^{-st} \cdot dt = sF(s) - f(0)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{df}{dt}\right) \cdot e^{-st} \cdot dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot F(s) - f(0)] = 0, \text{ baldin eta } \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{\left(\frac{df}{dt}\right)}{e^{st}} \right] = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s \cdot F(s))$$

6. **Azken limitearen teorema.** Ezaugarri honek ere garrantzi handia du. Sistema linealetan, denborak infiniturantz jotzen duenean, sistemak hartzen duen balioa kalkulatzeko aukera ematen digu, sistemaren ekuazio diferentziala ebatzi gabe. Esanak esan, ezaugarri hau egiaztatuko dugu:

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} \cdot e^{-st} \cdot dt = s \cdot F(s) - f(0^+)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot F(s) - f(0^+))$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} \cdot dt = \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t)) - \lim_{t \rightarrow 0} (y(t))$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} (sF(s) - f(0^+)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t)) - f(0^+)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot F(s)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t))$$

Dena den, ezaugarri hori egiaztatzean, aldez aurretik suposatu dugu limitearen balioa erreala dela. Baina beti ez da hori gertatzen; adibidez, sistemak infiniturantz jotzen duenean, teorema honek ez du zertan balio izan. Horregatik, kontu handia izan behar dugu teorema hau erabiltzean. Horrenbestez, sistema linealen analisia egiten dugunean emango ditugu irizpide egokiak teorema hau egoki erabili ahal izateko.

**7. Funtzio esponentzial batekiko biderketaren transformatuaren ezaugarria.**

Ezaugarri honek duen erabilgarritasuna zertan datzan ulertu ahal izateko, sistema linealen analisira jo behar dugu. Aurrerapen gisa esan daiteke funtzio esponentzialak sarritan agertzen direla sistema linealak ebazteko orduan. Ezaugarri honen garrantziaz jabetu ostean, bere egiaztatpena aurkezten dugu:

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} \cdot f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-(s+a)t} \cdot dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} \cdot f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = F(s+a)$$

$\forall a \in \Re$ ,  $F(s)$  izate-eremua  $s = u + iv : u > 0$  bada,  $F(s+a)$ ren izate-eremua  $s = u + iv : u + a > 0$

**8. Transformatuaren s aldagaiarekiko deribatuaren ezaugarria.**

Ezaugarri honek badu garrantzia, sistemen erantzuna kalkulatu ahal izateko; adibidez,  $t^n$  moduko denboraren mendeko sarreerentzako. Egiaztatpena lehen deribatua-  
rentzat egingo dugu, eta, gero, behin eta berriz errepikatuta, lege orokorra ere  
asma daiteke oso erraz.

$$\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = F(s) \Rightarrow \frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left[ \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt \right] = \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} [f(t) \cdot e^{-st}] \cdot dt$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_0^{\infty} -t \cdot e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt \Rightarrow \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$\frac{d^2 F(s)}{ds^2} = \int_0^{\infty} t^2 \cdot f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

$$-\frac{d^3 F(s)}{ds^3} = \int_0^{\infty} t^3 \cdot f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt \Rightarrow \int_0^{\infty} t^n \cdot f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

Indukzio-irizpidearen bitartez egiaztatuko dugu. Lehenik  $n$ -garren ataletik hasiko gara. Atal hori deribatzen badugu, behean dugun adierazpen matematikoa lortuko dugu  $s$  aldagaiarekiko. Bigarren urratsa  $n$ -garren atalari berriz aplikatuta,  $n+1$ -garren elementua aurkituko dugu berriro ere.  $n+1$  atala legearekin kalkulatuakaren baliokidea bada, esango dugu legea frogatuta dagoela.

$$-\frac{d}{ds} \left[ \int_0^{\infty} t^n f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt \right] = \int_0^{\infty} t^{n+1} \cdot f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt : n + 1\text{-garren elementua deribatuz}$$

lortuta

$$\int_0^{\infty} t^{n+1} \cdot f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = (-1)^{n+1} \cdot \frac{d^{n+1} F(s)}{ds^{n+1}} = -\frac{d}{ds} \left[ (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \right] =$$

$$= -\frac{d}{ds} \left[ \int_0^{\infty} t^n f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt \right] : n + 1\text{-garren elementua legeari aplikatuz berdina}$$

direnez, legea frogatutzat joko dugu.

9. **Atzerapenaren transformatuaren ezaugarria.** Ezaugarri matematiko hau ere oso erabilgarria da, atzerapenak sarritan agertzen direlako naturan. Ezaugarri honetarako, besteekin bezala, transformatuaren definizioa erabiliko dugu.  $f(t)$  funtzio baten transformatua  $F(s)$  bada eta  $f(t)$   $t_0$  denbora atzeratzen badugu, 0 eta  $t_0$  denbora-tartean  $f(t - t_0)$  funtzioak zero balioa hartzen du.

$$\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt = F(s) \Rightarrow \int_0^{\infty} f(t - t_0) \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_{t_0}^{\infty} f(t - t_0) \cdot e^{-st} \cdot dt =$$

$$= \int_0^{\infty} f(u) \cdot e^{-s(u+t_0)} \cdot du$$

$$u = t - t_0; \quad du = dt$$

$$\int_0^{\infty} f(t - t_0) \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_0^{\infty} f(u) \cdot e^{-su} \cdot e^{-st_0} \cdot du = e^{-st_0} \int_0^{\infty} f(u) \cdot e^{-su} \cdot du = e^{-st_0} \cdot F(s)$$

**10. Denbora-eskalaren aldaketaren transformatua.** Ezaugarri honek ere garrantzia du bi sistemen arteko dinamika oso abiadura ezberdinean gertatzen denean. Hona hemen ezaugarriaren froga:

$$L(f(t)) = F(s) \Rightarrow L(f(t/a)) = \int_0^{\infty} f(t/a) \cdot e^{-st} \cdot dt = a \cdot \int_0^{\infty} f(u) \cdot e^{-(sa)u} \cdot du = a \cdot F(a \cdot s)$$

$$u = t/a; \quad \forall a \in \Re \Rightarrow du = \frac{1}{a} \cdot dt$$

$$L(f(t/a)) = a \cdot F(a \cdot s)$$

**11. Laplaceren alderantzizko transformatua.** Denboraren funtzioa aldagai konplexu baten mendeko funtzio bihurtu eta gero, eta ekuazio diferentziala kalkulatu ostean, alderantzizko eragiketa egin nahiko dugu emaitza aurkitu ahal izateko. Beraz, hori egiteko, alderantzizko transformatua definituko dugu:

$$L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{st} \cdot ds \equiv f(t)$$

$\forall c \in \Re : \forall c \in F(s)$ -ren izate-eremua da

$$L(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{w \rightarrow \infty} \left[ \int_0^{\infty} \left[ \int_{c-jw}^{c+jw} f(\tau) \cdot e^{-s\tau} \cdot d\tau \right] \cdot e^{st} ds \right]$$

$$s = c + j\gamma : c = kte \Rightarrow ds = jd\gamma$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{W \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-jW}^{jW} f(\tau) \cdot e^{-(c+j\gamma)\tau} \cdot d\tau \right] \cdot e^{(c+j\gamma)t} j d\gamma$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{W \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-jW}^{jW} f(\tau) \cdot e^{-(c+j\gamma)\tau} \cdot d\tau \right] \cdot e^{(c+j\gamma)t} d\gamma$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{W \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-jW}^{jW} f(\tau) \cdot e^{-(c+j\gamma)\tau} \cdot d\tau \right] \cdot e^{(c+j\gamma)t} d\gamma$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{W \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-jW}^{jW} f(\tau) \cdot e^{(c+j\gamma)(t-\tau)} \cdot d\tau \right] d\gamma$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{W \rightarrow \infty} \int_{-jW}^{jW} \left[ \int_0^{\infty} f(\tau) \cdot e^{(c+j\gamma)(t-\tau)} \cdot d\gamma \right] d\tau$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{W \rightarrow \infty} \int_{-jW}^{jW} \left[ \int_0^{\infty} f(\tau) \cdot e^{(c+j\gamma)(t-\tau)} \cdot d\tau \right] \cdot d\gamma$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{W \rightarrow \infty} \left[ \int_{-jW}^{jW} e^{(c+j\gamma)t} \left[ \int_0^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-c\tau} \cdot e^{-j\gamma\tau} \cdot d\tau \right] \cdot d\gamma \right]$$

Fourier-en integralaren arabera, barneko integrala eta  $2\pi$  konstantearen balioa  $f(\tau)$  da. Beraz, honela garatu dezakegu:

$$f(t) = \lim_{W \rightarrow \infty} \int_{-jW}^{jW} e^{ct} \cdot f(\tau) \cdot e^{-c\tau} \cdot d\tau$$

$$f(t) = \lim_{W \rightarrow \infty} \int_{-jW}^{jW} e^{j\gamma t} \cdot f(t) \cdot e^{-c\tau} \cdot d\tau$$

## 1.2.2 Sistema linealen teoria

Atal honetan, denboran zehar era jarraituan lan egiten duten sistemak aztertuko ditugu. Beraz, gure sistemaren definizioei muga edo ezaugarri batzuk finkatuko dizkiegu:

1. Sistemak denboran zehar duen bilakaera jarraitua da, hots, sistemaren aldagai guztiak denborarekiko partzialki jarraituak izango dira. Beraz, sistema diskretuak definizio honetatik kanpo geratzen dira.
2. Sistema dinamikoak aztertuko ditugu. Sistemak estatikoak edo dinamikoak izan daitezke. Sistema estatiko baten aldiune jakin baterako irteera aldiune horretako balioaren arabera da. Beraz, horrelako sistemek ez dute inolako mendekotasunik iraganarekiko edo geroarekiko. Sistema dinamikoetan, berriz, printzipioz, aldiuneko irteera aldiune horren aurretik eta haren ostean sarrerek duten balioen arabera da. Naturan, sarritan, sistema dinamikoak gertatzen dira, eta horregatik aztertuko ditugu sistema dinamikoak. Sistema estatiko baten definizio gisa hau har dezakegu: erresistentzia elektriko baten balioa bakarrik tenperaturaren arabera da. Beraz, aldiune baten erresistentziak duen balioa aldiune horretan duen tenperaturaren arabera da. Honelako definizio matematikoa dugu sistema estatikoentzat:

$$Y(t) = \mathfrak{Z}(X(t))$$

$Y(t)$ :  $t$  aldiunean irteerak duen balioa

$X(t)$ :  $t$  aldiunean sarrerek duen balioa

Hau izango litzake sistema dinamiko baten adibide bat: gorputz baten aldiuneko tenperatura ez dago aldiune horretako bero-emariaren mende bakarrik; aldiune horren aurretik emandako beroa emariaren arabera ere. Beraz, definizio matematikoetan honelakoaz baliatuko gara:

$$\{Y(t)\} = \mathfrak{Z}\{X(t)\}$$

$\{Y(t)\}$ : irteerak  $t$ -n hartzen dituen balio guztien multzoa

$\{X(t)\}$ : sarrerek  $t$ -n hartzen dituen balio guztien multzoa

3. Sistema dinamiko baten irteeraren balioak  $t$  aldiunerako, dena den,  $t$  aldiune horren osteko sarreren arabera izan daitezke. Horrelako sistemei ez-kausal deritzegu, irteerak sarrerek eragin baino lehen erantzuten duelako. Naturan ez dago horrelako sistemarik. Dena den, gerta daiteke sisteman sartu baino lehen sistemaren sarrera jakitea. Adibide garbiena honako hau da: discman askok aurrerapen handiarekin irakurtzen dute jo behar duen soinua. Beraz, soinua jo baino lehen sistema presta daiteke; horrenbestez, alde horretatik, discman baten soinu-sistemak sistema ez-kausal baten antzera jokatuko luke.
4. Sistemen linealtasuna da finkatuko dugun beste ezaugarri garrantzitsu bat. Sistema linealak garrantzi handiko ezaugarri bat dute: sarrera bakoitzari

dagozkion irteeren konbinazio lineala da sarreren arteko konbinazio lineal baten araberako erantzuna. Matematikoki honela adieraz daiteke:

$\{x_1(t)\}$ : sarrera edozein denbora-funtziorekiko

$\mathfrak{I}(\{x_2(t)\})$ : sarrera edozein denbora-funtziorekiko

$$\alpha_1 \mathfrak{I}(\{x_1(t)\}) + \alpha_2 \mathfrak{I}(\{x_2(t)\}) = \mathfrak{I}(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)): \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{R}$$

5. Denboran zehar parametroak finkoak dituen sistema bat edota denborarekiko aldakorra den z sistema: esaten da sistema dinamiko bat ez dela aldakorra denborarekiko, baldin eta,  $x(t)$  sarrera  $\tau$  denbora atzeratuz gero,  $x(t)$ ri dagokion  $y(t)$  erantzuna ere  $\tau$  denbora atzeratzen bada. Era matematikoa batean esanda:

$$\{x(t)\} \Rightarrow \{y(t)\} = \mathfrak{I}(\{x(t)\})$$

$$\forall \tau \in \mathfrak{R} : \{x(t - \tau)\} \Rightarrow \{z(t)\} = \mathfrak{I}(\{x(t - \tau)\})$$

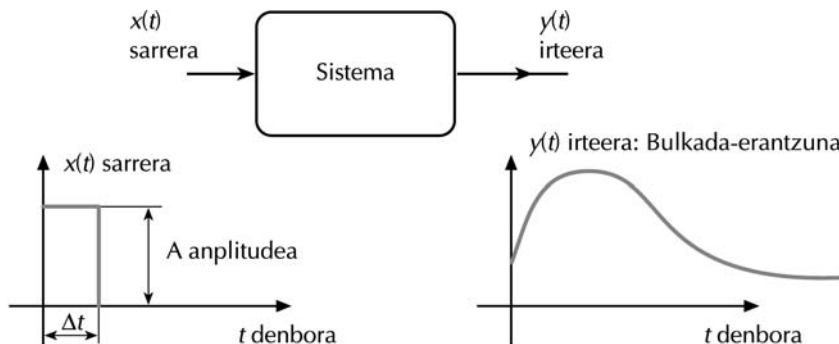
Aldakorra bada  $z(t) = y(t - \tau)$

### 1. Denbora jarraituko sistema lineal baten konboluzioa:

Demagun sistema dinamiko bat dugula; sistemak kondizio hauek betetzen ditu:

1. Sistema lineala da.
2. Denbora jarraitukoa da.
3. Ez da aldakorra denborarekiko.

Hiru kondizio horiek betetzen badira, sistemaren bulkada-erantzuna definituko dugu. Bulkada-erantzuna hau da:  $\Delta t$  denbora-tarte batean eta sarrera A anplitudeko sarrera angeluzuzen bat izanez gero, sistemak erantzun hau izango luke:  $G(t, \Delta t, A)$ . Beraz, sistemaren ezaugarri bat da. Irudian ikus daiteke sarrera horren itxura.



Orain, demagun bulkada-sarrera bat izan beharrean edozein  $x(t)$  sarrera dugula. Bulkada-sarreraren bitartez egin genezake sarrera horren hurbilketa. Zenbat eta txikiago izan  $\Delta t$  bulkada, orduan eta hobe izango da hurbilketa hori.  $x(t)$ ren hurbilketaren sistemaren erantzuna kalkulatzeko badugu, ondorengo batukariak lortuko ditugu. Bestetik,  $B(t, \Delta t, k)$  funtzioa sistemaren sarrera izango balitz, sistemak izango lukeen irteera  $G(t, \Delta t, k)$  izango litzateke. Azkenik,  $x(t)$  sarreraren hurbilketaren erantzuna kalkulatu dugu bukaeran.

$$\begin{aligned}\hat{x}(t, \Delta t) &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \frac{x(k\Delta t)}{\Delta t} \text{Bulkada} \left( \frac{t - k \cdot \Delta t}{\Delta t} \right) \cdot dt \Rightarrow x(t) = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \hat{x}(t, \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau\end{aligned}$$

$$\text{Bulkada}(t) \begin{cases} 1 : 0 \leq t \leq 1 \\ 0 : -\infty \leq t \leq 0 \text{ edo } 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

$$\delta(t) \begin{cases} \infty : t = 0 \\ 0 : \forall t \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

$$B(t, \Delta t, k) = \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \frac{1}{\Delta t} \text{Bulkada} \left( \frac{t - k \cdot \Delta t}{\Delta t} \right) \cdot dt \Rightarrow G(t, \Delta t, k) = \mathfrak{Z}(B(t, \Delta t \cdot k))$$

$$\begin{aligned}\hat{x}(t, \Delta t) &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k\Delta t) \cdot B(t, \Delta t, k) \Rightarrow \hat{y}(t, \Delta t) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k\Delta t) \cdot \mathfrak{Z}(B(t, \Delta t, k)) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k\Delta t) \cdot G(t, \Delta t, k) \\ \hat{y}(t, \Delta t) &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k\Delta t) \cdot G(t, \Delta t, k)\end{aligned}$$

$G(t, \Delta t, k)$  funtzioa horrela idatz daiteke sistema denborarekiko aldakorra ez delako. Beraz, sarrera atzeratu baten erantzuna, erantzunaren atzerapena da.

$$G(t, \Delta t, k) = G(t - k\Delta t, \Delta t, 0)$$

Erantzunaren hurbilketan azken ekuazio hau sartuz gero, eta  $\Delta t$  zerorantz jotzen duenean limitea kalkulatzuz, berdintza hau lortuko dugu. Integral honi konboluzio deritzo, eta  $g(t)$  funtzioa sistemaren bulkada-erantzuna da.

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k \cdot \Delta t) \cdot G(t - k \cdot \Delta t, \Delta t, 0) \Rightarrow y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k \cdot \Delta t) \cdot G(t - k \cdot \Delta t, \Delta t, 0)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau$$

## 2. Konboluzioaren Laplaceren transformatua:

Demagun kondizio hauek betetzen dituen sistema dinamiko bat dugula:

$$L(y(t)) = \int_0^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \right] e^{-st} dt$$

Sistemak  $t < 0$  aldiunerako  $x(t) = 0$  balioa hartzen badu, konboluzioa honela sinplifika daitekete. Integrazio-aldagaien ordena aldatzean, suposatuko dugu  $t < 0$  aldiunerako  $g(t) = 0$  dela, hots, sistema kausala dela suposatuko dugu.

$$L(y(t)) = \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} x(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \right] e^{-st} dt \Rightarrow$$

$$L(y(t)) = \int_0^{+\infty} x(\tau) \left[ \int_0^{+\infty} g(t - \tau) e^{-st} dt \right] d\tau \Rightarrow$$

$$u = t - \tau$$

$$L(y(t)) = \int_0^{+\infty} x(\tau) \left[ \int_0^{+\infty} g(u) e^{-s(u+\tau)} du \right] d\tau \Rightarrow$$

$$L(y(t)) = \int_0^{+\infty} x(\tau) \left[ \int_0^{+\infty} g(u) e^{-su} du \right] e^{-s\tau} d\tau \Rightarrow$$

$$L(y(t)) = \int_0^{+\infty} x(\tau) L(g(t)) e^{-s\tau} d\tau \Rightarrow$$

$$L(y(t)) = L(g(t)) L(x(t))$$

Beraz, konboluzioaren Laplaceren transformatua transformatuen biderkadura da.

$$Y(s) = G(s) X(s)$$

Sistema baten bulkada-erantzunaren Laplaceren transformatuari sistemaren transferentzia-funtzio deritzogu.

---

# 2

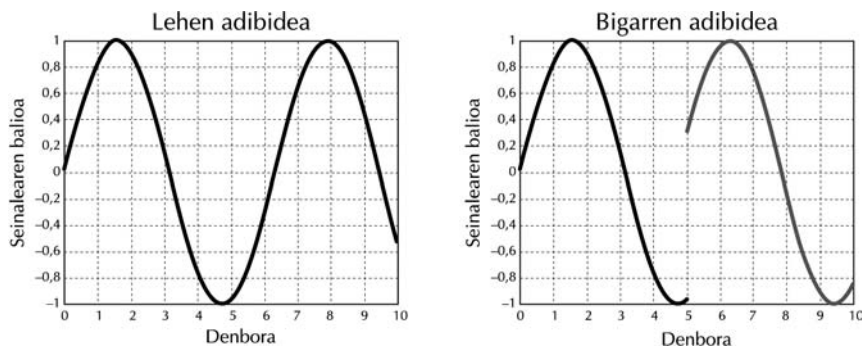
## Laginketa

### 2.1 SARRERA

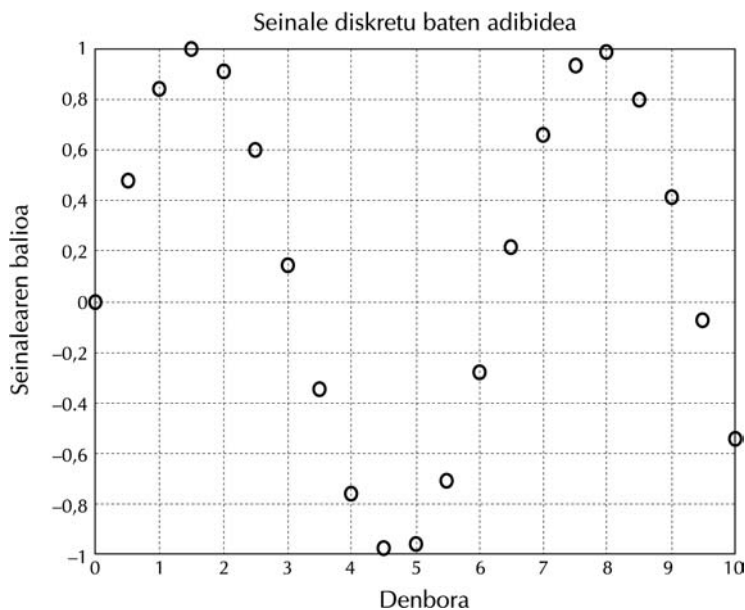
Seinale-tratamenduan, seinale jarraitu bat lagintzea da seinale jarraitu horren neurketa multzo batez ordezkatzeta. Lagin multzo horrek seinale diskretu bat eratzen du. Dena den, seinale diskretu batek, berez, ezin dio sistema jarraitu bati eragin, sistema jarraitu baten sarrerak beti definituta egon behar dutelako. Egokitze atal bat behar dugu, beraz, seinale diskretu batetik seinale jarraitu bat sortu ahal izateko. Egokitze-eragiketa horri birsortze deritzo. Birsortzea D/A bihurgailu elektronikoen bitartez lortu ohi da. Dena den, potentzia eta/edo energia handiko sistemetan maiztasun-bihurgailuen bitartez egiten da transformazio hori (motorren eta sorgailu elektrikoaren kontrolak, adibidez).

### 2.2 LAGINKETA

**Seinale jarraitu** bat (edo denbora erreal jarraituaren gaineko seinale bat) funtzio bat da, eta matematikoki honela definituko dugu:  $w : \Re \Rightarrow \Re$ . Seinale horiek sistemen aldagai fisikoen antzeko jarrera dutelako esaten dugu jarraituak direla. Beraz, seinale jarraitu batek ez du zertan izan matematikoki funtzio jarraitu bat; nahikoa da denboran zehar partzialki jarraitua izatea. Horregatik, denbora erreal jarraituaren gaineko funtzioaren izena egokiagoa da, baina, izen hori luze samarra denez, seinale jarraituaren izendapena erabiliko dugu.



**Seinale diskretu** baten definizioa oso bestelakoa da; berez, seinale jarraitu batena baino errazagoa da. Demagun zenbaki osoen multzoa  $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .  $Z$  multzoaren azpimultzo bat definitzen dugu  $\{t_k : k \in Z\}$ . Seinale diskretu bat honela definituriko funtzio bat da:  $w : \{t_k : k \in Z\} \Rightarrow \mathfrak{R}$ . Funtzio hori aldiune jakin batzuetan bakarrik definiturik dago, hots,  $t_k$  aldiunetan soilik.



**Seinale digitala** seinale diskretu bat da, non  $n$  balio errealeko multzo batetik irudiak soilik hartu ditzake,  $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, \dots, w_n\} \subset \mathfrak{R}$ . Matematikoki, beraz, honela idatz dezakegu seinale digital bat:  $w : \{t_k, k \in Z\} \Rightarrow \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$ . Horrelako funtzioetan kuantifikazio-egoera bat gertatzen da. Ezin dira adierazi segidan dauden bi irudien artean dauden balioak, balio-tarte bat irudi bakar batekin adierazi behar baitugu. Horrelako kuantifikazio-efektuak laginketa eta sortze-eragiketetan du eragina batez ere, baita eragiketa matematikoetan ere

mikroprozesadoreen bitartez egiten direnean. Sarritan, jarraian dauden bi irudien arteko kendura konstantea da  $\{w_{i+1} - w_i, i = 1, 2, \dots, N - 1\}$ , eta kendura horri kuantifikazio deritzogu.

**Seinale konplexuak** ere definituko ditugu. Seinale konplexu **jarraitua** da zenbaki errealetatik lortutako zenbaki konplexuen gaineko funtzioa,  $w: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{C}$ . Honela defini dezakegu seinale konplexu eta **diskretua**:  $w: \{t_k: k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow \mathbb{C}$ . Azkenik, honela definituko dugu seinale konplexu eta **digitala**:  $w: \{t_k: k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subset \mathbb{C}$ .

$w(t)$  seinale jarraitu baten laginketa da seinale jarraitu horren seinale diskretua. Aurretik esan dugunez, seinale diskretu bat zenbaki-serie bat da,  $\{w(t_k): k \in \mathbb{Z}\}$ . Dena den, seinale diskretu bat adierazteko, honelako idazkera erabiliko dugu:  $\{w(t_k)\}$ .  $t_k$ aldiuneei laginketa-periodo deritze. Laginketa-periodoen arteko tartea berdina baldin badira, **laginketa trinko** deritzogu.  $h$  **laginketa-tartea** bi laginketa jarraituren arteko aldea da  $w_{i+1} - w_i = h = kte : \forall i \in \mathbb{Z}$ . Denboraren adierazpena honela adieraz daiteke:  $t = kh : k \in \mathbb{Z}$ . **Laginketa-maiztasuna**,  $f_e = 1/h$ , ere definituko dugu. Azkenik, **laginketa-pultsazioa** ere finkatuko dugu:  $\omega_e = 2\pi f_e$ .

## 2.3 LAGINKETA-TEOREMA, SHANNON-EN TEOREMA

Seinale jarraitu bat lagintzean, eta seinale diskretu bat eratzean, ikusten dugu informazio-galera bat gertatzen dela. Bestalde, seinale jarraitu bat maiztasun handiago batez laginduz gero, informazio-galera hori txikiagotu egiten da. Dena den, badakigu seinale baten behar adinako lagina nahikoa izanez gero ez dugula laginketa azkarrago baten beharrik. Adibidez seinalea zuzen bat besterik ez bada, nahikoa izango da bi neurketa egitea, ezta? Beraz, nolabait, seinale baten informazio osoa hautemateko, ez da laginketa azkar bat behar; hots, laginketa-maiztasun batetik aurrera, sarritan alferrik ari gara. Horrenbestez, irizpide bat behar dugu laginketa-maiztasuna finkatu ahal izateko; Shannon-en laginketa-teoremak emango digu irizpide hori.

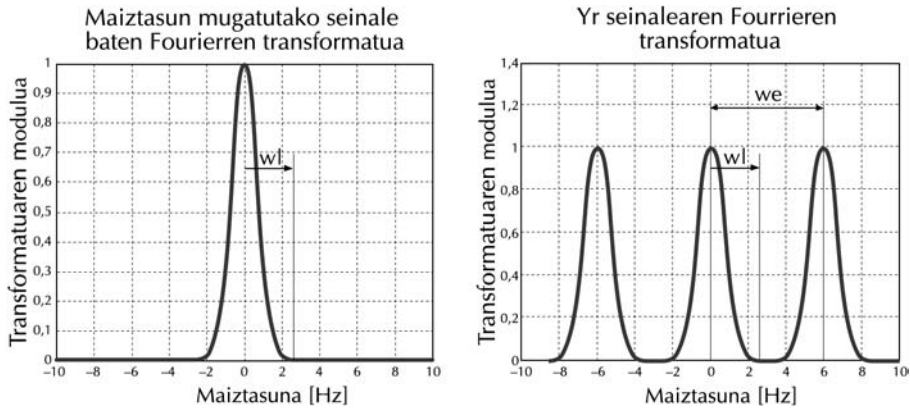
Jo dezagun  $w(t)$  seinale jarraitu bat dugula eta seinale horri  $W(\omega)$  Fourierren transformatua dagokiola. Fourierren alderantzizko transformatua honelakoa dugu:

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} W(\omega) \cdot d\omega \quad (2.2)$$

Orain,  $W_e(\omega)$ , funtzio errepikakorra definitzen dugu. Kontuan izan behar dugu funtzio hori konplexua dela, eta bere errepikatze-tartea (periodoa)  $\omega_e$  dela.

$$W_e(\omega) = \frac{1}{h} \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} W(\omega + i\omega_e)$$

Seinale hori errepikakorra izanik, eta, aldi berean, konplexua, Fourierren serieko garapen batez adieraz dezakegu. Baina, horretarako, nahitaezkoa da seinalearen  $W_e(\omega)$  Fourierren transformatuaren goi- eta behe-borneak  $\pm\omega_0$   $W_e(\omega)$ ren errepikapen-tartea baino bi aldiz txikiagoa izatea. Azken kondizio hori hobeto azalduko dugu urrats hauetan.



$$W_e(\omega) = \frac{1}{h} \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} W(\omega + i\omega_e) = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} c_k \cdot e^{-jkh\omega} \quad (2.3)$$

non Fourierren serieko garapenaren  $c_k$  terminoak honako adierazpen hau baitute:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_e}{2}}^{\frac{\omega_e}{2}} e^{jkh\omega} W(\omega) d\omega$$

Bestalde  $W(\omega)$ ren Fourierren alderantzizko transformatua kontuan izanez gero (ikus 2.2. formula), honelako berdintza egin ahal izango genuke:

$$c_k = w(kh) \quad (2.4)$$

$h$  laginketa-tartea izanik,  $t = kh$ , egin dugu  $k \in N$ , zenbaki osoen multzora mugatuz. Bestalde,  $c_k$ -ren adierazpen berria (2.4), (2.5) formulatan ordezkatzeko dugu.

$$W_e(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} w(kh) \cdot e^{-jkh\omega} \quad (2.5)$$

Orain,  $W_e(w)$ ren Fourierren alderantzizko transformatua egingo dugu  $-w_e$ -tik  $w_e$ -ra. Hala,  $w(t)$  seinalearen adierazpen matematikoa lortu ahal izango dugu.

$$\begin{aligned}
 w(t) &= \frac{h}{2\pi} \int_{-w_e/2}^{w_e/2} e^{j\omega t} \cdot W_e(w) \cdot dw = \frac{h}{2\pi} \int_{-w_e/2}^{w_e/2} e^{j\omega t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} w[kh] e^{-j\omega(kh)} \cdot dw = \\
 &= \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \int_{-w_e/2}^{w_e/2} w[kh] e^{j\omega(t-kh)} \cdot dw \Rightarrow \\
 w(t) &= \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} w[kh] \int_{-w_e/2}^{w_e/2} e^{j\omega(t-kh)} \cdot dw = \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} w[kh] \frac{e^{j\omega(t-kh)}}{j(t-kh)} \Bigg|_{w=-\frac{w_e}{2}}^{\frac{w_e}{2}} \Rightarrow \\
 w(t) &= \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} w[kh] \frac{e^{j\frac{w_e}{2}(t-kh)} - e^{-j\frac{w_e}{2}(t-kh)}}{j(t-kh)} = \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} w[kh] \frac{j2 \sin\left(\frac{w_e}{2}(t-kh)\right)}{j(t-kh)} \\
 w(t) &= \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} w[kh] \frac{\sin\left(\frac{w_e}{2}(t-kh)\right)}{\frac{(t-kh)}{2}} = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} w[kh] \frac{\sin\left(\frac{w_e}{2}(t-kh)\right)}{\frac{w_e}{2}(t-kh)}
 \end{aligned}$$

Ikus daitekeenez, seinale osoa sor dezakegu berriz, seinalearen laginketa bat eginez gero, eta baldin eta seinalearen Fourierren transformatua maiztasunean mugaturik baldin badago.

**Shannonen teorema:** Beraz, seinale jarraitu baten laginketak ez du informaziorik galtzen, baldin eta laginketa-maiztasuna seinale jarraitu horren Fourierren transformatuaren maiztasun maximoa baino 2 aldiz handiagoa bada; laginketan lortutako balioen bitartez, seinalea sor daiteke berriz. Horretarako, eraikitzaile hau izan behar dugu:

$$w(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} w[kh] \frac{\sin\left(\frac{w_e(t-kh)}{2}\right)}{\left(\frac{w_e(t-kh)}{2}\right)} \quad (2.6)$$

(2.6) formularen adierazitako eraikitzailea erabil liteke. Baina, hala ere, muga batzuk baditu, eta agerian utzi behar ditugu jarraitu baino lehen:

1. Shannonen teoremak dio seinale jarraituak espektro mugatu bat izan behar duela (hau da, seinale jarraituaren Fourierren transformatuaren modulua). Horrek esan nahi du seinale jarraituaren espektroak nulua izan behar duela maiztasun batetik gora. Izan ere, muga horren bikoitza behar du izan laginketarako maiztasunak. Baina seinale periodikoak ez diren seinale guztien espektroak ez dira maiztasun mugatukoak. Dena den, seinale ez-periodikoen espektroa txikitzen doa maiztasuna igo ahala. Bestetik, maiztasun batetik behera egon ohi da seinalearen atal garrantzitsuena, eta maiztasun handietan zarata elektrikoak agertzen dira beti. Beraz, normalean, interesa duen maiztasun-tartea mugatua izaten da. Horrenbestez, seinaleari maiztasun handiko zarata elektrikoak kentzeko, laginketa-atala baino lehen iragazki analogiko bat jarri behar dugu. Hala, maiztasun handiko perturbazioak kendutakoan, Shannonen teoremaren kondizioak modu egokian betetzea lortuko dugu. Beste hitz batzuetan esanda, "Aliasing" efektua desagerraraziko dugu.
2. Shannonen teoremak ematen digun eraikitzaileak (2.6 formula) muga handi bat du: edozein  $t$  aldiunetan  $w(t)$  seinalearen balioa lortzeko lagindutako balioen bitartez, lehenik seinalearen lagin guztiak behar ditugu. Berriro 2.6 formulari erreparatuz gero, ikusiko dugu  $k$  minus infinitutik plus infinitura doala. Beraz, edozein  $t$  aldiunetan, seinalearen balioa kalkulatzeko, nahitaez  $t$  baino lehenagoko eta geroagoko  $w[kh]$  balioak behar ditugu. Beraz, eraikitzaile hori ez da kausala.

## 2.4 ANTIALIASING IRAGAZKIA, LAGINKETA-MAIZTASUNA AUKERATZEA ETA SAMPLING&HOLD LAGINKETA-ZIRKUITUA

Eskuarki, lagindu beharreko seinale jarraitu guztiak ez dira periodikoak, eta seinalearen espektroa ez da mugatzen. Hala ere, seinalearen espektroaren atal garrantzitsuena maiztasun-tarte batean dago. Bestalde, seinale jarraitu guztietan zarata elektrikoa agertzen da maiztasun handienetan; hau da, seinalearentzat garrantzitsuena ez den maiztasun-tartean perturbazioak izaten ditugu. Beraz, Shannonen teoremaren kondizioak betetzeko, laginduko dugun seinale jarraituaren zarata eta informazio gabeko maiztasun-tartea finkatu beharko ditugu. Maiztasun-tarte hori,  $w_0$ , rad/s edo hertzetan adierazi ahal izango da. Beraz,  $w_0$  maiztasuna kalkulatu eta gero, iragazki analogiko batean sartuko dugu seinale jarraitu hori. Iragazki horren artean,  $w_i(t)$  seinale jarraitu bat lortuko dugu. Iragazkiko artean seinale horrek ez du zaratarik izango eta  $w(t)$  sarrerako seinalearen maiztasun-tarte garrantzitsuena izango du espektrotzat. Beraz,  $w_i(t)$  seinaleak Shannonen teoremaren kondizioak beteko ditu. Horrenbestez, seinale hori laginduko dugu.

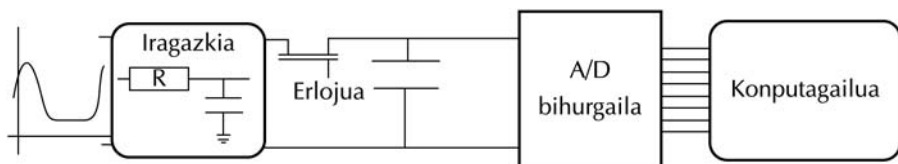
Badakigu Shannonen teorema betetzeko  $w_0$  maiztasuna baino bi aldiz maiztasun handiago batez lagintzea nahikoa izango genukeela  $w(t)$  seinalea berriz sortzeko. (2.6) formularen bitartez egin daiteke. Baina automatikako aplikazioetan ez dago (2.6) formula erabiltzerik, (2.6) eraikitzailea ez baita kausala. Hau da, ez baititugu  $t$  aldiuneko  $w(t)$  seinalearen balioa lortu ahal izateko nahitaez  $t$  aldiunearen ostean datozen laginak. Beste era batera esanda, automatikan, kontrolerako erabiltzen dugun algoritmoak, neurtu bezain laster, seinaleak atera behar ditu; eta  $t$  aldiunean (2.6) eraikitzailea erabiliko bagenu, ezingo genituzke seinale jarraituak atera,  $t$  baino geroago neurtuko dugun baliorik ez baitugu. Beraz, arazo hori saihesteko, erabaki hau hartu behar da: laginketa-maiztasuna handitu. Hala,  $w(t)$  seinaleari buruz informazio handiago izango dugu. Praktikan erabili ohi den legea honelakoa da:

1.  $w_0$  bada,  $w(t)$  seinalearen maiztasun-tarte garrantzitsuena da. Maiztasun txikiei igarotzen utziko dien iragazki bat jarriko dugu; iragazki horren ebakitze-maiztasuna  $w_0$ , izango da.
2. Iragazkitik irteten den  $w(t)$  seinalea laginduko dugu. Baina Shannonen teoremak finkatzen duen laginketa-maiztasun minimoa baino maiztasun handiagoa erabiliko dugu. Beraz,  $w_e \geq 2w_0$  izan behar du. Normalean, 10 aldiz edo 20 aldiz  $w_0$  hartu ohi da. Automatikan,  $w_0$  maiztasun-muga hori kontrolatzen ari garen sistemen dinamikak finkatzen du.

Laginketa-maiztasuna eta sarrerako "Antialiasing" iragazkia jarri eta gero, laginketa-zirkuitua aztertu behar dugu.  $w(t)$  seinalea lortu eta gero, seinale analogiko hori balio digital bihurtzeko zirkuitu berezi bat erabili behar dugu. Zirkuitu horiek A/D bihurgailuak dira (*in.: Analog/Digital converters*). Normalean, lagin bakoitzeko 8, 12 edo 16 biteko balio digitalak ematen dituzte A/D bihurgailuek. Zirkuitu horien sarreran, hala ere, zirkuitu garrantzitsu batek egon behar du: S&H zirkuituak (*in.: Sampling and Hold*). A/D bihurgailuek seinale analogiko bat balio digital bihurtzeko, sarrerako seinale analogikoak aldatu gabe egon behar du denbora-tarte batez. Baina seinale analogikoa etengabe aldatzen ari denez, seinalea laginketa-tartean geldirik edukiko duen zirkuitu laguntzaile bat behar dugu; S&H delako zirkuitua da zirkuitu hori. Beraz, zirkuitu horiek seinaleari eutsi egiten diote une zehatz batean, eta ondoren A/D bihurgailuak, balio finko horren bitartez, balio digital bat ematen du. S&H zirkuitua hobeto ulertzeko, ikusi ondorengo irudia.

S&H zirkuitu batek etengailu modura lan egiten duen transistore bat du. Transistore hori MOSFET edo JFET motakoa da. Transistorea itxi egiten da kontroladorearen erlojuarekin batera, eta seinale analogikoak kondentsadorea kargatzen du. Kondentsadore hori bizkor kargatzen da eta seinalearen tentsioarekin kargaturik geratzen da. Ondoren, etengailua berriz ireki egiten da, eta seinale analogikoak ezin du kondentsadoreko tentsioa aldatu. Kondentsadoreak ez du bere

tentsioa aldatuko, harik eta transistorea berriz ixten den arte. Bitartean, kondentsadoreko tentsioa aldatzen ez denez, tentsio horren balio digitala kalkulatzeko astia du A/D bihurgailuak. Programak balio digital hori irakurriko du, konputagailuan edo mikroprozesadorean, irteerako aldagaia kalkulatu ahal izateko. Kontroladore digitalaren erlojuarekin batera transistorea berriz itxi egingo da, eta kondentsadoreak berriz seinale analogikoaren tentsioa hartuko du.

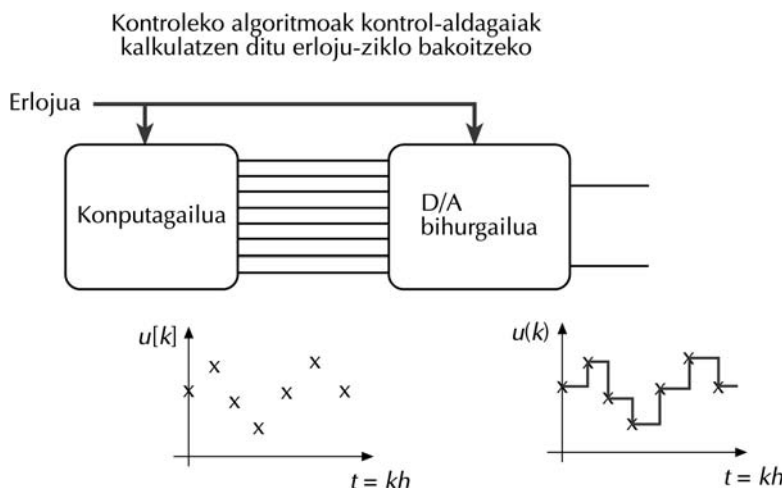


Berriz aipatu beharra daukat S&H zirkuitu honek AntiAliasing iragazki bat duela. Iragazki hori analogikoa da, eta transistorea jarri baino lehen jartzen dugu. Iragazki horren helburua da, lehen esan dugun legez, maiztasun handiko zarata kentzea. Horrez gain, iragazkiak Shannonen teoremaren kondizioak hobeto betetzen laguntzen du.

## 2.5 SEINALE JARRAITUEN SORRERA, D/A ERAGIKETA

Lehen atal honetan ongi aztertu dugu laginketa; S&H zirkuituaren bitartez eta A/D bihurgailuen bitartez seinaleak nola lagindu daitezkeen aztertu dugu. Orain, seinale diskretu batetik nola lor daitezkeen seinale jarraitu bat aztertu behar dugu; seinale jarraituen sorrera edo D/A eragiketa deritzogu eragiketa honi. Berez, konputagailuak kontrol algoritmoa exekutatuakoa, sistemari bidali behar dizkio kontrol-aldagaiak. Aldagai diskretu bat aldagai jarraitu bihurtzeko, D/A bihurgailu bat erabiltzen dugu. Dena den, eragiketa hori egiteko era asko daude, eta liburu honetan gehien erabiltzen diren bi era baino ez ditugu azalduko.

Seinale diskretu bat seinale jarraitu bihurtzeko, bide hau bururatuko zaigu lehenik: (2.6) formula erabilita, seinale jarraitu bat sortzea. Dena den, lehen aipatu dugun legez, formula hori erabiltzeko, seinalearen lagin guztiak izan behar ditugu nahitaez. Hori ezinezkoa da, kontrol-aldagaien lagin guztiak ez ditugulako. Izan ere,  $t_k$  aldiunean ez ditugu  $t_k$  aldiunea baino geroagoko kontrol-aldagaien balioak, kontrolaren algoritmoak oraindik ez baititu kalkulatu; horrenbestez, ezin dugu (2.6) formula erabili. Beraz, irtenbide bakarra da dugun seinale diskretuaren laginetan oinarritutako seinale jarraitu bat sortzea. Bestalde, eragiketa horrek elektronikoki egiteko erraza izan behar du. Ondorioz, hurbilketa polinomialak erabiliko ditugu.



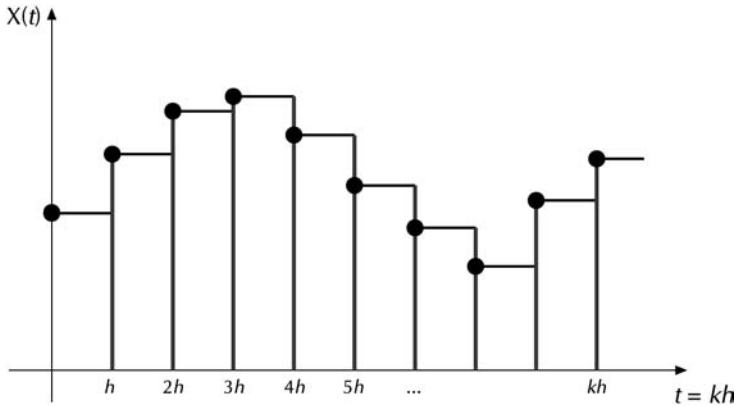
### 2.5.1 0 mailako polinomioen bidezko D/A eragiketa

Eragiketa mota hau da automatikan gehien erabiltzen dena. Berez, D/A eragiketa mota guztietatik hau erabiliko dugu liburuko ondorengo atal guztietan. Ia A/D bihurgailu komertzial guztiek metodo honen arabera lan egiten dute. Mota honetako D/A bihurgailuak ZOH motako bihurgailuak dira (*in.*: *Zero order holder*). Sortze-eragiketa honek “0” mailako polinomioen bitartez sortzen ditu seinale jarraituak. Matematikoki honela defini dezakegu: demagun  $\{x[k]\}$  seinale diskretua eta  $h$  erlojuaren periodoa ditugula; sortutako  $x(t)$  seinaleak adierazpen matematiko hau izango du:

$$\{x[k]\} \Rightarrow x(t) = x[k] \quad (2.7)$$

$$t \in [kh, kh + h)$$

Beraz, seinale diskretua seinale analogiko bilakatzen da maldarik gabeko zuzenki bitartez. Erlojuaren periodoaren hasieran, seinalearen balioa finkatzen da, tentsio baten bitartez. Ondoren,  $h$  periodo osoan zehar balioa konstante mantentzen da. Erlojuaren beste ziklo bat hasitakoan, seinale diskretuaren balioa ateratzen dugu, eta ez dugu tentsioa aldatzen hurrengo erloju-ziklora arte. Irudian argiago ikus daiteke nola lan egiten duen A/D eragiketak.



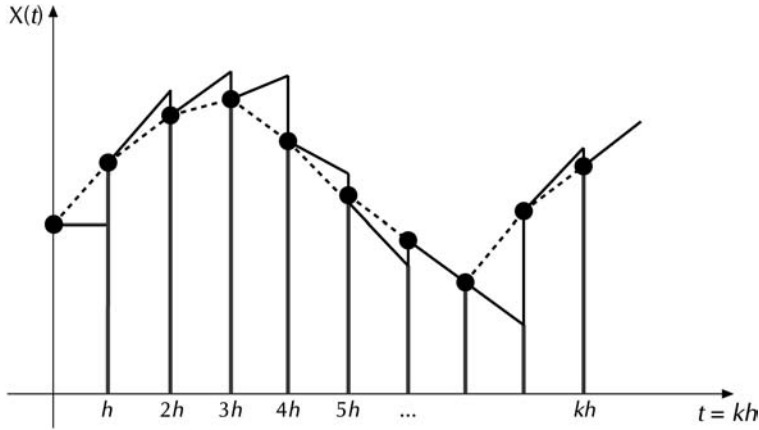
## 2.5.2 Lehen mailako polinomioen bidezko D/A eragiketa

Normalean, “0” mailako polinomioen bidezko D/A eragiketa dira bihurgailurik arruntenak. Baina badira beste D/A eragiketa-metodo batzuk; eragiketa horiek  $n$ -garren mailako polinomioak erabiliz egiten dira. Atal honetan, lehen mailako polinomioak erabiliko ditugu (in.: *First order holder*). Horrelako D/A eragiketak ZOH motako D/A eragiketak baino errore txikiagoak eragiten dituzte, batez beste. Horrelako eragiketak elektronikoki egitea zailagoa da, beraz, garestiagoak dira; horrenbestez, praktikan ez dira gehiegi erabiltzen. Matematikoki honela adieraz daiteke FOH motako D/A eragiketa hori:

$$\{x[k]\} \Rightarrow x(t) = x[k] + [x[k] - x[k-1]] \left( \frac{t - kh}{h} \right) \quad (2.8)$$

$$t \in [kh, kh + h)$$

Polinomioen malda aurreko bi laginen bitartez kalkulatzen da. Horrez gain, zuzena  $x[k]$  laginetik igarotzen da  $t = kh$  aldiunean. Hasieran,  $t = 0$  aldiunean malda kalkulaterik ez dagoenez, aurreko laginik ez dugulako, maldarik gabeko zuzen bat hartuko dugu. Ondorengo irudian dugu D/A eragiketa honen adibide bat.



## 2.1 ariketa

Demagun  $x(t) = \sin(t)$  seinalea dugula. Lagindu seinalea  $w_e = 3$  rad/s-ko maiztasunarekin edo pultsazioarekin. Irudikatu seinale hori, eta, ondoren, lagindu  $y(t) = \sin(t) + \sin(3t)$  seinalea maiztasun berarekin. Alderatu bi seinale horien lagindutako adierazpen matematikoak. Interpretatu emaitzak.

Lehen seinalea laginduz gero, adierazpen matematiko hau lortuko dugu:

$$x(t = kh) = \sin(kh) = \sin\left(k \frac{2\pi}{w_e}\right)$$

$$x[kh] = \sin\left(k \frac{2\pi}{w_e}\right)$$

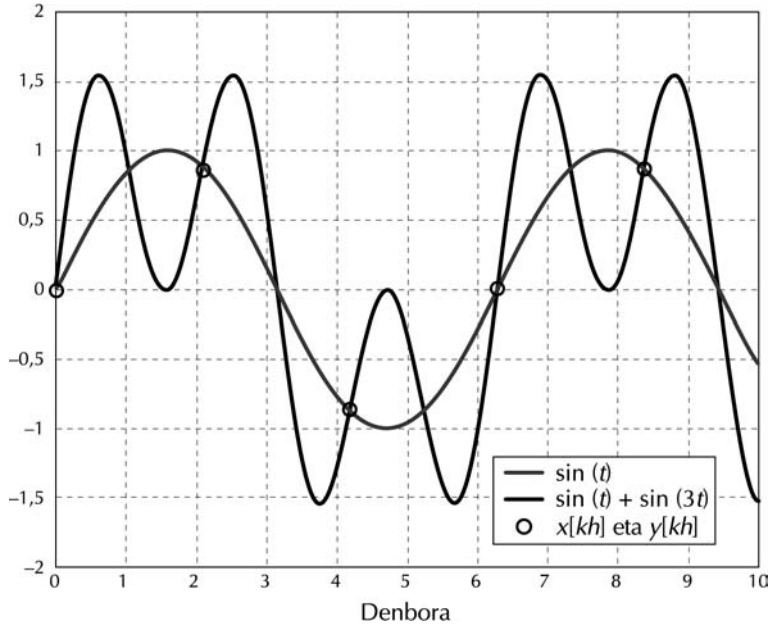
Bigarren seinalea laginduz gero, seinale diskretu hau lortuko dugu:

$$y(t = kh) = \sin(kh) + \sin(3kh) = \sin\left(k \frac{2\pi}{w_e}\right) + \sin\left(3k \frac{2\pi}{w_e}\right)$$

$$x[kh] = \sin\left(k \frac{2\pi}{w_e}\right) + \sin(2\pi k) = \sin\left(k \frac{2\pi}{3}\right)$$

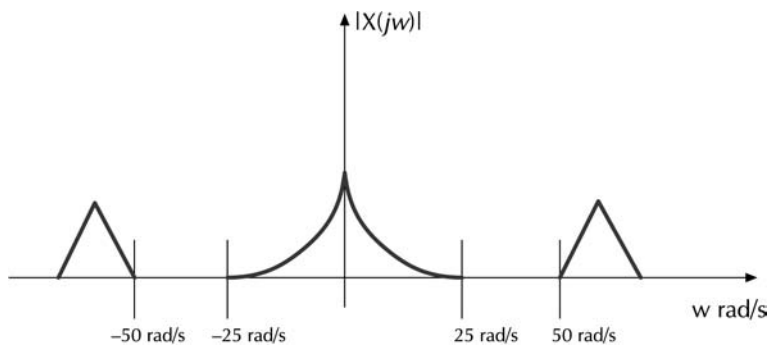
Seinale biak laginduz gero, ezin ditugu bereizi, beraz, ez ditugu Shannonen teoremaren kondizioak beteko. Zehazki,  $w_e > 2w_{\max}$ .  $x(t)$ -ren kasuan;  $w_{\max} = 1$  rad/s eta  $y(t)$  ren kasuan, berriz,  $w_{\max} = 3$  rad/s. Beraz,  $y(t)$  lagintzean ez dugu Shannonen

teorema bete. Horiek horrela, informazioa galdu egin dugu laginketa-eragiketa egitean. Hobeto ulertzeko, ikusi irudi hau.

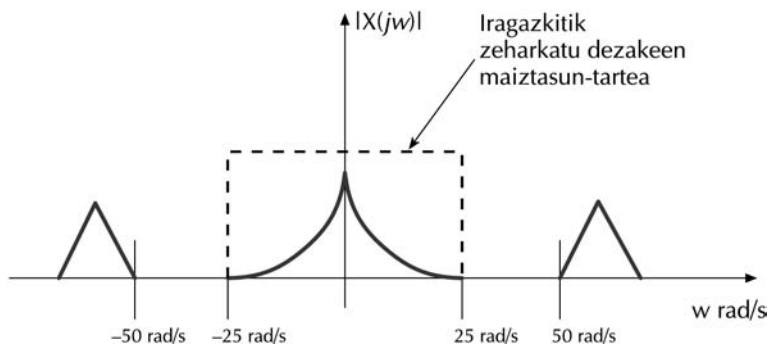


## 2.2 ariketa

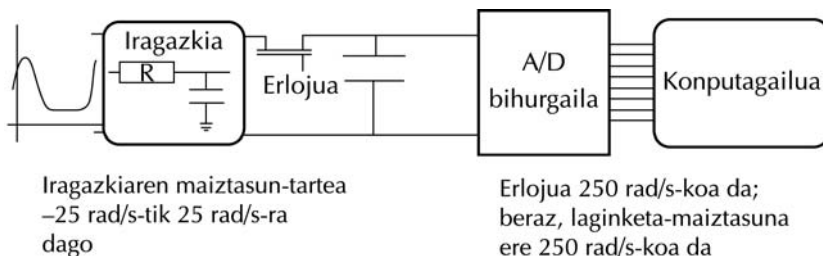
Har dezagun  $x(t)$  seinalearen espektroa. Irudian agertzen da seinale horren Fourierren transformatuaren modulua. Gure aplikaziorako erabilgarria den maiztasun-tartea  $\pm 25$  rad/s da, baina  $\pm 50$  rad/s-tik gora zarata elektronikoa eta perturbazioak ditugu. Aukeratu laginketa-maiztasun bat eta AntiAliasing iragazki bat.



$X(j\omega)$  espektrotik, lehenik eta behin, maiztasun txikiak igarotzen uzten dituen iragazki bat izan behar dugu. Horrenbestez,  $\pm 25$  rad/s-ko maiztasun-tartea igarotzen utzi behar du iragazkiak, baina  $\pm 50$  rad/s tartekoak baino gorakoei ez die igarotzen utziko. Beraz, gure kasuan,  $\pm 25$  rad/s-ko maiztasuna hartuko dugu iragazkiaren ebakitze-maiztasun modura. Ondoren, laginketa-maiztasuna aukeratu behar dugu. Shannonen teoremaren kondizio guztiak betetzeko, laginketa-maiztasunak seinalearen goi-maiztasuna halako bi izan behar du. Iragazkitik irtendakoan, seinalea  $\pm 25$  rad/s-ko maiztasun-tartean dago. Beraz, gutxienez 50 rad/s-ko maiztasunarekin lagindu behar dugu. Baina (2.6) formularen kausalitate-arazoengatik ezin dugu seinalea hain maiztasun txikian lagindu. Automatikako aplikazio baterako, beraz, laginketa-maiztasuna 10 aldiz edota 20 aldiz maiztasun handiagoan egingo dugu.



Ondorengo irudian ikus daiteke laginketa-zirkuituaren eskema.



## 2.3 ariketa

Har ditzagun  $y(t) = \sin(wt)$  seinalea eta  $\{y(kh)\}$  seinale lagindua. Laginketa-maiztasuna  $N$  aldiz  $y(t)$ ren maiztasuna baldin bada, kalkulatu zein den erroaren goi-muga,  $\{y(kh)\}$  seinale, D/A bihurgailu batekin seinale analogiko bihurtu nahi izango bagenu. D/A bihurgailua ZOH motakoa da.

Honela definituko dugu erroa: D/A bihurgailuak sortzen duen seinale analogikoaren eta  $y(t) = \sin(wt)$ ren arteko kenduraren balio absolutua. Normalean,  $h$  laginketa-periodoa edo denbora-tartea da. Beraz,  $s/lagina$  unitatetan adierazten da  $h$ .

$$e(t) = |y(t) - s(t)|$$

$$s(t) = y(kh) \quad t \in [kh, kh + h)$$

Bestetik, badakigu  $h$ -ren eta  $w$ -ren artean erlazio bat dugula. Izan ere, laginketa-maiztasuna  $y(t)$ ren maiztasuna baino  $N$  aldiz handiagoa da. Hori kontuan izanik, berdintza hauek egin ditzakegu:

$$w_e = \frac{2\pi}{h} = Nw \Rightarrow e(t) = |\sin(wt) - s(t)| = |\sin(wt) - \sin(wkh)| \quad t \in [kh, kh + h)$$

$$a(t) = \sin(wt) - \sin(wkh) \quad t \in [kh, kh + h)$$

$$\frac{da}{dt} = w \cos(wt) \quad t \in [kh, kh + h) \Rightarrow \max\left(\left|\frac{da}{dt}\right|\right) = w \Rightarrow \max(e(t)) = h \cdot \max\left(\left|\frac{da}{dt}\right|\right)$$

$$\max(|\sin(wt) - s(t)|) = h \max\left(\left|\frac{da}{dt}\right|\right) = h \cdot w$$

$$e_{\max} = \max(|\sin(wt) - s(t)|) = \frac{2\pi}{Nw} w \Rightarrow e_{\max} = \frac{2\pi}{N}$$

Ikus daitekeenez, seinalearen maiztasunarekiko gero eta maiztasun handiagoan laginduz gero, erroa gero eta txikiagoa izango da.

## 2.4 ariketa

Har dezagun  $y(t) = \sin(wt)$  seinale analogikoa. Seinale hori  $w_e = Nw$  maiztasunarekin lagintzen dugu.  $N$  zenbakia 2 baino handiago den zenbaki oso bat da. Kalkulatu  $t$  aldiune baterako hurbilketa Shannonen teorema eman digun interpoladorearen bitartez, hots, (2.6) formularen bitartez. Har itzazu (2.6) formularen lehen 21 gaiak. Ondoren, kalkulatu (2.6) formula  $t$  aldiunean 21 gaiak hartuz, baina  $t$  aldiunea baino lehen izandako balioak kontuan izanik. Alderatu lortzen duzun emaitza aurrekoarekin.

Ariketa hau Matlab softwarearen tankerako bat erabiliz ebatz dezakegu (adibidez, Scilab edo Octave bitartez). Demagun  $y(t) = \sin(wt)$  seinalea dugula, eta  $\{y[kh]\}$  dela lagindutako seinalea. Ondoren, Shannonen teoremaren interpoladorea hartuko dugu eta lagindutako balioak ordezkatzeko ditugu.

1. Lehenengo kasuan,  $t = 0$  segundorako egingo dugu kalkulua, eta  $w_e = 3$  rad/s izango da; aldiz,  $w = 1$  rad/s izango da. Beraz, Shannonen teoremaren kondizioak betetzen ditugu. Interpoladore honetan, 21 lagin baino ez ditugu hartzen:  $t$  aldiunearen aurreko 10 lagin,  $t$  aldiuneko lagina eta  $t$  aldiunearen ostean ditugun 10 laginak. Guztira 21 lagin dira.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[kh] \frac{\sin\left(\frac{w_e(t-kh)}{2}\right)}{\left(\frac{w_e(t-kh)}{2}\right)} \approx \sum_{k=-10}^{k=10} y[kh] \frac{\sin\left(\frac{w_e(t-kh)}{2}\right)}{\left(\frac{w_e(t-kh)}{2}\right)} = \\
 &= \sum_{k=-10}^{k=10} \sin(wkh) \frac{\sin\left(\frac{w_e(t-kh)}{2}\right)}{\left(\frac{w_e(t-kh)}{2}\right)} \\
 y(t) &\approx \sum_{k=-10}^{k=10} \sin\left(\frac{k2\pi}{w_e}\right) \frac{\sin\left(w_e \frac{(t-kh)}{2\pi}\right)}{\left(w_e \frac{(t-kh)}{2\pi}\right)}
 \end{aligned}$$

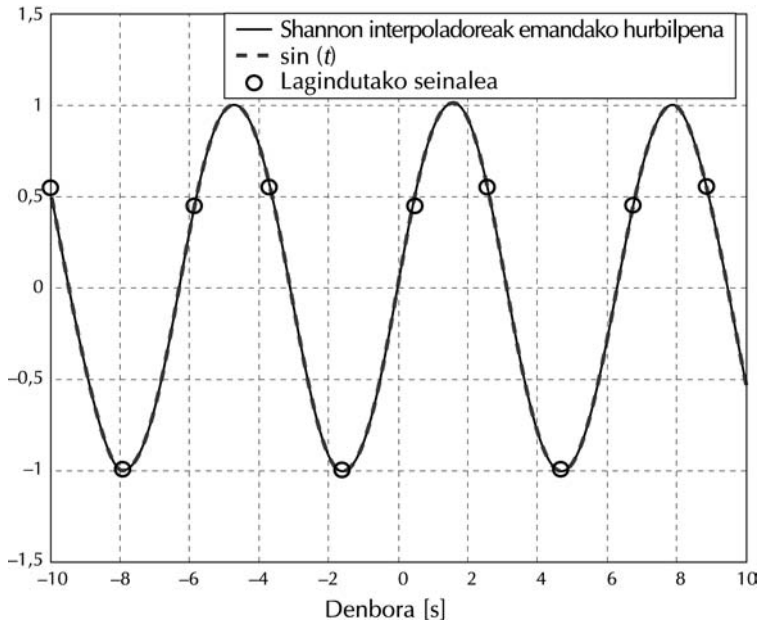
Ondoren, batukari hau kalkulatu dugu sinu kardinalaren funtzioarekin. Funtzio horren adierazpen matematikoa honako hau da:

$$\sin c(t) = \frac{\sin(\pi t)}{(\pi t)}$$

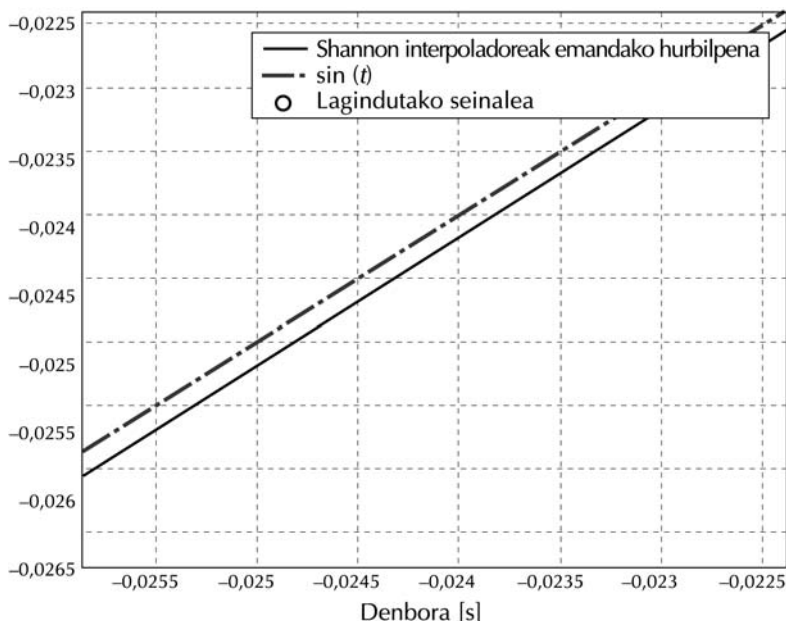
$$y(t) \approx \sum_{k=-10}^{k=10} \sin\left(\frac{k2\pi}{w_e}\right) \cdot \text{sinc}\left(w_e \left(\frac{t - kh}{2\pi}\right)\right)$$

$$y(t=0) \approx \sum_{k=-10}^{k=10} \sin\left(\frac{k2\pi}{3}\right) \cdot \text{sinc}\left(3 \left(\frac{-kh}{2\pi}\right)\right)$$

Ondoko irudian ikus daiteke Shannonen teoremak ematen digun interpoladorearen hurbilketa. Ikus daitekeenez, oso hurbilketa onak ematen ditu  $t$  aldiunearen aurreko eta ondorengo seinalearen laginak izanez gero. Dena den, ez da horrelakorik gertatzen automatikako aplikazioetan. Aldiune jakin batean gaudenean, ez ditugu etorkizuneko balioak; eta guk aldiune horretan kalkulatu behar dugu seinalearen balioa. Hori dela eta, Shannonen teoremak ematen digun hurbilketa, beraz, ez da kausala.



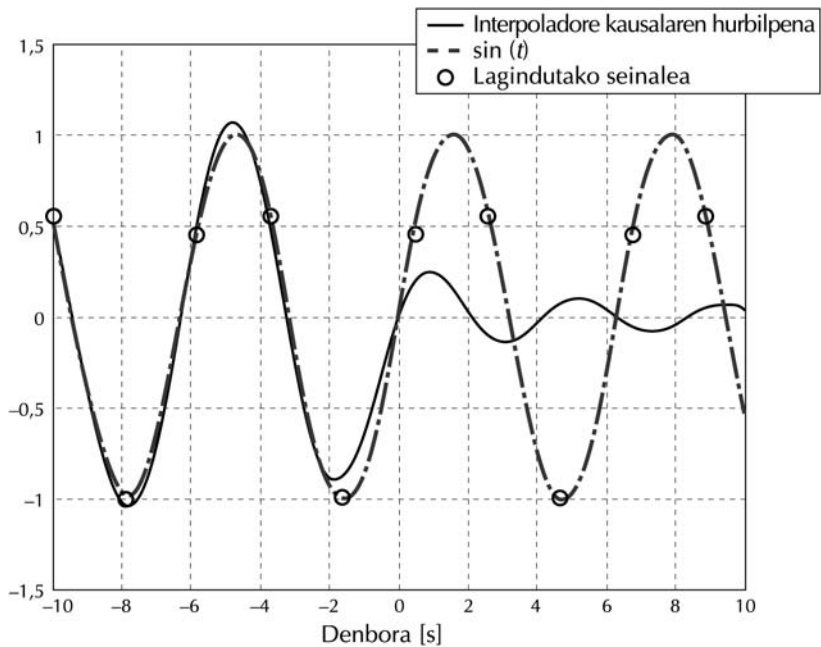
$t = 0$  aldiunetik gertu dauden aldiunetarako hurbilketa ikusi nahi badugu, hurrengo irudian ikus daiteke aurreko irudiaren zehaztasun bat  $t = 0$  inguruan.



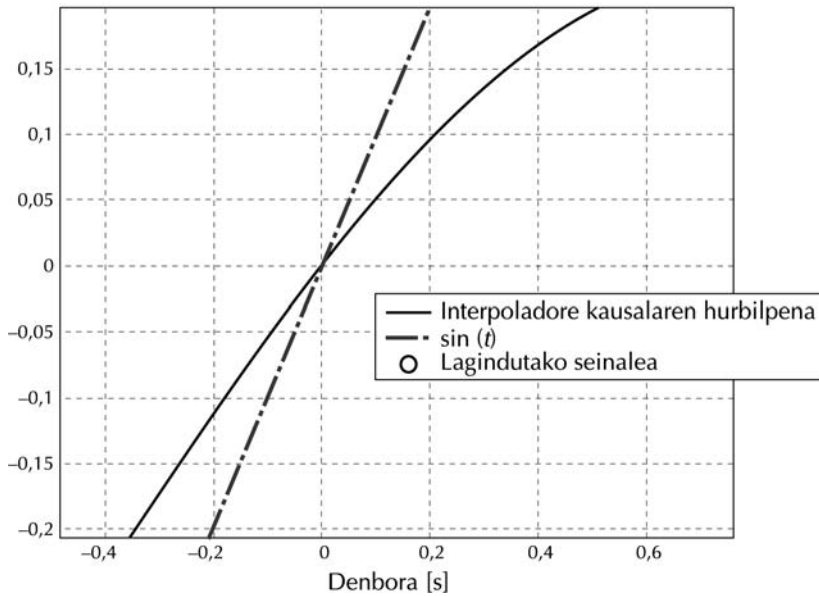
2. Seinale horren hurbilketa kausal bat lortu nahi bada, Shannonen teoremaren interpoladorean bakarrik  $t = 0$  baino lehenagoko laginak hartuko ditugu. Ikus daitekeenez, ondoko irudian hurbilketa askoz ere okerragoa da. Hurbilketaren akatsik handiena da etorkizunarekiko duen mendekotasuna.

Matematikoki, interpoladore horren adierazpena beheko berdintzaren bidez kalkula daiteke (kalkuluak (2.6) formulan oinarriturik daude). Interpoladore horrek ere 21 lagin hartzen ditu; 20 lagin  $t$  aldiunea baino lehenagokoak dira, eta  $t$  aldiuneko lagina ere kontuan hartu da. Hala, aurrekoarekin hobeto alderatu ahal izango dugu. Ikus daitekeenez, Shannonen interpoladorearen gain etorkizunak duen eragina oso handia da. Dena den, automatikako aplikazioetan,  $t$  aldiunean seinalearen interpolazio bat behar dugu, eta ezin diegu gero etorriko diren laginei itxaron. Beraz,  $t$  aldiunean,  $t$  aldiunean bertan eta  $t$  aldiunearen aurretik ditugun laginak soilik erabil ditzakegu. Horrenbestez, interpolazioa ez da aurreko kasuko interpolazioa bezain ona. Horregatik, normalean, Shannonen teorema esaten duen mugatik gorako maiztasunekin lagintzen dugu. Hala ere, ZOH bidezko D/A bihurgailuek ematen duten hurbilketa baino hobea ematen du Shannonen teoremaren interpoladoreak. Baina ez dira erabiltzen elektronikoki, horrelako interpoladoreak egitea garestiegia delako.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} y[kh] \frac{\sin\left(\frac{w_e(t-kh)}{2}\right)}{\left(\frac{w_e(t-kh)}{2}\right)} \approx \sum_{k=-10}^{k=10} y[kh] \frac{\sin\left(\frac{w_e(t-kh)}{2}\right)}{\left(\frac{w_e(t-kh)}{2}\right)} = \\
 &= \sum_{k=-10}^{k=10} \sin(wh) \frac{\sin\left(\frac{w_e(t-kh)}{2}\right)}{\left(\frac{w_e(t-kh)}{2}\right)} \\
 y(t) &\approx \sum_{k=-20}^{k=0} \sin\left(\frac{k2\pi}{w_e}\right) \frac{\sin\left(w_e \frac{(t-kh)}{2\pi}\right)}{\left(w_e \frac{(t-kh)}{2\pi}\right)} \\
 y(t) &\approx \sum_{k=-21}^{k=0} \sin\left(\frac{k2\pi}{w_e}\right) \cdot \text{sinc}\left(w_e \left(\frac{t-kh}{2\pi}\right)\right) \\
 y(t=0) &\approx \sum_{k=-21}^{k=0} \sin\left(\frac{k2\pi}{3}\right) \cdot \text{sinc}\left(3 \left(\frac{-kh}{2\pi}\right)\right)
 \end{aligned}$$



$t = 0$  inguruan zehaztasun bat ematen dugu ondoren erakusten dugun irudian.



ONDOKO KALKULUAK EGIN AHAL IZATEKO, MATLAB PROGRAMA HAU TXERTATZEN DUGU.

```
close all
clear all
we=3;
h=2*3.1416/we;
w=1;

N=1000;
t=[-10:(20/N):10];
yt=zeros(1,length(t));
for k=-10:10
    yk=sin(k*h);
    alpha=(we/(2*3.1416))*(t-h*k*ones(1,length(t)));
    yt=yt+(yk*sinc(alpha));
end

plot(t,yt,'black')
hold on
grid on
xlabel('Denbora [seg']')
```

```
plot(t,sin(t),'r-.')
t=-10:h:10;
plot(t,sin(t),'ro')
legend('Shannon interpoladoreak emandako hurbilketa','sin(t)','Lagindutako seinalea')
```

```
N=1000;
t=-10:(20/N):10;
ytkausala=zeros(1,length(t));
for k=-21:0
    yk=sin(k*h);
    alpha=(we/(2*3.1416))*(t-h*k*ones(1,length(t)));
    ytkausala=ytkausala+(yk*sinc(alpha));
end
```

```
figure
plot(t,ytkausala,'black')
hold on
grid on
xlabel('Denbora [seg]')
plot(t,sin(t),'r-.')
t=-10:h:10;
plot(t,sin(t),'ro')
legend('Interpoladore kausalaren hurbilketa','sin(t)','Lagindutako seinalea')
```

---

# 3

## Sistema diskretuak

### 3.1 SARRERA

Gai honetan sistema diskretuak aztertuko ditugu. Sistema diskretuak aztertzen hasiko gara, eta, ondoren, sistema lineal kausalak eta denborarekiko aldakorak ez diren sistemekin jarraituko dugu. Sistema baten eredu matematikoa definitzen hasiko gara. Sistema baten ereduak da sistema horren jokaera zehazten duten adierazpen matematikoen multzoa. Sistema baten ereduak egitean, argi izan behar dugu zein diren sistemaren sarrerak eta zein irteerak. Bi gai horiek argi izanda, sistema hau aztertzean erabiliko dugun eredu matematikoaren denborarekiko izaera finkatu behar dugu.

Sistema batek denborarekiko duen izaera bi motatakoa izan daiteke: izaera diskretua edo izaera jarraitua. Izaera diskretukoa bada, sistema deskribatzen duten aldagaiak diskretuak izango dira. Bestalde, sistema jarraitua bada, sistema hori deskribatzen duten aldagaiak jarraituak izango dira (edo analogikoak). Liburu honetan sistema diskretuei buruz arituko gara. Beraz, matematikoki, sistema diskretu bat honela idatz daiteke:

$\{x[k]: k \in \mathbb{N}\}$  Sarrerako aldagai diskretuak

$\{y[k]: k \in \mathbb{N}\}$  Irteerako aldagai diskretuak (3.1)

$$\{y[k]\} = F[\{x[k]\}]$$

Sarrerako,  $\{x[k]\}$ , eta irteerako,  $\{y[k]\}$ , aldagaiak parentesi artean jartzen ditugu, sarrerako aldagaiak edozein unetan duten balio guztien multzoa delako eta ez  $k$  aldiune zehatz bateko balioa soilik. Beraz,  $x[k]$  adierazpenarekin adierazten da  $x$  aldagaiak  $k$  aldiunean duen balioa. Aldiz,  $\{x[k]\}$  adierazpenarekin adierazten da  $x$  aldagaiak hainbat aldiunetan hartzen dituen balioen multzoa. Sistema diskretu baten adibide gisa honako berdintza hau har daiteke:

$$y[k] = k^2 + 1 + (x[k] + x[k-1])^2 \quad (3.2)$$

$$k \in \mathbb{N}$$

Berdintzan ikus dezakegunez, irteerako aldagaia sarrerako aldagaiaren mende dago. Baina mendekotasuna nahiko berezia da: irteerako aldagaiaren balioa  $k$  aldiunean sarrerako  $x$  aldagaiak  $k$  eta  $k-1$  aldiuneetan dituen balioen arabera da. Horrez gain,  $y[k]$  zuzenki  $k$  aldiunearen arabera da. Horrelako ezaugarriek garrantzi handia dute sistemaren jokaeran. Beraz, sistemen ereduak sailkatzean, kontuan izango ditugun irizpideak izango dira.

Lehen sailkapena honelakoa da:

1. Sistema trinkoak edo estatikoak. Sistema diskretu hauen irteerako aldagaiak  $k$  aldiunean duten balioa, hain zuzen,  $k$  aldiune horren eta sarrerako aldagaiak  $k$  aldiune horretan duten balioen arabera da soilik. Beraz, mota honetako sistemak orainaren mende bakarrik daude. Adibide gisa, sistema diskretu hauek izan daitezke:

$$y[k] = (x[k] + 1)^2$$

$$y[k] = x[k^2]$$

$$y[k] = e^{x[k]}$$

$$y[k] = 2x[k] + 1$$

Beraz, sistema trinko edo estatiko baten irteera berdintza honen arabera definituta egongo da:

$$y[k] = F[x[k]]$$

$$\text{edo} \quad (3.3)$$

$$G[y[k], x[k]] = 0$$

Mota honetako sistemetan, edozein  $k_1$  eta  $k_2$ -rako, bi aldiune ezberdinetarako, sarrerako  $x[k_1]$  eta  $x[k_2]$  balioak berdinak badira,  $y[k_1]$  eta  $y[k_2]$  irteerako bi balioak ere berdinak izango dira. Beraz, horrelako sistemek sarrerako aldagai mugatu bat badute, irteerako aldagaia ere mugatua izango dute (baldin  $F(x[k])$  funtzioa definiturik badago). Beraz, horrelako sistemak egonkorak izango dira beti.

Dena den, liburuaren 7. atalean aztertuko dugu zorrotzago egonkortasuna. Baina oso erraza da horrelako sistemen egonkortasuna egiaztatzea. Demagun sistema trinko bat dugula:

$$y[k] = F(x[k])$$

eta,  $F(x[k])$  funtzioa zenbaki erreal guztientzat definiturik badago, edozein  $x[k]$  sarrerak  $y[k]$  balio erreal bat izango du. Bestalde,  $x[k]$  seinalearen balioa mugaturik izanez gero,  $y[k]$  irteerak izango dituen balio multzoa ere zenbaki-tarte mugatu batean sar genezake.

$$\begin{aligned} |x[k]| \leq L_x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \{x[k]\} = A \subset \mathbb{R} \Rightarrow \{y[k]\} = \\ = F[A] \subset \mathbb{R} \Rightarrow |y[k]| \leq L_y \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Adibide gisa, har dezagun sistema trinko edo estatiko hau:

$$y[k] = e^{x[k]} : \forall k \in \mathbb{N}$$

$x[k]$  mugatua bada, adibidez  $x[k] = \sin(k)$  bada, irteerako mugak honako hauek izango dira:

$$|x[k]| \leq 1 \Rightarrow |y[k]| \leq e$$

2. Sistema dinamikoak. Sistema dinamikoak iraganaren eta etorkizunaren mende daude. Beraz, sistema hauek, edozein aldiunetan,  $x[k]$  sarrera berdina izan arren, ez dute zertan irteeran balio berbera izan, sistema aurretik emandako sarreraren eta irteeraren mende dagoelako. Beste era batera esanda, sistemaren sarrerako eta irteerako balioen mende egongo da sistema hauen irteera. Oso zaila da horrelako sistemen egonkortasuna aztertzea. Liburuko 7. atalean aztertuko dugu hobeto egonkortasunaren arazoa. Laburbilduz, esango dugu sistema diskretu bat dinamikoa dela  $y[k_0]$  (sistemaren irteera  $k_0$  aldiunerako),  $x[k_0]$  sarreraren mende egoteaz gain,  $\{x[k]: k < k_0\}$  balioen mende dagoenean (sarrerako iragandako balioak). Izan ere,  $y[k_0]$  sistemaren irteera  $\{x[k]: k > k_0\}$  balioen mende egon daiteke, hots, sarrerako etorkizuneko balioen mende. Sistema dinamikoen  $y[k_0]$  irteera,  $k_0$  aldiunerako, irteerako etorkizuneko eta iraganeko balioen mende ere

egon daiteke, hau da,  $\{y[k]: k > k_0\}$  eta  $\{y[k]: k < k_0\}$  balioen mende. Adibide gisa, hauek ditugu:

$$y[k] = x[k] + 2x[k-1]$$

$$y[k] + y[k-1] = 1$$

$$y[k] = k$$

$$y[k] + (x[k] + k)^2 = 1$$

Liburu honetan, batez ere, sistema dinamikoak aztertuko ditugu, sistema fisikoak sistema dinamikoaren eredu matematikoen bitartez deskribatzen ditugulako.

### 3.2 SISTEMA DINAMIKOAK

Lehen esan dugun bezala, sistema dinamikoak iraganaren eta etorkizunaren araberakoak dira. Matematikoki, honela idatz dezakegu:

$$\begin{aligned} y[k_0] &= F(\{y[k]\}, \{x[k]\}, k_0) : \forall k, k_0 \in \mathbb{N} \\ \{y[k]\} &= \{\dots, y[-2], y[-1], y[0], y[1], \dots\} \\ \{x[k]\} &= \{\dots, x[-2], x[-1], x[0], x[1], \dots\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sistema dinamikoak bi motatakoak izan daitezke: sistema kausalak eta ez-kausalak. Sistema kausaletako  $y[k_0]$  irteera aldiune zehatz baterako  $k_0$  aldiunea baino lehenagoko sarrerako eta irteerako balioen mende dago. Hots, sistema kausal baten irteera orainaren eta iraganaren mende egongo da bakarrik. Beraz, horrelako sistemek sarrera eman baino lehen ezin dute erantzun. Hona hemen sistema kausal baten definizio matematikoa:

$$y[k_0] = F(k_0, \{y[k]: k < k_0\}, \{x[k]: k \leq k_0\}) \quad (3.6)$$

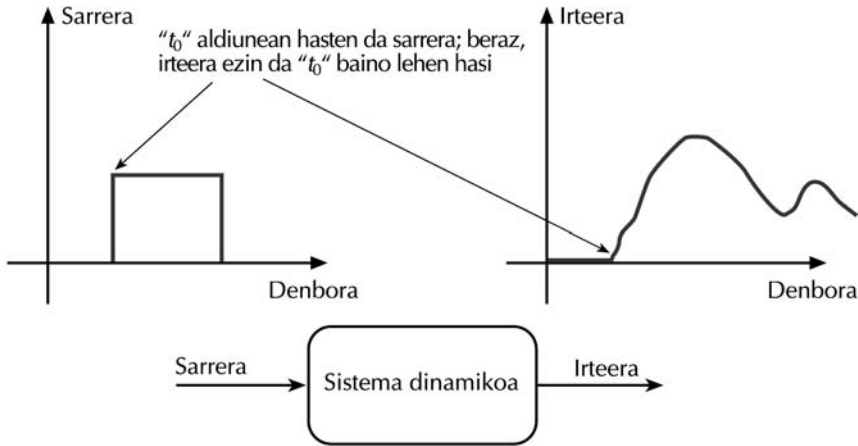
Ondoren, sistema kausal batzuk aurkeztuko ditugu, adibide gisa:

$$y[k] = y[k-1] + k \cdot y[k-2] + x[k]$$

$$y[k] = e^{y[k-1]} + x[k-1]$$

$$y[k+1] = y[k] + x[k] + k$$

Sistema ez-kausalak, berriz, etorkizunaren araberakoak dira, eta horrelako sistema fisikorik ez dago. Hala ere, bada denbora errealean lan egiten ez duen hainbat aplikazio, eta, horrenbestez, ez dute zertan izan sistema kausalak. Dena den, automatikako esparruan ez dago horrelakorik, kontroleko sistemek denbora errealean lan egiten baitute.



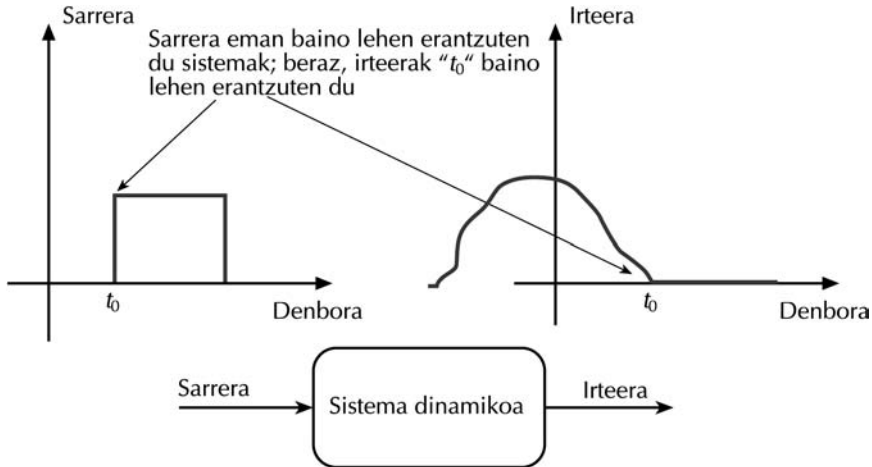
### 3.1. irudia. Sistema dinamiko kausal baten erantzuna.

Ondorengo irudian ikus dezakegu sistema ez-kausal baten jokaera. Jokaera horiek ez dira sistema fisikoetan gertatzen; dena den, gizakiak sortutako sistema batzuetan badaude horrelako sistemak. Horren adibide gisa musika entzuteko sistemak ditugu: soinu-sistemetan, sarritan, iragazki ugari jartzen da, eta horiek  $k < k_0$  eta  $k > k_0$  laginak kontuan izaten dituzte,  $k_0$  aldiuneko lagina kalkulatzeko. Iragazki horien adibidea izan daiteke (2.6) formulako interpoladorea. Horrelako sistemen adibide gisa hartuko dugu iragazki diskretuaren gehikuntza-ekuazioa.

$$y[k] = \sum_{l=k-N}^{l=k+N} x[l]$$

Horrelako iragazki batek  $y[k]$  balioa kalkulatzeko, nahitaez  $x[k - N]$ -tik  $x[k + N]$ -ra dauden balioak ezagutu behar ditu. Automatikan ez dugu horrelako aukerarik,  $k$  aldiunetik aurrerako laginik ez dugulako. Baina seinale-analisiko zenbait kasutan erabilgarriak izaten dira horrelako sistemak. Adibidez, seinale baten zati bat baino hartu nahi ez badugu eta Gibbsen efektua saihestu nahi badugu, nolabaiteko leiho bat finkatzen dugu (in.: *Windowing*). Horrelako eragiketa edo iragazkiak erabili ahal izateko, nahitaez seinalea aldezturik izan behar dugu; beraz, iragazki horiek ez dira egokiak denbora errealeko sistementzat. Hala ere, beste zenbait

arlotan badute garrantzia, adibidez, sistemak identifikatu nahi ditugunean. Sistema ez-kausal baten erantzuna ondorengo irudian ikus dezakegu:



### 3.2. irudia. Sistema ez-kausal baten erantzuna.

Sistema ez-kausal bat ongi ulertzeko, aurreko adibidea hartuko dugu. Hartuko dugun sarrerako lagin kopurua 7 bada, N berdin 3 izango da. Sarrerako seinaleak ( $k$ ) 0tik 3ra arteko bat balio badu, eta beste aldiune guztietarako zero balioa hartzen badu, sistemaren irteera honelakoa izango da:

$$y[k] = \sum_{l=k-3}^{l=k+3} x[l]$$

$$x[k] = \begin{cases} 1: k \in \{0, 1, 2, 3\} \\ 0: \forall k \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\} \end{cases}$$

$$y[-3] = x[0] = 1$$

$$y[-2] = x[1] + x[0] = 2$$

$$y[-1] = x[2] + x[1] + x[0] = 3$$

$$y[0] = x[3] + x[2] + x[1] + x[0] + x[-1] + x[-2] + x[-3] = 4$$

$$y[1] = x[4] + x[3] + x[2] + x[1] + x[0] + x[-1] + x[-2] = 4$$

$$y[2] = x[5] + x[4] + x[3] + x[2] + x[1] + x[0] + x[-1] = 4$$

$$y[3] = x[6] + x[5] + x[4] + x[3] + x[2] + x[1] + x[0] = 4$$

$$y[4] = x[7] + x[6] + x[5] + x[4] + x[3] + x[2] + x[1] = 3$$

$$y[5] = x[8] + x[7] + x[6] + x[5] + x[4] + x[3] + x[2] = 2$$

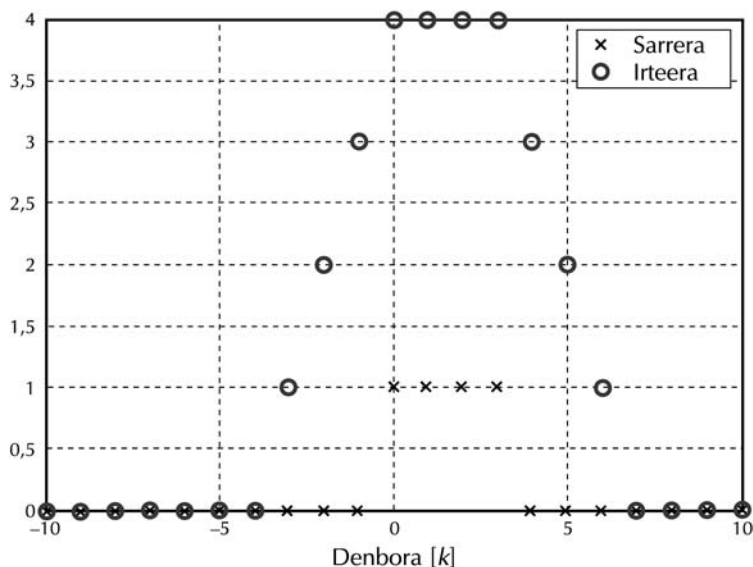
$$y[6] = x[8] + x[8] + x[7] + x[6] + x[5] + x[4] + x[3] = 1$$

$$y[k > 6] = 0$$

Ikus daitekeenez, sistemaren irteerak sarrerari erantzuten dio sarrera eman baino lehen. Fisikoki, horrelakorik ez da posible. Horrelako sistemak baliagarriak dira sarrera osorik dugunean, eta hori seinale-tratamenduko zenbait aplikaziotan gertatzen da bakarrik. Matlab-en iragazki hau egiten duen programa da hau.

```
close all;
clear all;
L=20;
khas=-10;
kbuk=10;
x=zeros(1,(kbuk-khas)+1);
y=zeros(1,(kbuk-khas)+1);
x((kbuk-khas)/2+1)=1;
x(((kbuk-khas)/2)+2)=1;
x(((kbuk-khas)/2)+3)=1;
x(((kbuk-khas)/2)+4)=1;
k=[khas:kbuk];
for i=4:(length(y)-3)
    y(i)=(x(i-3:i+3)*ones(7,1));
end

plot(k,x,'blackx',k,y,'redo')
legend('Sarrera','Irteera')
grid on
hold on
```



### 3.3. irudia. Iragazki ez-kausal digital baten erantzuna.

Sistema dinamiko kausalak eta sistema ez-kausalak bereizi eta gero, sistema dinamiko kausalei dagozkien zenbait emaitza eta ezaugarri aztertuko ditugu. Lehenik, esan beharra dago sistema dinamiko diskretu baten eredu matematikoa definitzeko gehikuntza-ekuazioak (*in.*: *Difference equations*) erabiliko ditugula. Gehikuntza-ekuazioak era honetako berdintza matematikoak dira:

$$y[k_0] = F(\{y[k]; \{x[k]\}): \forall k, k_0 \in \mathbb{N} \quad (3.7)$$

Orain, sarrera bakarrekoak eta irteera bakarrekoak aztertuko ditugu (*in.*: *Single input Single output*).

$$y[k_0] = F(\{y[k]: k < k_0, \{x[k]: k \leq k_0\}) \quad (3.8)$$

Horrelako ekuazio bat aztertzean burura etortzen zaigun lehen galdera hau da: era honetako sistemek badute emaitzarik? Ekuazio guztiek emaitzarik ez badute, zer kondizio bete behar ditu gehikuntza-ekuazioak emaitza izan dezan? Bestetik, gehikuntza bitartez egindako ekuazioek emaitza bakarra izan dezaten, zer kondizio bete behar dute? Zenbait definizio emango ditugu oinarrizko galdera horiei erantzuteko.

1. Sistema baten gehikuntza-ekuazioa. Sistema baten ekuazioa berdintza bat da. Ekuazio horren bitartez, sistemaren irteera kalkula daiteke. Berdintza horiek

sarrerako eta irteerako aldiune ezberdinetako laginak erlazionatzen dituzte. Ekuazio hori honela defini daiteke matematikoki:

$$F(y[k], y[k-1], y[k-2], \dots, y[k-n_1], x[k], x[k-1], x[k-2], \dots, x[k-n_2], k) = 0 \quad (3.10)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}$$

Berdintza hori beste era batera idatziko dugu. Bakandu dezagun, orain,  $y[k]$  lagina. Horrelako eragiketa ez da beti posible izango, baina sistema fisiko gehienetako gehikuntza-ekuaziotik  $y[k]$  lagina aska daiteke. Irteerako  $y[k]$  lagina askatzen badugu,  $G$  funtzioa definitu ahal izango dugu.

$$y[k] = G(y[k-1], y[k-2], \dots, y[k-n_1], x[k], x[k-1], \dots, x[k-n_2], k) \quad (3.11)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}$$

$G$  funtzio horrek izate-eremu bat du. Izate-eremu hori garrantzi handikoa da, sistemaren eremua mugatzen baitu. Beraz,  $D$  eremua hasierako multzoko azpimultzo bat da.

$$D \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{N} \quad (3.12)$$

2. Sistema dinamiko baten maila. Sistema baten irteera kalkulatzeko garaian hartu beharreko lagin kopurua da sistema baten maila. Adibidez, ondorengo sistemak maila hauetakoak dira:

$$y[k] = y[k-1] + x[k] : \text{lehen mailakoa}$$

$$y[k] = y[k-1] + x[k-2] : \text{bigarren mailakoa}$$

$$y[k+1] = y[k-2] + x[k-2] : \text{hirugarren mailakoa}$$

3. Sistema baten gehikuntza-ekuazioaren emaitza, hasierako kondizioa ezagututa:

- Sistema baten gehikuntza-ekuazio hau dugu.

$$y[k] = G(y[k-1], y[k-2], \dots, y[k-n_1], x[k], x[k-1], \dots, x[k-n_2], k) \quad (3.13)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}$$

- Horrez gain,  $G$  berdintzaren izate-eremua  $D$  multzoa da.  $D$  multzo horren elementuak bektoreak dira. Bektore horiek  $n_1 + n_2 + 1$  osagai dituzte.  $\{y[k]\}$  irteerari  $n_1$  osagai dagozkio,  $\{x[k]\}$  sarrerari  $n_2$  osagai dagozkio eta, azkenik, beste osagai bat  $\{k \in \mathbb{N}\}$  aldiunea kontuan izateko.

$$D \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{N} \quad (3.14)$$

- Bestetik, sistemaren hasierako kondizioak emango ditugu, hots, sistemaren irteerako hasierako balioak. Zehazki,  $y[-1]$ ,  $y[-2]$ ,  $y[-3]$ , ...,  $y[-n_1]$  dira balio horiek. Dena den,  $\{x[k]\}$  sarrerako seinaleak ere hasierako balioak definiturik izan beharko ditu. Nolanahi ere, horiek ez dira sistemaren hasierako kondizioak bezalakoak, eta sarrerako hasierako balioetat jotzen ditugu. Balio horiek  $x[-1]$ ,  $x[-2]$ ,  $x[-3]$ , ...,  $x[-n_2]$  dira.

Alderdi horiek guztiak kontuan izanik, gehikuntza-ekuazio horren emaitza  $\{y[k]\}$  seinalea izango da, baldin eta  $G$  berdintza betetzen badu,  $\{x[k]\}$  sarrerako seinalea dela aintzat hartuta. Hasierako kondizioak jakinda, horrelako ekuazio baten  $\{y[k]\}$  emaitza lortzeko erarik errazena hau da:

$y[q] : q \in \{-1, -2, \dots, -n_1\}$  hasierako kondizioak ezagunak dira.

$\{x[k] : \forall k \in \mathbb{N}\}$  sarrerako seinalearen balioak ezagunak dira aldiune guztietarako.

$$\begin{aligned}
 y[0] &= G(y[-1], y[-2], \dots, y[-n_1], x[0], x[-1], x[-2], \dots, x[-n_2], 0) \\
 y[1] &= G(y[0], y[-1], \dots, y[1-n_1], x[1], x[0], x[-1], \dots, x[1-n_2], 1) \\
 y[2] &= G(y[1], y[0], \dots, y[2-n_1], x[2], x[1], x[0], \dots, x[2-n_2], 2) \\
 &\dots \\
 y[k] &= G(y[k-1], y[k-2], \dots, y[k-n_1], x[k], x[k-1], \dots, x[k-n_2], k)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Beraz, horrelako ekuazio baten emaitza kalkulatzeko erarik errazena da era errepikakor bat erabiltzea. Edonola ere, ez dakigu emaitza hori existitzen den edo ez, edota emaitza hori bakarra den edo ez. Emaitzaren existentzia eta emaitza bakarra den edo ez aztertzen duen teorema azalduko dugu ondoren.

### 3.2.1 Teorema. Gehikuntza-ekuazio baten emaitza bakarrari buruzko teorema

Demagun  $G$  ekuazioa dugula eta  $D$  dela haren izate-eremua.  $\{x[k]\}$  sarrerako seinalea da eta  $\{y[k]\}$  irteerako seinalea.

$$\begin{aligned}
 y[k] &= G(y[k-1], y[k-2], \dots, y[k-n_1], x[k], x[k-1], \dots, x[k-n_2], k) \\
 \forall k &\in \mathbb{N} \\
 D &\subseteq \mathfrak{R}^{n_1} \times \mathfrak{R}^{n_2} \times \mathbb{N}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$-y_0 = [y[-1], y[-2], y[-3], \dots, y[-n_1]]$  hasierako kondizioak biltzen dituen bektorea da. Kontuan izan behar dugu  $\{x[k]\}$  seinaleek  $-1, -2, -3$  eta  $-n_2$  aldiunera arte definiturik egon behar dutela.

G ekuazioaren  $\{y[k]\}$  emaitza existituko da, bakarra izango da eta  $y_0$ -k hasierako kondizio hauek izango ditu:  $\{x[k]\}$  sarrerako seinalea izango da, baldin eta A multzo bat existitzen bada, non:

$$\begin{aligned} A &\subseteq \mathfrak{R} \\ y[-1], y[-2], \dots, y[-n_1] &\in A \\ G(AxAxA\dots xAxNx\mathfrak{R}^{n_2}) &\subseteq A \end{aligned} \quad (3.17)$$

**Egiaztapena:** Lehenik, era errepikakor bat erabiliz, kalkula ditzagun  $\{y[k]\}$  emaitzaren balioak:

$$y[-1], y[-2], \dots, y[-n_1] \subseteq A \quad (3.18)$$

$\{x[k]\}$  ezagunak dira aldiune orotarako

$$y[0] = G(y[-1], y[-2], \dots, y[-n_1], x[0], x[-1], x[-2], \dots, x[-n_2], 0) \in A \Rightarrow$$

$$y[0], y[-1], \dots, y[1 - n_1] \in A \Rightarrow$$

$$y[1] = G(y[0], y[-1], \dots, y[1 - n_1], x[1], x[0], x[-1], \dots, x[1 - n_2], 1) \in A \Rightarrow$$

$$y[1], y[0], \dots, y[2 - n_1] \in A \Rightarrow$$

$$y[2] = G(y[1], y[0], \dots, y[2 - n_1], x[2], x[1], x[0], \dots, x[2 - n_2], 2) \in A \Rightarrow \quad (3.19)$$

$$y[1], y[0], \dots, y[2 - n_1] \in A \Rightarrow$$

...

$$y[k - 1], y[k - 2], \dots, y[k - n_1] \in A \Rightarrow$$

$$y[k] = G(y[k - 1], y[k - 2], \dots, y[k - n_1], x[k], x[k - 1], \dots, x[k - n_2], k) \in A$$

G funtzioak irudi bat duenez,  $y[k - 1], y[k - 2], \dots, y[k - n_1]$  balioak A multzoan daudenean,  $y[k]$  balioa existituko da eta bakarra izango da. Horrenbestez, hasierako  $y_0$  kondizio baterako, eta  $\{x[k]\}$  sarrerako seinaleak definiturik badaude,  $\{y[k]\}$  irteerako seinalea existituko da eta bakarra izango da.

Hori hobeto ulertu ahal izateko, adibide batzuk aztertuko ditugu.

1. Har dezagun sistema dinamiko hau. Sistemaren hasierako kondizioa

$y[-1]$  berdin 1 baldin bada.

$$y[k] = \ln(y[-1])$$

$$y[0] = \ln(1) = 0 \Rightarrow y[1] \rightarrow -\infty$$

Argi dago hasierako beste kondizio bat izanez gero, sistema dinamiko horren emaitza luzeagoa izango dela, baina  $n$  jakin baterako izate-eremutik kanpo geratuko litzateke; beraz, sistema horrek ez du emaitza bat definiturik aldiune guztietarako. Hots, sistemaren aldiune guztietarako sistema ez dago definiturik. Badakigu logaritmoaren izate-eremua zenbaki positiboentzat bakarrik dagoela definiturik, beraz,  $n$  une jakin batetik aurrera sistemaren artea ez da definiturik egongo. Pentsa dezagun hasierako balioa  $y[-1] > 0$  balio positiboa hartzen duela. Badakigu, orobat, horrelako segida bat beti beherakorra dela.

$$y[0] = \ln(y[-1]) \Rightarrow y[0] < y[-1]$$

$$y[1] = \ln(y[0]) \Rightarrow y[1] < y[0]$$

$$y[2] = \ln(y[1]) \Rightarrow y[2] < y[1]$$

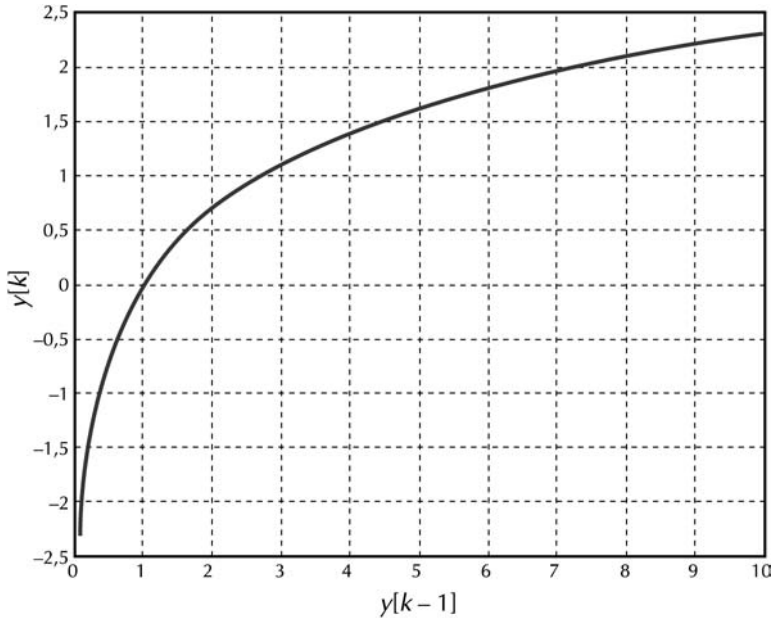
...

$$y[k] = \ln(y[k-1]) \Rightarrow y[k] < y[k-1]$$

Aldiune jakin baterako,  $y[k]$  1 baino txikiagoa izango da.

$$y[k] < 1 \Rightarrow y[k+1] = \ln(y[k]) < 0$$

$\{y[k]\}$  seinaleak aldiune jakin batean balio negatiboa hartuz gero, hurrengo aldiunean  $\{y[k]\}$  seinalea ez da existituko. Beraz, aldiune jakin batetik aurrera ez da existitzen, alegia, sistemaren emaitza  $\{y[k]\}$  ez da existitzen  $N$  osorako. Sistema horren jokaera edo dinamika hobeto ulertu ahal izateko, ikusi ondorengo irudia. Irudian,  $y[k]$  eta  $y[k-1]$  arteko ekuazioa marraztu dugu.



**3.4. irudia.**  $y[k] = \ln(y[k-1])$  sistemaren diagrama.

3.2.1. teorema esaten digu  $\{y[k]\}$  seinalea existitzeko, eta bakarra izan dadin,  $\{y[k]\}$  seinaleko balio guztiek  $A$  multzoan egon behar dutela. Baina sistema horretan ezin digu definitu multzo bat, non bere irudia multzoa bera baita (edota horren azpimultzo bat). Hori matematikoki honela egiazta dezakegu. Har dezagun goi-muga eta behe-muga dituen  $A$  multzo bat.

$$A = [L_{behe}, L_{goi}]$$

$$0 < L_{behe} < L_{goi}$$

$A$  multzoaren irudia honela kalkula daiteke:

$$f(A) = \ln(A) \Rightarrow f(A) = [\ln(L_{behe}), \ln(L_{goi})] \Rightarrow \ln(L_{behe}) < L_{behe}, \ln(L_{goi}) < L_{goi} \Rightarrow f(A) \not\subset A$$

Beraz,  $f(A)$  multzoa ez da  $A$  multzoaren azpimultzo bat;  $A$  multzoaren irudia  $A$  multzotik kanpo geratzen da beti. Zenbaki erreal positiboen multzoa hartuko bagenu, bere irudia zenbaki erreal guztien multzoa litzateke, beraz, sistemaren izate-eremutik kanpo geratuko litzateke.

$$A = (0, \infty) \Rightarrow f(A) = \ln(A) \Rightarrow f(A) = \mathbb{R}$$

Horrenbestez, sistema horrek ez du  $\{y[k]\}$  emaitza bat  $k$  aldiune guztietarako.

2. Azter dezagun orain beste adibide bat. Aurrekoaren antzekoa da, baina oraingoan sistemaren gehikuntza-ekuazioa honako hau da:

$$y[k] = \ln[y[k-1]] + 2$$

Sistema horretan, hasierako kondizioa ezin da nulutzat jo, sistemaren izate-eremutik kanpo geratzen delako. Sistemaren izate-eremua hau da:

$$D = (0, \infty)$$

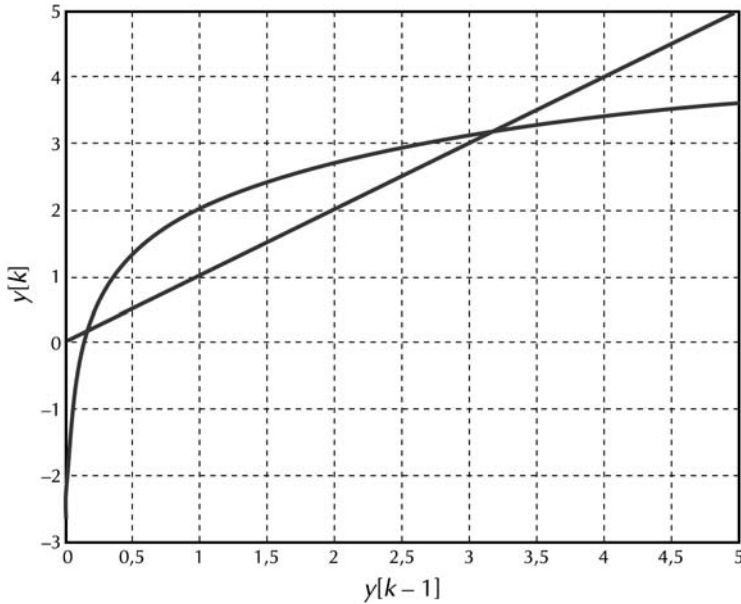
Sistema horren gehikuntza-ekuazioaren diagrama 3.5 irudian ikus dezakegu. Sistemaren emaitza existitzen den edo ez jakiteko, hasierako kondizioaren arabera kalkulatu dugu. Baina hori ongi ulertzeko, lehenik, sistemaren oreka-puntuak kalkulatu ditugu. Sistema dinamiko bat oreka-puntu batean sartuz gero, sistemak puntu horretan jarraituko du. Matematikoki, oreka-puntu baten kondizio matematikoa honela idatz genezake:

$$y[k] = y[k-1] \quad (3.20)$$

Grafikoki, 3.5 marrazkian irudikatu dugu (3.20) kondizio matematikoa; han, bi oreka-puntu aurreikusten dira. Oreka-puntu horiek analitikoki kalkulatzetik ez dago gu aztertzen ari garen sistemarentzat, ezin baita ebatzi (3.21) ekuazioa.

$$y[k] = \ln(y[k]) + 2 \quad (3.21)$$

Baina ekuazio horren oreka-puntuen kalkulua zenbaki-metodoen bitartez egin daiteke. Lehen oreka-puntua  $y_{p1} = 0,1586$  da, eta bigarren oreka-puntua  $y_{p2} = 3,1462$  da. Beraz, sistema oreka-puntu batetik igarotzen bada, han gelditzen da. Baina horrek ez du esan nahi oreka-puntu batetik gertu igarotzeagatik oreka-puntu horretan eroriko garenik.



**3.5. irudia.**  $y[k] = \ln(y[k-1]) + 2$  sistemaren diagrama.

Orain,  $\{y[k]\}$  seinalearen balioentzat 3 multzo definituko ditugu; lehen multzoa  $y_{p2}$  puntutik infinituraino doa; bigarren multzoa  $y_{p1}$  puntutik  $y_{p2}$  punturaino doa; eta hirugarren multzoa 0 puntutik  $y_{p1}$  punturaino doa. Sistema  $y_{p1}$  puntuan hasiz gero, sistema bertan geratuko da.

$$A_1 = [y_{p2}, \infty)$$

$$A_2 = [y_{p1}, y_{p2})$$

$$A_3 = [0, y_{p1})$$

Hasierako kondizioak lehen multzoan, hots,  $A_1$  multzoan, egonez gero,  $y[k+1] = y[k]$  zuzenetik behera egongo da; beraz, sistemaren  $k$  aldiuneko irteera,  $y[k]$ , aurreko aldiuneko irteerako balioa baino txikiagoa da. Hala ere,  $A_1$  multzoko edozein irudi  $y_{p2}$  baino handiagoa da; ondorioz,  $A_1$  multzoaren irudia  $A_1$  multzoa da. Beraz,  $A_1$  multzoan hasierako kondizioa betez gero, sistemaren emaitza existituko da eta bakarra izango da. Horrez gain, hasierako kondizioa  $A_1$  izanez gero, sistemak  $y_{p2}$  oreka-punturantz joko du, zeren eta  $y[k]$  balioa  $y[k-1]$  baino txikiagoa da.

$$\begin{aligned}
y[k] &= \ln(y[k-1]) + 2 < y[k-1] \\
y[n] &\geq y_{p2} : \forall n \in \{0,1,2,\dots\} \Rightarrow y_{p2} = \lim_{k \rightarrow \infty} y[k] = y_{p2} \\
f(A_1) &= A_1
\end{aligned}$$

Sistemaren hasierako kondizioa,  $y[-1]$ ,  $A_2$  multzoan hasiz gero, sistemaren balioa handituz joango da,  $y[k] = y[k-1]$  zuzenaren gainetik dagoelako. Beraz, sistemaren irteerako  $y[k]$  balio guztiak  $y_{p1}$  eta  $y_{p2}$  artean egongo dira,  $A_2$  multzoko balio guztien irudiak bi oreka-puntuaren artean baitaude.

$$y[-1] \in A_2 \Rightarrow \forall k \in \{0,1,2,\dots\}, \left. \begin{array}{l} y[k] > y[k-1] \\ y_{p1} < y[k] \leq y_{p2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} y[k] = y_{p2} \\ f(A_2) = A_2 \end{array} \right.$$

Beraz, hasierako kondizioa  $A_2$  multzoan baldin badago, sistemaren irteerako  $\{y[k]\}$  emaitza existitzen da eta bakarra da edozein  $k$  aldiunetarako. Alabaina, sistemaren hasierako kondizioa  $A_3$  multzoan izanez gero, sistemaren irteerako  $\{y[k]\}$  balioa ez da existituko aldiune guztietarako. Argi dago hasierako kondizioa  $A_3$  multzoan izanez gero  $y[k] < y[k-1]$  izango dela,  $y[k] = y[k-1]$  zuzenaren azpitik dagoelako. Bestetik, multzo horretako irudi guztiak  $y_{p1}$  oreka-puntutik behera daude, eta  $y[k-1]$ -k balio txikiak hartzen dituenean,  $y[k]$  balioa negatiboa izango da; beraz, hurrengo  $y[k+1]$  balioa ez da definituta egongo.

$$\begin{aligned}
y[-1] \in A_3 \Rightarrow \forall k \in \{0,1,2,\dots\}, \left. \begin{array}{l} y[k] < y[k-1] \\ -\infty < y[k] < y_{p1} \end{array} \right\} \Rightarrow \\
\Rightarrow \exists n, y[n] < 0 \Rightarrow y[n+1] \text{ Ez da existituko}
\end{aligned}$$

Beraz,  $f(A_3)$  multzoaren zati bat sistemaren gehikuntza-ekuaziotik kanpo dago,  $f(A_3)$  multzoko zati batek zenbaki negatiboak biltzen dituelako. Beraz, sistemaren emaitza ez da existituko aldiune guztietarako.

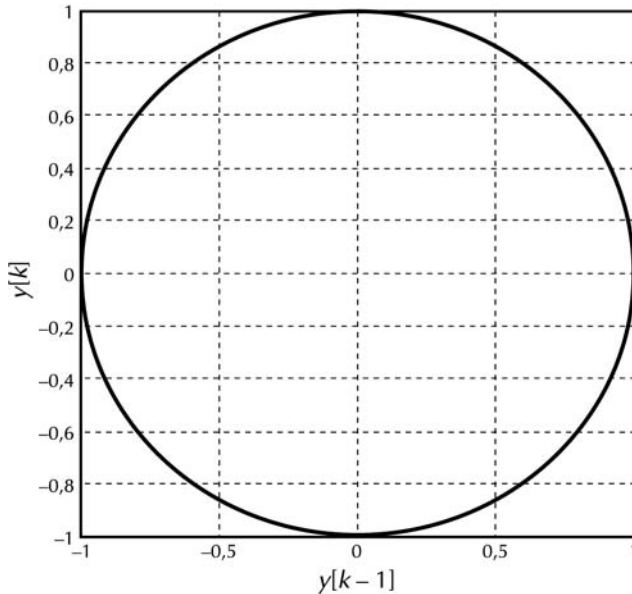
Hasierako kondizioa  $y_{p1}$  oreka-puntu izanez gero, sistema ez da puntu horretatik higituko. Dena den, nabarmena da sistema puntu horren inguruan dagoenean puntu horretatik urrundu egiten dela. Horrenbestez, oreka-puntu hori, hots  $y_{p1}$ , oreka-puntu ez-egonkortzat jotzen dugu. Bestetik,  $y_{p2}$  oreka-puntua egonkortzat joko dugu, sistema puntu horren ingurutik higituz gero sistema puntu horretara erortzen delako.

Edonola ere, ez dago horrelako sistema fisikorik, sistemaren aldagaiek aldi oro definiturik egon behar dutelako. Hala ere, sistema artifizial batzuetan sistemaren aldagai multzoak aldatu egiten dira.

3. Azter dezagun beste adibide bat. Kasu honetan sistema definitzen duen gehikuntza-ekuazioak ez du irudi bakarra. Horrenbestez, ez dago definiturik zein den hartu beharreko balioa; beraz, sistemaren irteerak  $\{y[k]\}$  emaitza bat baino gehiago izan ditzake. Horren ondorioz, funtzio bat finkatzen da gehikuntza-ekuazio gisa, funtzioek beti irudi bakarra dutelako.

$$(y[k])^2 + (y[k-1])^2 = 1 \Rightarrow y[k] = \pm\sqrt{1 - (y[k-1])^2}$$

Irudian ikus daitekeenez  $y[k-1]$  balio jakin baterako  $y[k]$  balio bi ditugu.



**3.6. irudia.**  $(y[k])^2 + (y[k-1])^2 = 1$  sistemaren diagrama.

Sistema honek emaitza bakarra izan dezan,  $y[k]$  irteera funtzio batekin definitu behar dugu. Hori lortzeko, erroketaren balio positiboa hartu behar dugu. Beraz, sistemaren gehikuntza-ekuazioa honela geratuko zaigu:

$$y[k] = \sqrt{1 - (y[k-1])^2}$$

Sistema honen emaitza existitzen dela eta bakarra dela egiaztatzeko, A multzoa definituko dugu. A multzoa  $-1$ etik  $+1$ era doa, mugak barne. A multzoko  $y[k-1]$  balio guztiak 0 eta 1 artean egongo dira. Beraz, A multzoaren irudia A multzoaren azpimultzo bat da. Horrez gain, sistema honen izate-eremua A multzoa da, zeren eta  $y[k-1]$  balio absolutua 1 baino handiagoa bada  $y[k]$  balioa ez bailitzateke existituko. Baina  $y[k-1]$  A multzoan egonez gero,  $y[k]$  balioa ere A multzoan

egongo da. Beraz, hasierako kondizioa  $A$  multzoan egonez gero, sistemaren emaitza existituko da eta bakarra izango da.

$$A = [-1, 1] \Rightarrow f(A) = [0, 1] \subseteq A$$

4. Azkenik, azter dezagun beste sistema bat. Kasu honetan gehikuntza-ekuazioa lineala izango da. Beraz, sistema honen izate-eremua zenbaki erreal guztien multzoa da. Horrez gain,  $\{x[k]\}$  sarrerako aldagai bat dugu. Sarrerako aldagai hori definituta dago  $k$  aldiune guztietarako.

$$y[k] = \frac{y[k-1]}{2} + x[k]$$

Argi dago horrelako sistema batek  $y[k]$  balioa beti definituta izango duela, baldin eta sarrera  $\{x[k]\}$  aldiune guztietarako definiturik badago. Hori hobeto egiaztatzeko,  $A$  multzoa definituko dugu;  $A$  multzoan zenbaki erreal guztiak hartuko ditugu. Sarrerako  $x[k]$  balio guztiak errealak direnez,  $y[k]$  beti zenbaki errealak izango da. Beraz,  $A$  multzoko irudia  $A$  multzoa bera izango da, baldin eta  $x[k]$  sarrerak balio errealak hartzen baditu.

$$A = \mathbb{R} \Rightarrow f(A \times \mathbb{R}) = A$$

### 3.2.2 Denborarekiko aldakorrak ez diren sistema dinamikoak

Sistema linealak aztertzen hasi baino lehen, denborarekiko aldakorrak ez diren sistemak zer diren jakin behar dugu. Denborarekiko aldakorra ez den sistema batek ez du jokaera edo dinamika aldatzen; hots, sistemaren gehikuntza-ekuazio baten denbora-aldagaiak ez du agertu behar modu zuzenean. Alabaina, denborarekiko aldakorrak diren sistemak denborarekin aldatuz doaz; horrek esan nahi du denborarekiko aldakorra den sistema baten parametroak denborarekin aldatu egiten direla. Berez, fisikako sistema gehienei parametroak aldatu egiten zaizkie denborarekin. Hala ere, parametro-aldaketa horiek denbora asko behar badute gauzatzeko, finakoak direla kontsideratzen dugu, eta denborarekiko aldakorrak ez diren eredu matematikoen bitartez aztertzen ditugu. Sistemaren parametro fisikoak azkar aldatzen badira, sistema denborarekiko aldakorra den eredu baten bitartez aztertzen da. Dena den, eredu matematiko aldakor bat noiz hartu behar den eta noiz ez jakiteko, lehenik alderatu egin behar ditugu sistemaren dinamika eta parametro horien aldakuntza-tasa denborarekiko. Aldakuntzak, sistemaren dinamikarekin konparatuz, handiak badira, eredu aldakortzat hartuko dugu. Hala ere, ahal dela, denborarekiko aldakorrak ez diren eredu matematikoak hartuko ditugu, eredu horientzat kontrol bat jartzea errazagoa baita. Denborarekiko aldakorrak ez diren

sistemek (in.: *Stationary systems*) (3.5) adierazpenaren gehikuntza-ekuazioa izango dute, baina ez dute mendekotasun zuzenik denborarekiko.

$$y[k_0] = F(\{y[k]\}, \{x[k]\}) : \forall k, k_0 \in \mathbb{N}$$

$$\{y[k]\} = \{\dots, y[-2], y[-1], y[0], y[1], \dots\} \quad (3.22)$$

$$\{x[k]\} = \{\dots, x[-2], x[-1], x[0], x[1], \dots\}$$

Denborarekiko mendekotasuna hobeto ulertu ahal izateko, adibide batzuk jarriko ditugu.

1. Sistema hau denborarekiko aldakorra da,  $y[k]$  k aldiunearen mende dagoelako.

$$y[k] = x[k-1] + (k+1)y[k-1]$$

2. Sistema hau, berriz, ez da denborarekiko aldakorra.

$$y[k] = x[k-1] + y[k-1]$$

3. Beste sistema hau denborarekiko aldakorra da, baina ez du sarrerarik.

$$y[k] = y[k-1] + k$$

4. Sistema hau, aldiz, ez da denborarekiko aldakorra; baina  $\{x[k]\}$  sarrera bat du. Beraz, sistema hau ez da denborarekiko aldakorra, nahiz eta  $\{x[k]\}$  denborarekin seinalea aldatu.

$$y[k] = y[k-1] + x[k]$$

Horrenbestez, denborarekiko aldakorrak diren sistemen eta sarrera duten sistemen artean bereizketa egiten dugu liburu honetan. Hala ere, askok bi mota horietako sistemen artean ez dute inolako bereizketarik egiten. Beraz, gauza bat da sistemak denborarekiko jokaera edo dinamika aldatzea (in.: *Non stationary systems*) eta, beste bat, sistemak denborarekin aldatzen den sarrera bat izatea (in.: *Non Autonomous systems*). Bereizketa hori ulertzeko, adibide hau erabiliko dugu.

1. Sistema hau ez da aldakorra denborarekiko, eta, hala ere, sarrera bat du, nahiz eta  $x[k]$  sarrera denborarekiko aldatu.

$$\begin{aligned} y[k] &= y[k-1] + x[k] \\ x[k] &= \begin{cases} k^2 & : k > 0 \\ 0 & : k \leq 0 \end{cases} \\ y[-1] &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

2. Sistema hau denborarekiko aldakorra da, baina sistema honek ez du inolako sarrerarik.

$$\begin{aligned} y[k] &= y[k-1] + k^2 \\ y[-1] &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

3. Sistema hau denborarekiko aldakorra da eta, aldi berean, sarrera bat du.

$$\begin{aligned} y[k] &= y[k-1] + k \cdot x[k] \\ x[k] &= \begin{cases} k : k > 0 \\ 0 : k \leq 0 \end{cases} \\ y[-1] &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Nahiz eta azken hiru sistema horiek berdinak izan, ez dute inondik inora ere jokaera dinamiko berdina. Lehengo kasuan, hots, (3.23) sistemak nahiz eta  $x[k] = k^2$  izan, horrek ez du esan nahi sarrerek beti balio horiek hartuko dituztenik kasu guztietarako. Beste era batera esan da, hiru sistema horiek ez dute sarrera guztietarako berdina jokatu. Izan ere,  $\{x[k]\}$  sarrera ez du sistemak finkatzen, sistemaren inguruneak baizik. Hori hobeto ulertu ahal izateko, ebatz ditzagun hiru sistemak, sarrerek balio hauek hartzen dituztenean ( $x[k] = k^2$ ); eta, ondoren, berriz aztertuko ditugu hiru sistemak sarrera  $x[k] = 1$  denean.

1. Honela ebatz ditzakegu (3.23) sistemak. Ondorengo ataletan aztertuko dugu nola ebatz daitekeen errazago.

$$y[k] = y[k-1] + x[k]$$

$$x[k] = \begin{cases} k^2 : k > 0 \\ 0 : k \leq 0 \end{cases}$$

$$y[-1] = 0$$

$$y[0] = 0, y[1] = 1, y[2] = 1 + 2^2, y[3] = 1 + 2^2 + 3^2, \dots, y[k] = \sum_{n=0}^{n=k} n^2$$

$y[k]$  segidaren termino orokorra bigarren mailako polinomio bat denez, badakigu seriea hirugarren mailako polinomio bat dela. Beraz, polinomio horren koefizienteak bakarrik kalkulatu behar ditugu. Horretarako, serieko lehen lau terminoak hartuko ditugu kontuan.

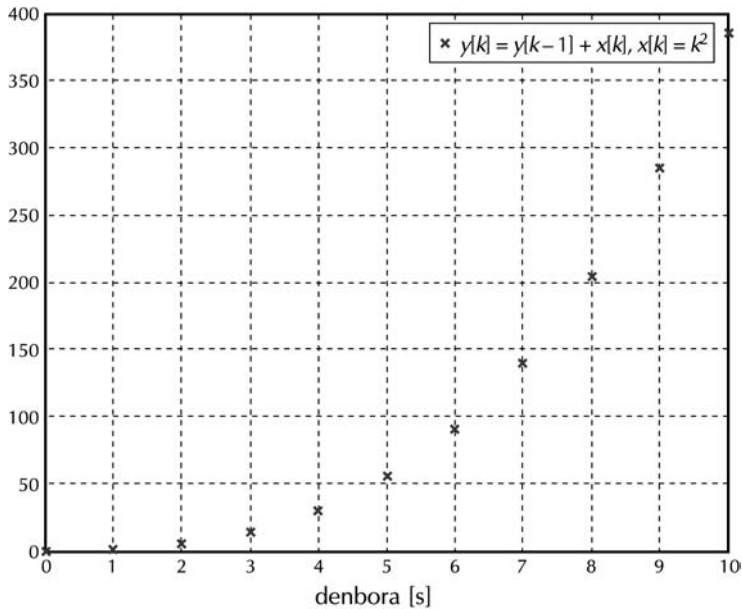
$$y[k] = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 = a_0 \\ 1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ 5 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 \\ 14 = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 = a_0 \\ \frac{1}{6} = a_1 \\ \frac{1}{2} = a_2 \\ \frac{1}{3} = a_3 \end{array} \right\}$$

Beraz, sistemaren denboran izan dugun irteera, ( $y[k]$ ), honela geratuko da:

$$y[k] = \frac{1}{6}k + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k^3$$

(3.23), (3.24) eta (3.25) sistemen erantzuna bera da.



**3.7. irudia.**  $y[k] = y[k-1] + x[k]$ , sistemaren erantzuna, sarrera  $x[k] = k^2$  izanik.

Orain, sistema bakoitzari dagokion sarrera aldiune bat atzeratzen dugu; (3.23) sistema honela geratuko litzateke. Sistemaren erantzuna, ikus daitekeenez, aldiune bat atzeratu da.

$$y[k] = y[k-1] + x[k]$$

$$x[k] = \begin{cases} (k-1)^2 : k > 1 \\ 0 : k \leq 1 \end{cases}$$

$$y[-1] = 0$$

$$y[-1] = 0, y[0] = 0, y[1] = 0, y[2] = 1, y[3] = 1 + 2^2, y[4] = 1 + 2^2 + 3^2, \dots$$

$$y[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{n=k-1} n^2 : k \geq 1 \\ 0 : k < 1 \end{cases} \Rightarrow y[k] = \begin{cases} \frac{1}{6}(k-1) + \frac{1}{2}(k-1)^2 + \frac{1}{3}(k-1)^3 : k > 1 \\ 0 : k \leq 1 \end{cases}$$

Orain (2.24) sistemaren erantzuna kalkulatu dugu. Sistema horrek ez du inolako sarrerarik, nahiz eta  $\{x[k]\}$  seinalea atzeratu, eta sistemaren erantzuna ez da aldatzen. Beraz, sistema horren erantzuna honela geratuko da:

$$\left. \begin{aligned} y[k] &= y[k-1] + k^2 \\ y[-1] &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y[k] = \frac{1}{6}k + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k^3$$

Azkenik, (2.25) sistema aztertuko dugu. Kasu horretan sistemaren sarrera aldiune bat atzeratuko dugu. Sistemaren erantzuna aurreko teknika erabiliz kalkula dezakegu.

$$y[k] = y[k-1] + k \cdot x[k]$$

$$x[k] = \begin{cases} k-1 : k > 1 \\ 0 : k \leq 1 \end{cases}$$

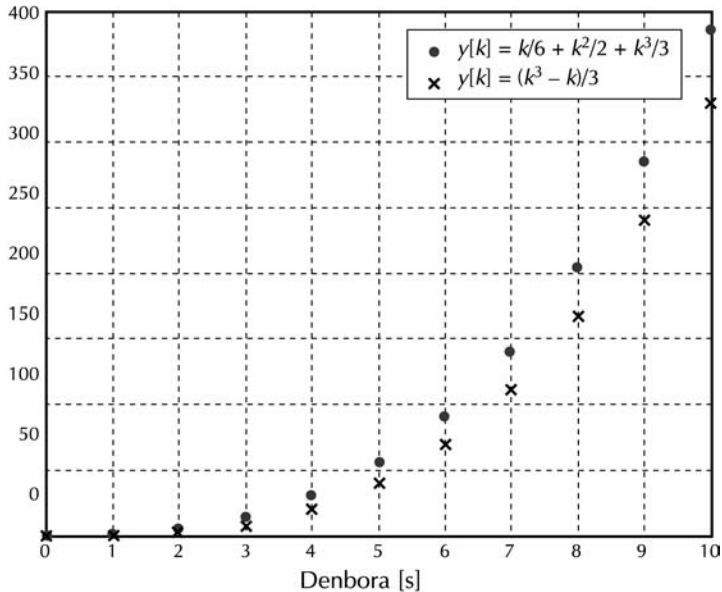
$$y[-1] = 0, y[0] = 0, y[1] = 0, y[2] = 2 \cdot 1, y[3] = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1, \dots, y[k] = \sum_{n=2}^{n=k} n(n-1)$$

$$y[k] = \sum_{n=2}^{n=k} n^2 - \sum_{n=2}^{n=k} n = -\frac{(k+2)(k-1)}{2} + \sum_{n=0}^{n=k} n^2 - 1 =$$

$$= -\frac{(k+2)(k-1)+2}{2} + \frac{1}{6}k + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k^3$$

$$y[k] = -\frac{1}{3}k + \frac{1}{3}k^3$$

Beraz, sistema horiek ez dute inolaz ere jokaera dinamiko berdina. Nabarmena da sistemaren sarrerak eragin handia duela. Bestalde, sistema denborarekiko aldakorra izateak sistemaren jokaera guztia aldatzen du.



**3.8. irudia.**  $y[k] = y[k - 1] + kx[k]$  sistemaren erantzunak daude irudikatuta.  $x[k] = k$  eta  $x[k] = k - 1$  sarrerak dituenen,  $x$  markak dira sistemaren erantzuna; sarrera  $x = k - 1$  denean, eta  $\bullet$  markak dira sistemaren erantzuna sistemaren sarrera  $x = k$  denean.

3.8 irudian ikus daitekeenez, sistemaren sarrera atzeratzen bada, sistemaren erantzuna ere atzeratu egiten da, sistema kausala baita. Baina ohartzen bagara, sistema hori denborarekiko aldakorra da, sarrerako balioa  $k$  aldiuneagatik biderkatzen baitugu. Horrenbestez, sistemaren sarrera atzeratzearekin sistemaren erantzuna ere atzeratzeaz gain, sistemaren erantzunaren itxura ere aldatu egingo da, sistemaren portaera aldatu egiten baita. Adibide horiekin hau ondoriozta dezakegu: sistema batek sarrera bat eduki dezake, baina, aldi berean, sistemak ez du denborarekiko aldakorra izan beharrik.

### 3.3 DENBORAREKIKO ALDAKORRAK EZ DIREN SISTEMA DINAMIKO KAUSALAK, LINEALAK ETA HASIERAKO KONDIZIOAK NULUAK DITUZTENAK

Liburu honetan, sistema linealak landuko ditugu. Horrez gain, kontsideratuko dugu sistema horiek ez direla denborarekiko aldakorrak eta hasierako kondizioak nuluak dituztela. Dena den, automatikan seinale diskretuekin lan egitean, sistemaren laginketa-periodoa edo denbora-tartea kontuan hartuko dugu. Beraz, automatikan  $\{y[k]\}$  seinale diskretu bat aztertzean, kontrolaren  $h$  lagintze-denbora edo -tartea atxikiko dugu. Laginketa-tarte horrek  $[s/\text{lagin}]$  unitateak izaten ditu. Beraz,  $\{y[k]\}$  seinale diskretu bat  $h$  laginketa tartearekin lagindua izan bada,  $\{y[k], h\}$  modura izendatuko dugu. Bestalde, seinalearen  $k$  aldiune jakin bateko balioa izendatu nahiko bagenu, honela idatziko genuke:  $y(kh)$ . Hortik aurrera,  $y[k]$  balioa finkatu beharrean  $y(kh)$  modura izendatuko dugu,  $h$  laginketa tartea atxikiz.

Bestalde, sistema linealak aztertzen hasi baino lehen, 1. mailako bulkada definituko eta sistemen bulkada-erantzuna aztertuko dugu, sistema linealak aztertzean hori oso garrantzitsua baita.

#### 3.3.1 1. mailako bulkadaren definizioa

1. mailako bulkada  $\{\Delta(kh)\}$  seinale diskretua da, eta honela definitzen dugu:

$$\Delta(kh) = \begin{cases} 1: k = 0 \\ 0: k \neq 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

$k = 0$  denean 1 balioa hartzen du 1. mailako bulkadak. Beste balio guztietarako, 1. mailako bulkadak zero balioa hartzen du, izan zuen. 1. mailako bulkada eta  $\delta(t)$  Dirac bulkada bereizi behar ditugu.

#### 3.3.2 Bulkada-erantzuna

Sistema baten sarreran 1. mailako bulkada edukiz gero, sistemak izango duen irteerak zero aldiuneko bulkada-erantzuna izango du. Hori hobeto uler dezagun, adibide bat aztertuko dugu: demagun lehen mailako sistema bat dugula:

$$y(kh) = a_1 y(kh - h) + b_0 u(kh)$$

Kalkula dezagun sistema honen bulkada-erantzuna. Kasu honetan hasierako kondizioak  $y(-1)$  zero izan behar du, bulkadaren eragina aztertu nahi dugulako.

$$y(0) = g_0(0) = b_0 x(0) = b_0$$

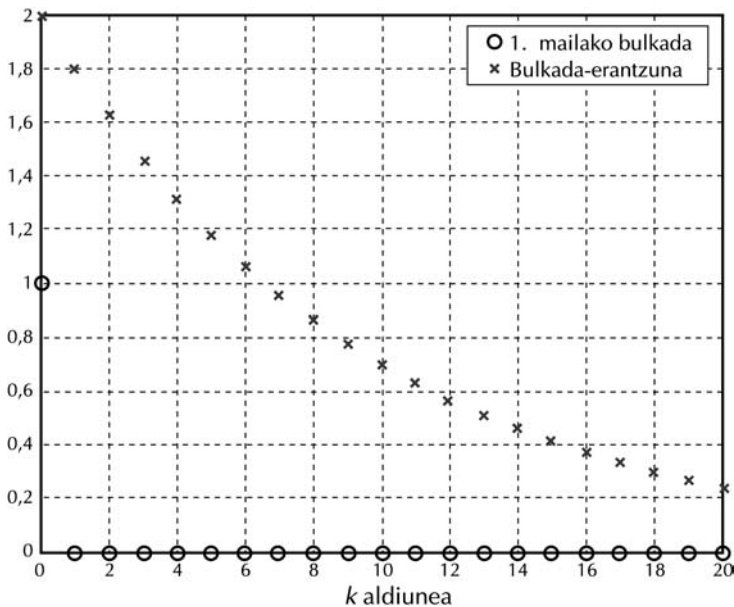
$$y(h) = g_0(h) = a_1 y(0) + b_0 u(h) = a_1 b_0$$

$$y(2h) = g_0(2h) = a_1 y(h) + b_0 u(2h) = a_1^2 b_0$$

...

$$y(kh) = g_0(kh) = a_1 y(kh - h) + b_0 u(kh) = a_1^k b_0$$

$$g_0(kh) = \begin{cases} a_1^k b_0 & : k \geq 0 \\ 0 & : k < 0 \end{cases}$$



**3.9. irudia.**  $y(kh) = a_1 y(kh - h) + b_0 x(kh)$  sistemaren zero aldiunekoko bulkada-erantzuna irudikatu dugu. Sistema honen  $h$  laginketa tarte  $h = 1$  [s/lagin] delarik.

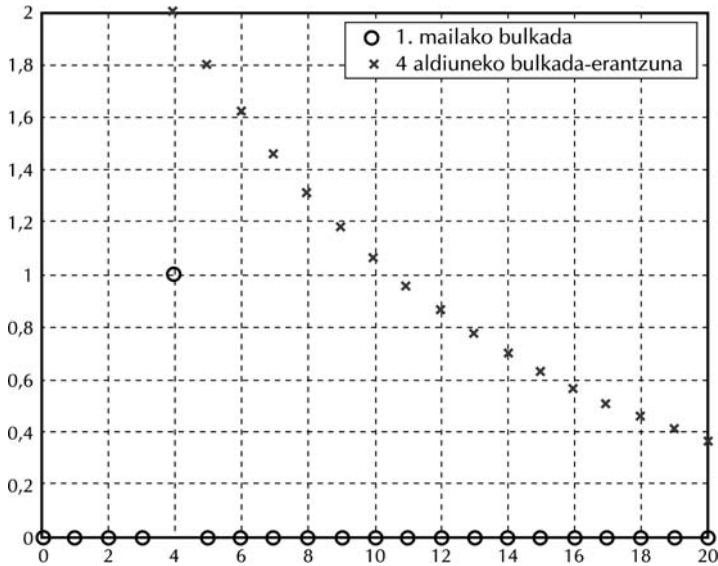
### ***I aldiunekoko bulkada-erantzunaren definizioa***

Sarreran,  $I$  aldiunean gertatzen den 1. mailako bulkadaren aurrean sistema batek duen  $G\{\Delta(kh - lh)\} = \{g(kh, lh)\}$  irteera ***I aldiunekoko bulkada-erantzuna*** dela esaten dugu.

Bulkada-erantzun hau bi aldagaien mende dago:

1. Denboraren mende, hots,  $k$  aldiunearen mende.
2. 1. mailako bulkada aplikatu den  $l$  aldiunearen mende

Ondoko irudian ikus daiteke sistema baten  $l = 4$  aldiuneko 1. mailako bulkada-erantzuna. Beraz, sistemaren erantzuna  $k = 4$  aldiunea baino lehen balio nuluak hartzen ditu, hartu dugun sistema kausala delako. (Horrek ez du beti zertan bete; hala ere, automatikako esparruan kondizio hori beti betetzen da).



**3.10. irudia.** Sistema baten 1. mailako erantzuna  $l = 4$  aldiunean aplikaturik.

Orain, sistema baten 1. mailako bulkada-erantzuna aztertuko dugu. Automatikan garrantzi handiko sistema den integratzaile baten bulkada-erantzuna kalkulatu dugu:

$$y(kh) = \sum_{q=0}^{q=k-1} u(qh)h \quad (3.27)$$

Kontuan izan behar dugu  $h$  dela lagin-tartea. Ikus daitekeenez,  $l = 0$  denean, hots 1. mailako bulkada  $k = 0$  aldiunean gertatzen denean, integratzaile horren erantzuna honela kalkula dezakegu:

$$y(0) = 0$$

$$y(h) = h \cdot u(0) = h$$

$$y(2h) = y(h) + h \cdot u(1) = h$$

...

$$y(kh) = y(kh - h) + h \cdot u(kh - h) = h$$

$$g_0(kh) = \begin{cases} h : k > 0 \\ 0 : k \leq 0 \end{cases}$$

Bestalde, sistemaren  $l$  aldiuneko 1. mailako erantzuna erraz kalkula daiteke, eta matematikoki honela idatz dezakegu.

$$g(kh, lh) = \begin{cases} h : k > l \\ 0 : k \leq l \end{cases}$$

### 3.3.3 Denborarekiko aldakorra ez den sistema kausal baten erantzuna (hasierako kondizioak nuluak dituen sistema lineala)

Sistema linealak aztertzen hasi baino lehen, azpimarratu behar da kausalitateak, denborarekiko aldakorra ez izateak eta hasierako kondizioak nuluak izateak bulkada-erantzunean duten eragina handia dela.

1. Sistema bat kausala bada,  $l$  aldiuneko bulkada-erantzunak kondizio hori betetzen du. Izan ere,  $l$  aldiunea baino lehen sarreran balio nuluak baditugu, nahitaez sistemaren irteerak nulua izan behar du, bestela sistema ez bailitzateke izango kausala.

$$g(kh, lh) = 0 \quad 0 \leq k \leq l \quad (3.28)$$

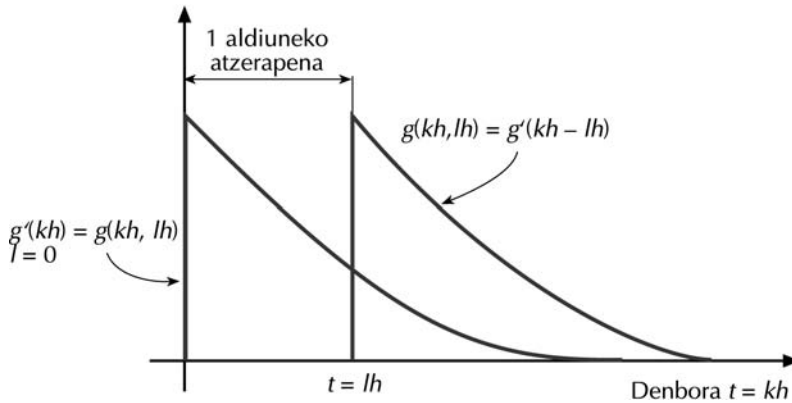
2. Sistema baten hasierako kondizioak nuluak badira,  $k$  negatiboentzat sarrerako eta irteerako balio guztiak nuluak dira.

$$y(kh) = 0 : k < 0 \quad (3.29)$$

$$x(kh) = 0 : k < 0$$

3. Sistema bat denborarekiko aldakorra ez bada,  $l$  aldiuneko bulkada-erantzuna da 1 aldiunez atzeratuta dagoen zero aldiuneko bulkada-erantzuna.

$$g(kh, lh) = g_0(kh - lh) \quad (3.30)$$



**3.11. irudia.** Denborarekiko aldakorra ez den sistema baten zero aldiuneko eta  $l$  aldiuneko bulkada-erantzunaren irudikapena.

Aurreko hiru baldintzek bulkada-erantzunean duten eragina aztertu eta gero, sistema lineal baten ezaugarriak azalduko ditugu.

$$\{y(kh)\} = G(\{x(kh)\}) \text{ lineala bada} \Rightarrow$$

$$\text{Izan dezagun } \{y_1(kh)\} = G(\{x_1(kh)\}) \text{ eta } \{y_2(kh)\} = G(\{x_2(kh)\}) \Rightarrow \quad (3.31)$$

$$\{x_3(kh)\} \text{ non } x_3(kh) = \alpha_1 x_1(kh) + \alpha_2 x_2(kh) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\{y_3(kh)\} = G(\{x_3(kh)\}) = \alpha_1 \cdot G(\{x_1(kh)\}) + \alpha_2 \cdot G(\{x_2(kh)\})$$

Beraz, sistema lineal baten sarreran bi seinaleen arteko konbinazio lineala izanez gero, irteeran seinale horien erantzunaren konbinazio lineala izango dugu. Beraz, sistema linealek gainezarpren-printzipioa betetzen dute, hau da, sistemaren irteera kalkulatzeko, sarrerako seinale bakoitzak eragiten duen irteera kalkula daiteke, eta, ondoren, irteera partzial horiek guztiak batu besterik ez dugu egin behar.

### 3.3.3.1 Konboluzioa

Atal honetan, denborarekiko aldakorra ez den eta hasierako kondizioak nuluak dituen sistema kausal eta lineal baten irteera kalkulatu dugu. Horretarako, sistemaren bulkada-erantzuna zein den jakin beharko dugu. Aurreko kondizio guztiak betetzen badira, frogatu dezakegu horrelako sistema baten irteera konboluzioaren bitartez kalkula daitekeela.

Frogapena:

Sarrerako seinalea  $\{x(kh)\}$  bada, 1. mailako bulkada-segida baten bitartez adieraz daiteke. Gogoan izan aldiune negatiboentzat sarrerako eta irteerako balio guztiak nuluak direla.

$$x(kh) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} x(lh) \cdot \Delta(kh - lh) \quad (3.32)$$

Batukari hori hobeto ulertu ahal izateko, har dezagun  $\{x(kh)\}$  seinale hau.

$$x(kh) = \begin{cases} 2 : k = 0 \\ 3 : k = 1 \\ -1 : k = 2 \\ 2 : k = 3 \\ 0 : \forall k \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\} \end{cases}$$

$$x(kh) = x(0) \cdot \Delta(kh) + x(h) \cdot \Delta(kh - h) + x(2h) \cdot \Delta(kh - 2h) + x(3h) \cdot \Delta(kh - 3h)$$

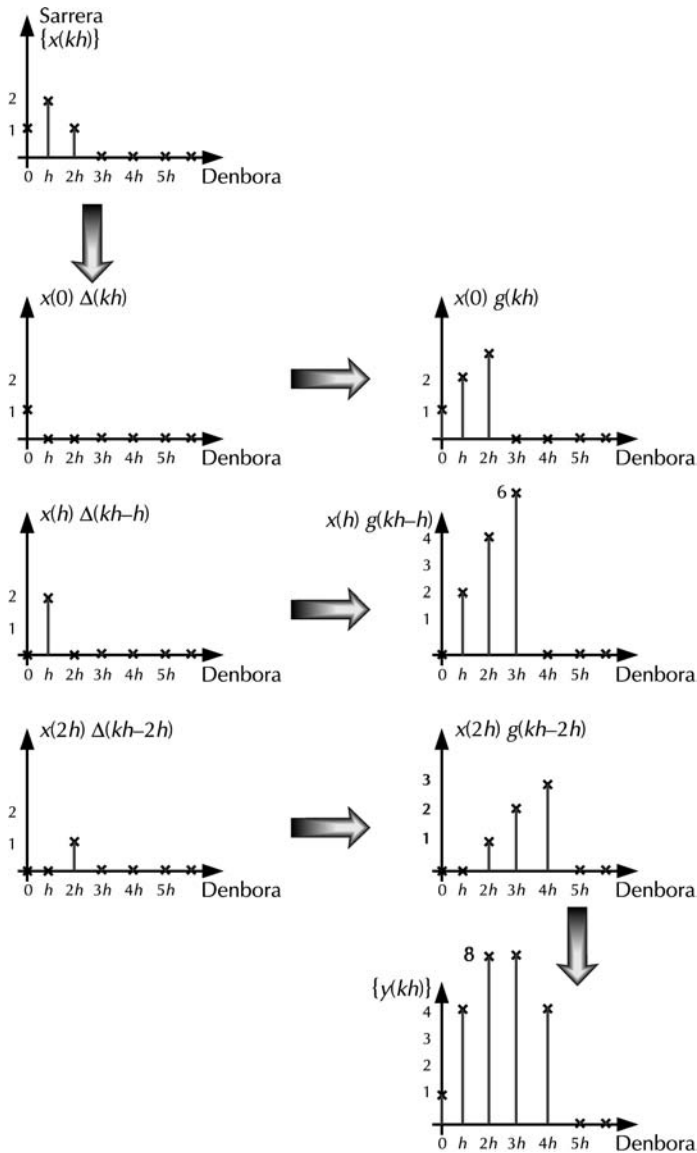
$$x(kh) = 2 \cdot \Delta(kh) + 3 \cdot \Delta(kh - h) - \Delta(kh - 2h) + 2 \cdot \Delta(kh - 3h)$$

Seinale diskretu oro 1. mailako bulkada-segida batez adieraz daitekeela argitu eta gero, aztertuko dugu nola kalkula daitekeen sistemaren irteera  $\{x(kh)\}$  sarrerako seinale baten aurrean.

$$\begin{aligned} y(kh) &= G(\{x(kh)\}) = G\left(\sum_{l=0}^{l=+\infty} x(lh) \cdot \Delta(kh - lh)\right) \Rightarrow \\ y(kh) &= \sum_{l=0}^{l=+\infty} x(lh) \cdot G(\Delta(kh - lh)) = \sum_{l=0}^{l=+\infty} x(lh) \cdot g(kh, lh) \Rightarrow \\ y(kh) &= \sum_{l=0}^{l=+\infty} x(lh) \cdot g(kh - lh) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Bestalde, badakigu sistema ez dela denborarekiko aldakorra;  $l$  aldiuneko bulkada-erantzuna, ondorioz,  $l$  aldiunez atzeratuta dagoen zero aldiuneko bulkada-erantzuna da. Horrez gain, sistema kausala denez bulkada-erantzunak nulua behar du izan  $k$  aldiune negatiboentzat.

$$\begin{aligned} g(kh) &= 0 \quad k < 0 \\ y(kh) &= \sum_{l=0}^{l=+\infty} x(lh) \cdot g(kh, lh) \Rightarrow y(kh) = \sum_{l=0}^{l=k} x(lh) \cdot g(kh - lh) \end{aligned} \quad (3.34)$$



**3.12. irudia.** Denborarekiko aldakorra ez den eta hasierako kondizioak nuluak dituen sistema lineal eta kausal baten konboluzioaren kalkulua.

(3.34) ekuazioari konboluzio deritzogu. Beraz, sarrerako sistemaren bulkada-erantzunarekin konboluzioa eginez, sistemaren irteera kalkula daiteke. Horrenbestez, sistema lineal bat, hasierako kondizioak nuluak dituen, guztiz definiturik geratzen da bere bulkada-erantzunaren bitartez; hau da, prozesua zehatz-mehatz adierazten

dugu, sarrera eta bulkada-erantzunaren bitartez  $\{y(kh)\}$  erantzuna kalkula dezakegulako. Hala ere, esan behar da azalpen hau, berez, sistema kanpotik behatzen duen teknika bat dela, hau da, sarrera eta irteera lotzen ditu, sistemako barne-aldagairik erabiltzen ez duelako esplizituki.

Aurreko adibidea aztertuko dugu berriro ere. Integratzaile digitalaren bulkada-erantzuna honako hau da:

$$g(kh, lh) = \begin{cases} h : l \leq k-1 \\ 0 : l > k-1 \end{cases}$$

Sistema horren irteera konboluzioaren bidez kalkula genezake:

$$y(kh) = \sum_{l=0}^{k-1} u(lh)h$$

Adierazpen hau bezalakoa izango da:

$$y(k_0h) = \sum_{k=0}^{k_0-1} u(kh)h$$

Konboluzioa, sarritan, honela idatzi ohi da:

$$\sum_{l=0}^{l=k} u(lh) \cdot g(kh - lh) = u(kh) * g(kh) \quad (3.35)$$

### **Konboluzioaren propietate garrantzitsuenak:**

$$1. \text{ Trukatze-propietatea: } u(kh) * g(kh) = g(kh) * u(kh) \quad (3.36)$$

$m$  parametroa  $m = k - l$  bezala definituz gero,  $l = k - m$  lortuko dugu; beraz,

$$y(kh) = \sum_{m=k}^{m=0} u(kh - mh) \cdot g(kh)$$

2. Elkartze-propietatea:

$$[u(kh) * g_1(kh)] * g_2(kh) = u(kh) * [g_1(kh) * g_2(kh)] \quad (3.37)$$

Hori berridatziz, hau lortuko dugu:

$$y(kh) = u(kh) * \sum_{l=0}^k g_2(lh) g_1(kh - lh) = u(kh) * c(kh)$$

Non 
$$c(kh) = \sum_{l=0}^k g_2(lh) g_1(kh - lh)$$

3. Banatze-propietatea:

$$u(kh) * [v(kh) + w(kh)] = u(kh) * v(kh) + u(kh) * w(kh) \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} y(kh) &= \sum_{i=0}^k u(ih) c(kh - ih) = \sum_{i=0}^k u(ih) \sum_{l=0}^k g_2(lh) g_1(kh - ih - lh) = \\ &= \sum_{i=0}^k g_2(lh) \sum_{i=0}^k u(ih) g_1(kh - ih - lh) = \sum_{i=0}^k g_2(lh) [u(kh) * g_1] = \\ &= g_2(kh) * [u(kh) * g_1(kh)] \end{aligned}$$

4. 1. mailako bulkadak elementu neutro gisa jokatzeko du:  $u(kh) * \Delta(kh) = u(kh)$

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = \\ = b_0 u(k+m) + b_1 u(k+m-1) + \dots + b_m u(k) \end{aligned} \quad (3.39)$$

$a_i, i = 1, 2, \dots, n$  eta  $b_j, j = 1, 2, \dots, m$ ;

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = \\ = b_0 u(k-d) + b_1 u(k-d-1) + \dots + b_m u(k-d-m) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Adibide gisa, denbora jarraituko PI kontrola digitalizatuko dugu.

$$u(t) = k_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(c) dc \right]$$

PI kontrolaren parametroak hauek dira:  $T_i, k_p, y_c(t)$ . Kontrolaren irteera  $u(t)$  seinalea da, eta  $e(t)$ , kontrolera sartzen dugun erroreaken neurria. Denbora laginduz, ekuazio hauek lortuko ditugu:

$$t_k = kh \quad h \in \mathbb{R} \quad h > 0$$

$t = kh$  denean,

$$u(kh) = k_p \left[ e(kh) + \frac{1}{T_i} \int_0^{kh} e(c) dc \right]$$

Integrala kalkulatzeko, batukari batez baliatzen gara.

$$\text{Hala, hau esan daiteke: } \int_0^{kh} e(c) dc = \sum_{l=0}^{k-1} e(lh)h$$

$$\text{Non} \quad u(kh) = k_p \left[ e(kh) + \frac{1}{T_i} \sum_{l=0}^{k-1} e(lh)h \right] \quad (3.41)$$

Berdintza  $kh - h$  aldiunerako idatziko dugu:

$$u(kh - h) = k_p \left[ e(kh - h) + \frac{1}{T_i} \sum_{l=0}^{k-2} e(lh)h \right] \quad (3.42)$$

(3.42) adierazpena (3.41)ean ordezkatuz gero:

$$u(kh) - u(kh - h) = k_p \left[ e(kh) - e(kh - h) + \frac{h}{T_i} e(kh - h) \right] \quad (3.43)$$

erlazioa honela adieraz daiteke:

$$y(kh) = -\sum_{i=1}^n a_i y(kh - ih) + \sum_{j=1}^m b_j u(kh - dh - jh) \quad (3.44)$$

$u(-h)$ ,  $u(-2h)$ , ...,  $u(-nh)$  zenbakiak eta  $y(-h)$ ,  $y(-2h)$ , ...,  $y(-nh)$  hasierako kondizioak zero dira, berdintza horrek  $\{y(kh) \mid k \geq 0\}$  irteera  $\{u(kh) \mid k \geq 0\}$ :

Beraz, kontrola diskretu bihurtu eta gero, ekuazio hauek lortuko ditugu:

$$u(kh) = u(kh - h) + \left( \frac{h}{T_i} - 1 \right) e(kh - h)$$

$$u(kh) = u(kh - h) + k_p e(kh) + k_p \left( \frac{h}{T_i} - 1 \right) e(kh - h)$$

$e(-h) = u(-h) = 0$  denean,  $\{u(kh) \mid k \geq 0\}$  erantzuna,  $\{e(kh) \mid k \geq 0\}$  sarrerako edozein konbinaziotarako, kalkulatzeko modu bakarra errepikapena erabiltzea da.

$$u(0) = k_p e(0)$$

$$u(h) = u(0) + k_p e(h) + k_p \left( \frac{h}{T_i} - 1 \right) e(0)$$

$$u(2h) = u(h) + k_p e(2h) + k_p \left( \frac{h}{T_i} - 1 \right) e(h)$$

.

.

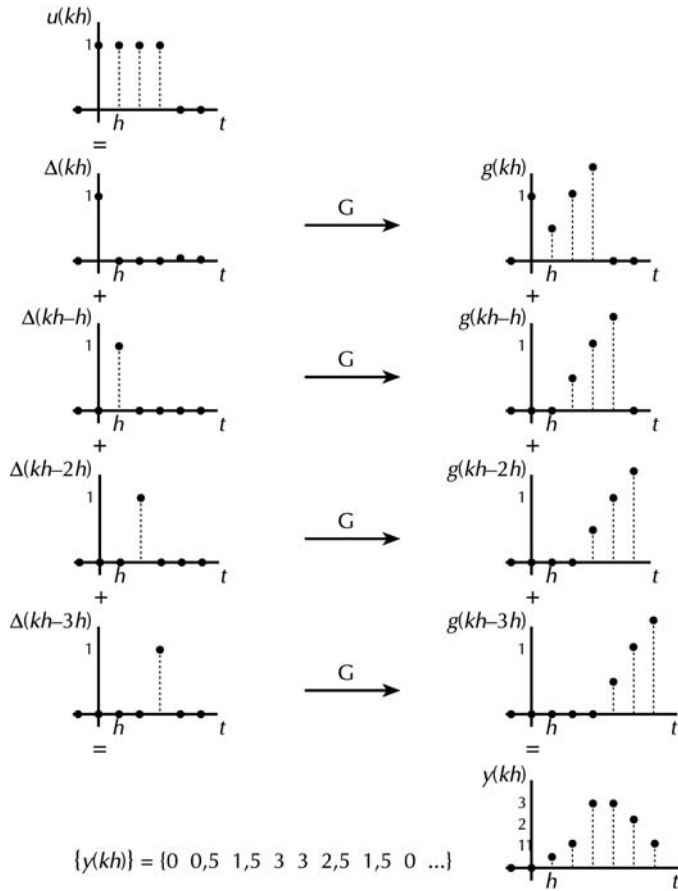
.

$$u(kh) = u(kh - h) + k_p e(kh) + k_p \left( \frac{h}{T_i} - 1 \right) e(kh - h)$$

---

### 3.1 ariketa

Har dezagun lineala, kausala eta denborarekiko aldakorra ez den eta geldiuenean dagoen  $\{g(kh)\}$  bulkada-erantzuna. Adierazi grafikoki, konboluzioa erabiliz,  $\{1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots\}$  seinaleak kitzikatutako prozesuaren irteera.



### 3.2 ariketa

Frogatu bi eratara integratzaile digitalaren  $y(k_0h)$  irteera  $k_0h$  aldiunerako.

Lehenengo era da (3.1) berdintzan integratzaile digital baten ekuazioaren ordezkapena egitea:

$$y(0) + \sum_{k=0}^{k_0} u(kh) \cdot h = y(0) + \sum_{k=0}^{k_0-1} u(kh) \cdot h + u(k_0h) \cdot h$$

Bigarren era da integratzaile digitalaren ekuazioaren bitartez lortzea:

$$y(h) = y(0) + u(0) \cdot h, 2$$



$$y(2h) = y(h) + u(h) \cdot h = y(0) + u(0) \cdot h + u(h) \cdot h$$



...

$$y(k_0h) = y(k_0h - h) + u(k_0h - h) \cdot h = y(0) + \sum_{k=0}^{k_0-1} u(kh) \cdot h$$

### 3.3 ariketa

Integratzaile digital bat dugu. Kalkulatu  $\{y(kh): k \geq 0\}$ , sistema horren erantzuna  $\{1, 1, 1, \dots\}$  sarrerarentzat  $y(0) = 0$  denerako eta  $y(0) = 1$  denerako. Azaldu erantzunak.

$y(0) = 0$  denerako:

$$\{y(kh)\} = \{0, h, 2h, 3h, 4h, \dots\}$$

eta  $y(0) = 1$  denerako:

$$\{y(kh)\} = \{1, 1+h, 1+2h, 1+3h, 1+4h, \dots\}$$

Seinaleak bestelakoak izango dira sistema geldiuenean, 0 aldiuenean, dagoenean.

### 3.4 ariketa

Aztertu PI kontrol diskretu baten bulkada-erantzuna, eta kalkulatu kontrolaren  $u(kh)$  irteera konboluzioaren bidez.

Ekuazio honen bitartez lortzen da PI kontrol diskretu baten irteera:

$$u(kh) = K_p \left[ e(kh) + \frac{1}{T_i} \sum_{l=0}^{k-1} e(lh) \cdot h \right]$$

Non bulkada-erantzuna hau baita:

$$\{g(kh)\} = \left\{ K_p, K_p \frac{h}{T_i}, K_p \frac{h}{T_i}, \dots \right\}$$

PI kontrol diskretu baten konboluzioa honela adierazten da:

$$\begin{aligned} u(kh) &= \sum_{l=0}^k e(lh) \cdot g(kh - lh) = \\ &= e(kh) \cdot g(0) + \sum_{l=0}^{k-1} e(lh) \cdot g(kh - lh) = \\ &= K_p e(kh) + \frac{K_p}{T_i} \sum_{l=0}^{k-1} e(lh) \cdot h \end{aligned}$$

### 3.5 ariketa

$y(k) = g(k) * u(k)$  konboluzioa dugu;  $y(k)$  da irteera eta  $u(k)$ , sarrera. Frogatu matrize-ekuazio honen bitartez  $y(k)$  irteera adieraz daitekeen edo ez:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(0) & & & & \\ g(1) & g(0) & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g(k) & g(k-1) & \vdots & \vdots & g(1) & g(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(k) \end{bmatrix}$$

Kalkulatu sistema baten  $g(k)$  bulkada-erantzuna; sarrerak  $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$  balioak hartzen ditu eta irteerak  $\{8, 12, 14, 15, 15,5, 15,75, \dots\}$  balioak. Ondoren, kalkulatu sistemaren sarrera, sistemaren bulkada-erantzunak  $\{1, 2, 4, \dots\}$  itxura badu, eta irteera  $\{1, 7/3, 43/9, \dots\}$  itxurakoa bada.

Sistemaren konboluzioa garatzen badugu (hasierako kondizioak nuluak direla pentsatuta), erlazio hauek lortuko ditugu:

$$y(0) = u(0) g(0)$$

$$y(1) = u(0) g(1) + u(1) g(0)$$

...

$$y(k) = u(0) g(k) + u(1) g(k-1) + \dots + u(k-1) g(1) + u(k) g(0)$$

Ekuazio horiek matrize-ekuazio gisa idatziko ditugu:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(0) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ g(1) & g(0) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & g(0) & \cdot \\ g(k) & g(k-1) & \cdot & \cdot & g(1) & g(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(k) \end{bmatrix}$$

Sarrerak  $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$  eta irteerak  $\{8, 12, 14, 15, 15,5, 15,75, \dots\}$  balio hauek izanik, hau dugu:

$$\begin{cases} 8 = g(0) \\ 12 = g(1) + g(0) \\ 14 = g(2) + g(1) + g(0) \\ 15,5 = g(3) + g(2) + g(1) + g(0) \\ 15,75 = g(4) + g(3) + g(2) + g(1) + g(0) \end{cases}$$

Beraz, ekuazio-sistema ebatziz, bulkada-erantzunak balio hauek hartuko ditu:  $\{8, 4, 2, 1,5, 0,25, \dots\}$

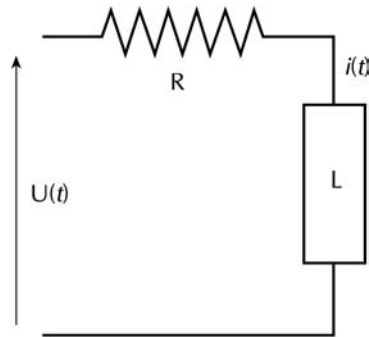
Bestalde, bulkada-erantzunetik  $\{1, 2, 4, \dots\}$  eta irteeratik  $\{1, 7/3, 43/9, \dots\}$  hasten bagara, hau dugu:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \\ 43 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix}$$

Azkenik, sarrerak  $\{1, 1/3, 1/9, \dots\}$  balioak hartzen dituelarik.

## 3.6 ariketa

Frogatu RL zirkuitu elektriko baten simulazio-eredua lehen mailako gehikuntza-ekuazio baten bidez adieraz daitekeela.



$U(t)$  da zirkuitu honen elikatze-tentsioa. Erresistentziatik eta induktantziatik igarotzen den korronea  $i(t)$  da. Erresistentziak  $R$  ohm ditu eta induktantziak  $L$  henry. Beraz, Kirchoffen legeen bitartez lor daiteke sistema honen eredu matematiko bat.

$$U(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

Eredu matematiko hori denbora jarraituko eredu bat da, eta ordenagailu bidez simulatu nahi badugu, nolabait gehikuntza-ekuazio bat lortu behar dugu. Denborarekiko jarraitua den eredu matematiko batetik denborarekiko diskretua den eredu bat lortzeari diskretizazio deritzogu. Deribatuak gehikuntzen bitartez adieraztea da diskretizazioaren pausorik zailenatariko bat. Demagun sistema simulatzeko  $h$  lagin-tarte bat dugula (simulazio-esparruari integrazio-tarte deritzogu); hori kontuan hartuta, deribatua gehikuntza-ekuazio batean ordeztuko, Eulerren hurbilketa baliatuko gara.

$$\frac{di(t = kh)}{dt} \approx \frac{i(kh) - i(kh-h)}{h}$$

Ondorioz, lehen mailako gehikuntza-ekuazio honen bidez adieraz daiteke sistema:

$$(L + Rh) \cdot i(kh) - Li(kh - h) = hu(kh)$$

$$i(kh) = \frac{Li(kh - h) + hu(kh)}{(L + Rh)}$$

Beraz, ekuazio horren bidez eta hasierako kondizioa jakinez gero, ordenagailu bidez sistema simula daiteke. Simulazio horri Eulerren integrazio-metodoa deritzogu.

### 3.7 ariketa

Diferentzia-ekuazio hau dugu:

$$y(kh) - 2y(kh - h) = u(kh)$$

Hasierako kondizioak nuluak izanik, aztertu  $y(3h)$ ,  $\{u(kh)\} = 5\{\Delta(kh)\}$  denean.

Gehikuntza-ekuazioa modu errepikakorrean erabiliz lortzen da  $y(3h)$ , ariketaren emaitza, hain zuzen ere:

$$y(0) = 2y(-h) + u(0) = 5$$

$$y(h) = 2y(0) + u(h) = 10$$

$$y(2h) = 2y(h) + u(2h) = 20$$

$$y(3h) = 2y(2h) + u(3h) = 40$$

# 4

## Z transformatua

### 4.1 SARRERA

Atal honetan aztertuko dugun tresna matematikoa oinarritzkoa da denborarekiko aldakorrak ez diren sistema lineal diskretuen ebazpenerako. Tresna hori Z transformatua da, eta horren bitartez ikusi ahal izango dugu nola ebatz daitezkeen gehikuntza-ekuazio linealak. Z transformatuaren bitartez, sistemen transferentzia-funtzioak definituko ditugu. Konturatuko gara sistema linealen hasierako baldintzek ez dutela eragin handirik egoera iraunkorrean, baldin eta sistema horiek egonkorak badira. Ikusiko dugu, orobat, sistemek erantzun ezberdinak dituztela: sistemaren sarrerak sortutako erantzuna eta sistemaren berezko erantzuna. Beraz, atal honetan aztertuko dugun tresna matematikoa, hots, Z transformatua, oinarritzkoa da; beraz, ezinbestekoa dugu atal hau irakurtzea eta ongi ulertzea automatikan zer edo zer egiteko gai izan nahi badugu. Automatika klasikoan, sistemak ez dira lagintzen, eta ekuazio diferentzialetan oinarritu behar dugu. Ekuazio horiek linealak badira, sistemak Laplaceren transformatuaren bitartez azter daitezke. Sistema horiek bulkada-erantzuna dute, eta konboluzio integrala defini daiteke sistemaren irteera kalkulatu ahal izateko. Bestetik, Laplaceren transformatuaren bitartez, sistemen transferentzia-funtzioa kalkula daiteke. Sistema diskretuetan, berriz, Z transformatua dugunez, konboluzioa biderketa gisa idatz daiteke, eta hala sistema diskretuen irteera kalkulatu ahal izango dugu.

| Sistema jarraituak                                                                                                                      | Sistema diskretuak                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $g(t - \tau)$ : Dirac bulkada-erantzuna                                                                                                 | $g(n - l)$ : bulkada-erantzuna                                                                                                    |
| $y(t) = \int_0^t u(\tau) h(t - \tau) d\tau$ $u(\tau)$ : sarrera<br>$y(t)$ : irteera                                                     | $y(k) = \sum_{l=0}^k x(k) h(k - l)$ $x(k)$ : sarrera<br>$y(k)$ : irteera                                                          |
| Transferentzia-funtzioa<br>$Y(s) = G(s) U(s)$<br>Laplaceren transformatuak:<br>$U(s) = L[u(t)]$<br>$Y(s) = L[y(t)]$<br>$G(s) = L[g(t)]$ | Transferentzia-funtzioa<br>$Y(z) = G(z) U(z)$<br>Z transformatuak:<br>$U(z) = Z[u(tk)]$<br>$Y(z) = Z[y(tk)]$<br>$G(z) = Z[g(tk)]$ |

### 4.2 Z TRANSFORMATUAREN DEFINIZIOA

Horrenbestez, Z transformatuaren definizioa ematen hasiko gara. Seinale diskretu baten Z transformatua batukari bat da, eta batukari horretako batugai bakoitza da seinale diskretuaren lagin bat bider  $z$  aldagai konplexu baten berretura negatiboa. Aldagai konplexu horren berretzailea,  $w(kh)$  laginaren  $k$  aldiunearen baliokidea da, baina aurkako zeinuarekin.

$$W(z) = Z\{w(kh)\} = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} w(kh) \cdot z^{-k} \tag{4.1}$$

Dena den, seinale diskretu baten laginek normalean  $k$  aldiune negatiboentzat balio nuluak dituzte. Beraz, hemendik aurrera seinale diskretu baten Z transformatua honela idatz dezakegu.

$$w(kh) = 0, k < 0 \Rightarrow W(z) = Z\{w(kh)\} = \sum_{k=0}^{k=\infty} w(kh) \cdot z^{-k} \tag{4.2}$$

Seinale diskretu baten Z transformatu aldebakar deritzogu (4.2) adierazpenari. Beraz, (4.1) adierazpen matematikoari  $z$  transformatu aldebiko deritzogu. Nahiz eta Z transformatua bitxiegia iruditu, tresna matematiko horren bitartez erraz ebatz daitezke gehikuntza-ekuazio linealak. Transformatuaren ezaugarri garrantzitsuenak

aztertuko ditugu, tresna matematikoaren erabilgarritasuna agerian uzteko. Aldi berean, beti erabiliko ditugun propietateak dira, eta sistema diskretu lineal baten ezaugarri dinamikoak aztertzean erabili beharko ditugu. Horrez gain, kontrol diskretu bat kalkulatzean, propietate edo ezaugarri matematiko horiek erabili beharko ditugu.

Z transformatuaren lehen ezaugarria edo propietatea da  $w(kh)$  seinale diskretu baten Z transformatuaren izate-eremua. Izate-eremuak zer esan nahi du? Esan nahi duena hau da Z transformatua ez dela  $z$  aldagai konplexu guztietarako existitzen. Beste era batera esanda, zenbait balio konplexutarako (4.1) formula ez dela konbergentea. Izate-eremuak gehienetan eraztun zirkularren bitartez definiturik daude. Hori hobeto ulertzeko, Z planoko balio konplexua berretzaile erara idatziko dugu.

$$\begin{aligned} z &= r \cdot e^{j\sigma} \\ |z| &= r \\ \arg(z) &= \sigma \end{aligned} \quad (4.3)$$

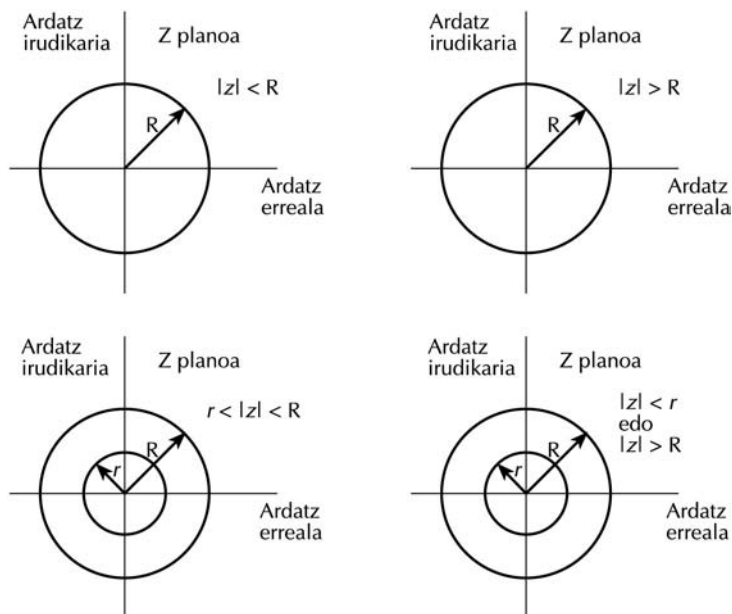
Suposa dezagun  $w(kh)$  seinale diskretu baten Z transformatua  $W(z)$  funtzio konplexua dela. Z transformatuaren izate-eremua kalkulatzeke,  $z$  plano konplexuko balio guztiak berretzaile konplexuen bitartez idatziko ditugu (ikus (4.3) berdintza).

$$\begin{aligned} W(z) \Big|_{z=re^{j\sigma}} &= \sum_{u=0}^{\infty} w(u) r^{-u} e^{-j\sigma u} \\ |W(z)| &= \left| \sum_{u=0}^{\infty} w(u) r^{-u} e^{-j\sigma u} \right| \leq \sum_{u=0}^{\infty} |w(u) r^{-u} e^{-j\sigma u}| = \sum_{u=0}^{\infty} |w(u) r^{-u}| \end{aligned} \quad (4.4)$$

Transformatuaren modulua kalkulatuko bagenu, (4.4) formula lortuko genuke. Beraz, batukariaren konbergentzia kalkulatzekean, batukari honen konbergentzia-tartea kalkulatu behar dugu.

$$|W(z)| = \sum_{u=0}^{\infty} \left| \frac{w(u)}{r^u} \right| \quad (4.5)$$

Argi dago (4.5) formulan, Z plano konplexuko puntu bat izate-eremukoa izan dadin, balio horren moduluaren araberakoa izan behar duela eta ez bere argumentuaren araberakoa. Hau da,  $z$  balioaren  $r$  moduluaren araberakoa da bakarrik izate-eremua. Beraz, izate-eremuak eraztun zirkularreko itxura izango du. Irudi hauetan ikus daitezke hainbat itxuratako izate-eremu batzuk.



**4.1 irudia.** Hemen irudikatu ditugun izate-eremuak Z transformatuak izan ditzakeen izate-eremu arruntenak dira. Horrek ez du esan nahi izate-eremu hauek bakarrik egon daitezkeenik.

Zenbait seinale diskretuen Z transformatuaren izate-eremuan, izate-eremuaren mugak sartzen dira, eta beste zenbait seinaleen kasuan, seinaleen Z transformatuaren izate-eremuek ez dute zertan eraztun zirkularren itxura izan. Dena den, balio errealeetako seinaleen kasuan, izate-eremua eraztun zirkularrez osatua egongo da. Beraz,  $w(kh)$  seinale diskretu baten Z transformatua definitzean, ez da bakarrik  $W(z)$  definitu behar;  $W(z)$  transformatuaren izate-eremua ere definitu behar dugu. Hori oso garrantzitsua da; izan ere, seinale askok, ezberdinak izanagatik, Z transformatu berdina izan dezakete, eta seinale horiek bereizteko modu bakarra da transformatuaren izate-eremua definitzea. Hala eta guztiz ere, Z transformatuaren adierazpen matematikoa emanda bereizten diren seinaleekin lan egingo dugu guk. Normalean, Z transformatu berdinak dituzten seinaleak, bietako seinale bat kausala ez den seinale bat da.

#### 4.1 adibidea

Kalkula dezagun  $\Delta(kh)$  seinalearen Z transformatua. Seinale horren izate-eremua plano konplexu osoa da. Hau da,  $\Delta(kh)$  seinalearen z transformatua 1 da.

$$Z\{\Delta(kh)\} = 1 \quad r = 0$$

## 4.2 adibidea

Har dezagun seinale diskretu hau:

$$w(kh) = a^{kh} \quad a \in \mathbb{C}, a \neq 0 \quad k \geq 0$$

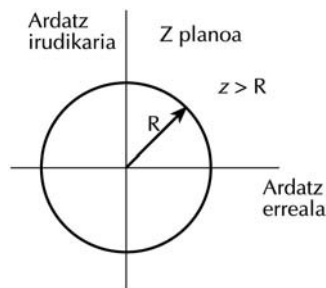
Horrenbestez, seinale diskretuko  $a$  parametroa zenbaki konplexua da. Bestalde, gogoan izan behar dugu  $h$  parametroa seinale horren laginketa-periodoa dela. Seinale hori kausala dela esango dugu,  $k$  aldiune negatiboentzat balio nuluak hartzen baititu.  $|a^h z^{-1}| < 1$  bada, adierazpen matematiko hori lortuko dugu batukaria ebazten badugu. Batukari hori ebazteko, laguntza bat emango dut: batukaria serie geometriko bat da. Hartara, oso erraz kalkulatu duzu batukaria.

$$Z\{a^{kh}\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^{kh} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^h z^{-1})^k = \frac{1}{1 - a^h z^{-1}}$$

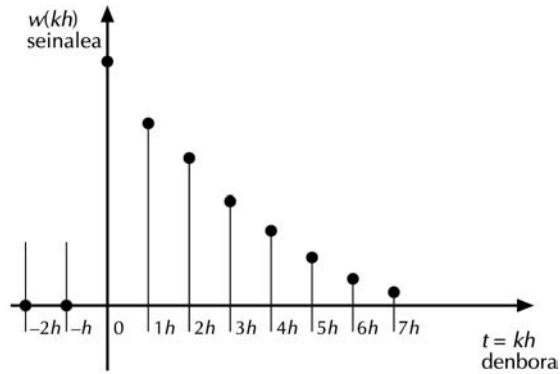
Non:

$$Z\{a^{kh}\} = \frac{z}{z - a^h} \quad |z| > |a^h| = R$$

Beraz, seinale horren izate-eremuak zenbaki konplexuen plano osoa betetzen du, zirkulu bat izan ezik. Zirkulu horren mugak ez dira sartzen, balio horietarako  $Z$  transformatua ez delako konbergentea.



**4.2 irudia.** Ikus daitekeenez, izate-eremuan ez dira sartzen  $a^h$  baino txikiagoko moduludun zenbaki konplexuak.



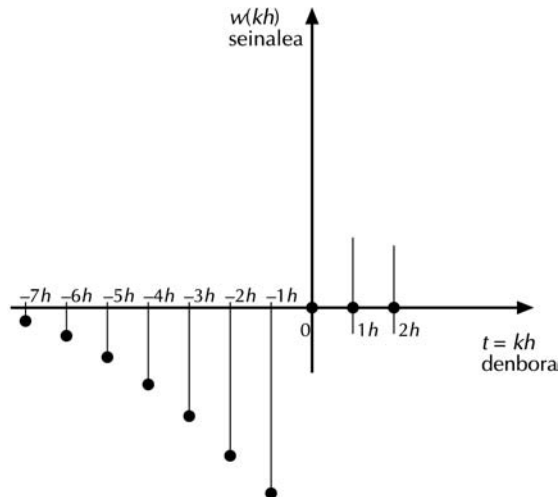
**4.3 irudia.** Aztertu dugun seinaleen  $a$  parametroa erreala izango balitz, itxura hau izango luke.

#### 4.3 adibidea

Har dezagun seinale hau.

$$w(kh) = -a^{kh} \quad a \in \mathbb{C}, a \neq 0 \quad k < 0$$

Seinale hori ez da kausala, seinalea  $k$  aldiune negatiboentzat definiturik baitako. Seinale horren  $a$  parametroa erreala izango balitz, honela irudika genezake.



**4.4 irudia.** Seinale hau ez da kausala, aldiune negatiboentzat definiturik dagoelako.

Seinale horren Z transformatua kalkulatzeko, nahitaez Z transformatu aldebikoa behar dugu. (4.1) adierazpen matematikoan oinarrituz, hau lortuko dugu.

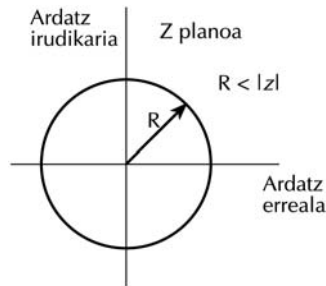
$$W(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=-1} -a^{kh} z^{-k}$$

$$W(z) = - \sum_{k=-\infty}^{k=-1} \left( \frac{a^h}{z} \right)^k = - \sum_{q=1}^{q=\infty} \left( \frac{z}{a^h} \right)^q = - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{q=1}^{q=N} \left( \frac{z}{a^h} \right)^q = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{z}{a^h} \right) \left( 1 - \left( \frac{z}{a^h} \right)^{N+1} \right)}{\left( 1 - \left( \frac{z}{a^h} \right) \right)}$$

$$W(z) = - \frac{\left( \frac{z}{a^h} \right)}{\left( 1 - \left( \frac{z}{a^h} \right) \right)} = \frac{z}{z - a^h}$$

Serie geometrikoa konbergentea izan dadin, serie geometrikoaren gehikuntzak kondizio hau bete behar du:  $\frac{z}{a^h} < 1$

Hori kontuan izanik, seinalearen Z transformatuaren izate-eremuak itxura hau du.



**4.5 irudia.** Seinale honen Z transformatuaren izate-eremuak zirkulu-itxura du.

Ikus daitekeenez,  $W(z)$  transformatua aurreko adibideko Z transformatua bezalakoa da. Beraz, seinale baten Z transformatua guztiz definitzeko, z transformatuak nahitaez izate-eremua atxikita izan behar du.

#### 4.4 adibidea

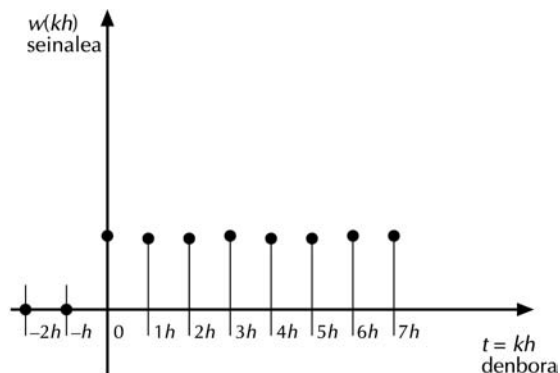
Har dezagun maila motako seinale baten Z transformatua. Maila motako seinale baten adierazpen matematikoa honelakoa da.

$$\text{maila } (kh) = \begin{cases} 1: k \geq 0 \\ 0: k < 0 \end{cases}$$

$$Z\{\text{maila } (kh)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(1 - z^{-(N+1)})}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Z transformatu horren izate-eremua plano konplexu osoa da, bat erradioko zirkulua izan ezik, batukaria ez bailitzateke konbergentea izango. Matematikoki honela definitzen dugu.

$$|z| > 1 = R$$



**4.6 irudia.** Maila funtzioak honelako itxura du.

Geroago ikusiko dugunez, seinale hori garrantzi handikoa da. Seinale horiek dira, bulkada motako seinalearekin batera, automatikan gehien erabiltzen diren sarrerako seinaleak.

#### 4.5 adibidea

Har dezagun seinale hau:

$$w(kh) = \left\{ \dots, 0, 0, \underset{k=0}{1}, 1, -1, 0, 0, 0, \dots \right\}$$

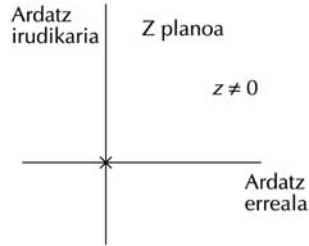
Seinale horrek bat balioa hartzen du  $k = 0$  aldiunean. Seinalearen Z transformatua kalkula daiteke:

$$Z\{w(kh)\} = 1 + z^{-1} - z^{-2} \quad |z| > 0$$

Seinalearen Z transformatuaren izate-eremua plano konplexu osoa da, jatorri-puntua izan ezik; izan ere,  $z = 0$  denean,  $W(z)$  ez dago definiturik, transformatuaren izendatzaileak zero balioa hartzen duelako.

$$W(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2}$$

Hurrengo irudian ikus daiteke seinale horren Z transformatuaren izate-eremua:



**4.7 irudia.** Lagin kopuru finitu bat duten seinaleen Z transformatuen izate-eremuan ez dago plano konplexuaren jatorria. Adibide honetako seinalearen transformatuaren izate-eremua eta lagin kopuru finituko seinaleen Z transformatuen izate-eremuak berdinak dira.

## 4.3 Z TRANSFORMATUAREN PROPIETATEAK

Z transformatuaren ezaugarri edo propietateak aztertuko ditugu. Ezaugarri horiek, geroago ikusiko dugunez, garrantzi handikoak dira.

### 4.3.1 Linealtasuna: $r$

Z transformatua operatzaile lineala da, hau da,  $\{w(k)\}$ ,  $\{w_1(k)\}$ ,  $\{w_2(k)\}$  seinaleak edozein direlarik eta edozein  $a \in \mathbb{C}$  zenbaki konplexurentzat hau betetzen da:

$$\begin{aligned} Z(\{w_1(k)\} + \{w_2(k)\}) &= Z\{w_1(k)\} + Z\{w_2(k)\} \\ Z(a\{w(k)\}) &= aZ\{w(k)\} \end{aligned} \tag{4.6}$$

$w(kh)$ ,  $w_1(kh)$  eta  $w_2(kh)$  seinaleak seinale kausalak badira, hots, aldiune negatiboentzat balio nuluak badituzte, izate-eremua plano konplexu osoa da, jatorrian zentratutako zirkulu bat izan ezik. Beraz, seinale horien izate-eremua 4.2 irudikoa bezalakoak dira.  $r$ ,  $r_1$  eta  $r_2$   $Z\{w(kh)\}$ ,  $Z\{w_1(kh)\}$  eta  $Z\{w_2(kh)\}$ -ren konbergentzia-erradioak badira,  $Z(\{w_1(kh)\} + \{w_2(kh)\})$ -ren konbergentzia-erradioa  $r_1$  eta  $r_2$  erradioen arteko maximoa izango da,  $w_1(kh)$  eta  $w_2(kh)$  seinaleen izate-eremuaren arteko ebakidura delako. Bestetik,  $Z\{a\{w(k)\}\}$ -ren konbergentzia  $r$  erradioa da.

*Frogapena:*

$z \in \{z: |z| > r_1\} \cup \{z: |z| > r_2\}$  seinaleen izate-eremuaren arteko ebakidura  $w_1(kh)$  eta  $w_2(kh)$  seinaleen arteko baturaren izate-eremua da. Hori hobeto ikusi ahal izateko,  $W(z)$  transformatua kalkulatu dugu.

$$\begin{aligned} Z(\{w_1(kh)\} + \{w_2(kh)\}) &= Z(\{w_1(kh) + w_2(kh)\}) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [w_1(kh) + w_2(kh)] z^{-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} w_1(kh) z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} w_2(kh) z^{-k} = \\ &= Z\{w_1(kh)\} + Z\{w_2(kh)\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ikus daitekeenez,  $w(kh)$  seinalearen transformatua konbergentea izan dadin,  $W(z)$  transformatua osatzen duten bi batukariak konbergenteak izan behar dute.  $W(z)$  transformatuaren bi atalek, ordea,  $r_1$  eta  $r_2$  konbergentzia-erradioak dituzte. Beraz,  $W(z)$  transformatuaren konbergentzia-erradioa  $r_1$  eta  $r_2$  erradioen arteko maximoa da.

Hala ere, ez da guztiz baztertzeko konbergentzia gertatzea  $|z| \leq \max[r_1, r_2]$  denean.

Bestalde,  $w(kh)$  seinale baten  $W(z)$  transformatuaren izate-eremua  $z \in \{z: |z| > r\}$  bada,  $q(kh) = a \cdot w(kh)$  seinalearen  $Z$  transformatuaren izate-eremua  $z \in \{z: |z| > r\}$  izango da. Beste era batera esanda, izate-eremua ez da aldatzen.

$$\begin{aligned} Z\{a\{w(kh)\}\} &= Z\{aw(kh)\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} aw(kh) z^{-k} = \\ &= a \sum_{k=0}^{\infty} w(kh) z^{-k} = \\ &= aZ\{W(kh)\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Beraz,  $Z\{a\{w(kh)\}\}$ -ren konbergentzia-erradioa  $r$  baino txikiagoa edo berdina da.

#### 4.6 adibidea

Har dezagun sinu diskretu hau:

$$w(kh) = \sin(\omega kh)$$

z transformatuaren linealtasunak hau suposatzen du:

$$Z\{\sin(\omega kh)\} = Z\left\{\frac{1}{2j}(e^{j\omega kh} - e^{-j\omega kh})\right\} = \frac{1}{2j}(Z\{e^{j\omega kh}\} - Z\{e^{-j\omega kh}\})$$

4.2. adibidea kontuan izanda eta  $a = e^{j\omega}$  eta  $a = e^{-j\omega}$  hartuta, hau dugu:

$$Z\{\sin(\omega kh)\} = \frac{1}{2j} \left( \frac{z}{z - e^{j\omega h}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega h}} \right)$$

Eta azkenik:

$$Z\{\sin(\omega kh)\} = \frac{\sin(\omega h)z}{z^2 - 2\cos(\omega h)z + 1}$$

### 4.3.2 Denborazko atzerapenak eta aurrerapenak

#### 4.1 teorema

$d \in \mathbb{N}$  laginketa-periodoz atzeratutako seinale diskretu baten Z transformatua honela adierazten da:

$Z\{w(kh - dh)\} = z^{-d}W(z)$ . Seinale diskretua nulutzat jotzen dugu  $k$  aldiune negatiboentzat.

$Z\{w(kh - dh)\}$ -ren konbergentzia-erradioa eta  $W(z)$ rena berdina da ( $z = 0$  jatorria konbergentziagunetik kanpo geratzen da).

*Frogapena:*

$k < 0$  denean,  $w(kh) = 0$  denez

$$Z\{w(kh - dh)\} = \sum_{k=0}^{\infty} w(kh - dh)z^{-k} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=d}^{\infty} w(kh - dh) z^{-k} = \\
 &= z^{-d} \sum_{k=d}^{\infty} w(kh - dh) z^{-(k-d)}
 \end{aligned}$$

$k' = k - d$  aldagai aldaketa egin eta gero

$$\begin{aligned}
 Z\{w(kh - dh)\} &= z^{-d} \sum_{k=0}^{\infty} w(k'h) z^{-k'} = \\
 Z\{w(kh - dh)\} &= z^{-d} W(z)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$Z\{w(kh - dh)\}$ -ren konbergentzia-erradioa eta  $W(z)$ rena berdinak dira, eta,  $z^{-d}$  faktorea dela eta,  $z = 0$  jatorria konbergentziagunetik at uzten du.

#### 4.2 teorema

$d \in \mathbb{N}$  laginketa-periodo atzeratutako seinale diskretu baten  $Z$  transformatua honela adierazten da:

$$Z\{w(kh - dh)\} = z^{-d} W(z) + z^{-d} \sum_{k'=-1}^{k'=-d} w(k'h) z^{-k'}. \text{ Suposatuko dugu seinale diskretuak}$$

balio zehatz eta nuluak ez diren laginak dituela aldiune negatiboentzat.

$Z\{w(kh - dh)\}$ -ren konbergentzia-erradioa eta  $W(z)$ rena berdinak dira ( $z = 0$  jatorria konbergentziagunetik at geratzen da). Argi izan behar dugu  $Z$  transformatua aldebakarra dela eta horrek eragin egiten duela seinale baten  $Z$  transformatua kalkulatzean.

*Frogapena:*

$k < 0$  denean,  $w(kh) = 0$  denez

$$\begin{aligned}
 Z\{w(kh - dh)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} w(kh - dh) z^{-k} = \\
 &= \sum_{k=d}^{\infty} w(kh - dh) z^{-k} + \sum_{k=0}^{k=d-1} w(kh - dh) z^{-k} = \\
 &= z^{-d} \sum_{k=d}^{\infty} w(kh - dh) z^{-(k-d)} + \sum_{k=0}^{k=d-1} w(kh - dh) z^{-k}
 \end{aligned}$$

$k' = k - d$  aldagai aldaketa egin eta gero

$$\begin{aligned} Z\{w(kh - dh)\} &= z^{-d} \sum_{k=0}^{\infty} w(k'h) z^{-k'} + z^{-d} \sum_{k'=-1}^{k'=-d} w(k'h) z^{-k'} = \\ Z\{w(kh - dh)\} &= z^{-d} W(z) + z^{-d} \sum_{k'=-1}^{k'=-d} w(k'h) z^{-k'} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$Z\{w(kh - dh)\}$ -ren konbergentzia-erradioa eta  $W(z)$ rena berdinak dira, eta,  $z^{-d}$  faktorea dela eta,  $z = 0$  jatorria konbergentziagunetik at uzten du.

#### 4.7 adibidea

Laginketa-periodo bat atzeratutako bulkada unitarioaren Z transformatua 4.1 teorema erabiliz lor daiteke.

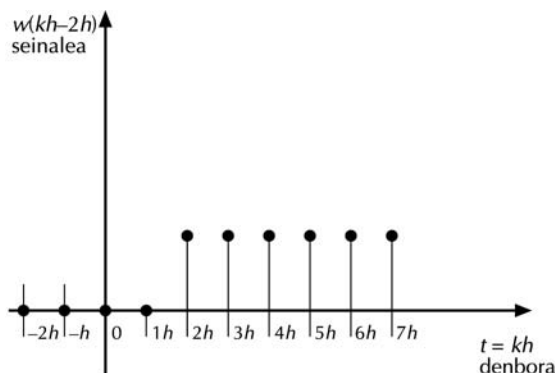
$$Z\{\Delta(kh - dh)\} = z^{-1} \quad |z| > 0 = r$$

Ikus daitekeenez,  $Z\{\Delta(kh)\}$  plano konplexu osorako existitzen da eta  $Z\{\Delta(kh - dh)\}$  ez da existitzen plano konplexuko jatorriarentzat.

#### 4.8 adibidea

Laginketa-periodo biko atzerapena duen maila funtzioaren transformatua kalkulatu dugu. Suposatuko dugu seinaleak lagin nuluak dituela aldiune negatiboentzat.

$$w(kh - 2h) = \text{maila}(kh - 2h) = \begin{cases} 1: k \geq 2 \\ 0: k < 2 \end{cases}$$



4.8 irudia. Seinalea bi aldiune atzeratuta.

4.1 teoremaren arabera, seinale atzeratuaren Z transformatua honela geratzen da.

$$Z\{y(kh) = \text{maila}(kh - 2h)\} = z^{-2} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z(z-1)}$$

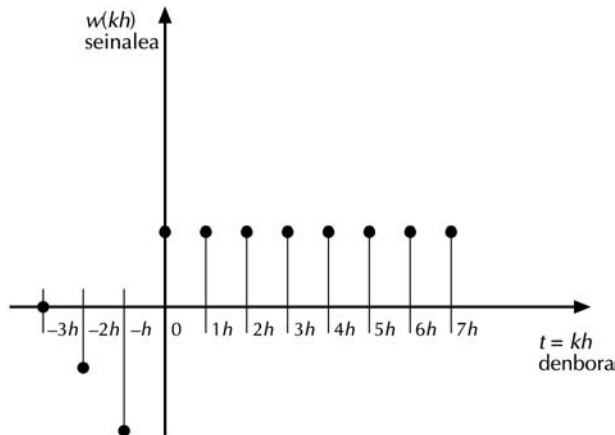
Z transformatua horrela geratzen da  $k$  aldiune negatiboentzat balio nuluak dituelako  $\text{maila}(kh)$  seinaleak. Hurrengo adibidean ikusiko dugu nola kalkula daitekeen aldiune negatiboentzat balio nuluak ez dituen seinale atzeratu baten Z transformatua.

#### 4.9 adibidea

Laginketa-periodo biko atzerapena duen  $w(kh)$  seinale diskretu baten Z transformatua kalkulatu dugu. Suposatuko dugu seinaleak lagin nuluak ez diren balioak dituela aldiune negatiboentzat.

$$w(kh) = \begin{cases} 1: k \geq 0 \\ -2: k = -1 \\ -1: k = -2 \\ 0: k < -2 \end{cases}$$

$$w(kh - 2h) = -\Delta(kh) - 2\Delta(kh + h) + \text{maila}(kh - 2h)$$



**4.9 irudia.**  $w(kh)$  seinaleak honelako itxura du. Aldiune negatiboentzat nuluak ez diren balioak ditu.

Beraz,  $w(kh)$  seinalearen Z transformatu aldebakarra kalkulatzan badugu, honela geratuko zaigu.

$$Z\{w(kh - dh)\} = z^{-d} W(z) + z^{-d} \sum_{k'=-1}^{k'=-d} w(k'h) z^{-k'}$$

$$Z\{w(kh)\} = \sum_{k=0}^{k=\infty} w(kh) \cdot z^{-k} = \frac{z}{z-1}$$

$$Z\{y(kh) = w(kh - 2h)\} = z^{-2} W(z) + z^{-2} \sum_{k'=-1}^{k'=-2} w(k'h) z^{-k'}$$

$$Z\{y(kh)\} = z^{-2} \frac{z}{z-1} + z^{-2} (w(-h)z + w(-2h)z^2)$$

$$Z\{y(kh)\} = \frac{1}{z(z-1)} + (w(-h)z^{-1} + w(-2h))$$

$$Z\{y(kh)\} = \frac{1}{z(z-1)} + (-2z^{-1} - 1)$$

$$Z\{y(kh)\} = \frac{1}{z(z-1)} - \frac{2}{z} - 1$$

Liburuan zehar Z transformatu aldebakarrarekin lan egingo dugu beti. Dena den, transformatu aldebikoa erabiliko bagenu,  $w(kh)$  seinale diskretuaren Z transformatua honelakoa izango litzateke.

$$w(kh) = -\Delta(kh - 2h) - 2\Delta(kh - h) + \text{maila}(kh)$$

$$Z\{w(kh)\} = W(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} w(kh) \cdot z^{-k} = -z^2 - 2z^{-1} + \frac{z}{z-1}$$

Bestalde,  $w(kh)$  laginketa-periodo bi atzeratuz sortutako seinalearen Z transformatu aldebikoa kalkulatu bagenu, emaitza hau lortuko genuke.

$$y(kh) = w(kh - 2h)$$

$$Z\{y(kh)\} = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} w(kh - 2h) \cdot z^{-k} = \sum_{k'=-\infty}^{k'=\infty} w(k'h) \cdot z^{-k'-2} \Big|_{k'=k-2} = z^{-2} \sum_{k'=-\infty}^{k'=\infty} w(k'h) \cdot z^{-k'}$$

$$Z\{y(kh)\} = z^{-2} \cdot W(z)$$

$$Z\{y(kh)\} = z^{-2} \cdot \left[ \frac{z}{z-1} - z^2 - 2z^{-1} \right] = \frac{1}{z(z-1)} - 1 - \frac{2}{z}$$

Beraz, Z transformatu aldebikoa kalkulatu badugu, 4.1 teorema erabili beharko dugu beti atzeratutako seinaleen transformatua kalkulatzeko. Bistan denez, seinale baten transformatu aldebikoa eta aldebakarra ez dute zertan berdinak izan. Hemendik aurrera, liburuan zehar, Z transformatu aldebikoa dela esaten ez bada, Z transformatu aldebakarra dela suposatuko dugu beti.

### 4.3 teorema

$d \in \mathbb{N}$  laginketa-periodo aurreratutako seinale diskretu baten  $Z$  transformatua adierazpen honen bidez ematen da:

$$Z\{w(kh + dh)\} = z^d W(z) - \sum_{i=0}^{d-1} w(ih) z^{d-i}$$

$Z\{w(kh - dh)\}$ -ren konbergentzia-erradioa  $W(z)$ rena berdina da.

*Frogapena:*

$$\begin{aligned} Z\{w(kh + dh)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} w(kh + dh) z^{-k} = \\ &= z^d \sum_{k=0}^{\infty} w(kh + dh) z^{-(k+d)} \end{aligned}$$

$k' = k + d$  aldagai-aldaketak honela uzten du adierazpena:

$$\begin{aligned} Z\{w(kh + dh)\} &= z^d \sum_{k'=d}^{\infty} w(k'h) z^{-k'} = \\ &= z^d \left[ \sum_{k'=0}^{\infty} w(k'h) z^{-k'} - \sum_{i=0}^{d-1} w(ih) z^{-i} \right] \end{aligned}$$

eta hortik:

$$Z\{w(kh - dh)\} = z^d W(z) - \sum_{i=0}^{d-1} w(ih) z^{d-i} \quad (4.11)$$

$Z\{w(kh + dh)\}$ -ren konbergentzia-erradioa  $W(z)$ ena berdina da. Ekuazio horiek aztertuta, argi dago ez gendakeela (4.11) berdintzaren eskuineko bigarren atala beharko  $Z$  transformatu aldeburua erabiliko bagenu. Hala ere, guk  $Z$  transformatu aldeburua erabiliko dugunez, hasierako balioak dituzten seinaleekin (4.11) ekuazioko eskuineko bigarren atala erabili beharko dugu.

---

### 4.10 adibidea

---

Har dezagun 4.5 adibideko  $w(kh)$  seinale diskretua. Seinale hori une bat aurreratuko dugu, eta seinale berriaren  $Z$  transformatua kalkulatu dugu.

$$w(kh) = \left\{ \dots, 0, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k=0}}{1}, 1, -1, 0, 0, \dots \right\}$$

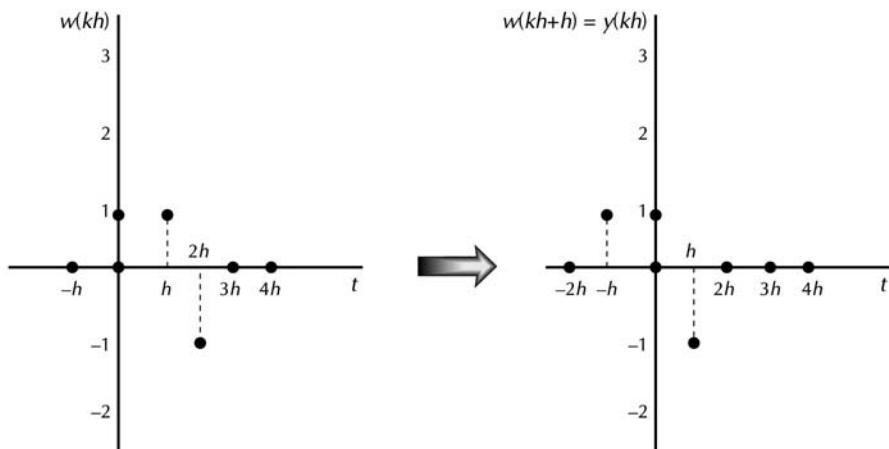
$$y(kh) = w(kh + h)$$

$w(kh)$  seinalearen Z transformatua honelakoa da:

$$Z\{w(kh)\} = W(z) = 1 + z^{-1} - z^{-2} \quad |z| > 0$$

Seinale horren Z transformatuaren izate-eremua plano konplexu osoa da, jatorri-puntua izan ezik; izan ere,  $z = 0$  denean,  $W(z)$  ez dago definiturik, transformatuaren izendatzaileak zero balioa hartzen duelako.

$$W(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2}$$



**4.10 irudia.** Ikus daitekeenez,  $w(kh)$  seinalea aurreratutakoan,  $w(kh)$ ren lagina  $k = -1$  aldiunean geratzen da. Beraz, seinale aurreratuaren Z transformatu aldebakarretik kanpo egongo da lagin hau.

4.3 teorematik hau dugu:

$$Z\{w(kh + h)\} = Z\{y(kh)\} = Y(z) = z(1 + z^{-1} - z^{-2}) - z = 1 - z^{-1}$$

Emaizta hori hobeto ulertu ahal izateko, Z transformatu aldebakarraren definizioari erreparatu behar diogu. Z transformatu aldebakarrak ez ditu kontuan hartzen seinalearen aldiune negatiboetako laginak. Beraz, seinalea aldiune bat aurreratzan badugu,  $w(kh)$ ko  $k = 0$  aldiuneko lagina galduko dugu. Horregatik,  $y(kh)$  seinaleren Z transformatua bi gai besterik ez dugu.

$$y(kh) = \left\{ \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k=0}}{1}, 1, -1, 0, 0, 0, 0, \dots \right\}$$

### 4.3.3 Deribazio konplexua

#### 4.4 teorema

Z transformatuaren propietate bat da hau:

$$Z\{khw(kh)\} = -hz \frac{dW(z)}{dz} \quad (4.12)$$

$Z\{khw(kh)\}$ -ren konbergentzia-erradioa eta  $W(z)$ rena berdinak dira.

*Frogapena:*

$w(kh)$  seinale baten Z transformatua serie bat da. Badakigu serie horren gai edo termino bakoitza deribagarria dela.

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w(kh) \cdot z^{-k}$$

$$\frac{dW(z)}{dz} = - \sum_{k=0}^{\infty} kw(kh)z^{-k-1} = - \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} kw(kh)z^{-k}$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} kw(kh)z^{-k-1} \quad \text{konbergentzia-erradioa} \quad \text{eta} \quad W(z) \quad \text{transformatuaren}$$

konbergentzia-erradioa berdinak dira. Beste era batera esanda,  $W(z)$  serie konbergentea bada  $z$  balio konplexu baterako,  $z$  balio konplexu horretarako

$- \sum_{k=0}^{\infty} kw(kh)z^{-k-1}$  seriea ere konbergentea da. Beraz, aurreko berdintza  $-h$  balioz

biderkatuz gero bi aldeetan, garapen hau lortuko dugu.

$$-hz \frac{dW(z)}{dz} = -hz \frac{d}{dz} \sum_{h=0}^{\infty} w(kh)z^{-k} =$$

$$= z \sum_{h=0}^{\infty} khw(kh)z^{-k-1} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{\infty} khw(kh)z^{-k} = \\
 &= Z\{khw(kh)\}
 \end{aligned}$$

#### 4.11 adibidea

$\{w(kh)\}$  maila motakotzat hartuta eta bere Z transformatua  $W(z) = \frac{z}{z-1}$  dela gogoratuz, frogatutako teorema malda diskretu baten transformatua kalkulatzeko lagunduko digu:

$$Z\{kh\} = -hz \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) = \frac{hz}{(z-1)^2} \quad |z| > 1$$

Seinale hori arrapala motako funtzioa dela esaten da.

### 4.3.4 Eskala-aldaketa

#### 4.5 Teorema

$a \in \mathbb{C}$  (zenbaki konplexu bat da),  $a \neq 0$  izanda:

$$Z\{a^{kh}w(kh)\} = W\left(\frac{z}{a^h}\right) \quad (4.13)$$

$Z\{a^{kh}w(kh)\}$ -ren konbergentzia-erradioa  $|a|^h r$  da, non  $r$   $W(z)$  transformatuaren konbergentzia-erradioa baita.

*Frogapena:*

$$\begin{aligned}
 Z\{a^{kh}w(kh)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} a^{kh}w(kh)z^{-k} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} w(kh) \left( \frac{z}{a^h} \right)^{-k}
 \end{aligned}$$

$$Z\{a^{kh}w(kh)\} = W\left(\frac{z}{a^h}\right)$$

$Z\{a^{kh}w(kh)\}$  transformatuaren konbergentzia-erradioa eta  $W\left(\frac{z}{a^h}\right)$  transformatuaren erradioa berdinak dira. Hortaz,  $Z\{a^{kh}w(kh)\}$  transformatuaren konbergentzia-erradioa  $|a|^h$  da.

---

#### 4.12 adibidea

---

Har dezagun seinale hau:

$$w(kh) = e^{-\alpha kh} kh$$

$$a = e^{-\alpha}, \alpha \in \mathbb{C}$$

Seinale horren Z transformatua kalkulatu dugu, 4.5 teorema erabiliz eta arrapala motako funtzioaren Z transformatua kontuan hartuz:

$$Z\{kh\} = \frac{hz}{(z-1)^2}$$

$$Z\{e^{-\alpha kh} kh\} = \frac{h \cdot e^{-\alpha h} z}{(z - e^{-\alpha h})^2}$$

Seinale horren Z transformatuaren izate-eremua honelakoa da:

$$|z| > |e^{-\alpha}|^h$$

### 4.3.5 Hasierako laginak eta bukaerako laginak

#### 4.6 Teorema

Seinale diskretu baten hasierako lagina seinale horren Z transformatutik zuzenean kalkula daiteke. Gogoan har dezagun  $w(kh)$  seinale diskretu bat, eta  $W(z)$ , seinale horren Z transformatua. Honela kalkula daiteke  $W(z)$  transformatutik seinale horren hasierako lagina.

---

$$w(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} W(z) \quad (4.14)$$

*Frogapena:*

$W(z)$  transformatuaren definizioari limitea aplikatzen badiogu, berdintza hau lortuko dugu. Hor limiteen ordena aldatzen dugu. Ikus daitekeenez,  $W(z)$  transformatuaren lehen gaia ez beste guztiak deuseztatu egiten dira  $z$  aldagaiak infiniturako joera duelako. Beraz, bakarrik serieko lehen gaia geratuko da, ez duelako  $z$  aldagai konplexuarekiko mendekotasunik. Serieko lehen gaia  $w(kh)$  seinalearen hasierako lagina da.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} W(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=\infty} w(kh) z^{-k} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=N} w(kh) z^{-k} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=N} \frac{w(kh)}{z^k} \right)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} W(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} w(0) = w(0)$$

---

#### 4.13 adibidea

---

$W(z)$  transformatua izanik, transformatu horri dagokion  $w(kh)$  seinalearen hasierako balioa kalkulatu nahi badugu, 4.6 teorema erabiliko dugu.

$$W(z) = \frac{z}{z - a^h}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} W(z) = 1$$

Emaitza hori ongi kalkulaturik dago,  $W(z)$ ri dagokion  $w(kh)$  seinalea funtzio esponentziala da eta. Aurrekoa hobeto ikusteko, formula hau erreparatu besterik ez dugu.

$$Z\{w(kh) = a^{kh}\} = \frac{z}{z - a^h}$$

$$w(0) = a^{k0} = 1$$

#### 4.7 teorema

Gogoan har dezagun, batetik,  $w(kh)$  seinalea, eta, bestetik,  $w(kh)$  seinalearen gehikuntza-funtzioa. Gehikuntza-funtzio horri  $g(kh)$  deritzogu, eta gehikuntza honela definituko dugu matematikoki.

$$g(kh) = w(kh) - w(kh - h) \quad (4.15)$$

Jo dezagun  $g(kh)$  seinalearen  $Z$  transformatuaren konbergentzia-erradioa bat baino txikiagoa dela. Kondizio matematiko hori honela definituko dugu.

$$\begin{aligned} |z| &> R_{kon} \\ R_{kon} &< 1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Beraz, kondizio hori betez gero,  $w(kh)$  seinalearen bukaerako lagina kalkula dezakegu  $W(z)$  transformaziotik abiatuta.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w(kh) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \cdot W(z) \quad (4.17)$$

$W(z)$  transformatua arrazionala bada, hots, bi polinomioren arteko zatiketa gisako funtzio konplexu bat bada, (4.16) konbergentzia-kondizioa beteko da baldin eta  $W(z)$  transformatuaren izendatzailearen erroak moduluz bat baino txikiagoak direnean, edo, erro bakarra izanez gero,  $z = 1$  bada. Beste era batera esanda,  $W(z)$  transformatuaren izendatzailearen erroek plano konplexuko bat erradioko zirkuluaren barruan egon behar dute edo  $z = 1$  erroa behin bakarrik egon behar du. Hots,  $(z - 1)^q$   $q > 1$  moduko faktore bat izanez gero,  $W(z)$  transformatuaren izendatzailean konbergentzia-kondizioa ez da beteko. Hori hobeto ulertzeko, egonkortasunaren atalera joatea gomendatzen zaitut, han aztertzen baita seinalearen egonkortasuna.

*Frogapena:*

Har dezagun  $w(kh)$  seinale diskretua, eta, horrekin batera,  $w(kh)$  funtzioaren  $g(kh)$  gehikuntza-funtzioa.

$$\{g(kh) = w(kh) - w(kh - h)\} \quad (4.18)$$

Gehikuntzaren  $Z$  transformatua kalkulatu dugu, atzerapen-teoremaren bitartez eta  $Z$  transformatuaren definizioaren bitartez.

$$Z\{g(kh)\} = W(z) - z^{-1}W(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} (w(kh) - w(kh - h))z^{-k}$$

Transformatu hori limite baten bitartez adieraz daiteke.

$$Z\{g(kh)\} = (1 - z^{-1})W(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=N} (w(kh) - w(kh - h))z^{-k}$$

Ondoren, gehikuntzaren Z transformatuaren limitea kalkulatu dugu,  $z$  aldagai konplexuak baterantz jotzen duenean.

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) W(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=N} (w(kh) - w(kh - h))z^{-k}$$

Azken adierazpen matematiko horren limiteen ordena aldatu nahi badugu,  $\sum_{k=0}^{k=\infty} (w(kh) - w(kh - h))z^{-k}$  serieak uniformeki konbergentea izan behar du  $|z| \geq R_{kon}$

eta, aldi berean, konbergentzia-erradioak bat baino txikiago izan behar du. Bi kondizio horiek betetzen badira, limiteen ordena alda daiteke. Hori eginez gero, honelako adierazpen matematikoa lortuko dugu.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) W(z) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{k=N} (w(kh) - w(kh - h))z^{-k} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) W(z) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} [w(0) - w(-h) + w(h) - w(0) + w(2h) - w(h) + \dots + w(Nh) - w(Nh - h)] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) W(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} w(Nh) \end{aligned}$$

#### 4.14 adibidea

Har dezagun  $w(kh)$  seinale diskretu baten Z transformatua. Transformatu horrek  $W(z)$  eta ondorengo itxura du. Suposatzen da seinale horren balioak nuluak direla  $k < 0$  aldiune negatiboentzat.

$$W(z) = \frac{2z^2 - \left(\frac{5z}{4}\right)}{\left(z - \frac{1}{4}\right)(z - 1)}$$

$W(z)$  transformazioak bi erro ditu:  $z = 1$  eta  $z = 1/4$ . Bigarren erroaren modulua 1 baino txikiagoa da; eta  $z = 1$  erroa behin bakarrik agertzen denez –hots, erroa anizkoitzasun maila batekoa denez–, 4.7 teorema aplika dezakegu, seinale horrek

aldiune handietarako hartzen duen balioa zein den kalkulatu ahal izateko, hau da,  $k$  aldagaiak infiniturantz jotzen duenean.

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) W(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} w(kh)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) W(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[ \frac{2z^2 - (5z/4)}{(z-1)(z-1/4)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{2z^2 - (5z/4)}{(z-1/4)} \right] = \frac{2 - (5/4)}{3/4} = 1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w(kh) = 1$$

$W(z)$  transformatuari dagokion  $w(kh)$  seinale diskretua kalkulatu nahi badugu, lehenik zatiketa bakunetan idatzi behar dugu  $W(z)$ . Ondoren, zatiketa bakoitzari dagokion seinale diskretua kalkulatu dugu. Hartara,  $W(z)$  transformatuari dagokion seinalearen limitea kalkulatzeko badugu  $k$  aldagaiak infiniturantz jotzen duenean, limitea 1 izango da. Ondorioz, teoremaren aplikagarritasuna agerian dago. 4.7 teoremaren bitartez, seinaleek zer baliotara jotzen duten kalkula daiteke, beren  $w(kh)$  seinalearen adierazpen matematikoa erabili gabe. Liburuko ondorengo ataletan ikusiko dugunez, teorema hori erabiliko dugu kontrolaturiko sistemen jarrera aztertzeko, hainbat motatako seinaleak kontsignatzat sartuta. Aztertutako seinalaren  $W(z)$  transformatuaren konbergentzia-erradioa 1 da,  $|z| \geq 1$  da  $z = 1$  izan ezik,  $W(z)$  transformatuaren izendatzailearen erroen moduluetatik handiena  $|z| = 1$  delako. 4.7 teorema betetzen da  $z = 1$  erroa bakuna delako, hots, behin bakarrik agertzen delako.

$$W(z) = \frac{2z^2 - (5z/4)}{(z-1)(z-1/4)} = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-1/4}$$

$$W(z) = Z \left\{ \left( 1 + \left( \frac{1}{4} \right)^k \right) \text{maila}(kh) \right\}$$

$$w(kh) = \left( 1 + \left( \frac{1}{4} \right)^k \right) \text{maila}(kh)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w(kh) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \left( \frac{1}{4} \right)^k \right) \text{maila}(kh) = 1$$

#### 4.15 adibidea

Azter dezagun orain beste seinale diskretu bat. Seinale horren  $W(z)$  transformatuaren konbergentzia-erradioa,  $|z| > R_{kon}$ , 1 baino handiagoa da. Horrelako adibide bi emango ditugu hemen. Lehenengoa  $W(z)$  hau da.

$$W(z) = \frac{z}{z-3} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{z-3} z = 0$$

$$W(z) = Z\{3^k \text{ maila}(kh)\} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} w(kh) = \lim_{k \rightarrow \infty} (3^k \text{ maila}(kh)) = \infty$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)W(z) \neq \lim_{k \rightarrow \infty} w(kh)$$

Ikus daitekeenez, seinale horren transformatuari 4.7 teorema aplikatuz gero, 0 balioa lortuko dugu; baina seinale horri dagokion  $w(kh)$  seinalea kalkulatzeko badugu eta, ondoren, limitea kalkulatzeko badugu, konturatuko gara seinaleak infiniturantz jotzen duela  $k$ -k infiniturantz jotzen duenean. 4.7 teorema ez da betetzen,  $W(z)$  transformatuaren konbergentzia-erradioa 3 delako eta, beraz,  $W(z)$  funtzioaren izate-eremua  $|z| > 3$  delako. Hitz gutxitan esanda, ez dugu betetzen konbergentzia-erradioari buruz ezarritako muga; beraz, seinale horri ezin diogu aplikatu 4.7 teorema.

### 4.3.6 Konboluzioa

#### 4.8 teorema

Sistema dinamiko diskretu batek ondorengo kondizio hauek betetzen dituenean, konboluzio deritzogun batukari baten bitartez, sistema horren irteerari dagokion adierazpen matematikoa lor daiteke. Aurreko atalean aztertu ditugu kondizio hauek:

1. Linealtasuna
2. Denborarekiko aldakorra ez izatea
3. Sistema kausala izatea
4. Hasierako kondizioak nuluak izatea

Horrelako sistema bati  $g(kh)$  bulkada-erantzun bat dagokio.  $g(kh)$  bulkada-erantzun hori  $k < 0$  aldiune negatiboentzat nulua da, beraz, konboluzioa honela idatz daiteke. Suposatuko dugu sistemaren sarrera  $x(kh)$  seinale diskretua dela eta  $y(kh)$  sistemaren irteerako seinalea.

$$y(kh) = \sum_{l=0}^{l=k} x(lh) \cdot g(kh - lh) \quad (4.19)$$

$y(kh)$ ,  $g(kh)$  eta  $x(kh)$  seinaleak horrelako ekuazio baten bitartez loturik baldin badaude eta, bestetik,  $r_x$  eta  $r_g$  badira  $X(z)$  eta  $G(z)$  transformatuen konbergentzia-erradioak, hurrenez hurren,  $Y(z)$  transformatua  $X(z)$  eta  $G(z)$  transformatuen arteko biderketa izango da. Bestetik,  $Y(z)$  transformatuaren  $r_y$  konbergentzia-erradioa, asko jota,  $r_x$  eta  $r_g$  erradioetako handiena izango da. Matematikoki honela idatz daiteke.

$$\begin{aligned} Y(z) &= G(z) \cdot X(z) \\ r_y &\leq \max(r_x, r_g) \end{aligned} \quad (4.20)$$

*Frogapena:*

Kalkula dezagun  $y(kh)$  seinalearen  $Z$  transformatua. Frogapenean suposatuko dugu konboluzioaren mugek infiniturantz jotzen dutela, hala, 4.8 teoremak eskaintzen duen emaitza orokorrako bat ematen duelako. Batukarien mugek minus infinitutik plus infinitura jotzen badute, 3 eta 4 kondizioak bete ez arren, 4.8 teorema zuzena da. Hala ere, liburu honetan ez dugu kausalak ez diren sistemekin lan egingo. Bestetik, hasierako kondizioak nuluak ez izateak ez ditu aldatzen sistema diskretu eta lineal baten ezaugarri garrantzitsuenak, beraz, bestelakorik esan ezean, hasierako kondizioak nuluak direla suposatuko dugu beti.

$$Y(z) = Z\{y(kh)\} = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} x(lh) \cdot g(kh - lh) \cdot z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} x(lh) \cdot g((k-l)h) \cdot z^{-k}$$

$$m = k - l$$

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} x(lh) \cdot g(mh) \cdot z^{-(m+l)} = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} g(mh) \cdot z^{-m} \left( \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} x(lh) \cdot z^{-l} \right)$$

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} g(mh) \cdot z^{-m} X(z) = X(z) \cdot \left( \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} g(mh) \cdot z^{-m} \right) = G(z) \cdot X(z)$$

Bestalde,  $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(kh) \cdot z^{-k}$  seriea eta  $G(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} g(kh) \cdot z^{-k}$  seriea aldi berean

konbergenteak izan behar dute, hots,  $z$  balio konplexu baterako, bi serie horiek konbergenteak izan behar dute. Beste hitz batzuetan esanda,  $Y(z)$  transformatuaren izate-eremua  $G(z)$  eta  $X(z)$  transformatuen arteko ebakidura izango da.  $X(z)$  eta  $G(z)$  transformatuen izate-eremuak plano konplexu osoa izango dira  $r_x$  eta  $r_g$  konbergentzia-erradioko zirkulu batzuetan izan ezik. Zirkulu horien zentroak jatorrian

daudenez,  $Y(z)$  izate-eremua plano konplexu osoa izango da, zentroa jatorrian duen  $r_y$  erradioko zirkulu bat izan ezik. Printzipioz, pentsa daiteke  $r_y$ ,  $r_x$  eta  $r_g$  erradioetatik handiena dela. Hala ere,  $G(z)$  eta  $X(z)$  transformatuak arrazionalak dira.  $X(z)$  izendatzailearen erro bat eta  $G(z)$  zenbakitzaile bat berdinak izan daitezkeenez, eta sinplifikatuta, erro horrek  $X(z)$  transformaziotik moduluz handiena izan daitezkeenez,  $Y(z)$  transformatuaren konbergentzia-erradioa txikiagotu daiteke. Hori hobeto ulertzeko, adibide baten bidez aztertuko dugu.

#### 4.16 adibidea

Har dezagun sistema lineal bat, hasierako kondizioak nuluak dituen eta denborarekiko aldakorra ez dena. Sistema horren bulkada-erantzuna honelakoa da:

$$\{g(kh)\} = \left\{ \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k=0}}{1}, 2, -1, 0, \dots \right\}$$

Bestalde, sistema horren sarreran  $\{x(kh)\}$  seinalea dugu. Seinale horrek balio hauek hartzen ditu.

$$\{x(kh)\} = \left\{ \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k=0}}{1}, 3, -1, 0, \dots \right\}$$

Seinale horien Z transformatua kalkulatuz eta 4.8 teorema aplikatuz gero, irteerako Z transformatua lortuko dugu. Ondoren, Z transformatuari dagokion seinalea kalkulatuko dugu.

$$G(z) = 1 + 2z^{-1} - z^{-2} = \frac{z^2 + 2z - 1}{z^2}$$

$$X(z) = 1 + 3z^{-1} - z^{-2} = \frac{z^2 + 3z - 1}{z^2}$$

$$Y(z) = G(z) \cdot X(z) = \frac{(z^2 + 2z - 1)(z^2 + 3z - 1)}{z^4} = \frac{z^4 + 5z^3 + 4z^2 - 5z + 1}{z^4}$$

Sistema hori konboluzioaren bitartez egingo bagenu, emaitza hau lortuko genuke.

Ikus daitezkeenez, 4.8 teoremaren bitartez lortutako emaitza bera da.

$$y(kh) = \sum_{l=0}^{l=k} x(lh) \cdot g(kh - lh)$$

$$y(kh) = x(0) \cdot g(kh) + x(h) \cdot g(kh - h) + x(2h) \cdot g(kh - 2h)$$

$$y(kh) = 1 \cdot (\Delta(kh) + 2\Delta(kh - h) - \Delta(kh - 2h)) + 3(\Delta(kh - h) + 2\Delta(kh - 2h) - \Delta(kh - 3h))$$

$$-1(\Delta(kh - 2h) + 2\Delta(kh - 3h) - \Delta(kh - 4h))$$

$$y(kh) = \Delta(kh) + 5\Delta(kh - h) + 4\Delta(kh - 2h) - 5\Delta(kh - 3h) + \Delta(kh - 4h)$$

$$\{y(kh)\} = \left\{ \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k=0}}{1}, 5, 4, -5, 1, 0, \dots \right\}$$

#### 4.3.7 Z transformatuen bilduma

Atal honetan, Z transformatuaren propietate eta ezaugarri nagusiak laburbildu ditugu. Horrez gain, Z transformatu batzuen zerrenda aurkeztu dugu. Hor agertzen diren seinale guztiak  $k$  aldiune negatiboentzat balio nuluak hartzen dituzte. Bestetik, adierazitako seinaleen Z transformatu guztiak arrazionalak edo polinomioen arteko zatiketa-itxura dute. Hala ere, automatikan garrantzia duten seinale guztiak itxura horretakoak dira; beraz, nahikoa izaten da horrelako seinale multzo baten Z transformatuak izatea. Bestalde, fisikoki gerta daitezkeen seinaleen Z transformatua arrazionala ez bada, Z transformatu arrazionalak dituzten funtzio-serieen bitartez adieraz daiteke. Bestalde, Z transformatuen zerrenda honetan ez dugu konbergentzia-erradioa adierazi. Azkenik, Z transformatuen zerrendan lau zutabe sartu ditugu. Lehen zutabean, denboraren mendeko seinaleak idatzi ditugu, hots, denbora jarraituko seinaleak (seinale analogikoak). Ondoren, seinale horiei dagokien Laplaceren transformatua. Hirugarren zutabean, seinale horien lagindutako seinale diskretu baliokideak idatzi ditugu. Kontuan izan behar dugu, betiere,  $h$  laginketa-periodoa dela, hau da,  $h$  dela bi laginen arteko denbora-tartea. Beraz, seinale analogiko bat lagintzean,  $t$  denboraren ordez  $kh$  balioa erabili behar dugu. Beraz, seinale diskretuetan denbora adierazten duen aldagai berria  $k$  aldagaia da. Laugarren zutabean, seinale diskretu horiei dagozkien Z transformatua adierazi dugu.

## 4.1 taula

|                                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Linealtasuna</p> $Z\{a\{w_1(kh)\} + \{w_2(kh)\}\} = Z\{w_1(kh)\} \{w_2(kh)\}$ $Z\{a\{w(kh)\}\} = aZ\{w(kh)\} \quad a \in X$                                                           |
| <p>Denbora-atzerapenak eta -aurrerapenak</p> $Z\{w(kh - dh)\} = z^{-d} W(z) \quad d \in \mathbb{N}$ $Z\{w(kh + dh)\} = z^d W(z) - \sum_{i=0}^{d-1} w(ih) z^{d-i} \quad d \in \mathbb{N}$ |
| <p>Deribazio konplexua</p> $Z\{kh w(kh)\} = -hz \frac{dW}{dz}(z)$                                                                                                                        |
| <p>Eskala-aldaketa</p> $Z\{a^{kh} w(kh)\} = W\left(\frac{z}{a^h}\right) \quad a \in X, a \neq 0$                                                                                         |
| <p>Hasierako eta bukaerako balioak</p> $w(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} W(z)$ $\lim_{k \rightarrow \infty} w(kh) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) W(z)$                               |
| <p>Konboluzioa</p> $Z\left\{\sum_{l=0}^k u(lh)g(kh - lh)\right\} = G(z) U(z)$                                                                                                            |

4.2 taula

| zk. | $w(t)$                   | $L[w(t)]$                           | $w(kh)$                    | $Z\{w(kh)\}$                                                                             |
|-----|--------------------------|-------------------------------------|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | $\delta(t)$              | 1                                   |                            |                                                                                          |
| 2   |                          |                                     | $\Delta(kh)$               | 1                                                                                        |
| 3   | 1                        | $\frac{1}{s}$                       | 1                          | $\frac{z}{z-1}$                                                                          |
| 4   | T                        | $\frac{1}{s^2}$                     | kh                         | $\frac{h \cdot z}{(z-1)^2}$                                                              |
| 5   | $\frac{1}{2}t^2$         | $\frac{1}{s^3}$                     | $\frac{1}{2}(kh)^2$        | $\frac{h^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$                                                            |
| 6   | $e^{-at}$                | $\frac{1}{s+a}$                     | $e^{-akh}$                 | $\frac{z}{z-e^{-ah}}$                                                                    |
| 7   |                          |                                     | $a^{-kh}$                  | $\frac{z}{z-a^h}$                                                                        |
| 8   | $te^{-at}$               | $\frac{1}{(s+a)^2}$                 | $khe^{-akh}$               | $\frac{h \cdot e^{-ah} z}{(z-e^{-ah})^2}$                                                |
| 9   |                          |                                     | $k \cdot h \cdot a^{kh}$   | $\frac{h \cdot a^h z}{(z-a^h)^2}$                                                        |
| 10  | $\sin(\omega t)$         | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$     | $\sin(\omega kh)$          | $\frac{\sin(\omega h) \cdot z}{z^2 - 2 \cos(\omega h) \cdot z + 1}$                      |
| 11  | $\cos(\omega t)$         | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$          | $\cos(\omega kh)$          | $\frac{z[z - \cos(\omega h)]}{z^2 - 2 \cos(\omega h) \cdot z + 1}$                       |
| 12  | $e^{-at} \sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$ | $e^{-akh} \sin(\omega kh)$ | $\frac{e^{-ah} \sin(\omega h) z}{z^2 - 2e^{-ah} \cos(\omega h) \cdot z + e^{-2ah}}$      |
| 13  | $e^{-at} \cos(\omega t)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$    | $e^{-akh} \cos(\omega kh)$ | $\frac{z[z - e^{-ah} \cos(\omega h)]}{z^2 - 2e^{-ah} \cos(\omega h) \cdot z + e^{-2ah}}$ |
| 14  |                          |                                     | $a^{kh} \sin(\omega kh)$   | $\frac{a^h \sin(\omega h) \cdot z}{z^2 - 2a^h \cos(\omega h) \cdot z + a^{2h}}$          |
| 15  |                          |                                     | $a^{kh} \cos(\omega kh)$   | $\frac{z[z - a^h \cos(\omega h)]}{z^2 - 2a^h \cos(\omega h) \cdot z + a^{2h}}$           |

### 4.17 adibidea

Argi izan behar dugu seinale diskretu guztiek ez dituztela Z transformatu arrazionalak. Beraz, hori argitzeko, adibide hau aztertuko dugu. Har dezagun seinale diskretu hau.

$$g(kh) = \begin{cases} 0 & : k \leq 0 \\ \frac{1}{k} & : k > 0 \end{cases}$$

Has gaitezen seinale horren Z transformatuaren formula idazten.

$$G(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} g(kh) \cdot z^{-k} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k} z^{-k}$$

Deribazio konplexuaren teorema aplikatuko dugu, hau da, 4.4 teorema erabiliko dugu. Horretarako,  $q(kh)$  seinale berri bat definituko dugu.  $q(kh)$  seinale berri horren adierazpen matematikoa hau da:  $g(kh)$  seinalea bider  $kh$ . Beraz  $q(kh)$  seinalea maila motako seinale bat da, eta aldiune bat atzeratuta dago. Seinale diskretu berriak  $k = 0$  balio du,  $g(kh)$  seinaleak zero balio duelako aldiune horretarako eta, horrez gain,  $kh$  atal biderkatzailea ere zero delako  $k = 0$  denean. Beraz, guzti hori azaldu eta gero, argi dago  $q(kh)$  seinalea maila motako funtzioa dela

$$Z\{q(kh) = kh \cdot g(kh)\} = -hz \frac{dG}{dz}$$

$$q(kh) = kh \cdot g(kh) = \begin{cases} 0 & : k \leq 0 \\ h & : k > 0 \end{cases}$$

$$q(kh) = h \cdot \text{maila}(kh - h)$$

$q(kh)$  seinale berri horren Z transformatua kalkulatzeari berehalakoa da. Ondoren, 4.4 teorema erabilita,  $G(z)$  transformatuaren deribatua lortuko dugu.  $G(z)$  funtzioaren deribazioa askatuta eta adierazpen hori integratuta,  $G(z)$  transformatua lortuko dugu.

$$Q(z) = hz^{-1} \frac{z}{z-1} = \frac{h}{z-1}$$

$$Q(z) = \frac{h}{z-1} = -hz \frac{dG}{dz}$$

$$\frac{dG}{dz} = -\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \Rightarrow G(z) = \ln(z) - \ln(z-1)$$

$$G(z) = -\ln\left(\frac{z-1}{z}\right)$$

Ikus daitekeenez,  $\{g(kh)\}$  seinaleak ez du Z transformatu arrazionalik. Hala ere, Laurent garapen baten bitartez, Z transformatu hori zatiketa arrazionalen serie baten bidez adieraz daiteke.

Seinale baten Z transformatua arrazionala bada, eta, aldi berean, izendatzailearen maila zenbakitzailearen maila baino handiagoa bada edo biak maila berekoak badira, esaten da seinale horren transformatua berezkoa dela. Seinale baten Z transformatua arrazionala bada, eta, aldi berean, izendatzailearen maila zenbakitzailearen baino handiagoa bada, esaten da seinale horren Z transformatua hertsiki berezkoa dela.

$$G(z) = \frac{N(z)}{I(z)}$$

$N(z)$ ,  $I(z)$ : polinomioak dira

$m(I(z)) > m(N(z))$ : hertsiki berezkoa da

$m(I(z)) \geq m(N(z))$ : berezkoa da

Adibidez:

$$G(z) = \frac{2z-1}{z^2+3z+1}$$

$$\left. \begin{array}{l} m(N(z)) = 1 \\ m(I(z)) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow G(z) \text{ hertsiki berezkoa da}$$

## 4.4 Z TRANSFORMATUAREN ALDERANTZIZKOA

Liburuko atal honetan, Z transformatuaren alderantzizkoa kalkulatu dugu. Seinale diskretu baten Z transformatua badugu eta seinale diskretu horren adierazpen matematikoa lortu nahi badugu, alderantzizko Z transformatua erabili beharko dugu. Alderantzizko transformatua kalkulatzeko hainbat era ditugu: zatiketa bakunetan oinarritutako metodoa, 'zatiketa' eragiketaren bidezko metodoa eta plano konplexuan integratzean oinarritutako metodoa.

#### 4.4.1 Zatiketa bakunetan adierazi

Seinale baten Z transformatua dugu. Transformatu hori polinomioen arteko zatiketa gisakoa da. Bestetik, Z transformatu hori berezkoa da, hau da, izendatzailearen maila zenbakitzailearen maila baino handiagoa da edo biak maila berekoak dira.

$$W(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \quad n \geq m \quad (4.21)$$

non  $a_i, i = 1, 2, \dots, n$  eta  $b_j, j = 1, 2, \dots, m$ .

Ekuazioaren  $a_i$  eta  $b_j$  koefizienteak zenbaki errealak dira. Izendatzailearen  $z^n$  gaiak bat koefizientea du. Beraz, esaten da izendatzailea polinomio normalizatua dela. Izendatzailearen potentzia handienekoa,  $a_0$ , bat ez bada,  $W(z)$  transformatua  $a_0 - z$  zatitu daiteke, bai izendatzailean, bai zenbakitzailean. Horrek esan nahi du izendatzailea polinomio normalizatu batez idatz daitekeela. Beraz, (4.21) itxurako polinomio bihur daiteke.

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = \\ &= \frac{\left( \frac{b_0 z^m}{a_0} \right) + \left( \frac{b_1 z^{m-1}}{a_0} \right) + \dots + \left( \frac{b_m}{a_0} \right)}{z^n + \left( \frac{a_1}{a_0} \right) z^{n-1} + \dots + \left( \frac{a_n}{a_0} \right)} \quad n \geq m, a_0 \in \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

Ondoren, aurreko taula bietan agertzen diren gaien bitartez adierazi beharra dago  $W(z)$ . Hori lortzeko, lehenik,  $W(z)$  transformatuaren izendatzailea honela banatu behar dugu:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)$$

non  $p_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, n$  zenbakiak  $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  polinomioaren erroak baitira. Beraz,  $p_i$  zenbakiak  $W(z)$  transformatuaren poloak dira. Kontuan izan behar dugu izendatzailearen maila  $n$  bada izango dugun erro kopurua  $n$  dela. Hala ere, erroak anizkoitzak badira, erro horien anizkoitzasuna kontuan izan beharko dugu. Erro bera behin baino gehiagotan agertzen bada  $W(z)$  transformatuaren izendatzailean, esango dugu erroa anizkoitza dela. Dena den, alderantzizko transformatua kalkulatzeko, lehenik, erroak bakunak direla suposatuko dugu. Ondoren, polo anitzeko  $W(z)$  transformatua aztertuko dugu.

1. Izendatzailean erro errealak eta bakunak baditugu:

$W(z)$  transformatuaren polo bakunak eta zero ez direnak aztertuko ditugu:

$$\begin{aligned} p_i, p_j & \quad i \neq j \quad i = 1, 2, \dots, n \\ p_i & \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4.22)$$

Zatiketa bakunetan idaztea lortu nahi da:

$$W(z) = c_0 + \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2} + \dots + \frac{c_n z}{z - p_n} \quad (4.23)$$

Ikus daitekeenez,  $\frac{c_i z}{z - p_i}, i = 1, 2, \dots, n$  elementu bakunek  $z$  faktorea dute beren zenbakitzailean; beraz,  $Z$  transformatuko zatiketa bakunetako adierazpena eta Laplaceren transformatuaren zatiketa bakunetako adierazpena ez dira berdinak.

$$W(z) \text{ k ez du polo nulurik; beraz: } c_0 = W(0) \quad (4.24)$$

$c_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$  koefizientea kalkulatzeko, (4.23) ekuazioko alde biak  $\frac{z - p_i}{z}$  elementuaz biderkatzen dira eta gero limiteak kalkulatzeko dira  $z$ -k  $p_i$ -rantz jotzen duenerako.

#### 4.18 adibidea

Har dezagun  $Z$  transformatu hau:

$$W(z) = \frac{4z^2 - 8z + 2}{z^2 - 3z + 2}$$

$W(z)$  transformatuari dagokion  $w(kh)$  seinalea kalkulatu nahi dugu. Horretarako,  $W(z)$  zatiketa bakunetan banatuko dugu, eta, ondoren, aurreko tauletatik zatiketa bakoitzari dagokion adierazpen matematikoa lortuko dugu. Horretarako, lehenik izendatzailearen erroak kalkulatu behar ditugu; izendatzailea honela idatziko dugu:

$$z^2 - 3z + 2 = (z - 1)(z - 2)$$

Ondorioz, zatiketa bakunetan idazten badugu, adierazpen matematiko hau lortuko dugu:

$$W(z) = c_0 + \frac{c_1 z}{z-1} + \frac{c_2 z}{z-2}$$

eta  $c_0$ ,  $c_1$  eta  $c_3$  gaiak balio hauek dituzte.

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{z-1}{z} \frac{4z^2 - 8z + 2}{(z-1)(z-2)} \right] = 2$$

$$c_2 = \lim_{z \rightarrow 2} \left[ \frac{z-2}{z} \frac{4z^2 - 8z + 2}{(z-1)(z-2)} \right] = 1$$

Eta 4.2 taulako lehengo eta seigarren errenkadetako transformatuak kontuan izanik, hau izango da  $w(kh)$  seinalea:

$$w(kh) = \Delta(kh) + 2 + 2^k \quad k \geq 0$$

## 2. Izendatzailean erro konplexuak eta bakunak baditugu:

Izendatzaileak erro bakunak eta konplexuak izan ditzake. Egoera horretan arreta berezia jarri behar dugu. Horrelako berezitasuna duen  $p$  poloa dugula suposatuko dugu,  $\frac{cz}{z-p}$  hari lotutako elementu bakuna delarik, non  $c = \lim_{z \rightarrow p} \left[ \frac{z-p}{z} W(z) \right]$  baita.

$a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  zenbaki errealak badira,  $\bar{p}$  konjugatutako zenbaki konplexua ere  $W(z)$  funtzioaren izendatzailearen erroa izango da (beste hitz batzuetan esanda,  $\bar{p}$   $W(z)$  transformatuaren poloa izango da) eta  $\frac{c'z}{z-\bar{p}}$  elementu bakuna sortuko du,

non  $c' = \lim_{z \rightarrow \bar{p}} \left[ \frac{z-\bar{p}}{z} W(z) \right]$  baita.

$a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  eta  $b_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  zenbaki errealak direnez,  $c' = \bar{c}$ , hau da,  $W(z)$  transformatuaren bi polo konplexu eta konjugatuek zatiketa bana izango dute; eta baten biderkatzailea  $c$  bada (eskuarki,  $c$  zenbaki konplexua izango da, baldin eta  $p$  konplexua bada), beste polo konjugatuaren zatiketa bakunaren biderkatzailea beste erroaren biderkatzailearen konjugatua izango da. Ohar modura,  $c$  zenbaki konplexua bada,  $\bar{c}$  zenbakia  $c$  zenbaki konplexuaren konjugatua izango da.

$$c = a + jb$$

$$\bar{c} = a - jb$$

Hala,  $W(z)$  transformatuaren zatiketa bakunak goiko gai biak barne hartzen ditu:

$$W(z) = \dots + \frac{cz}{z-p} + \frac{\bar{c}z}{z-\bar{p}} + \dots \quad (4.25)$$

beraz,

$$w(k) = \dots + cp^k + \bar{c}\bar{p}^k + \dots \quad k \geq 0 \quad (4.26)$$

$p = re^{j\omega}$   $c = x + yj$  egiten badugu:

$$\begin{aligned} w(kh) &= \dots + (x + yj) r^k e^{jk\omega} + (x - yj) r^k e^{-jk\omega} + \dots = \\ &= \dots + r^k \left[ x(e^{jk\omega} + e^{-jk\omega}) + jy(e^{jk\omega} - e^{-jk\omega}) \right] + \dots \end{aligned}$$

$$\text{eta} \quad w(kh) = \dots + r^k [2x \cos(k\omega) - 2y \sin(k\omega)] + \dots \quad (4.27)$$

$\varphi = \ar \cot g \frac{y}{x}$  bada, hau dugu:

$$\begin{aligned} w(kh) &= \dots + 2|c|r^k \left[ \frac{x}{|c|} \cos(k\omega) - \frac{y}{|c|} \sin(k\omega) \right] + \dots = \\ &= \dots + 2|c|r^k \cos(k\omega + \varphi) + \dots \end{aligned} \quad (4.28)$$

Konjugatuak diren polo bikote bat, denborari buruz ari garenean,  $r$  1 baino txikiagoa edo handiagoa den arabera moteldutako edo moteldu gabeko seinale erreal bati dagokio, hurrenez hurren.

#### 4.19 adibidea

$$\text{Izan bedi } W(z) = \frac{z+1}{z^2+z+1}$$

Izendatzailearen zatiketa honela geratzen da:

$$z^2 + z + 1 = \left[ z - \left( -\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2} \right) \right] \left[ z - \left( -\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2} \right) \right]$$

eta zatiketa bakuna honela:

$$W(z) = c_0 + \frac{cz}{z - \left(-\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{\bar{c}z}{z - \left(-\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2} = e^{j\frac{2\pi}{3}} \text{ polo konplexua dela kontuan hartuz gero:}$$

$$c_0 = 1$$

$$c = -0,5 + 0,2887j$$

Beraz:

$$w(kh) = \Delta(k) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{6}\right) \left(-\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2}\right)^k + \left(-\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{6}\right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2}\right)^k \quad k \geq 0$$

3. Izendatzailean erro anizkoitzak baditugu:

Guk  $p$  polo anizkoitza eta zero ez dena hartuko dugu. Zatiketa bakuna honela geratuko da:

$$W(z) = \dots + \frac{c_1 z}{z - p} + \frac{c_2 z}{(z - p)^2} + \frac{c_l z}{(z - p)^l} + \dots \quad (4.29)$$

$$c_{l-i} = \lim_{z \rightarrow p} \left\{ \frac{1}{i!} \cdot \frac{d^i}{dz^i} \left[ \frac{(z-p)^l}{z} W(z) \right] \right\}$$

$\frac{z}{(z-p)^2}$ -ren alderantzizko z transformatua  $kp^{k-1}$ ,  $k \geq 0$  da. Oro har,

$\frac{z}{(z-p)^l}$ -ren alderantzizko z transformatua  $\frac{1}{(l-1)!} k(k-1)\dots(k-l+2)p^{k-l+1}$ ,  $k \geq 0$ .

Beraz,

$$w(k) = \dots + c_1 p^k + c_2 k p^{k-1} + \dots + c_l \frac{l}{(l-1)!} \prod_{i=0}^{l-2} (k-i) p^{k-l+1} + \dots \quad (4.30)$$

### 4.20 adibidea

Z transformatu honen alderantzizkoa bilatu nahi da:

$$W(z) = \frac{1}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Zatiketa bakuna hau da:

$$W(z) = c_0 + \frac{c_1 z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{c_2 z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{c_3 z}{z - 1}$$

Koefiziente hauek lortuko ditugu:

$$c_0 = -4$$

$$c_1 = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left\{ \frac{d}{dz} \left[ \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}{z} \cdot \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 (z-1)} \right] \right\} = 0$$

$$c_2 = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left[ \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}{z} \cdot \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 (z-1)} \right] = -4$$

$$c_3 = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 (z-1)} \right] = 4$$

eta hala  $w(h)$  seinale diskretua izango dugu:

$$w(k) = -4\Delta(k) - 4k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + 4 \quad k \geq 0$$

$z = 0$  polo anizkoitza dela kontuan hartzen badugu, adierazpen matematiko hau izango dugu:

$$W(z) = \dots + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_l}{z^l} + \dots \quad (4.31)$$

eta koefizienteak eskuarki:

$$c_{l-i} = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{i!} \cdot \frac{d^i}{dz^i} [z^i W(z)] \right\} \quad (4.32)$$

Beraz:

$$w(kh) = \dots + c_0 \Delta(kh) + c_1 \Delta(kh - h) + c_2 \Delta(kh - 2h) + \dots + c_l \Delta(kh - lh) \quad k \geq 0 \quad (4.33)$$

0, h, ..., lh aldiune atzeratutako bulkada-batuketa bat dugu.

#### 4.2.1 adibidea

Har dezagun  $W(z) = \frac{1}{z^2 \left( z + \frac{1}{2} \right)}$

Zatiketa bakuna hau da:

$$W(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3 z}{z + \frac{1}{2}}$$

Koefizienteak hauek izango dira:

$$c_0 = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dz^2} \left[ z^2 \cdot \frac{1}{z^2 \left( z + \frac{1}{2} \right)} \right] \right\} = 8$$

$$c_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{dz} \left[ z^2 \cdot \frac{1}{z^2 \left( z + \frac{1}{2} \right)} \right] \right\} = -4$$

$$c_2 = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ z^2 \cdot \frac{1}{z^2 \left( z + \frac{1}{2} \right)} \right] = 2$$

$$c_3 = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left[ \frac{z + \frac{1}{2}}{z} \cdot \frac{1}{z^2 \left( z + \frac{1}{2} \right)} \right] = -8$$

hala:

$$w(kh) = 8\Delta(k) - 4\Delta(k-1) + 2\Delta(k-2) - 8\left(-\frac{1}{2}\right)^k \quad k \geq 0$$

#### 4.22 adibidea

Hemen 4.7 teoremaren azken atala frogatuko dugu adibide honen bitartez. Horretarako,  $\{w(kh) - w(kh - h)\}$  seinalea aztertuko dugu. Suposatuko dugu  $W(z)$  transformatua  $z$ -ren berezko funtzio arrazionala dela eta poloen moduluak 1 baino txikiagoak direla, erro bat izan ezik, eta azken hori polo bakuna eta 1 baliokoa dela. Has gaitezen  $W(z)$  transformatuari dagokion seinalea kalkulatzeko.

Demagun  $l_1$ -garren mailako anizkoiztasuna duen eta 0 den  $W(z)$ ren poloa dugula; polo horri dagokion zatiketa bakunezko adierazpena hau da:

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots + \frac{c_{l_1}}{z^{l_1}} \quad (4.34)$$

eta  $p \neq 0$  den eta  $l_2$ -garren mailako anizkoiztasuna duen poloarentzat (eskuarki, polo konplexua izan daiteke):

$$\frac{c_1 z}{z - p} + \frac{c_2 z}{(z - p)^2} + \dots + \frac{c_{l_2} z}{(z - p)^{l_2}} \quad (4.35)$$

$k \geq 0$  den kasurako, hauek izango ditugu (4.35) eta (4.34) berdintzei dagozkien denboraren mendeko seinaleak:

$$c_0 \Delta(kh) + c_1 \Delta(kh - h) + \dots + c_{l_1} \Delta(kh - l_1 h)$$

$$c_1 p^k + c_2 k p^{k-1} + \dots + c_{l_2} \frac{1}{(l_2 - l)!} \prod_{i=0}^{l_2-2} (k - i) p^{k-l_2+1} \quad (4.36)$$

Hala, (4.36) berdintzan oinarriturik,  $\{w(kh) - w(kh - h)\}$  seinale diskretuak gai hauek izango ditu:

$$\begin{aligned} & c_0 \Delta(kh) + c_1 \Delta(kh - h) + \dots + c_{l_1} \Delta(kh - l_1 h) \\ & c_1 (p^k - p^{k-1}) + c_2 (k p^{k-1} - (k-1) p^{k-2}) + \dots + \\ & + c_{l_2} \frac{1}{(l_2 - 1)!} \left[ \prod_{i=0}^{l_2-2} (k - l_2) p^{(k-l_2+1)} - \prod_{i=0}^{l_2-2} (k - l_2 - i) p^{(k-l_2)} \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

$p$  berdin 1 den polo bakuna bada, (4.37) berdintza honela adieraz daiteke:

$$c_1 (p^k - p^{k-1}) = c_1 \Delta(k)$$

Linealtasunaren propietatea kontuan hartzen badugu,  $\{w(kh) - w(kh - h)\}$  seinalearen  $z$  transformatua, hain zuzen,  $z$  transformatuen serie konposatuen konbinazio lineala da:

$$c_0 (1 - z^{-1}) + c_1 (z^{-1} - z^{-2}) + \dots + c_l (z^{-l} - z^{-l-1}) \quad (4.38)$$

$$c_1 \left( \frac{z}{z-p} - \frac{1}{z-p} \right) + c_2 \left( \frac{z}{(z-p)^2} - \frac{1}{(z-p)^2} \right) + \dots + c_l \left( \frac{z}{(z-p)^l} - \frac{1}{(z-p)^l} \right) \quad |p| < 1 \quad (4.39)$$

(4.37), (4.38) eta (4.39) adierazpenen konbergentzia-erradioak, 0,  $|p| < 1$  eta 0 dira, hurrenez hurren. Beraz, 4.1 teorema kontuan hartuz,  $Z\{w(kh) - w(kh - h)\}$ -ren konbergentzia-erradioak 1 baino txikiagoa izan behar du. Beraz 4.7 teoremaren azken atala frogatu dugu.

#### 4.4.2 'Zatiketa' eragiketaz baliatu

Kasu honetan ere,  $Z$  transformatua arrazionala izango da eta itxura hau izango du:

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (4.40)$$

$a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  eta  $b_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  zenbaki errealak dira. Izendatzailea eta zenbakitzailea  $z^n - z$  biderkatzen baditugu:

$$W(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (4.41)$$

Zenbakitzailaren eta izendatzailaren arteko mailen aldea  $d$  mailakoa izango da, baldin eta  $b_j, j = 1, 2, \dots, d - 1$  bada. Bi polinomioen arteko maila-kenketa horrek adierazten digu  $W(z)$  transformatuaren polo kopuruaren eta erro kopuruaren arteko aldea. (4.41) eta (4.40) adierazpen matematikoen artean alderik ez dagoela ikusi ondoren, 4.9 teorema aztertuko dugu. Teorema horren bitartez,  $W(z)$  transformatu batetik abiatuz,  $Z$  transformatuari dagokion  $w(kh)$  seinale diskretua lor dezakegu.

#### 4.9 teorema

$a_i = b_j = 0$ , baldin eta  $i > n$  bada, hots,  $W(z)$  transformatuaren izendatzailaren eta zenbakitzailaren maila  $n$  bada, eta, orduan, (4.40) adierazpeneko  $Z$  transformatuari dagokion  $w(kh)$  seinale diskretua errepikapenezko algoritmo honen bitartez lor daiteke.

$$w(kh) = b_k - \sum_{l=0}^{k-1} w(lh) a_{k-l} \quad (4.42)$$

*Frogapena:*

(4.40) adierazpena honela idatz daiteke:

$$b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} = (1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) W(z)$$

$b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}$  adierazpena, orduan, iraupen infinitua duen  $\{ \dots 0, b_0, b_1, \dots, b_n, 0, \dots \}$  seinale diskretuaren  $z$  transformatutzat har daiteke, eta  $1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$   $\{ \dots 0, 1, a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots \}$ , seinale diskretuaren  $z$  transformatutzat. Beraz, 4.8 teorema hartuta, hau izango da konboluzio-biderketa:

$$b_k = \sum_{l=0}^{k-1} w(lh) a_{k-l} + w(kh)$$

$a_i = b_j = 0$  izango da,  $i > n$  bada, eta, orduan:

$$w(kh) = b_k - \sum_{l=0}^{k-1} w(lh) a_{k-l} \quad k > 0$$

Beste kasuetan ez bezala, kasu honetan ez ditugu kalkulatu behar  $W(z)$ ren poloak. Ohar gisa esango dugu, eskuarki ez dugula lortuko  $\{w(kh)\}$  seinalearen denboran

zeharreko adierazpen matematikoa. Hortaz, kasu honetan Laplaceren transformatuaren kasuan baino errazagoa da alderantzikoa bilatzea. Hala ere,  $k$  oso handia denean, arazoak izan daitezke; izan ere, (4.42) adierazpenean biderketa eta batuketa asko izateak errorearen biribiltzea eragiten du.

#### 4.23 adibidea

Har dezagun  $W(z)$  adibideko  $z$  transformatua:

$$W(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

Honela idatz daiteke:

$$W(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

eragiketa errepikatuz gero:

$$w(0) = 1$$

$$w(h) = 1 + 1 = 2$$

$$w(2h) = 2 + 0 = 2$$

$$w(3h) = 2$$

...

$b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}$  polinomioa  $1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$  polinomioaz zatitutakoan,  $z$ -ren berretura negatiboak lortzen dira. Bestalde, berretzaile negatiboetako segida horretako balioak (4.42) adierazpenetik lortutako  $w(kh)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  laginak dira. Beraz,  $W(z)$  transformatuaren zenbakitzailea eta izendatzailea zatituta lor daiteke  $Z$  transformatuaren alderantzizkoa.

#### 4.24 adibidea

$$\begin{array}{r}
 1 + z^{-1} \\
 \hline
 1 - z^{-1} \\
 \hline
 2z^{-1} \\
 2z^{-1} - 2z^{-2} \\
 \hline
 2z^{-2} \\
 2z^{-2} - -2z^{-3} \\
 \hline
 2z^{-3} \\
 2z^{-3} - -2z^{-4} \\
 \hline
 2z^{-4} - 2z^{-5}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 | 1 - z^{-1} \\
 \hline
 1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + 2z^{-3} + 2z^{-4}
 \end{array}$$

Hau dugu:

$$w(kh) = \{\dots, 0, 1, 2, 2, 2, 2, \dots\}$$

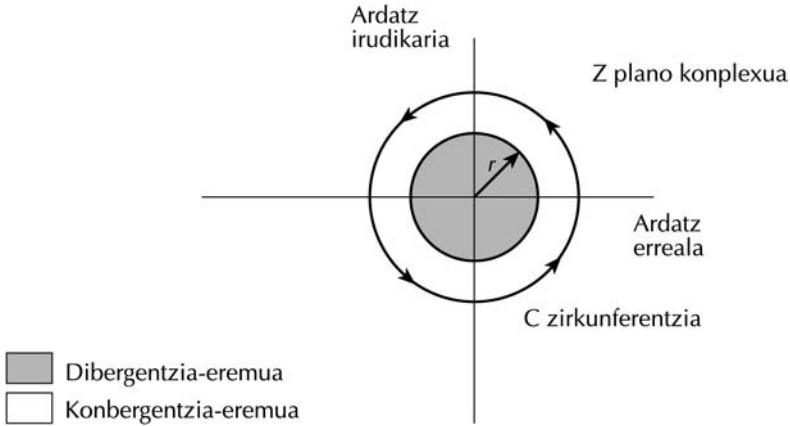
#### 4.4.3 Plano konplexuan integratuz

Aurreko bi irizpideak erabili ditugu  $W(z)$  transformatu batetik abiatuz transformatu horri dagokion  $w(kh)$  seinalea kalkulatzeko. Hala ere, bi irizpide horiek alderdi ahul bat dute:  $W(z)$  funtzio arrazionala den kasurako bakarrik balio dute.  $W(z)$  arrazionala ez bada (ikus 1.17 adibidea) eta seinale horren adierazpen matematiko zehatza kalkulatu nahi badugu, teorema hau erabili beharko dugu.

#### 4.10 teorema

C zirkunferentzia batek  $z = 0$  plano konplexuko jatorrian du zentroa. Zirkunferentzia hori  $W(z)$  transformatuaren konbergentzia-eremuaren barruan dago erabat. (4.43) integral konplexua ibilbide horretan egiten bada,  $W(z)$  transformatuari dagokion  $w(kh)$  seinale diskretuaren baliokidea izango da. Ibilbidea erlojuaren aurkako noranzkoan egin behar da. Integralaren balioan eragina du integralaren ibilbidea egitean daramagun noranzkoak.

$$w(kh) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C W(z) \cdot z^{k-1} \cdot dz \quad (4.43)$$



**4.11 irudia.** Konbergentzia-erradioa da  $r$ . C zirkunferentzia, beraz, izate- edo konbergentzia-eremuaren barruan dago. C zirkunferentziari erlojuaren orratzen kontrako noranzkoan jarraitu behar diogu.

*Frogapena:*

Has gaitzen integral konplexu hau egiten.

$$I = \frac{1}{2\pi j} \oint_C W(z) \cdot z^{k-1} \cdot dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \sum_{l=0}^{l=\infty} w(lh) \cdot z^{-l} \cdot z^{k-1} \cdot dz = \frac{1}{2\pi j} \sum_{l=0}^{l=\infty} w(lh) \oint_C z^{k-l-1} \cdot dz$$

$$z = R_C e^{jw} \Rightarrow dz = jR_C e^{jw} \cdot dw$$

$$I = \frac{1}{2\pi j} \sum_{l=0}^{l=\infty} w(lh) \oint_C z^{k-l-1} \cdot dz = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{l=\infty} w(lh) R_C^{k-l} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jw(k-l)} dw$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{l=\infty} w(lh) R_C^{k-l} \left. \frac{e^{jw(k-l)}}{j(k-l)} \right|_{-\pi}^{\pi} = \sum_{l=0}^{l=\infty} w(lh) R_C^{k-l} \frac{\sin(\pi(k-l))}{\pi(k-l)}$$

$$I_l = \begin{cases} w(kh) : k = l \\ 0 : k \neq l \end{cases} \Rightarrow I = \sum_{l=0}^{l=\infty} I_l = w(kh)$$

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C W(z) \cdot z^{k-1} \cdot dz = w(kh)$$

## 4.5 TRANSFERENTZIA-FUNTZIOA

Liburuko atal honetan transferentzia-funtzioa aztertuko dugu. Transferentzia-funtzioa da denborarekiko aldakorra ez den eta hasierako kondizioak nuluak dituen sistema lineal eta kausal baten ezaugarri nagusia. Aurreko kondizioak betez gero, (4.19) adierazpen matematikoa beteko du aztertzen ari garen sistemak. Beraz, horrelako sistema dinamiko bat definitzeko, aski dugu sistemaren bulkada-erantzuna ezagutzea. (4.19) formularen sistemaren bulkada-erantzuna agertzen da eta (4.20) formularen ikus dezakegu nola dauden lotuta sistemaren artearen  $Z$  transformatua, sistema horren bulkada-erantzunaren  $Z$  transformatua eta sarreraren  $Z$  transformatua.

### 4.5.1 Linealak, kausalak eta denborarekiko aldakorrak ez diren eta hasierako kondizioak nuluak dituzten sistema diskretuen transferentzia-funtzioa

Gogora dezagun lineala, kausala eta egonkorra den eta geldinean dagoen prozesu baten artea ezartzen zaion sarreraren eta horren bulkada-erantzunaren arteko konboluzioa dela (ikus 4.19 formula).

$$y(kh) = \sum_{l=0}^k x(lh) g(kh - lh)$$

Ezaguna dugu, orobat,  $z$  transformatu baten konboluzio-produktua:

$$Y(z) = G(z) \cdot X(z) \quad (4.44)$$

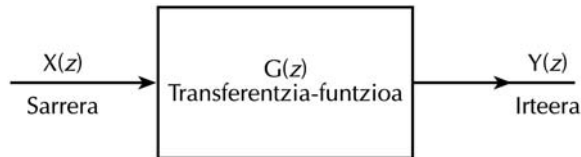
Lineala, kausala eta egonkorra den eta geldinean dagoen sistema diskretu baten  $\{g(kh)\}$  bulkada-erantzunaren  $Z$  transformatuari  $G(z)$  sistemaren transferentzia-funtzio deritzo. Beraz, (4.44) adierazpenak itxura hau har dezake:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (4.45)$$

Transferentzia-funtzio diskretua, beraz, artearen  $Z$  transformatuaren eta sarreraren  $Z$  transformatuaren arteko zatiketa gisa idatz daiteke. Transferentzia-funtzioaren definizioak egiaztatzen digu aipatutako zatikia eta hautatutako sarrera independenteak direla.

Transferentzia-funtzioaren eta konboluzioaren adierazpenek artearen eta sarreraren arteko erlazioa azaltzen diguten heinean, kanpo-adierazpenak dira sistemarekiko. Beste hitz batzuetan esanda: sistema horren sarreraren eta artearen

arteko harremanak finkatzen dizkigu transferentzia-funtzioaren bidezko adierazpenak. Baina sistemaren barneko aldagaiei buruz ez dakigu gauza handirik. Horregatik, transferentzia-funtzioek ematen dituzten adierazpenak kanpo-adierazpenak direla esaten dugu. Berezitasun hori eskema honetan ageri zaigu:



**4.12 Irudia.** Sistema baten transferentzia-funtzioaren bidezko adierazpen grafikoa, hau da, bloke bidezko adierazpena.

Ikus daitekeenez, (4.44) eta sistema analogikoetan ematen diren  $Y(s) = G(s)X(s)$  moduko adierazpen edo eredu matematiko berdintsuak lortzen ditugu. Hortaz, Z transformatuaren bitartez lortzen ditugun transferentzia bidezko adierazpen matematikoak eta bloke erako adierazpen grafikoak lantzean sistema eta seinale diskretuekin, sistema analogikoekin ditugun propietate beerak lortzen ditugu. Beraz, sistema diskretu lineal bat bloke gisa adieraztean, sistema analogikoetan erabil daitezkeen arau berak erabiliko ditugu. Orain errazago egiten zaigu 4.1 puntuan aipatutako sistema jarraituen eta diskretuen arteko parekotasunei buruz hitz egitea.

#### 4.27 adibidea

Adibide gisa hartu dezagun sistema diskretu bat ltxura honetako bulkada-erantzuna du:  $\{g(kh)\} = \{\dots, 0, 1, 2, -1, 0, \dots\}$ . Beraz, sistemaren transferentzia-funtzioa hau da:

$$G(z) = 1 + 2z^{-1} - z^{-2}$$

Sistemaren sarreran seinale hau dugu:

$$\{u(kh)\} = \{\dots, 0, 1, 1, 2, 0, \dots\}$$

Beraz, sistemaren irteerak itxura hau hartuko du:

$$\{y(kh)\} = \{\dots, 0, 1, 3, 3, 3, -2, 0, \dots\}$$

Hortaz, sistemaren transferentzia-funtzioa hau izango da.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3} - 2z^{-4}}{1 + z^{-1} + 2z^{-2}}$$

Zenbakitzailearen eta izendatzailearen arteko zatiketa egiten badugu, emaitza egiaztatuko dugu:

$$\begin{array}{r}
 1 + 3z^{-1} \quad + \quad 3z^{-2} \quad + \quad 3z^{-3} \quad - 2z^{-4} \\
 \hline
 1 + z^{-1} \quad + \quad 2z^{-2} \\
 \hline
 2z^{-1} \quad + \quad z^{-2} \quad + \quad 3z^{-3} \quad - 2z^{-4} \\
 \hline
 2z^{-1} \quad + \quad 2z^{-2} \quad + \quad 4z^{-3} \\
 \hline
 -z^{-2} \quad - \quad z^{-3} \quad - 2z^{-4} \\
 \hline
 -z^{-2} \quad - \quad z^{-3} \quad - 2z^{-4} \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad \frac{1 + z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 2z^{-1} - z^{-2}}$$

#### 4.5.2 Gehikuntza-ekuazioen bidez adierazitako sistemen transferentzia-funtzio diskretua

Har dezagun sistema diskretu bat. Sistema hori gehikuntza-ekuazio baten bitartez adieraz dezakegu. Gehikuntza-ekuazio horrek kondizio hauek betetzen dituela suposatuko dugu:

1. Gehikuntza-ekuazioa lineala da, hau da, gehikuntza-ekuazioak itxura hau hartuko du.

$$\begin{aligned}
 y(kh) + a_1 y(kh - h) + \dots + a_n y(kh - nh) = \\
 = b_0 x(kh - dh) + \dots + b_m x(kh - dh - mh)
 \end{aligned}
 \tag{4.46}$$

2. Ez da denborarekiko aldakorra, hau da,  $\{a_j, j = 1 \dots n\}$  eta  $\{b_i, i = 0 \dots m\}$  koefizienteak errealak eta finkoak dira.
3. Sistema kausala da, hau da,  $n - m = d > 0$  betetzen da.
4. Hasierako kondizioak nuluak ditu, hau da,  $\{u(-1), u(-2), \dots, u(-n)\}$  zenbakiak eta  $\{y(-1), y(-2), \dots, y(-n)\}$  hasierako kondizioak zero direnean.

Ohar gisa, hemendik aurrera, esango dugu horrelako sistemak SDLEKH motako sistemak direla.

Horrenbestez, irteeraren, sarreraren eta bulkada-erantzunaren arteko konboluzio gisa adieraz daiteke. Hala ere, sistema horren transferentzia-funtzioa adierazteko orduan, bulkada-erantzuna kalkulatu eta bulkada-erantzunaren  $z$  transformatua hartu beharrean,  $Y(z)/U(z)$  zatikia kalkulatu dugu. Horretarako, hurrengo ekuazioaren  $z$  transformatuak aztertuko ditugu.

Hori egiteko, linealtasunaren eta atzerapenaren propietateak erabiliko ditugu.  $u(-1), u(-2), \dots, u(-n)$  zenbakiak eta  $y(-1), y(-2), \dots, y(-n)$  hasierako kondizioak zero

direla suposatuko dugu. Beraz, aurreko ekuazioak adierazpen matematiko hau emango digu:

$$(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) Y(z) = z^{-d} (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) \cdot u(z)$$

Horrenbestez, (4.45) ekuazioa erabiliz, sistemaren  $G(z)$  transferentzia-funtzioa lortuko dugu.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = z^{-d} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (4.47)$$

Izendatzailea eta zenbakitzailea  $z^n - z$  biderkatuz gero eta  $d(n - m) - z$  ordezkatuz gero:

$$G(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (4.48)$$

$z$  aldagai konplexudun berezko funtzio arrazionala da. (4.49) funtzio konplexuaren izendatzailearen erroak transferentzia-funtzioaren poloak dira eta ekuazio hau egiaztatzen dute:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (4.49)$$

Sistemaren zeroak transferentzia-funtzioaren zenbakitzailearen erroak dira, eta ekuazio hau egiaztatzen dutelarik:

$$b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m = 0 \quad (4.50)$$

Sistemak duen polo kopurua da sistemaren maila edo ordena. Honela adierazten dugu sistemaren polo kopuruaren eta zero kopuruaren arteko aldea:  $d = n - m$ . Horrenbestez, esaten dugu  $d$  dela sistemak dituen gehiegizko polo kopurua.

#### 4.28 adibidea

Hona hemen integratzaile digital baten gehikuntza-ekuazioa:

$$y(kh + h) = y(kh) + u(kh) \cdot h$$

Integratzailearen transferentzia-funtzioa hau da:

$$G(z) = \frac{h}{z - 1}$$

integratzaile batek beti  $z = 1$  poloa du. Ez du zerorik eta lehen mailako sistema bat da, transferentzia-funtzioak polo bakarra baitu.

#### 4.29 adibidea

PI kontroladore batek gehikuntza-ekuazio hau du.

$$u(kh) - u(kh - h) = K_p e(kh) + K_p \left( \frac{h}{T_i} - 1 \right) e(kh - h)$$

Transferentzia-funtzio hau du:

$$G(z) = K_p \frac{1 + \left( \frac{h}{T_i} - 1 \right) \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

edo, berretura positiboetan idatzita, hau dugu:

$$G(z) = K_p \frac{z + \frac{h}{T_i} - 1}{z - 1}$$

Ploa  $z = 1$  da, zeroa  $z = 1 - \frac{h}{T_i}$  eta lehen mailakoa da.

$d$  lagineko atzerapena sortzen duen sistema baten transferentzia-funtzioa hau da:

$$G(z) = z^{-d} = \frac{1}{z^d}$$

$z = 0$  poloa du. Polo hori  $d$  aldiz agertzen denez, transferentzia-funtzioaren izendatzailean polo hori anizkoitza da. Sistema honek ez du zerorik. Sistemak  $d$  polo dituenek,  $d$  mailako edo ordenako sistema da.

Gehikuntza-ekuazioen emaitza errepikapenezko kalkuluaren bitartez lor daiteke. Hots, (4.46) formula behin eta berriz aplikatuz lor daiteke oso erraz sistemaren irteera. Hala ere, aldaketak edo berrelikadura bidezko kontrola egin nahi denean, komeni da sistemaren erantzun analitikoak izatea. Beraz, irteeraren adierazpen analitikoak izateko,  $z$  transformatua erabili behar dugu. Demagun (4.48) ekuazioko  $G(z)$   $n$  ordenako koefiziente konstanteko gehikuntza-ekuazio lineal bati lotutako transferentzia-funtzio bat dugula. Honek emango dizkigu horren emaitzak:

$$\{y(kh)\} = Z^{-1}[G(z) U(z)]$$

z transformatuaren alderantzizkoa lortzeko erak edo irizpideak 4.4 atalean daude zehaztuta.

Erregulazio digitalean parte hartzen duten prozesu diskretu gehienak gehikuntza-ekuazioen bidez adierazten dira, edota transferentzia-funtzio arrazional baten bidez. Bereziki azpimarratzekoa da Z transformatuaren eta bere alderantzizko transformatuaren garrantzia. Batez ere, 4.4.1 ataleko zatiketa bakunen bitartez lortutako emaitzak erabilgarriak izango zaizkigu kontroladoreak kalkulatzeari.

#### 4.5.2.1 Hasierako kondizioak nuluak ez dituzten sistemak

SDLEK motako sistema baten hasierako kondizioak nuluak ez izateak nolabaiteko eragina du sistemaren irteeran. Dena den, SDLEK den sistema batentzako hasierako kondizioak ez du aldatzen sistemaren jarrera-dinamika (adibidez, sistemaren egonkortasuna). Hori hobeto ikusi ahal izateko, z transformatuan oinarritutako analisi bat egingo dugu. Jo dezagun sistemaren sarreran dugun seinalearen z transformatua arrazionala dela. Suposatuko dugu, orobat, sistemaren gehikuntza-ekuazioak (4.46) itxura duela.

$$y(kh) + a_1 y(kh - h) + \dots + a_n y(kh - nh) = b_0 x(kh - dh) + \dots + b_m x(kh - dh - mh)$$

$$y(kh) + \sum_{j=1}^{j=n} a_j y(kh - jh) = \sum_{i=0}^{i=m} b_i x(kh - (d + i)h)$$

Sistema horri Z transformatua aplikatuz, itxura honetako adierazpen matematikoa lortuko dugu. Gogoan izan behar dugu sistemaren hasierako kondizioak ez direla nuluak.

$$Y(z) + \sum_{j=1}^{j=n} a_j \left[ z^{-j} Y(z) + \sum_{l=1}^{l=j} y(lh) z^{-l} \right] = \sum_{i=0}^{i=m} b_i \left[ z^{-i} X(z) + \sum_{q=-1}^{q=-(d+i)} x(qh) z^{-q} \right] \quad (4.51)$$

$Y(z)$  duten gaiak batukari batean bilduz gero, eta  $X(z)$  duten gai guztiak beste batukari batean, hau lortuko dugu.

$$Y(z) \left[ 1 + \sum_{j=1}^{j=n} a_j z^{-j} \right] = - \sum_{j=1}^{j=n} a_j \left[ \sum_{l=1}^{l=j} y(lh) z^{-l} \right] + X(z) \left[ \sum_{i=0}^{i=m} b_i z^{-i} \right] + \sum_{i=0}^{i=m} b_i \left[ \sum_{q=-1}^{q=-(d+i)} x(qh) z^{-q} \right]$$

$$A(z^{-1}) = 1 + \sum_{j=1}^{j=n} a_j z^{-j}$$

$$B(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{i=m} b_i z^{-i}$$

$$Y_0(z^{-1}) = - \sum_{j=1}^{j=n} \left[ a_j \left[ \sum_{l=1}^{l=j} y(lh) z^{-l} \right] \right] \quad (4.52)$$

$$X_0(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{i=m} \left[ b_i \left[ \sum_{q=-1}^{q=-(d+i)} x(qh) z^{-q} \right] \right]$$

$$A(z^{-1}) \cdot Y(z) = B(z^{-1}) \cdot X(z) + Y_0(z^{-1}) + X_0(z^{-1})$$

$$Y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} X(z) + \frac{Y_0(z^{-1})}{A(z^{-1})} + \frac{X_0(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

$X_0(z^{-1})$  eta  $Y_0(z^{-1})$  gaiak  $n$  eta  $m$  mailako polinomioak dira, hurrenez hurren. Azken ekuazioan ikus daitekeenez, irteeraren  $z$  transformatuak hiru gai ditu. Hori egin eta gero, berretura positiboko polinomioen bidez adieraziko ditugu hiru gai horiek. Bestalde, suposatuko dugu  $X(z)$  arrazionala dela. Beraz, bi polinomioren arteko zatiketa izango da.

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} X(z) + \frac{Y_0(z)}{A(z)} + \frac{X_0(z)}{A(z)}$$

$$X(z) = \frac{Q(z)}{R(z)} \quad (4.53)$$

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \frac{Q(z)}{R(z)} + \frac{Y_0(z)}{A(z)} + \frac{X_0(z)}{A(z)}$$

Aurreko ekuazioa ongi aztertuz gero,  $A(z) = 0$  eta  $R(z) = 0$  erroak kalkulatu behar ditugu,  $Y(z)$  transformatuaren poloak baitira. Polo horiek kontuan izanik, zatiketa bakunen bidez adierazi ahal izango dugu (5.53) ekuazioa. Dena den, zatiketa bakunen bidez adierazi baino lehen, (5.53) ekuazioaren ezkerreko lehen gaia bi zatikiren bitartez adieraziko dugu.

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \frac{Q(z)}{R(z)} + \frac{Y_0(z)}{A(z)} + \frac{X_0(z)}{A(z)}$$

$$\frac{B(z)}{A(z)} \frac{Q(z)}{R(z)} = \frac{H(z)}{A(z)} + \frac{K(z)}{R(z)} \quad (4.54)$$

$$B(z) \cdot Q(z) = R(z) H(z) + K(z) A(z)$$

$H(z)$  polinomioa  $A(z)$  polinomioa baino maila bat gutxiagokoa da, eta  $K(z)$  polinomioa, berriz,  $R(z)$  polinomioa baino maila bat gutxiagokoa. Beraz, zatikia bi zatikiren bidez adierazita, honela geratuko da  $Y(z)$ .

$$Y(z) = \frac{K(z)}{R(z)} + \frac{H(z)}{A(z)} + \frac{Y_0(z)}{A(z)} + \frac{X_0(z)}{A(z)}$$

$$E_{kanpo}(z) = \frac{K(z)}{R(z)} \quad (4.55)$$

$$E_{ber}(z) = \frac{H(z)}{A(z)} + \frac{Y_0(z)}{A(z)} + \frac{X_0(z)}{A(z)}$$

$$Y(z) = E_{kanpo}(z) + E_{ber}(z)$$

$A(z)$  izendatzailatzat duten zatikiek sistemaren berezko erantzuna osatzen dute,  $A(z) = 0$  erroak sistemaren transferentzia-funtzioari lotutako poloak direlako.  $R(z)$  izendatzailatzat duen zatikia berriz, sistemaren erantzun bortxatua edo behartua da,  $R(z) = 0$  erroak sistemaren sarreraren Z transformatuaren poloak direlako. Beraz, sistemaren irteera bi atal nagusitan idatz daiteke. Sistemaren berezko erantzuna da lehenengoa. Berezko erantzunean, hasierako baldintzek zeresan handia dute; alabaina,  $A(z)$  polinomioa izendatzailatzat dutenez, sistema egonkorra bada, hau da,  $A(z) = 0$  ekuazioaren erroen moduluak bat baino txikiagoak badira, hasierako baldintzek duten eragina denborarekin desagertuz joango da, sistemaren berezko erantzun osoari gertatzen zaion bezala, eta sarrerak behartutako erantzuna bakarrik ikusi ahal izango dugu.

#### 4.30 adibidea

Har dezagun gehikuntza-ekuazio lineal hau:

$$y(kh) - \frac{1}{2}y(kh - h) = x(kh)$$

Jo dezagun sistemaren sarrera maila mota funtzio bat dela.

$$x(kh) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

Argi dago  $x(kh)$  sarreraren hasierako kondizioak nuluak direla, maila funtzioa nulua delako  $k$  aldiune negatiboentzat. Baina, bestalde,  $y(-h)$  irteeraren hasierako kondizioak ez du zertan zero izan behar; aztertzen ari garen egoera honetan suposatuko dugu guk  $y(-h)$  irteerak  $1/2$  balioa duela. Beraz, gehikuntza-ekuazioaren gain  $z$  transformatua eginez gero, berdintza hau lortuko dugu:

$$Y(z) - \frac{1}{2}(z^{-1}Y(z) - zy(-h)) = X(z)$$

$$Y(z) \left(1 - \frac{1}{2z}\right) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{2} \Rightarrow Y(z) \left(\frac{2z-1}{2z}\right) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{2}$$

$$Y(z) = \frac{2z^2}{(z-1)(2z-1)} + \frac{z^2}{(2z-1)} = \frac{\alpha z}{z-1} + \frac{\beta z}{(2z-1)} + z \frac{z}{(2z-1)}$$

$$\alpha z(2z-1) + \beta z(z-1) = 2z^2 \Rightarrow (2\alpha + \beta)z^2 - z(\alpha + \beta) = 2z^2$$

$$\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$$

$$2\alpha + \beta = 2 \Rightarrow -2\beta + \beta = 2 \Rightarrow \beta = -2, \alpha = 2$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{2z}{(2z-1)} + z \frac{z}{(2z-1)} = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} + \frac{z}{2} \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

Beraz, irteerak adierazpen matematiko hau izango du:

$$y(kh) = 2 \cdot \text{maila}(kh) - \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \text{maila}(kh) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot \text{maila}(kh+h)$$

Gehikuntza-ekuazioa modu errepikakorrean aplikatuta, irteerako balio hauek lortuko ditugu:

$$y(-h) = \frac{1}{2}$$

$$y(0) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y(h) = y(0)/2 + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1$$

eta  $z$  transformatua aplikatuta lortu dugun  $y(kh)$  adierazpen matematikoari erreparatuta konturatuko gara adierazpen matematikoa eta gehikuntza-ekuazioa behin eta berriz erabilita lortutako emaitza bera dela.

## 4.1 ariketa

Kalkulatu seinale honen z transformatua:

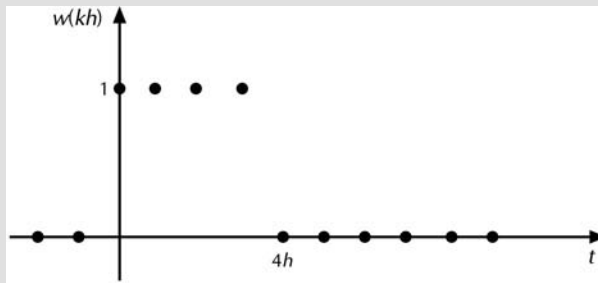
$$\{w(kh)\} = \{\dots, 1, -1, 3, 0, 0, 0, \dots\}$$

Z transformatuaren definizioetik zuzenean lortzen da hau:

$$W(z) = 1 - z^{-1} + 3z^{-2} \quad |z| > 0 = r$$

## 4.2 ariketa

Kalkulatu irudi honetako seinalearen z transformatua. Kalkulatu konbergentzia-erradioa.



$\{w(kh)\}$  seinalea lortzeko, 3 laginketa-periodo atzeratutako maila motako funtzio bati 8 laginketa-periodo atzeratuta dagoen maila motako funtzio bat kendu behar zaio. Maila funtzio horiek 2 – z biderkatu egon behar dute.

$$\{w(kh)\} = \left\{ \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ k=0}}{1}, 1, 1, 1, \dots \right\} - \left\{ \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ k=0}}{0}, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots \right\}$$

Kontuan izanda  $\frac{z}{z-1}$  z transformatu maila funtzioari dagokiola:

$$W(z) = \frac{z}{z-1} - z^{-4} \frac{z}{z-1} = \frac{(z^4 - 1)}{z^3(z-1)} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}, \quad |z| > 1 = r \quad \text{denerako}$$

### 4.3 ariketa

Kalkulatu  $w(kh) = \frac{1}{2}(kh)^2$ ,  $k^3 \geq 0$  denean definitutako seinalearen  $z$  transformatua.

Zehaztu konbergentzia-erradioa.

4.4 teorema eta  $Z\{kh\} = \frac{hz}{(z-1)^2}$  kontuan hartuta:

$$\begin{aligned} Z\left\{\frac{1}{2}(kh)^2\right\} &= \frac{1}{2} Z\{kh \cdot (kh)\} = -\frac{1}{2} hz \frac{d}{dz} \left[ \frac{hz}{(z-1)^2} \right] = \\ &= \frac{h^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}, \quad |z| > 1 = r \text{ denerako} \end{aligned}$$

### 4.4 ariketa

Atal honetan emandako teoremak erabiliz, kalkulatu  $\{e^{-akh} \sin(\omega kh)\}$ ,  $k \geq 0$  seinalearen hasierako balioak,  $Z$  transformatuaren bitartez.

4.6 teoremaren eta 4.3 taularen (12. seinalea) arabera:

$$w(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{e^{-ah} \sin(\omega h)z}{z^2 - 2e^{-ah} \cos(\omega h)z + e^{-2ah}} = 0$$

### 4.5 ariketa

Atal honetan emandako teoremak erabiliz, kalkulatu  $\{e^{-akh} \sin(\omega kh)\}$ ,  $k \geq 0$  seinalearen bukaerako balioak,  $Z$  transformatuaren bitartez.

$\{e^{-akh} \sin(\omega kh)\}$  seinalearen  $z$  transformatua honela idazten da:

$$W(z) = \frac{e^{-ah} \sin(\omega h)z}{z^2 - 2e^{-ah} \cos(\omega h)z + e^{-2ah}}$$

Goiko adierazpenaren poloen balioak:

$$e^{-ah} \cos(\omega h) \pm \sqrt{e^{-2ah} \cos^2(\omega h) - e^{-2ah}} =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-ah} \left[ \cos(\omega h) \pm \sqrt{\cos^2(\omega h) - 1} \right] = \\
&= e^{-ah} \cos(\omega h) \pm \sqrt{e^{-2ah} \cos^2(\omega h) - e^{-2ah}} \\
&e^{-ah} [\cos(\omega h) \pm j \sin(\omega h)] = e^{-ah} e^{\pm j\omega h}
\end{aligned}$$

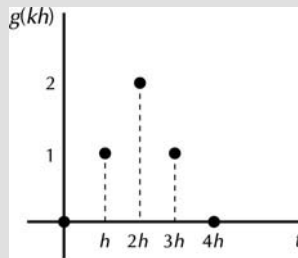
Polo horien  $e^{-ah}$  modulua nahitaez 1 baino txikiagoa izango da,  $a > 0$  denean. Kasu horretan, hasierako balioen teorema erabil daiteke:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w(kh) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{e^{-ah} \sin(\omega h) z}{z^2 - 2e^{-ah} \cos(\omega h) z + e^{-2ah}} = 0$$

$a \leq 0$  denean, ezin dira egiaztatu bukaerako teoremaren hipotesiak eta ezin dugu erabili bukaerako balioaren teorema, limitea existitzen ez delako edo infiniturantz jotzen duelako. Beraz, seinale diskretuak bukaerako balio erreal baterantz jotzen badu, teorema honen bitartez egin ahal izango dugu.

#### 4.6 ariketa

Hasierako kondizioak nuluak dituen eta denborarekiko aldakorra ez den sistema lineal diskretu bat dugu. Irudi honetan dago sistemaren  $\{g(kh)\}$  bulkada-erantzuna.



Adieraz ezazu, konboluzioari buruzko teoremaren laguntzarekin, sistemaren sarreran  $\{1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots\}$  seinalea izanez gero zein izango litzakeen sistemaren irteera.

Izan bitez:

$$G(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}$$

$$U(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$$

Non:

$$\begin{aligned} Y(z) &= G(z) U(z) = (z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}) (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) = \\ &= z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 4z^{-4} + 3z^{-5} + z^{-6} \end{aligned}$$

eta

$$\{y(kh)\} = \{\dots 0 \ 0,5 \ 1,5 \ 3 \ 3,5 \ 2,5 \ 1,5 \ 0 \ \dots\}$$

#### 4.7 ariketa

Aurkitu adierazpen honen alderantzizko  $z$  transformatua, elementu bakunen deskonposizioa erabiliz:

$$W(z) = \frac{z^2}{\left(z + \frac{1}{3}\right)(z-1)}$$

Honela egiten da  $W(z)$ ren deskonposizioa elementu bakunetan:

$$W(z) = \frac{1}{4} \cdot \frac{z}{z + \frac{1}{3}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Non:

$$w(kh) = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{4} \quad k \geq 0 \text{ denerako}$$

## 4.8 ariketa

Aurkitu adierazpen honen alderantzizko z transformatua, 'zatiketa' eragiketaren bitartez:

$$W(z) = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}}$$

$w(kh)$  seinalearen lehen 4 laginak eskatzen ditugu bakarrik, hau da,  $k = 0, 1, \dots, 3$  aldiuneetarako  $w(kh)$  seinaleak dituen balioak kalkulatzeko.

Ebazteko bi era daude:

a.- Emandako formula,  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0 \dots$ ,  $a_1 = -2/3$  eta  $a_2 = -1/3$  direnean:

$$w(0) = 1$$

$$w(h) = 0 - (-2/3 \cdot 1 - 1/3 \cdot 0) = 2/3$$

$$w(2h) = 0 - [-2/3 \cdot (2/3) - 1/3 \cdot 1] = 7/9$$

$$w(3h) = 0 - [-2/3 \cdot (7/9) - 1/3 \cdot (2/3)] = 20/27$$

b.- Emandako  $W(z)$  transformatuaren zatiketa eginez:

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 1 - 2/3z^{-1} - 1/3z^{-2} \\ \hline 2/3z^{-1} + 1/3z^{-2} \\ \hline 2/3z^{-1} - 4/9z^{-2} - (2/9)z^{-3} \\ \hline (7/9)z^{-2} \quad (2/9)z^{-3} \\ \hline (7/9)z^{-2} - (14/27)z^{-3} - (7/27)z^{-4} \\ \hline (20/27)z^{-3} + (7/27)z^{-4} \end{array} \quad \left| \frac{1 - 2/3z^{-1} - 1/3z^{-2}}{1 + (2/3)z^{-1} + (7/9)z^{-2} + (20/27)z^{-3}} \right.$$

Non:

$$\{w(kh)\} = \{\dots, 1, 2/3, 7/9, 20/27, \dots\}$$



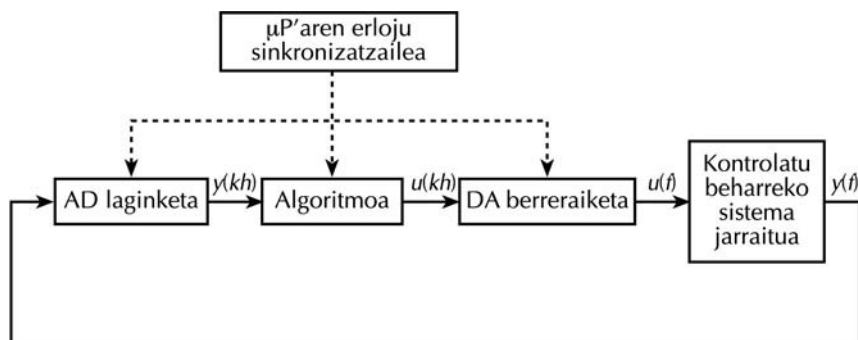
# 5

## Begizta itxiko sistemen transferentzia- funtzioa

### 5.1 SARRERA

Sistema jarraitu bat kontrolatzean, kontrol-egitura hau erabili ohi da; esango dugu sistema jarraitua irteera bakarrekoa eta sarrera bakarrekoa dela. Sistema horren irteera  $y(t)$  da, eta sarrera, berriz,  $u(t)$ . Beraz, kontrolatu nahi dugun aldagaia  $y(t)$  da. Aldagai hori lagintzeko, laginketa-zirkuitu bat erabiliko dugu. Liburuko lehen atalean esan dugun bezala, laginketa-elementu hori AD zirkuitu integratu batez egin daiteke.  $y(t)$  lagintzean, beste seinale diskretu bat lortuko dugu. Laginketa-eragiketa laginketa-tarte finko ( $h$ ) batez egin daiteke  $y(t) \Rightarrow \{y(kh), h \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\}$ . Aldagaia lagindu ostean kontrolatu nahi dugu; mikroprozesadore digital batek, algoritmo bat aplikatuz, irteerako seinale diskretu bat ematen du laginketa-periodo bakoitzeko,  $\{u(kh), h \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\}$ . Dena den, algoritmoak ez du zertan beti  $y(kh)$  seinalearen laginketarekin batera sinkronizatuta egon. Bestalde, ez du maiztasun berean lan egin beharrik. Hala ere, liburu honetan,  $u(kh)$  irteerako seinalea era sinkronizatuan eta maiztasun berean sortuko dugu. Seinale diskretu batetik seinale jarraitu bat sortzeari berreraiketa deritzo. Berreraiketa horren bitartez, mikroprozesadoreak sistema

jarraituaren gain eragin dezake. Berreraiketa ia beti honela egiten da: laginketa-periodoan zehar,  $u(t)$  irteerak finko dirau, dagokion  $u(kh)$  balioarekin,  $\{u(t) = u(kh) : kh < t < kh + h, h \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\}$ . Irudi honetan ikus daiteke azaldutako kontrol-egitura hori. Egitura horri berrelikadura deritzogu.



5.1 irudia. Ordenagailu bidezko kontrol baten bloke-diagrama.

## 5.2 KONTROLATU BEHARREKO SISTEMAREN LAGINKETA

Sistema jarraitua kontrolatzeko, lehenik,  $u(kh)$  eta  $y(kh)$  seinaleak lotzen dituen lege edo eredu matematikoa finkatu behar dugu. Beraz, sistema jarraituaren eredu diskretu bat lortu behar dugu. Atal honetan azalduko dugu nola egin urrats hori.

### 5.2.1 Kontrolatu beharreko sistemaren eredu lagindua edo diskretua

#### 5.2.1.1 Kontrolatu beharreko sistema atzerapenik gabe

##### 5.1 teorema

Ezaugarri hauek dituen sistema jarraitu bat dugu: lineala, kausala eta denborarekiko finkoa. Bestalde, sistema horren hasierako balioak zero dira; beraz, sistema jarraitua, hasieran, *orekan* dago. Sistema sarrera eta irteera bakarrekkoa da. Laginketa eta berreraiketa sinkronizatuta daude eta laginketa-periodoa,  $h$ , finkoa da. Berreraiketak ez du irteera aldatzen laginketa-periodoaren zehar. Horrenbestez, berreraiketa zero mailako interpolazioa da. Aurreko kondizio guztiak betetzen badira, sistema diskretua  $H(z)$  transferentzia-funtzio baten bitartez adieraz dezakegu.

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] \right\} \quad (5.1)$$

### Frogapena

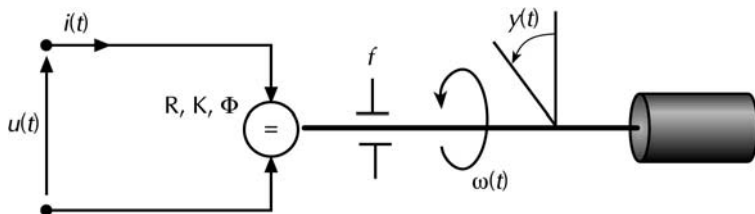
Sistema jarraituek, laginketa- eta berreraiketa-atalak batera hartuz gero, sistema diskretu, lineal, kausal eta inbariantea osatzen dute. Gainera, suposatuko dugu sistema diskretu horren hasierako balioak zero direla. 4.5.1. atalean azaldu dugunez, badakigu  $H(z) = Y(z)/X(z)$  transferentzia-funtzioa ez dagoela  $\{x(kh)\}$  sarrerako seinalearen mende. Badakigu DA+sistema jarraitua+AD sekuentzia sistema diskretu bat dela, hiru atalak sistema linealak direlako. Demagun sistema diskretu horren sarrera gisa seinale hau dugula:  $\{x(kh)\} = \begin{cases} 0 : k < 0 \\ 1 : k \geq 0 \end{cases}$ . Beraz, berreraiketa-atalak

emango duen seinale jarraitua harmaila motakoa izango da;  $1/s$  da seinale horren Laplaceren transformatua. Sistema jarraituaren transferentzia-funtzioa  $G(s)$  baldin bada, sistemaren irteeraren Laplaceren transformatua  $G(s)/s$  izango da.  $y(t)$  seinalea lagintzean, eskuratzeko-atalak seinale diskretu hau emango digu:

$$y(kh) = L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \Big|_{t=kh}$$

Lagindutako  $\{y(kh)\}$  seinaleari  $z$  transformatua aplikatuta lortuko dugu  $Y(z)$ .

$$Y(z) = Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \Big|_{t=kh} \right\}$$



### 5.2 irudia. $H(z)$ ren ebaluaketa.

Bestalde,  $\{x(kh)\}$  seinale diskretuaren  $z$  transformatua, hots,  $X(z)$ , hau da:  $X(z) = \frac{z}{z-1}$

Ondorioz, sistema diskretuaren transferentzia-funtzio baliokidearen formula honela idatz dezakegu:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\left(\frac{z}{z-1}\right)} Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G(z)}{s} \right\} \right\}_{t=kh}$$

$$H(z) = (1-z^{-1}) Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G(z)}{s} \right\} \right\}_{t=kh}$$

Oro har,  $G(s)$  transferentzia-funtzioa lan-puntu baten inguruko hurbilketa linealetik eratortzen da; aginduaren eta agindutako magnitude analogikoen arteko ezberdintasunak funtzionamendu-puntuarekiko (jarduera) batzen ditu.  $G(s)$  kontuan izaten du, orobat, kontrolatu beharreko sistemaren eta bihurgailu analogiko-digitalaren artean kokatutako iragazkian zaintzailearen transferentzia-funtzioa.

Aipatu beharrekoa da 5.1 erlazioan  $y(t) = L^{-1}[G(s)/s]$  seinale analogikoaren  $z$ -rekiko transformatua egiten dela, eta, horren arabera, ulertuko dugu  $Z^{-1}\{L^{-1}[G(s)/s]\}$  dela  $y(t)$  seinale analogikoaren  $\{y(kh)\}$  lagindutako bertsioaren  $z$  transformatua.

### 5.1 adibidea

Garapenaren erabilera hobeto ulertzeko, adibide bat azalduko dugu ondoren. Har dezagun korrante zuzeneko makina bat; makina horren kitzikapena iman iraunkorrez osatua dago. Beraz, fluxu konstanteko korrante zuzeneko (DC) makina bat da. Makina horren ezaugarriak hauek dira:

- 1.-  $R$  da erresistentzia elektrikoa. Induzituaren induktantzia ez dugu kontuan hartuko, dinamika elektrikoa dinamika mekanikoa baino askoz handiagoa delako. Erresistentzia ohmetan neurtzen da.
- 2.-  $K_e$  da higidurari egotzitako tentsioaren konstantea; hauek dira unitateak:  $[Vs/(\text{rad } Wb)]$ .
- 3.-  $\Phi$  da kitzikapen-fluxua, eta webber unitateetan adierazten da. Makinako estatorean dauden imanek finkatzen dute aldagai hau.
- 4.-  $J$  da biralaren eta higitzen dugun atal mekanikoaren inertzia-momentuen batura.

5.-  $f$  da abiadurarekiko zuzenki proportzionala den marruskaduraren maila; hauek dira unitateak:  $[(N.m.s)/rad]$ .

6.-  $K_m$  da indusitutako korrante unitate bakoitzeko eta fluxu unitate bakoitzeko makinak eragiten duen momentua; hauek dira unitateak:  $[N.m/(Wb.A)]$ .

Indusituaren tentsio-ekuazioak berdindu egiten ditu elikatze-tentsioa,  $v(t)$ , eta indusituan gertatzen diren tentsio-erorketak. Biralearen abiadura  $\omega(t)$  da, eta  $i(t)$ , indusitutako korrantea. Hauek dira kontuan hartu ditugun tentsio-erorketa bakarrak: kobreaken erresistentziari dagokion erorketa eta abiadurak indusitzen duen tentsio-erorketa.

$$v(t) = R \cdot i(t) + K_e \cdot \Phi \cdot \omega(t) \quad (5.2)$$

Non  $R$  baita indusitutako zirkuituaren erresistentzia,  $i(t)$  indusitutakoaren korrantea,  $K_e$  motorraren konstante bat eta  $\Phi$  makinaren erasleak edo kitzikapen-zirkuituak sortutako fluxu konstantea.

Era berean, makinak eragiten duen momentuaren ekuazioa emango dugu. Makina elektrikoaren teoritik badakigu makina horrek sortzen duen momentua indusitutik igarotzen den korrantearekiko proportzionala dela.  $K_m$  eta  $\Phi$  kitzikapen-fluxua ez direla aldatzen jakinda, momentua korrantearen irudi bat da.

$$M_m(t) = K_m \Phi i(t) \quad (5.3)$$

$K_m$  konstantea da.

Beraz, dugun sarrera (hau da,  $v(t)$  elikatze-tentsioa) eta dugun irteera (hau da,  $w(t)$ , makinaren abiadura angeluarra) ekuazio diferentzial berean jarri gero, berdintza hau lortuko dugu:

$$v(t) \cdot i(t) = M_m(t) \cdot \omega(t) + R \cdot i^2(t) \quad (5.4)$$

(5.2) eta (5.3) (5.4) ekuazioan ordezkaturik, hau lortuko dugu:

$$(R \cdot i(t) + K_e \cdot \Phi \cdot \omega(t)) \cdot i(t) = K_m \cdot \Phi \cdot i(t) \cdot \omega(t) + R \cdot i^2(t)$$

Goiko erlazioan ikusten den bezala,  $K_m = K_e$  berdintza betetzen da; beraz, konstante horiei  $K$  deituko diegu.

Momentu erresistentea  $f$  koefizientearen marruskadura likatsu baten ondorioa bada, hau dugu:

$$J\dot{\omega}(t) = M_m(t) - f \cdot \omega(t) \quad (5.5)$$

Biraka dabiltzan masen inertzia-momentua da  $J$ .

(5.2) erlazioa ikusita, hau ondoriozta daiteke:

$$i(t) = \frac{v(t) - K \cdot \Phi \cdot \omega(t)}{R}$$

eta (5.3) ekuaziora eramaten badugu, emaitza hau lortuko dugu:

$$M_m(t) = K \cdot \Phi \frac{v(t) - K \cdot \Phi \cdot \omega(t)}{R}$$

(5.5) berdintzan ordezkatzan badugu:

$$J \cdot \dot{\omega}(t) = K \cdot \Phi \frac{v(t) - K \cdot \Phi \cdot \omega(t)}{R} - f \cdot \omega(t)$$

beraz, ekuazio-diferentzial hau lortuko dugu:

$$\ddot{y}(t) + \frac{1}{J} \left[ f + \frac{(K \cdot \Phi)^2}{R} \right] \dot{y}(t) = \frac{K\Phi}{JR} v(t)$$

$$\omega(t) = \dot{y}(t)$$

Transferentzia-funtzioa, beraz, hau izango da:

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{\frac{K\Phi}{JR}}{s^2 + \frac{1}{J} \left\{ f + \frac{(K\Phi)^2}{R} \right\} s}$$

Bi balio hauek hartuta:

$$\frac{K\Phi}{JR} = 1 \cdot \text{eta} \cdot \frac{1}{J} \left[ f + \frac{(K\Phi)^2}{R} \right] = 1$$

hau ateratzen da:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Eta 4.1 eta 4.2 tauletatik, sistemaren transferentzia-funtzio diskretua kalkula dezakegu  $h = 100$  ms-ko laginketa-periodoarekin:

$$H(z) = \frac{0,007837z + 0,004679}{z^2 - 1,905z + 0,9048}$$

Sarritan sistema askok denborarekiko atzerapena izaten dute. Atzerapen horiek garraio-efektua duten sistemetan dute garrantzi gehien. Haien  $H(z)$  baliokidea kalkulatzean, 5.1 formulari dagokion aldaketa proposatu behar dugu. Horrenbestez, sistema jarraituaren transferentzia-funtzioak itxura hau hartuko du:  $H(s) = e^{-sT}G(s)$ , eta sistemak  $t$  atzerapen-denbora du. Suposatuko dugu  $t$  denbora hori laginketa-periodoarekiko proportzionala dela. Hurbilketa hori ez da, oro har, galera handia,  $h$  laginketa-periodoa oso txikia izan ohi baita atzerapen-denborarekin konparatuz gero.

Berezko funtzio arrazionala  $G(s)$  bada,  $G(s)/s$  izango da  $s$ -ren berezko funtzio arrazionala. Hala, aurreko  $G(s)$  transferentzia-funtzioa zatiketa bakunen batuketa baten bidez deskonposa dezakegu. Gogoan izan  $1/G(s)$  transferentzia-funtzioaren izendatzailearen erroen errepikapen-indizeak direla, eta  $s = -a$ , erroen balioak.

$$\frac{c_1}{s+a} + \frac{c_2}{(s+a)^2} + \dots + \frac{c_l}{(s+a)^l} \quad (5.6)$$

Beraz,  $Z\{L^{-1}[G(s)/s]\}$ -k itxura hau izango du.

$$\frac{c_1 z}{z - e^{-ah}} + \frac{c_2 h e^{-ah} z}{(z - e^{-ah})^2} + \dots + \frac{c_l (-1)^{l-1}}{(l-1)!} \frac{\partial^{l-1}}{\partial \cdot a^{l-1}} \left( \frac{z}{z - e^{-ah}} \right) \quad (5.7)$$

(5.7) funtzioa  $z$  aldagai konplexuarekiko arrazionala da; beraz, koefizienteak konstanteak izanik, hortik sortuko zaigun eredutik gehikuntza-ekuazio bat lortu ahal izango dugu. Zenbakitzailearen maila izendatzailearena baino txikiagoa denean esango dugu berezko funtzio arrazionala dela.

### 5.2.1.2 Kontrolatu beharreko sistemak atzerapena badu

Kontrolatu beharreko prozesu analogikoek  $t$  segundoko atzerapen garbia badute, beren transferentzia-funtzioak itxura hau izango du:  $e^{-sT}G(s)$ , non  $G(s)$  den  $s$ -ren berezko funtzio arrazionala. Demagun  $T$  dela  $h$  laginketa-periodoaren multiplo osoa,

$$T = dh, d \in \mathbb{N}$$

5.1 erlazioak hau ematen digu:

$$H(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ L^{-1} \left[ e^{-sdh} \frac{G(s)}{s} \right] \right\}$$

$L^{-1} \left[ e^{-sdh} \frac{G(s)}{s} \right]$ :  $d$  da laginketa-periodoko atzerapena eragiten duen denborazko seinalea

4.2 teoremaren, hots, atzerapenaren teoremaren, bitartez hau lortuko dugu:

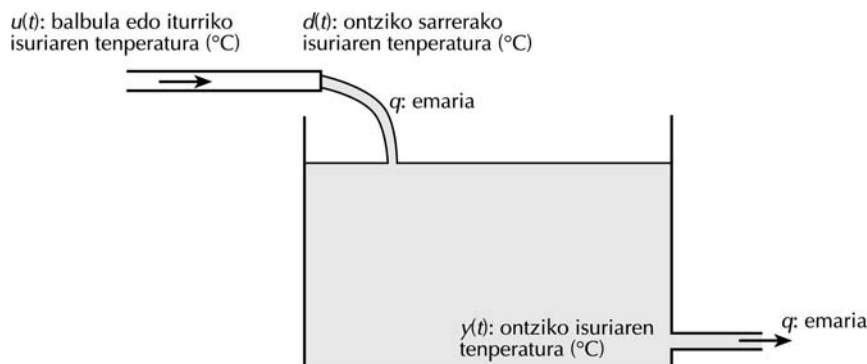
$$H(z) = (1 - z^{-1}) z^{-d} Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] \right\} \quad (5.8)$$

Atzerapena, beraz,  $z$ -ren berezko funtzio arrazionala izaten segitzen duen

$Z\{L^{-1}[G(s)/s]\}$  jatorriko  $d$  poloen bidez adieraz daiteke.  $H(z)$ , hertsiki,  $z$ -ren berezko funtzio arrazionala da; hartara, esan dezakegu kontrolatu beharreko sistemaren eredu lagindua denboraren arabera koefiziente konstanteko diferentzien ekuazio lineala dela.

## 5.2 adibidea

Har dezagun 5.3 irudiko prozesua.  $q$  emari konstantez elikatutako isuri beroak eta hotzak nahasten dituen ontzi bat da. Instalazioa funtzionamendu-puntu baten inguruan dabil; horrenbestez, erabiltzen diren aldagaiak funtzionamendu-puntuarekiko desbideratzeak dira. Suposatzen da desbideratzeak ahulak direla, eta, hortaz, ez dira kontuan hartuko ez-linealtasunak. Gainera, balbularen posizioaren eta askatutako isuriaren tenperaturen arteko dinamika hauteman dezakegu, sistemaren beste zatiak baino azkarragoa delako. Balbularen sarreran isuriaren tenperatura  $u(t)$  izango da. Ontziaren eta balbularen artean tarte bat dago, eta isuriak denbora-tarte bat behar du balbulatik ontziraino joateko. Ontziaren sarreran isuria  $d(t)$  tenperaturan dugu. Beraz,  $u(t)$  tenperaturaren eta  $d(t)$  ontzian sartutako isuriaren tenperaturaren artean  $t$  segundoko atzerapena dago. Ontzi barruko edozein puntutan tenperatura bera izango da irabiagailu bati esker. Joko dugu barruko tenperatura hori prozesuaren irteera dela, eta  $y(t)$  deituko dugu. Ontziak emari bera izango du sarreran eta irteeran, hots, beti bolumen bera izango da ontzian.



### 5.3 irudia. Ontzi baten isuriaren temperaturaren kontrola.

$y(t)$  (kontrolatutako aldagaia) temperaturaren gain agindu digital bat lortu nahi dugu.  $u(t)$  balbulan isuriak duen temperatura da kontrol-aldagaia. Beste era batera esanda,  $y(t)$  ontziaren temperatura  $u(t)$  balbulako temperaturaren bitartez kontrolatuko dugu. Horretarako, aginte-sistema honen temperaturaren eredu lagindua behar dugu, eta horretarako, honako urratsak emango ditugu:

1.- Lehenik, balantze termiko soil baten bidez, ekuazio hau dugu:

$$V\rho c \frac{dy}{dt} = \theta\rho c \cdot d(t) - q\rho c \cdot y$$

Adierazpide horretan:

$V$  da ontziko isuriaren bolumen aldagaitza

$\rho$  da isuriaren masa bolumen unitateko ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )

$c$  da isuriaren masa unitate bakoitzeko temperatura unitate bat igotzeko behar dugun beroa ( $\text{cal}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$ )

$y(t)$  da ontziko isuriaren temperatura ( $^\circ\text{C}$ ).

$d(t)$  da ontziko sarrerako isuriaren temperatura ( $^\circ\text{C}$ ).

$u(t)$  da balbularen irteerako isuriaren temperatura ( $^\circ\text{C}$ ).

Balbularen eta ontziaren arteko tutuko galerak kontuan izan gabe:

$$d(t) = u(t - T)$$

$a = q/V$  egiten badugu, bi ekuazio horietatik hau aterako da:

$$\dot{y}(t) + a \cdot y(t) = a \cdot u(t - T)$$

$u(t)$  eta  $y(t)$  sarrerako seinalea eta irteerako seinalea izanda, hurrenez hurren, transferentzia-funtzio analogiko hau lortuko dugu:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-sT} \frac{a}{s+a}$$

Beraz,

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{a}{s(s+a)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

4.2 taulan oinarrituta, ekuazio hau aterako da:

$$\mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] \right\} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-ah}} = \frac{z(1-e^{-ah})}{(z-1)(z-e^{-ah})}$$

eta, horretatik, honako hau lortuko dugu:

$$H(z) = (1-z^{-1})z^{-d} \frac{z(1-e^{-ah})}{(z-1)(z-e^{-ah})} = \frac{1-e^{-ah}}{z^d(z-e^{-ah})}$$

## 5.2.2 Laginketaren ondorioz sortutako polo-aldaketa

Kontrolatu beharreko prozesu analogikoak  $G(s)$  transferentzia-funtzio arrazional baten bidez adierazten direnean, garrantzi handikoa izaten da lagintzean sistemaren poloekin zer gertatzen den jakitea.  $G(s)$  berezko zat hartuko dugu.

Demagun  $s = -a$  dela  $G(s)$  transferentzia-funtzioaren poloetako bat. 5.6 eta 5.7 adierazpenak kontuan hartuta, polo horrek  $H(z)$  transferentzia-funtzio diskretuan  $z = e^{-ah}$  poloa sortzen du. Hala,  $G(s)$  eta  $H(z)$ -ko poloak ondoren definitutako  $\Re$  zenbaki konplexuen gaineko aplikazioaren bidez finkatuta daude:

$$z = e^{sh} \quad (5.9)$$

Aipatutako erlazioak agerian jartzen du  $H(z)$ -ko poloak  $h$  laginketa-periodoaren mende daudela, eta  $G(s)$ -ko  $s = 0$  poloaren  $z = 1$  poloa salbuespena da.

### 5.3 adibidea

5.1 adibidean eredu laginduaren ondoren, 5.1 formularen bitartez, transferentzia-funtzioa dator; horren izendatzailea erroen biderketa gisa idatziko dugu:

$$H(z) = \frac{(-1+2h+e^{-2h})z+1-e^{-2h}(1+2h)}{(z-1)(z-e^{-ah})} = \frac{1-e^{-ah}}{z^d(z-e^{-ah})}$$

## 5.9 FORMULAREN EZAUGARRI GARRANTZITSUENAK

1.- 5.9 funtzioa periodikoa da **s** zenbaki konplexuaren atal irudikariarekiko. Funtzio horren laginketa-pultsazioa da.

*Frogapena*

S plano konplexuko edozein **s** balio konplexu hartuko dugu. Balio konplexu horren **a** atal erreala konstantea da eta **b** atal irudikaria aldakorra dela suposatuko dugu:  $s = a + jb$

$$z = e^{sh}$$

$$s = a + jb$$

$$z = e^{(a+jb)h} = e^{(ah+jbh)} = e^{ah} \cdot e^{jbh}$$

**s** balioari dagokion **z** irudi konplexua aztertuko dugu. Ikus daitekeenez, **a** konstante izanez gero, eta **b** atalean laginketa-pultsazioarekiko proportzionala den desplazamendu bat sartuz gero, funtzioak hartzen duen balioa eta hasieran duen balioa bera dira.

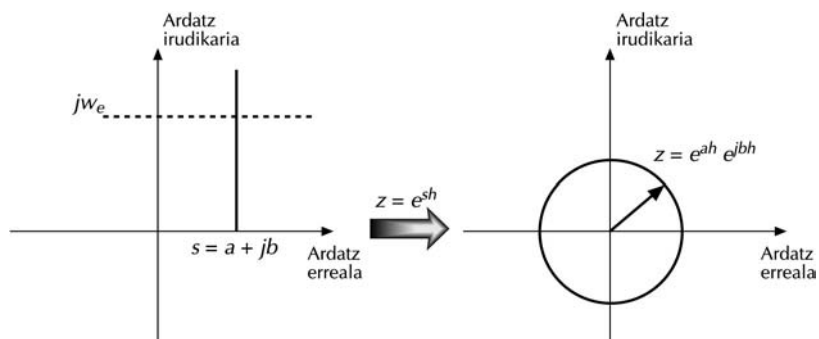
$$z = e^{ah} \cdot e^{jb_2h} \Rightarrow b_2 = b_1 + w_e \cdot k$$

$$b_2 = b_1 + \frac{2\pi \cdot k}{h}$$

$$z = e^{ah} \cdot e^{j\left(b_1 + \frac{2\pi \cdot k}{h}\right)h}$$

$$z = e^{ah} \cdot e^{j(b_1h + 2\pi \cdot k)} = e^{ah} \cdot e^{jb_1h}$$

Beraz, argi dago 5.9 formulako atal erreala finkoa bada funtzio hori periodikoa dela. Funtzio horren periodoa  $w_e$  laginketa-pultsazioa da. Beraz, **s** plano konplexuko  $s = a$  zuzen bertikalak **z** plano konplexuan  $e^{ah}$  erradioko zirkunferentziarekin bat egiten du.



**5.4 irudia.**  $s$  planoko zuzen bertikal batek  $z$  planoko zirkunferentzia bat du iruditzen.

2.- 5.9 formularen arabera,  $s$  planoko zuzen horizontal batek  $z$  planoan duen irudia beste zuzen bat da.  $s$  planoko zuzen horizontal bat atal erreala konstantea duen  $s$  planoko puntuak dira. Horrelako puntuen irudiak  $z$  planoan jatorria duen zuzen baten itxura du  $z = e^{ah} \cdot e^{jbh}$  non  $b$  konstantea baita. Beraz,  $a$ -k minus infiniturantz jotzen duenean,  $z = 0$  balioa izango du iruditzen. Bestalde,  $a$  edozein balio errealeko irudiaren argumentua  $h$  da.

#### Frogapena

Badakigu  $s$  planoan zuzen horizontal bateko puntu guztiek atal irudikari bera dutela, eta erreala dela aldatzen den gauza bakarra atal. Beraz, hau da adierazpen matematikoa:

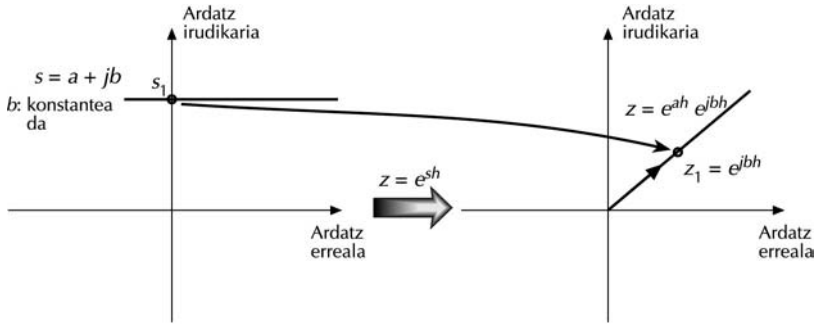
$$z = e^{ah} e^{jbh}$$

$$b \in \mathbb{R}$$

$$z = e^{jbh} \cdot e^{ah}$$

$$\text{Arg}(z) = bh$$

$$|z| = e^{ah}$$



**5.5 irudia.**  $z = e^{sh}$  erabiliz,  $s$  planoko zuzen horizontal bat jatorritik igarotzen den zuzen bihurtzen da  $z$  planoan.

3.- 5.9 formularen arabera,  $s$  planoan jatorritik igarotzen den zuzen batek  $z$  planoan espiral bat du irudi.

*Frogapena*

Har dezagun  $s$  planoaren jatorritik igarotzen den zuzen bat; matematikoki honela adierazten dugu:

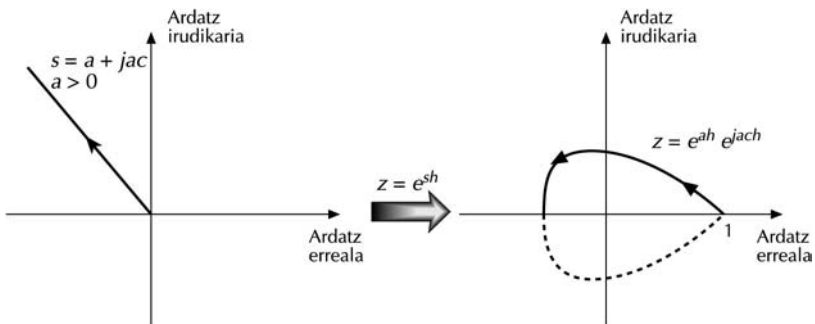
$$s = a + jac$$

$c$  zenbaki erreal bat da, eta  $a$  minus infinitutik plus infinitura doa. Beraz, jatorritik igarotzen den zuzen bat ematen digu. Zuzen horri dagokion irudia, berriz, matematikoki honela adieraz daiteke:

$$z = e^{ah} \cdot e^{jach}$$

$$|z| = e^{ah}$$

$$\text{Arg}(z) = ach$$



**5.6 irudia.** Jatorritik igarotzen den zuzen batek espiral bat du irudizat.

## 5.3 KONTROL-ALGORITMOAREN EREDUA

Aurreko atalean, kontrolatutako sistemaren eredu lagindua kalkulatu dugu. Orain kontrolaren eredu matematikoa lortu behar dugu. Beraz, kontrolaren gehikuntza-ekuazioaren baliokidea lortuko dugu. Horrenbestez, (5.1) irudian ikus daitekeen bloke guztien eredu matematikoa lortu eta gero, begizta itxiko transferentzia-funtzio baliokidea kalkulatu dugu.

### 5.3.1 Denborazko eredua

(5.1) irudian ikus daitekeenez, kontrolaren sarrerak bi seinale diskretu ditu. Lehenik,  $y_c(k)$  kontsigna dugu; bestetik, sistematik kontrolatutako aldagaiaren laginetatik  $y(k)$  seinalea lortzen dugu. Kontrolak irteera bakarra du. Irteera hori kontrol-aldagai da, eta atal honetan  $u(k)$  izenaren bidez adieraziko dugu. Kontrolleko  $u(k)$  seinalea  $u(t)$  seinale bihurtuko dugu D/A bihurgailu baten bitartez. Beraz,  $u(k)$  seinalea kalkulatu behar dugu  $y(k)$  eta  $u(k)$  seinaleen laginetan oinarrituz.  $u(k)$  kalkulatzeko, teknika asko daude. Hala ere, hurrengo ataletan aztertuko ditugu teknika horiek. Atal honetan, hala ere, teknikarik oinarritzkoena landuko dugu. Teknika hori kontsignaren eta kontrolatutako aldagaiaren arteko errorean oinarritzen da.

$$e(k) = y_c(k) - y(k) \quad (5.10)$$

$u(k)$  seinalearen  $k$  aldiuneko balioa,  $\{u(k)\}$  seinaleak  $k$  aldiunea baino lehen izan dituen laginen arabera, eta erroreak,  $k$  aldiunea baino lehen izan dituen balioen arabera, kalkulatu behar dugu.

$$u(k) = f(u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n), e(k-d), e(k-d-m)) \quad (5.11)$$

$n$ ,  $d$  eta  $m$  zenbaki osoak dira.

Horrez gain, (5.11) ekuazioak gehikuntza-ekuazio lineal baten itxura du.

$$\begin{aligned} u(k) = & -a_1 u(k-1) - \dots - a_n u(k-n) + b_0 e(k-d) + \\ & + b_1 e(k-d-1) + \dots + b_m e(k-d-m) \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathfrak{R}$$

Kontuan izan behar dugu (5.12) ekuazioko  $a_1, a_2, \dots, a_n$  eta  $b_0, b_1, \dots, b_m$  balioak errealak eta finkoak direla.  $u(k)$  kontrol-aldagaiaren balioa lortzeko,  $k-d$  aldiunea baino lehenagoko erroreak laginetan oinarritzen da. (5.12) ekuazioko hasierako kondizioak  $e(-1), e(-2), \dots, e(-n)$  eta  $u(-1), u(-2), \dots, u(-n)$  zero direla jotzen da.

Kontuan izan behar dugu  $d$ ,  $n$  eta  $m$  parametroen arteko erlazioak  $d = n - m \geq 0$  izan behar duela, (5.12) kontrol-ekuazioaren kausalitatea bete ahal izateko.

$k$  aldiunean,  $u(k)$  kalkulatu eta gero,  $u(k-1)$ ,  $u(k-2)$ , ...,  $u(k-n)$ , eta  $e(k-d)$ ,  $e(k-d-1)$ , ...,  $e(k-d-m)$  berriitu behar ditugu;  $u(k-1)$ ,  $u(k-2)$ , ...,  $u(k-n)$  eta  $e(k-1)$ ,  $e(k-2)$ , ...,  $e(k-n)$ , balioak  $u(k)$ ,  $u(k-1)$ , ...,  $u(k-n+1)$ , eta  $e(k)$ ,  $e(k-1)$ , ...,  $e(k-n+1)$  balioekin berritzen dira, eta, hala, hurrengo aldiuneko kontrol-seinalearen balioa kalkulatzeko, (5.12) ekuazioko gai guztiak eguneratuta egongo daude. Azter ditzagun hurrengo adibideak hori hobeto ulertzeko.

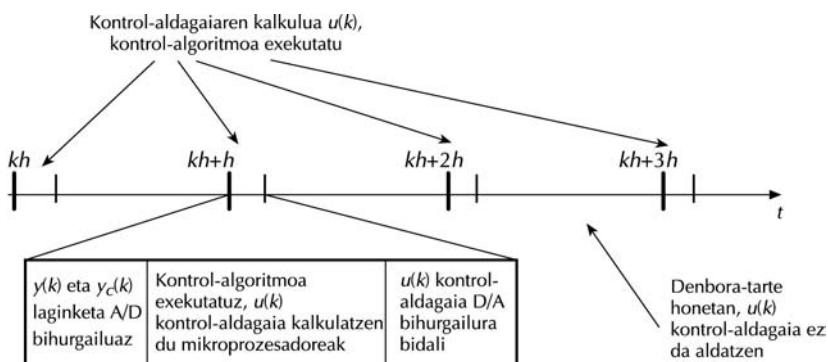
### 5.3 adibidea

Gogoan har dezagun kontrol-algoritmo hau:

$$e(k) = y_c(k) - y(k)$$

$$u(k) = K_p \cdot e(k)$$

$k$  aldiunean, kontsigna lagintzen dugu, kontrolatutako aldagaiarekin batera. Sarritan, ez dugu zertan kontsigna lagindu, mikroprozesadoreak berak sortzen duelako kontsigna edota beste mikroprozesadore batek sortzen duelako kontsigna-seinale diskretua.  $k$  aldiune horretako kontsigna eta kontrolatutako  $y(k)$  aldagaia izan eta gero, bien arteko kenketa egingo dugu. Hala, kontrolak  $k$  aldiunean sortutako errorea edo akatsa lortuko dugu. Ondoren, errore hori konstante batez biderkatuta,  $k$  aldiuneko kontrol-aldagaia D/A bihurgailuen bitartez aterako dugu. Beraz, suposatuko dugu  $u(k)$  kontrol-aldagaiaren kalkulua egiteko mikroprozesadoreak behar duen denbora, laginketa-periodoarekiko, txikia dela.



### 5.7 irudia. Kontrol-algoritmo baten denborazko ereduak.

Beraz, algoritmoaren exekuzio-denbora txikia da laginketa-periodoarekin ( $h$  s/lagin) erkatuz.

### 5.5 adibidea

Gogoan har dezagun PI motako kontrol-algoritmo bat. Algoritmo horretan bi parametro ditugu: batetik,  $K_p$  proportzionaltasun-konstantea dugu, eta bestetik, atal integratzailearen  $T_i$  konstantea. Kontrolatutako aldagaia da  $y(k)$ , kontsigna da  $y_c(k)$  eta kontrol-aldagaia da  $u(k)$ . Kontrol-algoritmoak,  $k$  aldiunean, errorea kalkulatu du, eta errorearen integralarekiko eta errorearekiko proportzionala den  $u(k)$  kontrol-aldagaia kalkulatu du. Hori hobeto ulertzeko, algoritmoaren lan egiteko era azalduko dugu.

1.- Mikroprozesadoreak kontrol-algoritmoa exekutatzen du  $h$  denbora-tarte bakoitzeko.

1.1 Mikroprozesadoreak  $y(k)$  kontrolatutako aldagaia lagintzen du A/D bihurgailuen bitartez. Horrez gain,  $y_c(k)$  kontsigna ere irakurtzen du (A/D bihurgailu batez bidez, edota beste mikroprozesadore batek emanda).

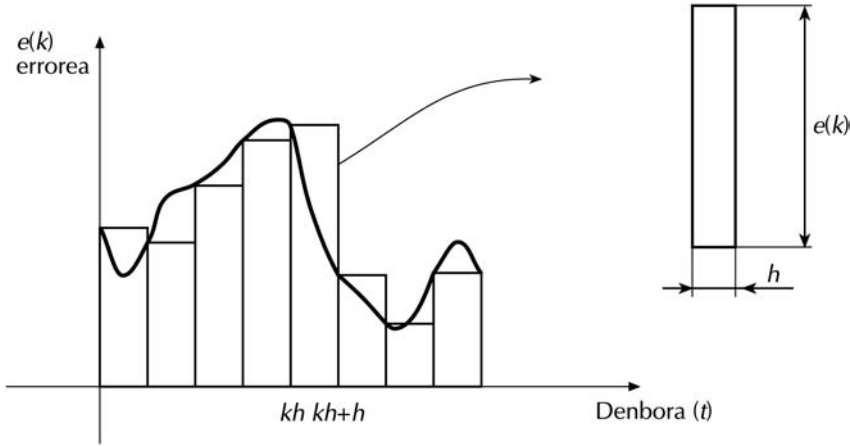
1.2  $k$  aldiuneko errorea kalkulatu du mikroprozesadoreak:

$$e(k) = y_c(k) - y(k)$$

1.3  $k$  aldiuneko errorearen integrala kalkulatu dugu; Eulerren integralaren hurbilketa (5.13) bitartez egingo dugu hori.

$$e_i(t = kh) = \int_0^{t=kh} e(s) \cdot ds \approx \sum_{j=0}^k e(jh) \cdot h \Rightarrow e_i(kh) - e_i(kh-h) = e(kh) \cdot h$$

$$e_i(k) = e_i(k-1) + h \cdot e(k) \quad (5.13)$$



**5.8 irudia.** Seinale jarraitu edo analogiko baten integrala denborarekiko, Eulerren hurbilketaren bitartez.

1.4  $u(k)$  kontrol-aldagaiaren kalkulua.

$$u(k) = K_p \cdot \left[ e(k) + \frac{1}{T_i} e_i(k) \right] \quad (5.14)$$

1.5 D/A bihurgailu baten bitartez,  $u(k)$  kontrol-seinaleari dagokion  $u(t)$  seinale jarraitua emango dugu.

1.6 Atal integratzailearen balioa eguneratu behar dugu. Hurrengo aldiunerako  $e_i(kh-h)$  aldagaiaren balioa  $e_i(kh)$  balioarena izango da.

$$e_i(kh-h) = e_i(kh)$$

2.- Mikroprozesadoreak ez du ezer gehiago egingo  $h$  denbora igaro arte. Beraz, hurrengo denbora-etenari itxarongo dio.

Kontrol-algoritmo horren gehikuntza-ekuazioa idatziko dugu:

$$e_i(kh) = e_i(kh-h) + h \cdot e(kh)$$

$$u(kh) = K_p \left[ e(kh) + \frac{1}{T_i} e_i(kh) \right] \Rightarrow \frac{T_i \cdot u(kh)}{K_p} - T_i e(kh) = e_i(kh)$$

$$\frac{T_i \cdot u(kh)}{K_p} - T_i e(kh) = \frac{T_i \cdot u(kh-h)}{K_p} - T_i e(kh-h) + h \cdot e(kh)$$

$$\frac{T_i \cdot u(kh)}{K_p} = T_i [e(kh) - e(kh-h)] + \frac{T_i \cdot u(kh-h)}{K_p} + h \cdot e(kh)$$

$$u(kh) = \frac{K_p}{T_i} \left[ [(T_i + h)e(kh) - T_i e(kh-h)] + \frac{T_i \cdot u(kh-h)}{K_p} \right]$$

$$u(kh) = u(kh-h) + \frac{K_p}{T_i} (T_i + h) e(kh) - K_p e(kh-h)$$

Ikus daitekeenez, PI motako algoritmo honek (5.12) gehikuntza-ekuazioaren itxura du. Kasu honetan,  $d = 0$  da. Dena dela, beste zenbait kasutan hainbeste eragiketa matematiko egin behar da kontrol-algoritmoaren exekuzio-denbora egiaztatzeko, laginketaren denbora-tartearekin alderatuta, ezen ez baita txikia eta egoera horretan  $d$  ez baita nulua. Beraz, egoera horretan, gehikuntza-ekuazioa honela geratuko zaigu:

$$u(k) = -a_1 u(k-1) - \dots - a_n u(k-n) + b_0 e(k-1) + b_1 e(k-2) + \dots + b_{n-1} e(k-n)$$

## 5.6 adibidea

Gogoan har dezagun PID motako kontrola. Kontuan izan behar dugu sarritan kalkulu anitz egin behar ditugula eta exekuzio-denbora ez dela txikia laginketaren denbora-tartearekiko. Beraz,  $u(kh)$  kontrol-aldagaia kalkulatzeko, hiru atal izango ditugu:

- Lehenengo atala errorearekiko proportzionala da.
- Bigarren atala errorearen integralarekiko proportzionala da,
- eta, azkenik, hirugarren atala errorearen deribatuarekiko proportzionala da. Beraz, hiru parametro ditugu:  $K_p$ ,  $T_i$  eta  $T_d$ .

$$e(kh) = K_p (y_c(kh) - y(kh))$$

$$e_i(kh) = e_i(kh-h) + h \cdot e(kh)$$

$$e_d(kh) = \frac{e(kh) - e(kh-h)}{h}$$

$$u(kh) = K_p \left[ e(kh-h) + \frac{1}{T_i} e_i(kh-h) + T_d e_d(kh-h) \right]$$

Horrelako kontrol-algoritmo baten gehikuntza-ekuazioa aztertzen badugu, adierazpen matematiko hau lortuko dugu:

$$e(kh) = K_p (y_c(kh) - y(kh))$$

$$e_i(kh) = e_i(kh-h) + h \cdot e(kh)$$

$$u(kh) = K_p \left[ e(kh-h) + \frac{1}{T_i} e_i(kh-h) + T_d e_d(kh-h) \right]$$

$$\frac{u(kh)}{K_p} - e(kh-h) = \frac{1}{T_i} e_i(kh-h) + T_d \frac{e(kh-h) - e(kh-2h)}{h}$$

$$\begin{cases} T_i \frac{u(kh)}{K_p} - T_i e(kh-h) - T_d \cdot T_i \frac{e(kh-h) - e(kh-2h)}{h} = e_i(kh-h) \\ T_i \frac{u(kh+h)}{K_p} - T_i e(kh) - T_d \cdot T_i \frac{e(kh) - e(kh-h)}{h} = e_i(kh) \end{cases}$$

$$\frac{K_p}{T_i} \left( T_i + \frac{T_d \cdot T_i}{h} - h \right) e(kh) + K_p e(kh-h) - \left( \frac{T_d \cdot K_p}{h} \right) e(kh-2h) + u(kh) = u(kh+h)$$

$$u(kh) = \left( K_p + \frac{T_d \cdot K_p}{h} - h \right) e(kh-h) + K_p \cdot e(kh-2h) - \left( \frac{T_d \cdot K_p}{h} \right) \cdot e(kh-3h) + u(kh-h)$$

Ikus daitekeenez, kontrol-algoritmoak  $d = 1$ ,  $n = 1$  eta  $m = 3$  balioak hartzen ditu. Beraz, gehikuntza-ekuazio hori (5.12) ekuazioaren itxurakoa da.

$$\begin{aligned} u(k) &= -a_1 u(k-1) + b_0 e(k-1) + b_1 e(k-2) + b_2 e(k-3) \\ a_1 &= -1 \\ b_0 &= \left( K_p + \frac{T_d \cdot K_p}{h} - h \right) \\ b_1 &= K_p \\ b_2 &= - \left( \frac{T_d K_p}{h} \right) \end{aligned} \tag{5.15}$$

Ekuazio hori mikroprozesadore baten programa baten bidez egiteko, itxura hau izan beharko luke programak:

1.- Kontrol-algoritmoa exekutatzen du mikroprozesadoreak  $h$  denbora-tarte bakoitzeko.

1.1 A/D bihurgailuen bitartez,  $y(k)$  eta  $y_c(k)$  lagintzen ditu programak

1.2  $k$  aldiuneko errorea kalkulatzen du mikroprozesadoreak:

$$e(k) = y_c(k) - y(k)$$

1.3 (5.15) ekuazioaren bitartez,  $u(k)$  kontrol-aldagaia kalkulatu dugu.

1.4 D/A bihurgailu baten bitartez,  $u(k)$  kontrol-seinaleari dagokion  $u(t)$  seinale jarraitua emango dugu.

1.5 Ekuazioko aldagaiak eguneratu behar ditugu.

$$e(k-3) = e(k-2)$$

$$e(k-2) = e(k-1)$$

$$e(k-1) = e(k)$$

$$u(k-1) = u(k)$$

2.-  $h$  denbora igaro arte mikroprozesadoreak ez du beste ezer egingo. Beraz, hurrengo denbora-etenari itxarongo diogu.

### 5.3.2 Kontrol-algoritmoaren transferentzia-funtzio baliokidea

Kontrol-algoritmoak gehikuntza-ekuazio baten bidez adieraz daitezkeela ikusi eta gero, kontrol-algoritmoaren transferentzia-funtzioaren baliokidea kalkulatu dugu. Gogoan har dezagun kontrol-algoritmoaren gehikuntza-ekuazio hau:

$$\begin{aligned} e(k) &= y_c(k) - y(k) \\ u(k) &= -a_1 u(k-1) - \dots - a_n u(k-n) + b_0 e(k-1) + b_1 e(k-2) + \dots + b_{n-1} e(k-n) \end{aligned} \quad (5.16)$$

non  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  eta  $b_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$  balio errealak hartzen dituen eta  $e(k)$   $k$  aldiuneko kontsigna eta kontrolatutako aldagaiaren arteko errorea den. Bestetik,  $u(k)$   $k$  aldiuneko kontrol-aldagaia da. Gehikuntza-ekuazio horri  $z$  transformatua aplikatuz gero, kontrolaren transferentzia-funtzioa hau izango litzateke.

$$\begin{aligned} E(z) &= Y_c(z) - Y(z) \\ U(z) &= K(z)E(z) \end{aligned} \quad (5.17)$$

$K(z)$  transferentzia-funtzioaren adierazpen matematikoa, (5.16) ekuazioaren arabera, hau da:

$$K(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (5.18)$$

Kontrol-algoritmoaren  $K(z)$  transferentzia-funtzioa honela idatz daiteke  $z$  aldagai konplexuaren berreketa positiboen bitartez.

$$K(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (5.19)$$

## 5.7 adibidea

Gogoan har dezagun PI motako kontrol-algoritmo bat. Kontrol-algoritmoaren sarrera kontsignaren eta kontrolatutako aldagaiaren errorea da.

$$e(k) = y_c - y(k)$$

$e(k)$ ,  $k$  aldiuneko errorea.

$y(k)$ , kontrolatutako aldagaia.

$y_c(k)$ , kontsigna.

$e_i(k)$ , erroreaken integrala.

$$e(kh) = K_p (y_c(kh) - y(kh)) \Rightarrow E(z) = K_p (Y_c(z) - Y(z))$$

$$e_i(kh) = e_i(kh - h) + h \cdot e(kh) \Rightarrow E_i(z) = z^{-1} E_i(z) + h \cdot E(z) \Rightarrow E_i(z) (1 - z^{-1}) = h \cdot E(z)$$

$$u(kh) = K_p \left[ e(kh) + \frac{1}{T_i} e_i(kh) \right] \Rightarrow U(z) = K_p \left[ E(z) + \frac{1}{T_i} E_i(z) \right]$$

Kontrol-algoritmoaren transferentzia-funtzioaren kalkulua honela egin daiteke:

$$E_i(z) = \frac{h}{(1 - z^{-1})} \cdot E(z)$$

$$U(z) = K_p \left[ E(z) + \frac{1}{T_i} E_i(z) \right] \Rightarrow U(z) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i} \frac{h}{(1 - z^{-1})} \right] \cdot E(z)$$

$$U(z) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i} \frac{hz}{(z-1)} \right] \cdot E(z) = \frac{K_p (T_i(z-1) + hz)}{T_i(z-1)} E(z)$$

$$U(z) = \frac{K_p (z(T_i + h) - T_i)}{T_i(z-1)} \cdot E(z)$$

Ikus daitekeenez, errorearen eta kontrol-aldagaiaren  $z$  transformatuen arteko erlazioa, hots, kontrol-algoritmoaren transferentzia-funtzioa, (5.19) itxura duen funtzio bat da. Sistema batek edo kontrol-algoritmo batek integratzaile bat badu,  $z = 1$  poloa izango du.

## 5.4 BEGIZTA ITXIKO SISTEMA BATEN TRANSFERENTZIA-FUNTZIO BALIOKIDEA

Kontrolatu nahi dugun sistemaren transferentzia-funtzio baliokidea kalkulatu eta gero, eta kontrol-algoritmoaren transferentzia baliokidea lortu eta gero, sistema osoaren transferentzia-funtzio baliokidea lortzea falta zaigu. Horretarako, lehenik, berrelikadurarekin lan egiteko bi aukera nagusiak aztertuko ditugu. Ondoren, bi horiek aldi berean lantzen duten egoera orokorra ikusiko dugu. Horrenbestez, berrelikadura kontuan duen (sistema + kontrol-algoritmoa) transferentzia-funtzioa kalkulatu dugu. Lan egiteko bi era horiek berrelikadurak dituen bi helburu hauekin lotuta daude:

- 1.- Kontsigna ongi jarraitu behar du sistema automatikoak.
- 2.- Kontrolatu gabeko kanpo-aldagaiak ez dute eraginik izan behar sistema automatikoan.

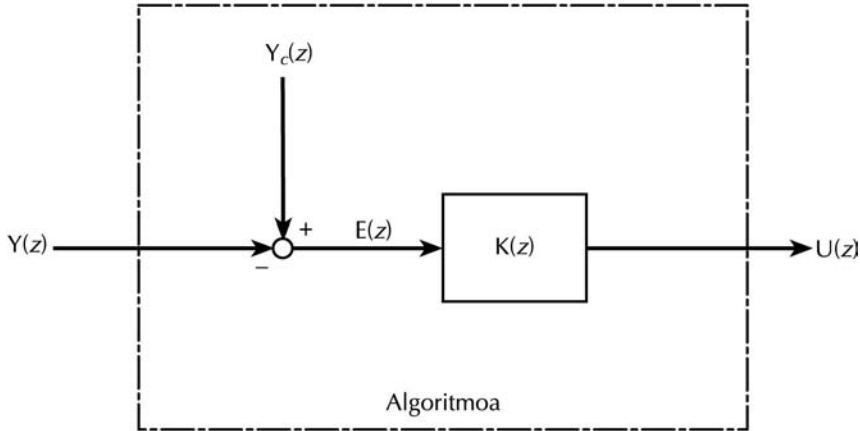
Beraz, gure kontrol-algoritmoaren kontsigna nulua ez denean –hots, aldakorra denean– eta kontrolatu beharreko sistemaren sarrera bakarra  $u(kh)$  kontrol-aldagaia denean –hots, perturbaziorik ez dugunean–, esaten dugu gure sistema automatikoa berrelikadura eran ari dela.

Kontsigna aldatzen ez bada eta kontrolatutako sistemak kontrolatu gabeko sarrerek baditu, hots, perturbazioak baditu, esango dugu erregulazio eran ari dela.

### 5.4.1 Berrelikadura era edo serbosistema-egitura

Lehen esan dugunez, berrelikadura eran lan egiten duenean, sistemak ez du perturbaziorik. Beste era batera esanda, ez dugu kontuan izango perturbazioaren

eragina. Geroago, lan egiteko era orokorrarena aztertzen dugunean aztertuko dugu perturbazio hauen eragina. Berrelikadura eran lan egitean, kontrol-algoritmoaren sarreran  $Y_c(z)$  eta  $Y(z)$  izango ditugu. Bi aldagai horien kenketatik  $E(z)$  errorea kalkulatu dugu.



**5.9 irudia.** Kontrol-algoritmoaren transferentzia-funtzioaren bloke-diagrama.

Begizta itxiko sistemaren transferentzia-funtzio baliokidea honela kalkulatu daiteke. Kontuan izan behar dugu kontrolatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzio diskretua (5.1) formularen bitartez lortuko dugula.

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] \right\}$$

(5.17) Ekuazioa kontuan izanik, sistemaren begizta itxiko transferentzia-funtzioa lortuko dugu.

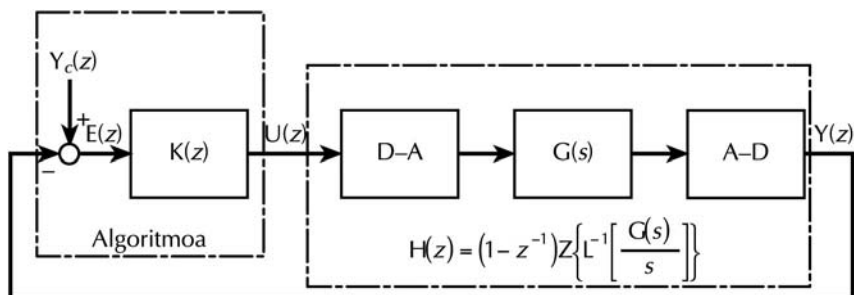
$$U(z) = K(z) [Y_c(z) - Y(z)]$$

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z) \Rightarrow Y(z) = H(z) \cdot K(z) \cdot [Y_c(z) - Y(z)]$$

$$Y(z) = \frac{H(z) \cdot K(z)}{1 + H(z) \cdot K(z)} Y_c(z)$$

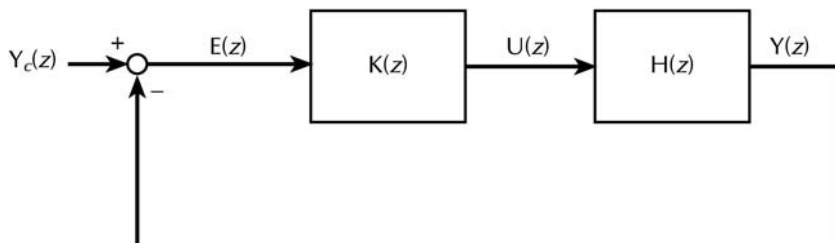
Beraz, begizta itxiko transferentzia-funtzio baliokidea honela idatz daiteke:

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{K(z)H(z)}{1 + K(z)H(z)} \quad (5.20)$$



**5.10 irudia.** Sistema automatikoaren bloke-diagrama berrelikadura eran lan egitean.

Aurreko irudia apur bat errazago adierazten dugu (5.11) irudian. Ikus daitekeenez, lan egiteko era honetan, berrelikadura dugu ezaugarri nagusia. Berrelikadura-egitura honetan kontrol-algoritmoak sistemaren dinamika guztiz alda dezake. (5.20) formulaz ikus daitekeenez, transferentzia-sistemaren izendatzailea eta zenbakitzailea guztiz alda daitezke teknika honetan oinarrituz. Geroago matematikoki ikusiko dugunez (7. atala), transferentzia-funtzio baten izendatzailearen erroek –hots, transferentzia-funtzioaren poloek– sistemaren egonkortasuna finkatzen dute. Beraz, polo horiek aldatzen baditugu (5.11) irudiko berrelikadura-egitura erabiliz, sistemaren dinamika aldatuko dugu. Hori hobeto ulertzeko, demagun  $H(z)$  eta  $K(z)$  funtzioak arrazionalak direla. Azter dezagun nola geratzen zaigun sistemaren transferentzia-funtzioaren izendatzailea:



**5.11 irudia.** Bloke-diagrama edo egitura berrelikadura eran lan egitean.

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} \\
 K(z) &= \frac{S(z)}{R(z)} \\
 \frac{Y(z)}{Y_c(z)} &= \frac{\frac{B(z)}{A(z)} \cdot \frac{S(z)}{R(z)}}{1 + \frac{B(z)}{A(z)} \cdot \frac{S(z)}{R(z)}} \Rightarrow \frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{B(z) \cdot S(z)}{A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z)}
 \end{aligned}
 \tag{5.21}$$

Transferentzia-funtzio horren izendatzaileak  $A(z)$ ,  $R(z)$ ,  $B(z)$  eta  $S(z)$  polinomioen mende daude. Beraz, nahiz eta kontrolatu edo kontrolatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzioaren araberakoa izan neurri handi baten, gure kontrol-algoritmoaren mende egongo da izendatzailea. Izendatzailearen erroak gure kontrol-algoritmoaren mende egongo dira. Beraz, sistemaren begizta itxiko transferentzia-funtzioak kontrol-algoritmoarekiko mendekotasun handia du, eta sistema automatikoari eskatzen dizkiogun kondizioak betetzeko aukera eskaintzen digu.

$$A(z) \cdot R(z) + B(z) \cdot S(z) = 0 \tag{5.22}$$

Garrantzi handia duen beste erlazio matematiko bat aurkeztuko dugu. Erlazio hori errorearen eta kontsignaren arteko transferentzia-funtzioa dugu. Transferentzia-funtzio horrek adieraziko digu errorearen jarrera dinamikoa,  $k$ -k infiniturantz jotzen duenean batez ere; alegia, (5.23) berdintza eta (4.7) teorema erabiliz, bukaerako laginaren teorema erabiliz alegia, sistemak izango duen errorea sistemaren erantzun iragankorra igaro eta gero.

$$\begin{aligned}
 \frac{E(z)}{Y_c(z)} &= \frac{1}{1 + K(z)H(z)} \\
 \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1) \cdot Y_c(z)}{1 + K(z)H(z)}
 \end{aligned}
 \tag{5.23}$$

---

## 5.8 adibidea

---

Gogoan har dezagun lehen mailako sistema diskretu bat. Sistema horren transferentzia-funtzioa hau da:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{z}{z-a} \\
 a &\in \Re
 \end{aligned}$$

Sistema horrek kontrol proportzionala du; beraz, dugun errorea  $K_p$  konstante batez biderkatzen du kontrol-algoritmoak, eta  $u(k)$  kontrol-aldagaia lortzen dugu.

$$u(k) = K_p (y_c(k) - y(k)) = K_p e(k) \Rightarrow U(z) = K_p \cdot E(z)$$

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{K_p \frac{z}{z-a}}{1 + K_p \frac{z}{z-a}} = \frac{K_p z}{z(K_p + 1) - a}$$

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{K_p}{(K_p + 1)} \frac{z}{\left(z - \frac{a}{(K_p + 1)}\right)}$$

Ikus daitekeenez, begizta itxiko transferentzia-funtzioa kontrol-algoritmoaren mende dago. Transferentzia-funtzioaren polo bakarra  $K_p$  proportzionaltasun-konstantearen mende dago.

$$z = \frac{a}{K_p + 1} \quad (5.24)$$

Bestalde, erroreak transferentzia-funtzioa kalkulatz gero, honako hau lortuko dugu:

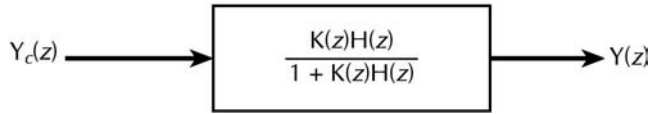
$$\frac{E(z)}{Y_c(z)} = \frac{1}{1 + K_p \left(\frac{z}{z-a}\right)}$$

Kontsigna maila motako funtzio bat bada, erroreak bukaerako balioa hau da.

$$E(z) = \frac{1}{1 + K_p \left(\frac{z}{z-a}\right)} \frac{z}{z-1} = \frac{z \cdot (z-a)}{((K_p + 1)z - a \cdot K_p)(z-1)}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot E(z) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \frac{(1-a)}{((K_p + 1) - a \cdot K_p)} = \frac{(1-a)}{(1-a) \cdot K_p + 1}$$

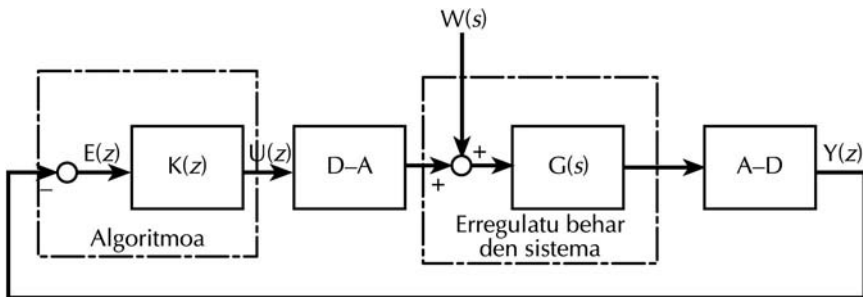
Argi dagoenez, zenbat eta handiagoa izan  $K_p$ , orduan eta errore txikiagoa izango dugu.



**5.12 irudia.** Berrelikadura eran lan egitean lortzen dugun transferentzia-funtzioa.

### 5.4.2 Kontrol era edo erregulazio-egitura

Kontrol eran lan egitean, kontsignarik ez dugula jotzen dugu, hots, kontsigna nulua dela suposatzen dugu. Hala ere, lan egiteko era honetan kontrolatu gabeko sarrerak ditugu; sarrera horiek perturbazioak dira. Ia sistema automatiko guztietan perturbazioak ditugu, eta, berez, gure sistema automatikoak ezin ditu kontrolatu. Kasu honetan perturbazio bakarra dugu. Perturbazioak eragin txarrak dakartza  $y(k)$  aldagaia kontrolatu nahi dugunean. Berrelikadurak perturbazioak duen eragina gutxitu egiten du. Perturbazioa sarrerarekin batera batzen dela joko dugu. Perturbazioa  $w(t)$  seinalea da. Lan egiteko era honetan, kontrolatutako  $y(kh)$  seinalea zerotik ahalik eta gertuena egon dadila nahi dugu.

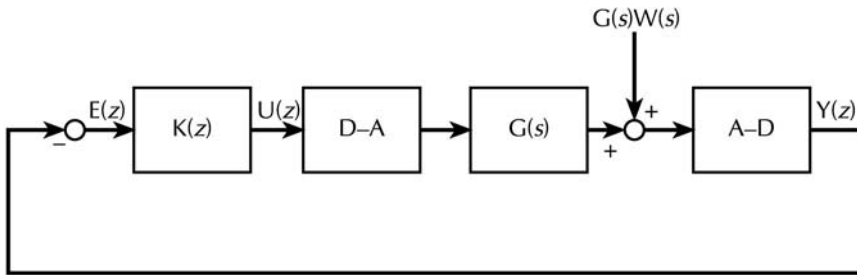


**5.13 irudia.** Kontrol eran lan egitean, sistema automatikoak duen bloke-diagrama.

Eredu diskretuan,  $w(t)$  perturbazioak zer nolako eragina duen ikusteko, A/D bihurgailuaren sarrerara eramango dugu. Perturbazioa A/D bihurgailura eramatean,  $G(s) \cdot W(s)$  biderketa gisa geratzen zaigu. Seinale hori denboraren mende uzteko, Laplaceren alderantzizko transformatua erabili behar dugu:

$$p(t) = L^{-1}[G(s) W(s)]$$

Perturbazioa A/D bihurgailuaren bidez lagintzen badugu  $t = kh$  eginez,  $p(kh)$  seinale diskretua lortuko dugu. Seinale diskretu horri dagokion  $z$  transformatua kalkulatu dugu, perturbazioaren eta kontrolatutako  $y(kh)$  aldagaiaren arteko transferentzia-funtzioa lortzeko.

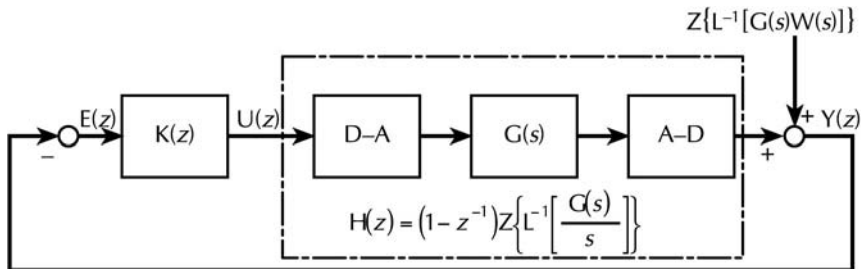


**5.14 irudia.**  $w(t)$  perturbazioa A/D bihurgailura eramanez gero,  $p(t) = L^{-1}[G(s) W(s)]$  seinalea lortzen dugu.

Perturbazioari dagokion  $z$  transformatua honela adieraz daiteke matematikoki:

$$P(z) = Z\{L^{-1}[G(s) W(s)]|_{t=kh}\}$$

Horrela adieraz dezakegu, beraz, Sistema automatikoaren bloke-diagrama; perturbazioaren eragina A/D bihurgailura eramanez gero, honela adieraz dezakegu:



**5.15 irudia.** Perturbazioa A/D bihurgailura eramanez gero, honela adieraz daiteke bloke-diagrama.

Perturbazioaren eta kontrolatutako  $Y(z)$  aldagaiaren arteko transferentzia-funtzioa kalkulatzeko, errorearen  $z$  transformatua kalkulatu behar dugu. Ondoren,  $Y(z)$  lortuko dugu errorearen mende utziz.

$$E(z) = -Y(z)$$

$$Y(z) = Z\{L^{-1}[G(s) W(s)]\} + K(z)H(z)E(z)$$

Erroreak  $Y(z)$  aldagaiarekiko duen erlazioa kontuan izanik, aurreko ekuazioan ordezkatzeko dugu errorea.

$$Y(z) = -E(z) = \frac{Z\{L^{-1}[G(s)W(s)]\}}{1+K(z)H(z)} \quad (5.24)$$

Ikus daitekeenez, kontrolatutako aldagaiak eta erroreak, dinamika bera dute,  $Y(z)$  eta  $E(z)$  izendatzaile bera dutelako.

$$E(z) = -\frac{Z\{L^{-1}[G(s)W(s)]\}}{1+K(z)H(z)} \quad (5.25)$$

### 5.9 adibidea

Izan dezagun maila funtzioaren itxura duen perturbazio bat. Azter dezagun mota horretako perturbazio batek sortzen duen eragina. Maila funtzioaren itxura duen  $w(t)$  perturbazioaren Laplaceren transformatua  $1/s$  da. Beraz, hori kontuan izanik, berdintasun hau lortuko dugu:

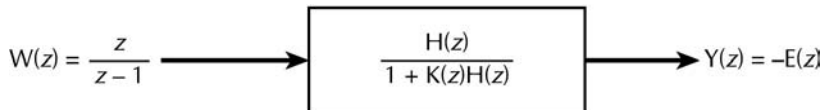
$$Y(z) = -E(z) = \frac{Z\left\{L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]\right\}}{1+K(z)H(z)} \quad (5.26)$$

$\frac{z-1}{z}$  -z zatitu eta biderkatuta gero, adierazpen matematiko hau lortuko dugu:

$$Y(z) = \frac{\frac{z}{z-1}(1-z^{-1})Z\left\{L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]\right\}}{1+K(z)H(z)} = \frac{W(z)H(z)}{1+K(z)H(z)} \quad (5.27)$$

eta, azkenean, hau lortuko dugu:

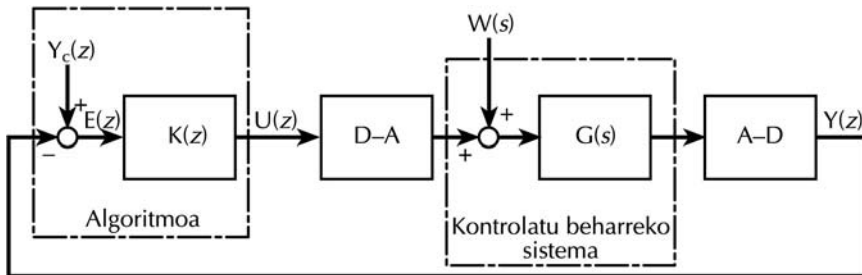
$$\frac{Y(z)}{W(z)} = -\frac{E(z)}{W(z)} = \frac{H(z)}{1+K(z)H(z)} \quad (5.28)$$



**5.16 irudia.** Perturbazioa maila-itxurakoa bada, kontrol eran lan egiten duen sistema automatikoaren transferentzia-funtzio baliokidea dugu irudi honetan.

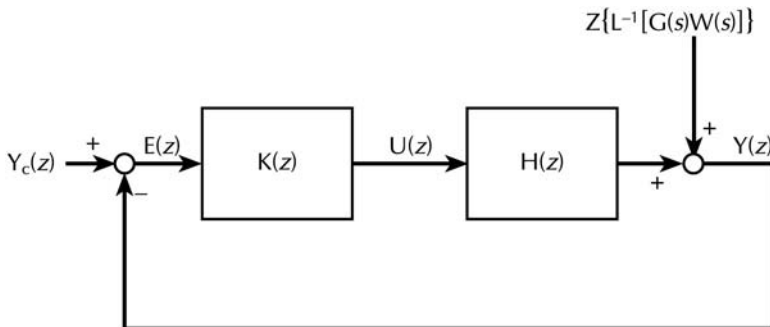
### 5.4.3 Kontrol eta berrelikadura eran lan egiten duen sistema automatikoa

Sistema automatiko batean lan egiteko era biak aztertu ditugu. Hala ere, sistema automatiko gehienetan lan egiteko era biak aldi berean gertatzen dira. Beraz, egoera orokor hori aztertu behar dugu. Irudian ikus daitekeenez, bi sarrera ditugu sistema honetan:  $Y_c(z)$  kontsigna eta  $W(s)$  perturbazioa.



**5.17 irudia.** Perturbazioa eta kontsigna aldi berean gertatzean lortzen dugun bloke-diagrama.

Perturbazioa A/D bihurgailura eramanez eta kontrolatu beharreko sistemaren  $H(z)$  transferentzia-funtzio diskretua ordezkatzuz lor dezakegu ondorengo bloke-diagrama baliokidea:



**5.18 irudia.** Kontsigna eta perturbazioa aldi berean dituen bloke-diagrama baliokidea.

(5.18) bloke-diagrama kontuan izanik, ekuazio hauek izango ditugu:

$$\begin{aligned} E(z) &= Y_c(z) - Y(z) \\ Y(z) &= K(z)H(z)E(z) + Z\{L^{-1}[G(s)W(s)]\} \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$Y(z) = \frac{K(z)H(z)}{1+K(z)H(z)} Y_c(z) + \frac{Z\{L^{-1}[G(s)W(s)]\}}{1+K(z)H(z)} \quad (5.30)$$

(5.30) ekuazioa (5.29) ekuaziora eramanda,  $E(z)$  errorearen adierazpena lortuko dugu:

$$E(z) = \frac{1}{1+K(z)H(z)} Y_c(z) + \frac{Z\{L^{-1}[G(s)W(s)]\}}{1+K(z)H(z)} \quad (5.31)$$

$W(s) = 1/s$  maila motako funtzio bat bada, kontrolatutako  $Y(z)$  aldagaiaren ekuazioa eta  $E(z)$  errorearen ekuazioak honelakoak dira:

$$Y(z) = \frac{K(z)H(z)}{1+K(z)H(z)} Y_c(z) + \frac{H(z)}{1+K(z)H(z)} W(z)$$

$$E(z) = \frac{1}{1+K(z)H(z)} Y_c(z) + \frac{H(z)}{1+K(z)H(z)} W(z)$$

### 5.1 ariketa

Egiaztatu (5.1) eta (5.2) adierazpenak berdinak direla:

$$H(z) = (1 - z^{-1}) Z \left( L^{-1} \left( \frac{G(s)}{s} \right) \right) \quad (5.1)$$

$$H(z) = Z \left( L^{-1} \left( \frac{1 - e^{-sh}}{s} G(s) \right) \right) \quad (5.2)$$

$$F_1(s) = \frac{G(s)}{s} \Rightarrow f_1(t)$$

$$F_2(s) = \frac{e^{-sh} G(s)}{s} \Rightarrow f_2(t - h)$$

$$\begin{cases} Z \left( L^{-1} \left( \frac{G(s)}{s} \right) \right) = Z(f_1(t = kh)) = \\ Z \left( L^{-1} \left( \frac{e^{-sh} G(s)}{s} \right) \right) = Z(f_1(kh - h)) = \end{cases}$$

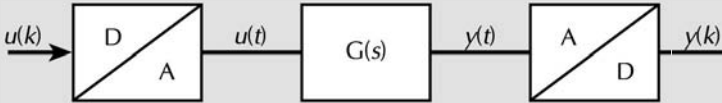
$$H(s) = Z \left( L^{-1} \left( \frac{G(s)}{s} \right) \right) - Z \left( e^{-sh} \frac{G(s)}{s} \right)$$

$$H(z) = (1 - z^{-1}) Z \left( L^{-1} \left( \frac{G(s)}{s} \right) \right) = Z \left( L^{-1} \left( \frac{1 - e^{-sh}}{s} G(s) \right) \right)$$

## 5.2 ariketa

Egiaztatu  $H(z)$  transferentzia-funtzioa eta (5.1) adierazpena berdinak direla.

$$H(z) = Z \left( L^{-1} \left( \frac{G(s)}{s} (1 - e^{-sh}) \right) \right)_{t=kh}$$



Sar dezagun  $u(k)$  sarreran 1 anplitudeko bulkada edo pultsu bat, eta kalkula dezagun sistemaren  $y(k)$  irteera:

$$u(k) = \Delta(k) \Rightarrow U(z) = 1$$

$$U(s) = \frac{1 - e^{-sh}}{s} \Rightarrow u(t) = \text{maila}(t) - \text{maila}(t - h)$$

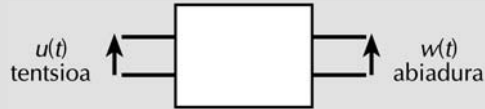
$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) \left( \frac{1}{s} - \frac{e^{-sh}}{s} \right)$$

$$Y(s) = G(s) \left( \frac{1 - e^{-sh}}{s} \right)$$

$$H(z) = Z \left( L^{-1} \left( \frac{G(s)}{s} (1 - e^{-sh}) \right) \right)_{t=kh}$$

### 5.3 ariketa

Korronte zuzeneko motor hau dugu:



Kalkulatu sistemaren transferentzia-funtzio diskretua, kontuan izanda parametro hauek ezagunak direla:

$R_a$ : korronte zuzeneko makinaren induzituaren erresistentzia

$k\Phi$ : korronte zuzeneko makinaren indukzio konstantea

$J_m$ : makinaren ardatzaren inertzia-momentua

$h$ : kontrolaren laginketa-tartea edo periodoa

$$U = R_a i_a + k\Phi \omega$$

$$J_m \frac{d\omega}{dt} + b\omega = k\Phi i_a$$

$$J_m \frac{d\omega}{dt} + b\omega = k\Phi \left( \frac{U - k\Phi \omega}{R_a} \right)$$

$$J_m \frac{d\omega}{dt} + b + \frac{(k\Phi)^2}{R_a} \omega = \frac{k\Phi}{R_a} U$$

$$G(s) = \frac{k\Phi / JR_a}{s + \frac{1}{J_m} \left( b + \frac{(k\Phi)^2}{R_a} \right)}$$

$$G(s) = \frac{a}{s + b}$$

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{a}{b} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + b} \right)$$

$$H(z) = \left( \frac{1-z}{z} \right) Z \left( L^{-1} \left( \frac{a}{b} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+b} \right) \right) \right)$$

$$H(z) = \left( \frac{1-z}{z} \right) Z \left( L^{-1} \left( \frac{a}{b} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+b} \right) \right) \right)$$

$$H(z) = \frac{a}{b} \left( \frac{1-z}{z} \right) \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-bh}} \right]$$

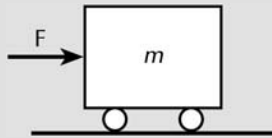
$$H(z) = \frac{a}{b} \left[ 1 - \frac{1-z}{z-e^{-bh}} \right] = \frac{a}{b} \left[ \frac{2z - (e^{-bh} + 1)}{z-e^{-bh}} \right]$$

$$a = \frac{k\Phi}{JR_a} \quad b = \frac{1}{J} \left( b + \frac{(k\Phi)^2}{R_a} \right)$$

$$H(z) = \frac{k\Phi}{R_a \left( b + \frac{(k\Phi)^2}{R_a} \right)} \left( \frac{2z - \left( 1 + e^{-\frac{h}{J} \left( b + \frac{(k\Phi)^2}{R_a} \right)} \right)}{z - e^{-\frac{h}{J} \left( b + \frac{(k\Phi)^2}{R_a} \right)}} \right)$$

#### 5.4 ariketa

Demagun  $m$  masako orga bat dugula eta  $F$  indar batek eragiten duela gorputz horretan. Kalkulatu  $F$  indarraren eta orgaren posizioaren arteko transferentzia-funtzioa.



$$x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

$$F(t) = m\ddot{x} \quad F(s) = ms^2X(s)$$

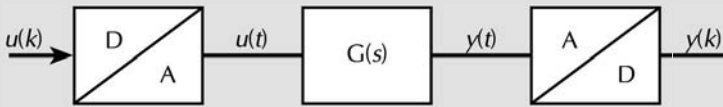
$$X(s) = \frac{F(s)}{ms^2} \quad G(s) = \frac{1}{ms^2}$$

$$H(z) = \frac{1-z}{z} Z \left( L^{-1} \left( \frac{G(s)}{s} \right) \right) = \frac{1-z}{z} Z \left( L^{-1} \frac{1}{ms^3} \right)$$

$$H(z) = \frac{1-z}{mz} \cdot \frac{h^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{-h^2}{2m} \cdot \frac{(z+1)}{(z-1)^2}$$

$$H(z) = -\frac{h^2}{2m} \cdot \frac{(z+1)}{(z-1)^2}$$

### 5.5 ariketa



Kalkulatu  $u(k)$  eta  $y(k)$  arteko erlazioa eta egiaztatu (5.1) formularekiko baliokidea dela.

Lehenik,  $u(t)$  kalkulatu dugu. Ondoren, sarrera baten aurrean kalkulatu dugu  $u(t)$ , eta, Laplaceren transformatuaren bidez,  $y(t)$  seinalearen Laplaceren transformatua lortu dugu. Gero,  $y(t)$  seinalea kalkulatu dugu Laplaceren alderantzizko transformatua eginez.  $y(t)$  seinalea  $h$  laginketa-periodo batekin laginduko dugu,  $y(kh)$  seinale diskretua lortuz, eta  $u(kh)$  kontrol-aldagai diskretuaren mende utziz.

$$u(t) = \sum_{l=0}^{l=\infty} u(lh) [\text{maila}(t-lh) - \text{maila}(t-lh-h)]$$

$$U(s) = \sum_{l=0}^{l=\infty} u(lh) \left[ \frac{1}{s} e^{-slh} - \frac{e^{-slh}}{s} \right]$$

$$Y(s) = \sum_{l=0}^{l=\infty} u(lh) \cdot e^{-slh} \left[ \frac{G(s)}{s} - \frac{G(s)}{s} e^{-slh} \right]$$

$$y(t) = \sum_{l=0}^{l=\infty} u(lh) \cdot L^{-1} \left[ e^{-slh} \left( \frac{G(s)}{s} (1 - e^{-slh}) \right) \right]$$

$$y(kh) = \sum_{l=0}^{l=\infty} u(lh) \cdot L^{-1} \left[ e^{-slh} \left( \frac{G(s)}{s} (1 - e^{-slh}) \right) \right]_{t=kh}$$

$$f(kh) = L^{-1} \left( \frac{G(s)}{s} \right)_{t=kh}$$

Azken berdintza batukarian sartuz gero, ekuazio hau dugu:

$$y(kh) = \sum_{l=0}^{l=\infty} u(lh) [f(kh-lh) - f(kh-h-lh)]$$

$$g(kh) = f(kh) - f(kh-h)$$

$$y(kh) = \sum_{l=0}^{l=\infty} u(lh) g(kh-lh)$$

Argi dago  $y(kh)$  eta  $u(kh)$  seinaleak konboluzio baten bidez lortuta daudela.  $g(kh)$  seinalea sistemaren bulkada- edo bulkada-erantzun diskretua da. Ekuazio horri  $z$  transformatua aplikatuz,  $Y(z)$  eta  $U(z)$  transformatuen arteko erlazioa lortzen dugu. Beraz, ohartuko gara berdintza hori eta (5.1) formula berdinak dira.

$$Y(z) = U(z)G(z)$$

$$G(z) = F(z) - z^{-1}F(z)$$

$$F(z) = Z\left(L^{-1}\left(G(z)/s\right)\right)\Big|_{t=kh}$$

$$Y(z) = (1-z^{-1})Z\left(L^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right)\Big|_{t=kh} U(s)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = (1-z^{-1})Z\left(L^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right)\Big|_{t=kh}$$



# 6

## Erantzun harmonikoa

### 6.1 SARRERA

Liburuko atal honetan sistemen erantzun harmonikoa aztertuko dugu. Sistema baten sarrerak sinu-itxura badu, sistema horrek duen irteerari sistemaren erantzun harmoniko deritzogu. Sistema baten erantzun harmonikoa oso garrantzitsua da sistemaren ezaugarri dinamikoak azaltzeko. Erantzun harmonikoa aztertuz, sistemaren egonkortasun-maila lor daiteke. Bestetik, berrelikadura duten sistemak aztertzean, sistemaren begizta irekiko erantzun harmonikoa erabiliz, kontrol-algoritmoak kalkulatu ditugu. Erantzun harmonikoa aztertzeko, nagusiki, bi tresna erabiliko ditugu: Bode diagramak eta Nyquist diagramak. Bi tresna horiek atal honetan azalduko dira.

### 6.2 TRANSFERENTZIA-FUNTZIO HARMONIKOA

#### 6.2.1 Definizioa

Har dezagun  $G(z)$  transferentzia-funtzioa duen sistema lineal bat. Transferentzia-funtzioa arrazionala dela joko dugu. Bestetik,  $u(kh)$  sarrerak sinu-itxura du. Sarreraren maiztasuna  $w$  da, eta  $h$  laginketa-periodoa da.

$$u(kh) = \sin(whk) \quad (6.1)$$

$$k \geq 0$$

Sinu-itxura duen sarrera baten aurrean sistemak duen erantzuna kalkulatzeko, lehenik (6.1) sarrera berreketa gisa adieraziko dugu.

$$u(kh) = \frac{e^{jwhk} - e^{-jwhk}}{2j} \quad (6.2)$$

Ondoren, sarreraren  $z$  transformatua kalkulatu dugu.

$$U(z) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{z}{z - e^{jwh}} - \frac{z}{z - e^{-jwh}} \right] \quad (6.3)$$

Sistemaren transferentzia-funtzioa  $G(z)$  dela suposatuz, irteeraren  $z$  transformatua honela adieraz daiteke.

$$Y(z) = \frac{1}{2j} G(z) \left[ \frac{z}{z - e^{jwh}} - \frac{z}{z - e^{-jwh}} \right] \quad (6.4)$$

$G(z)$  funtzioa arrazionala dela suposatu dugunez, bi polinomioen arteko zatiketa  $G(z)$  eran idatz daiteke.

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (6.5)$$

Sistemak  $n$  polo dituela suposatuko dugu:  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Polo horiek  $A(z)$  polinomioaren erroak dira. Garapen horretan sistemaren poloak bakunak direla suposatu dugu. Dena den, horrek ez du gauza handirik aldatzen, zeren eta sistemaren erantzunaren egonkortasuna ez baita sistemaren poloen errepikapen-indizearen araberakoa. Hori guztia kontuan izanik, sistemaren irteera zatiki bakunen batuketa gisa idatz daiteke.

$$Y(z) = c_0 + \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2} + \dots + \frac{c_n z}{z - p_n} + \frac{cz}{z - e^{jwh}} + \frac{c^* z}{z - e^{-jwh}} \quad (6.6)$$

Gogoratu  $c^*$  zenbakia  $c$  zenbakiaren konjugatua dela, sarrerari dagozkion bi poloak,  $e^{jwh}$  eta  $e^{-jwh}$ , konjugatuak direlako. Zatiki bakoitza biderkatzen duten zenbakiak  $c_i$ :  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  (6.7) formularen bidez kalkulatu dira. Biderkatzaile horiek sistemaren polo bakoitzaren indarra finkatzen dute.

$$c_i = \lim_{z \rightarrow p_i} \left[ \frac{z - p_i}{z} G(z) \frac{1}{2j} \left[ \frac{z}{z - e^{jwh}} - \frac{z}{z - e^{-jwh}} \right] \right] \quad (6.7)$$

(6.6) adierazpenaren lehen gaia;  $c_0$  zenbakia honela kalkulatzen da.

$$c_0 = \lim_{z \rightarrow 0} G(z) \frac{1}{2j} \left[ \frac{z}{z - e^{jwh}} - \frac{z}{z - e^{-jwh}} \right] \quad (6.8)$$

Azkenik,  $c$  eta  $c^*$  honela kalkulatzen dira:

$$c = \lim_{z \rightarrow e^{jwh}} \left[ \frac{z - e^{jwh}}{z} G(z) \frac{1}{2j} \left[ \frac{z}{z - e^{jwh}} - \frac{z}{z - e^{-jwh}} \right] \right] \quad (6.9)$$

$$c = \lim_{z \rightarrow e^{jwh}} \frac{1}{2j} G(z) = \frac{1}{2j} G(e^{jwh})$$

Gogoan izan behar dugu  $c$  eta  $c^*$  zenbaki konplexu konjugatuak direla.

$$c^* = \lim_{z \rightarrow e^{-jwh}} \left[ \frac{z - e^{-jwh}}{z} G(z) \frac{1}{2j} \left[ \frac{z}{z - e^{jwh}} - \frac{z}{z - e^{-jwh}} \right] \right] \quad (6.10)$$

$$c^* = \lim_{z \rightarrow e^{-jwh}} \frac{1}{2j} G(z) = -\frac{1}{2j} G(e^{-jwh})$$

Sistemaren irteera denborarekiko idazteko, zatiki bakoitzaren alderantzizko transformatua kalkulatu behar dugu.

$$y(kh) = c_0 \Delta(kh) + c_1 p_1^k + c_2 p_2^k + \dots + c_n p_n^k + c e^{j\omega kh} + c^* e^{-j\omega kh} \quad k \geq 0 \quad (6.11)$$

Sistemaren poloei dagozkien terminoak egonkorak direla suposatuko dugu, hau da, sistema egonkortzat joko dugu. Sistema egonkorra baldin bada, sistemaren poloei lotuta dauden termino guztiek denborarekin zerorantz joko dute. Sistemaren poloei lotutako terminoen multzoari sistemaren berezko erantzuna deritzogu.

$$|p_i| < 1, i \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} c_0 \Delta(kh) + c_1 p_1^k + c_2 p_2^k + \dots + c_n p_n^k = 0 \quad (6.12)$$

Denbora nahikoa igaro ondoren, sistemaren berezko erantzunak zerorantz jotzean, sarrerari lotutako erantzuna baino ez dugu izango. Erantzun horri sistemaren erantzun harmonikoa deritzogu.

$$Y(z) = \frac{cz}{z - e^{j\omega h}} + \frac{c^* z}{z - e^{j\omega h}} \quad (6.13)$$

Erantzun harmonikoa denborarekiko idazteko, (6.13) formulako alderantzizko  $z$  transformatua aplikatuko diogu.

$$y(kh) = ce^{j\omega kh} + c^* e^{-j\omega kh} \quad k \geq 0 \quad (6.14)$$

(6.9) eta (6.10) formulak kontuan izanez gero,  $c$  eta  $c^*$  koefizienteak sistemaren transferentzia-funtzioaren mende utz daitezke.

$$c = \lim_{z \rightarrow e^{j\omega h}} \frac{1}{2j} \left[ \frac{z - e^{j\omega h}}{z} G(z) \frac{z}{z - e^{j\omega h}} \right] = \frac{1}{2j} G(e^{j\omega h})$$

$$c = \frac{1}{2j} |G(e^{j\omega h})| e^{j \text{Arg}(G(e^{j\omega h}))} \quad (6.15)$$

$$c^* = \frac{1}{2j} |G(e^{-j\omega h})| e^{j \text{Arg}(G(e^{-j\omega h}))} = -\frac{1}{2j} |G(e^{j\omega h})| e^{-j \text{Arg}(G(e^{j\omega h}))}$$

Beraz, (6.15) formula multzoa (6.14) formulan sartuz gero, sistemaren erantzun harmonikoa honela berridatz daiteke:

$$y(kh) = \frac{|G(e^{-j\omega h})|}{2j} e^{j[\omega kh + \text{Arg}G(je^{-j\omega h})]} - \frac{|G(e^{j\omega h})|}{2j} e^{-j[\omega kh + \text{Arg}G(je^{j\omega h})]} \quad (6.16)$$

(6.16) formula apur bat txukunduz gero, sistemaren erantzun harmonikoa honela idatz dezakegu:

$$y(kh) = \frac{|G(e^{j\omega h})|}{2j} \left[ e^{j[\omega kh + \text{Arg}G(je^{j\omega h})]} - e^{-j[\omega kh + \text{Arg}G(je^{j\omega h})]} \right] \quad (6.17)$$

Beraz, azkenik, honela geratuko zaigu sistemaren erantzuna:

$$y(kh) = |G(e^{j\omega h})| \sin[\omega kh + \text{Arg}G(e^{j\omega h})] \quad k \geq 0 \quad (6.28)$$

Azken formula hori oso berdintza garrantzitsua da; sistema lineal baten erantzun harmonikoa kalkulatzeko, sistemaren transferentzia-funtzioan  $z$  aldagai konplexua  $e^{j\omega h}$  terminoaz ordezkatu baino ez dugu egin behar. Gogoan izan behar dugu  $w$  sarrerako sinuaren maiztasuna [rad/s] dela, eta  $h$  laginketa-periodoa [s/lagin].  $G(e^{j\omega h})$  sistemaren transferentziari funtzio harmoniko deritzogu. Gogoan izan behar dugu  $G(e^{j\omega h})$  funtzioa konplexu bat dela. Ondorioz,  $G(e^{j\omega h})$  transferentzia-funtzio harmonikoak modulua eta fasea ditu. Transferentzia-funtzio harmonikoaren modulua

eta fasea jakinda, sistemaren erantzun harmonikoa kalkula daiteke (6.28) formula erabiliz. Sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoa grafikoki adierazteko, bi tresna erabiliko ditugu nagusiki: Nyquist diagrama eta Bode diagramak. Gero azalduko ditugu tresna horiek. Lehenik, transferentzia-funtzio harmonikoei dagozkien zenbait xehetasun azalduko ditugu.

## 6.2.2 Transferentzia-funtzio harmonikoari buruzko zenbait xehetasun

Sistema baten erantzun harmonikoa azaltzean, esan dugu sistema horren poloak egonkorak eta bakunak direla. Orain ikusiko dugu nola bi muga horiek berez ez duten garrantzi handirik sistemaren erantzun harmonikoa aztertzean. Hasteko, suposa dezagun aztertu nahi dugun sistemaren  $G(z)$  transferentzia-funtzioak bakunak ez diren polo egonkorak dituela. Esango dugu polo bat egonkorra dela baldin eta polo horren modulua 1 baino txikiagoa bada. Beraz, sistemak (6.1) formularen itxurako sarrera bat badu, sistemaren irteeraren  $Z$  transformatua honela adierazi ahal izango dugu:

$$Y(z) = \frac{1}{2j} G(z) \left[ \frac{z}{z - e^{jwh}} - \frac{z}{z - e^{-jwh}} \right]$$

Irteeraren  $Z$  transformatua zatikitan adieraziko bagenu, honela idatzi ahal izango genuke:

$$Y(z) = c_0 + \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2} + \dots + \frac{c_{r,1} z}{z - p_r} + \frac{c_{r,2} z}{(z - p_r)^2} + \dots \quad (6.29)$$

$$\dots + \frac{c_{r,l} z}{(z - p_r)^l} + \dots + \frac{c_n z}{z - p_n} + \frac{c z}{z - e^{jwh}} + \frac{c^* z}{z - e^{-jwh}}$$

(6.29) adierazpenean ikus daitekeenez,  $p_r$  poloaren errepikapen-maila  $l$  da. Oraingoz, sistemaren poloak egonkorak direla suposatuko dugu; hortaz, sistemaren irteera denborarekiko honela adieraz daiteke:

$$y(kh) = c_0 \Delta(kh) + c_1 p_1^k + c_2 p_2^k + \dots + c_{r,1} p_r^k + c_{r,2} k p_r^k + \dots \quad (6.30)$$

$$+ \frac{c_{r,l}}{(l-1)!} \prod_{i=0}^{l-2} (k-i) p_r^{k-l+1} + \dots + c_n p_n^k + c e^{jwhk} + c^* e^{-jwhk}$$

(6.30) berdintza aztertuz gero, hau ondoriozta daiteke: denbora pasatu ahala, hau da,  $k$  handituz doan heinean, sistemaren berezko erantzuna gero eta txikiagoa da. Gogoan izan behar dugu poloen moduluak 1 baino txikiagoak dela.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} c_0 \Delta(kh) &= 0 \\ p_q, \text{ polo bakuna bada : } \lim_{k \rightarrow \infty} c_q p_q^k &= 0 \\ p_r, \text{ polo anitza bada : } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{r,m}}{(m-1)!} \prod_{i=0}^{i=m-2} (k-i) p_r^{k-m+1} &= 0 \end{aligned} \quad (6.30)$$

Beraz,  $k$  aldiune batetik aurrera, bakarrik sarrerak sortutako terminoak egongo dira. Termino horiek sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoaren arabera idatz daitezke (6.14) eta (6.30) formulen arteko berdintzari jarraituz.

$$y(kh) = \left| G(e^{j\omega h}) \right| \sin \left[ \omega kh + \text{Arg} G(e^{j\omega h}) \right] \quad k \geq 0$$

Beraz, ikusi ahal izan dugunez sistemaren poloak anizkoitzak izan arren, sistemaren erantzun harmonikoa (6.28) formularen bitartez ere egin beharko litzateke. Beraz, horrelako poloak dituzten sistementzat ere transferentzia-funtzio harmonikoa  $G(e^{j\omega h})$  izango litzateke.

Bestalde, sistemaren  $G(z)$  transferentzia-funtzioaren poloak egonkorak ez badira, gauzak asko aldatzen dira, sistemaren sarreran sinu bat izanda irteerak infiniturantz jotzen baitu. Horrek esan nahi du sistemaren jatorrizko erantzuna ez dela denborarekin txikitzen eta (6.28) berdintza ez dela zuzena. Poloak egonkorak ez badira, poloen moduluak 1 edo 1 baino handiagoak dira. Beraz, sistemaren berezko erantzuna handituz joango da, baldin eta poloen moduluak 1 baino handiagoak badira.

$$\begin{aligned} p_q, \text{ polo bakuna bada eta } |p_q| > 1 : \lim_{k \rightarrow \infty} c_q p_q^k &= \infty \\ p_r, \text{ polo anitza bada eta } |p_r| > 1 : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{r,m}}{(m-1)!} \prod_{i=0}^{i=m-2} (k-i) p_r^{k-m+1} &= \infty \end{aligned} \quad (6.31)$$

Horrek esan nahi du sistemaren erantzunak infiniturantz joko duela modulu handieneko poloari jarraituz.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(kh) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ c_0 \Delta(kh) + c_1 p_1^k + c_2 p_2^k + \dots + c_n p_n^k + c e^{j\omega kh} + c^* e^{-j\omega kh} \right] = \infty \quad (6.32)$$

Beraz, sistemaren erantzun harmonikoa egonkorra ez denez, (6.28) formula ez da zuzena, eta sistemaren  $G(e^{j\omega h})$  transferentzia-funtzio harmonikoak ez du sistemaren erantzun harmonikoa guztiz definituko.

Bestalde, sistemaren poloek 1 modulua izanez gero, sistemaren erantzun harmonikoa beste itxura bat hartzen du. Gogoan izan behar dugu beti polo konplexu bat izanez gero haren polo konplexu konjugatua ere izango dugula.

$$Y(z) = c_0 + \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2} + \dots + \frac{c_n z}{z - p_n} + \frac{c_n^* z}{z - p_n^*} + \frac{c z}{z - e^{jw_0 h}} + \frac{c^* z}{z - e^{-jw_0 h}} \quad (6.33)$$

$$|p_n| = 1 \Rightarrow p_n = e^{jw_0 h}$$

(6.33) ekuazioan,  $p_n$  poloak 1 modulua duela suposatu dugu. Polo hori konplexutzat jotzen badugu, polo horren  $p_n^*$  polo konplexu konjugatua ere izango dugu. Polo konplexu horrek irudikatzen du sistemak berez sortzen duen  $w_0$  [rad/s] maiztasuneko oszilazioa. Sarrerako  $w$  maiztasunarekin bat ez badator, sistemaren erantzuna honela adieraz daiteke:

$$y(kh) = c_n e^{jw_0 kh} + c_n^* e^{-jw_0 kh} + c e^{jw kh} + c^* e^{-jw kh}$$

$$y(kh) = |c_n| e^{j(w_0 kh + \text{Arg}(c_n))} + |c_n| e^{-j(w_0 kh + \text{Arg}(c_n))} + |G(e^{jw_0 h})| \sin(w kh + \text{Arg}(G(e^{jw_0 h}))) \quad (6.34)$$

Nabarmena denez, (6.28) formularekiko alde handia dugu, eta egoera horretan ere ezin izango genuke bakarrik  $G(e^{jw_0 h})$  transferentzia-funtzio harmonikoa erabili sistemaren erantzun harmonikoa kalkulatu ahal izateko. Beraz, kasu horretan ere (6.28) formula ez da zuzena. Bestalde,  $w_0$  eta  $w$  sarrerako maiztasunak berdinak izango balira, sistemaren erantzuna ez litzateke egonkorra izango, kasu horretan  $e^{jw}$  poloa anizkoitza izango litzatekeelako. Hori hobeto ulertzeko, jo dezagun  $e^{jw}$  poloa anizkoitza dela eta kalkula dezagun sistemaren irteera.

$$Y(z) = \frac{1}{2j} G(z) \left[ \frac{z}{z - e^{jw_0 h}} - \frac{z}{z - e^{-jw_0 h}} \right] \quad (6.35)$$

$$Y(z) = c_0 + \frac{c_1 z}{z - p_1} + \dots + \frac{c_n z}{z - p_n} + \frac{q_0 z}{z - e^{jw_0 h}} + \frac{q_0^* z}{z - e^{-jw_0 h}} + \frac{q_1 z}{(z - e^{jw_0 h})^2} + \frac{q_1^* z}{(z - e^{-jw_0 h})^2} \quad (6.36)$$

Demagun  $e^{jw}$  poloei lotuta dauden terminoek denbora handitu ala zerorantz jotzen dutela. Beraz, denborarekiko idazten badugu, irteerak bakarrik  $e^{jw}$  poloari lotutako terminoak izango ditu.

$$y(kh) = c_0 \Delta(kh) + c_1 p_1^k + \dots + q_0 e^{jw_0 kh} + q_0^* e^{-jw_0 kh} + q_1 k e^{jw_0 kh} + q_1^* k e^{-jw_0 kh} \quad (6.37)$$

Ikus daitekeenez  $e^{jw}$  poloari lotuta dauden eta  $q_1$  koefizientea duten terminoak ez dira egonkorak.

$$y(kh) = q_0 e^{j\omega kh} + q_0^* e^{-j\omega kh} + q_1 k e^{j\omega kh} + q_1^* k e^{-j\omega kh}$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} y(kh) = \lim_{K \rightarrow \infty} q_0 e^{j\omega kh} + q_0^* e^{-j\omega kh} + q_1 k e^{j\omega kh} + q_1^* k e^{-j\omega kh} = \infty \quad (6.38)$$

Beraz, (6.28) formula ez da izango baliagarria sistemaren erantzun harmonikoa azaltzeko, baldin eta  $G(z)$  transferentzia-funtzioak 1 moduluko poloak baditu.

## 6.3 TRANSFERENTZIA-FUNTZIO HARMONIKOAREN IRUDIKAPENA

Aurreko atalean, sistema baten erantzun harmonikoaren adierazpen matematikoa azaldu dugu, eta horren irudikapenak oso informazio baliagarria ematen digu sistemaren jarrera dinamikoa aztertzean eta sistema horren kontrol-algoritmoak kalkulatzeko. Sistemaren transferentzia-funtzioa irudikatzeko, bi tresna ditugu: Bode diagramak eta Nyquist diagramak. Bi diagrama horien bitartez, sistema baten egonkortasuna azter daiteke. Dena den, egonkortasuna hurrengo atalean azalduko dugu. Diagrama horiek aztertuz sistemaren egonkortasuna eta bestelako ezaugarri dinamikokoak kalkula daitezkeenez, kontrol-algoritmoak kalkulatzeko erabiliko ditugu. Atal honetan, diagrama horiek irudikatzen ikasiko dugu.

### 6.3.1 Transferentzia-funtzio harmonikoaren errepikapen-tartea

Sistema baten erantzun harmonikoa (6.28) formularen bitartez adieraziko dugu beti. Suposatuko dugu sistemaren polo guztien moduluak 1 baino txikiagoak direla. Beraz,  $G(z)$  transferentzia-funtzioa duen sistema baten erantzun harmonikoa formula honen bidez adieraz daitezke.

$$G(e^{j\omega h}) \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad \omega_e = 2\pi/h$$

Gogoan izan sarrerako maiztasuna edo pultsazioa dela  $w$ , eta laginketa-periodoa  $h$ . Bestetik,  $G(z)$  sistemaren bulkada-erantzunaren  $\mathbf{Z}$  transformatua dela kontuan izanik, transferentzia-funtzio harmonikoa propietate hauek ditu:

1. Transferentzia-funtzio harmonikoa  $2\pi/h$  errepikapen-tartea du. Gogoan izan behar dugu  $2\pi/h$  dela sistemaren  $w_e$  laginketa-maiztasuna.

Sistemaren transferentzia-funtzioa  $G(z)$  da, eta  $h$  laginketa-periodoa. Transferentzia-funtzio harmonikoan,  $w + 2\pi/h$  balioaren ordez,  $w$  erabiliko dugu.

$$G(z) = \sum_{k=0}^{K=\infty} g(kh) z^{-k} \Rightarrow G(e^{j\omega h}) = \sum_{k=0}^{K=\infty} g(kh) e^{-j\omega kh} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G\left(e^{j\left(\omega+\frac{2\pi}{h}\right)h}\right) = \sum_{k=0}^{k=\infty} g(kh) e^{-j\left(\omega+\frac{2\pi}{h}\right)kh} = \sum_{k=0}^{k=\infty} g(kh) e^{-j(\omega kh + 2\pi k)} \Rightarrow$$

$$G\left(e^{j\left(\omega+\frac{2\pi}{h}\right)h}\right) = \sum_{k=0}^{k=\infty} g(kh) e^{-j\omega kh}$$

$e^{j\omega kh}$  eta  $e^{j\omega kh + 2\pi k}$  balioak berdinak direnez,  $G(e^{j\omega kh})$  eta  $G(e^{j\omega kh + 2\pi k})$  ere berdinak izango dira beti. Beraz, transferentzia-funtzio harmonikoa  $2\pi/h$  errepikapen-periodoa izango du.

$$G\left(e^{j\left(\omega+\frac{2\pi}{h}\right)h}\right) = G(e^{j\omega h}) \quad (6.39)$$

2. Transferentzia-funtzio harmonikoa modulua bikoitza da  $w$  maiztasunarekiko.

Sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoa hartuko dugu eta,  $-w$  balioaren ordeza,  $w$  erabiliko dugu.

$$G(e^{j\omega kh}) = \sum_{k=0}^{k=\infty} g(kh) e^{-j\omega kh} \Rightarrow G(e^{-j\omega kh}) = \sum_{k=0}^{k=\infty} g(kh) e^{j\omega kh} \quad (6.40)$$

Bestetik, badakigu  $e^{j\omega kh}$  eta  $e^{-j\omega kh}$  zenbaki konplexuak laukizuzen eran adieraz daitezkeela Eulerren berdintzak erabiliz.

$$\begin{aligned} e^{j\omega kh} &= \cos(\omega kh) + j \sin(\omega kh) \\ e^{-j\omega kh} &= \cos(\omega kh) - j \sin(\omega kh) \end{aligned} \quad (6.41)$$

Beraz,  $G(e^{j\omega kh})$  eta  $G(e^{-j\omega kh})$  funtzioetan (6.41) berdintzak sartuz gero, honela geratuko zaizkigu  $G(e^{j\omega kh})$  eta  $G(e^{-j\omega kh})$  funtzioak:

$$G(e^{j\omega kh}) = \sum_{k=0}^{k=0} g(kh) e^{-j\omega kh} = \sum_{k=0}^{k=0} g(kh) [\cos(\omega kh) - j \sin(\omega kh)]$$

$$G(e^{j\omega kh}) = \sum_{k=0}^{k=0} g(kh) \cos(\omega kh) - j \sum_{k=0}^{k=0} g(kh) \sin(\omega kh) \quad (6.42)$$

$$G(e^{-j\omega kh}) = \sum_{k=0}^{k=0} g(kh) \cos(\omega kh) + j \sum_{k=0}^{k=0} g(kh) \sin(\omega kh)$$

Ikus daitekeenez,  $G(e^{j\omega kh})$  eta  $G(e^{-j\omega kh})$  zenbaki konplexu konjugatuak dira; beraz, bi funtzioek modulu bera dute.

$$|G(e^{-j\omega h})| = |G(e^{j\omega h})| \quad (6.43)$$

3. Transferentzia-funtzio harmonikoaren argumentua bakoitia da  $w$  maiztasunarekiko.

(6.42) berdintzan argi geratu da  $G(e^{jwkh})$  eta  $G(e^{-jwkh})$  funtzioak konjugatuak direla, beraz, argumentuen arteko erlazioa hau da:

$$\text{Arg}G(e^{-j\omega h}) = -\text{Arg}G(e^{j\omega h}) \quad (6.44)$$

Horrenbestez, transferentzia-funtzio harmonikoaren argumentua funtzio bakoitia da  $w$  maiztasunarekiko.

### 6.1 adibidea

Gogoan har dezagun  $G(z)$  sistema baten transferentzia-funtzioa. 0,01 segundoko laginketa-periodoa erabili da. Kalkulatu sistema horren transferentzia-funtzio harmonikoa, eta  $w$  maiztasunarekiko irudikatuko ditugun transferentzia-funtzio harmonikoaren modulua eta fasea.

$$G(z) = \frac{z}{z - \left(\frac{1}{4}\right)}$$

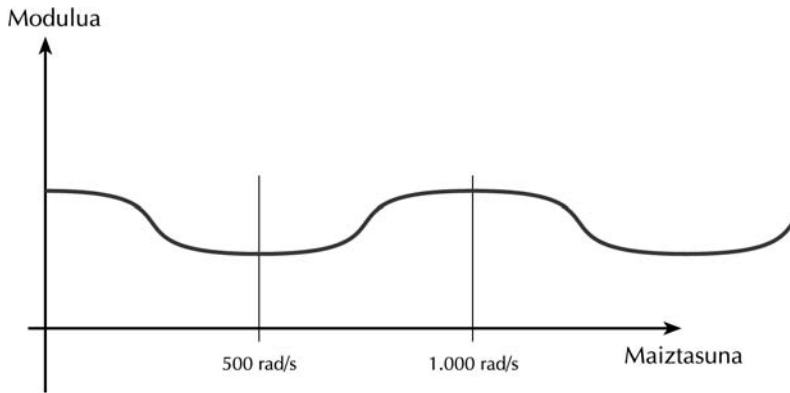
$$G(e^{jwh}) = \frac{e^{jw/1000}}{e^{jw/1000} - \left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\cos(w/1000) + j \sin(w/1000)}{\cos(w/1000) - 1/4 + j \sin(w/1000)} \quad (6.45)$$

Transferentzia-funtzio harmonikoa kalkulatu eta gero,  $G(e^{jwh})$  funtzioaren modulua kalkulatu dugu.

$$|G(e^{jwh})| = \frac{1}{\sqrt{(\cos(w/1000) - 1/4)^2 + (\sin(w/1000))^2}}$$

$$|G(e^{jwh})| = \frac{1}{\sqrt{\frac{17}{16} - \frac{\cos(w/1000)}{2}}} \quad (6.46)$$

Transferentzia-funtzioaren modulua irudikatuko bagenu, itxura hau izango luke. Ikus daitekeenez, modulua 1.000 hertz bakoitzeko errepikatzen da. Izan ere, modulua simetrikoa da. 500 hertzetik igarotzen den zuzen bertikal batekiko

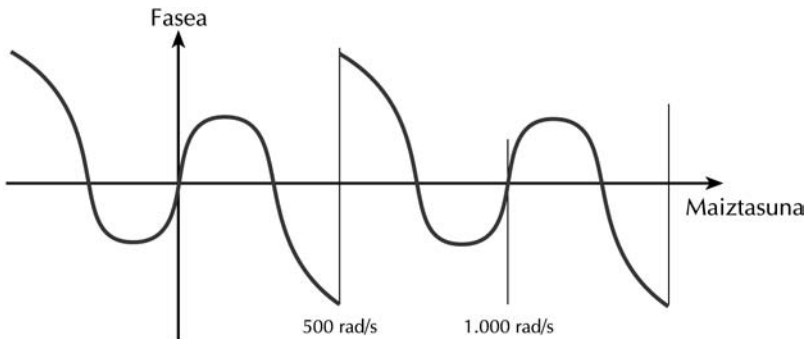


### 6.1 irudia. Transferentzia-funtzio harmonikoaren modulua.

Transferentzia-funtzio harmonikoaren fasea kalkulatu gero, adierazpen matematiko hau lortuko dugu:

$$\text{Arg}(G(e^{j\omega h})) = \omega/1000 - \arctan\left(\frac{\sin(\omega/1000)}{\cos(\omega/1000) - 1/4}\right) \quad (6.47)$$

6.2 irudian ikus daitekeenez, fasea ere errepikatu egiten da 1.000 rad/segundoko periodoarekin. Fasea funtzio bakoitia da.



### 6.2 irudia. Transferentzia-funtzio harmonikoaren fasea.

## 6.3.2 Transferentzia-funtzio harmonikoaren Bode diagramak

Ikusi ahal izan dugunez, sistema baten transferentzia-funtzio harmonikoak balio konplexuak ditu  $\omega$  maiztasuna aldatzen dugun heinean. Beraz, transferentzia-funtzio harmonikoa guztiz adierazteko bi aukera ditugu: lehenengo aukera da transferentzia-funtzio harmonikoaren modulua eta fasea  $\omega$  maiztasunaren arabera irudikatzea;

bigarren aukera, berriz, transferentzia-funtzio harmonikoaren modulua eta fasea era berean irudikatzea da,  $w$  maiztasuna irudikatu gabe. Lehen aukera 6.1 adibidean ikusi dugu; irudikapen horiek Bode fasea eta modulu-diagramak dira. Dena den, irudikapen horiek egitean laginketa-maiztasunaren erditik ( $\pm w_e/2$ ) gora errepikatzen direnez, ez du inolako interesik, transferentzia-funtzio harmonikoak  $w_e$  errepikapen-periodoa duelako. Interesa duen maiztasun-tartea  $\pm w_e/2$  denez, tartea hori  $\pm\infty$  luzatu ahal izateko, Tustin hurbilketa erabili ohi da. Tustin hurbilketaren ezaugarri garrantzitsuena hau da: 1 moduluko zirkuluak ezkerreko planoerdia du iruditzen.

### 6.3.2 Tustin hurbilketa

$w$  maiztasun-aldagaiaren  $\pm w_e/2$  tartea luzatu ahal izateko,  $v$  aldagai berria definitzen da. Aldagai horrek  $\pm\infty$  tartea du. Horretarako, Tustin transformatua definitzen dugu, non  $z$  aldagaia  $q$  aldagai konplexuaz ordezkatzeko baitugu. Gogoan izan behar dugu laginketa-periodoa  $h$  dela.

$$q = \frac{2}{h} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad z \neq -1 \quad (6.48)$$

$$z = \frac{1 + \frac{h}{2}q}{1 - \frac{h}{2}q} \quad q \neq \frac{h}{2} \quad (6.49)$$

Transformatu hori  $G(z)$  transferentzia-funtzioan ordezkatzuz gero, honelako  $q$  aldagai askearen mende egongo da transferentzia-funtzioa.

$$G(q) = G\left(\frac{1 + \frac{h}{2}q}{1 - \frac{h}{2}q}\right) \quad (6.50)$$

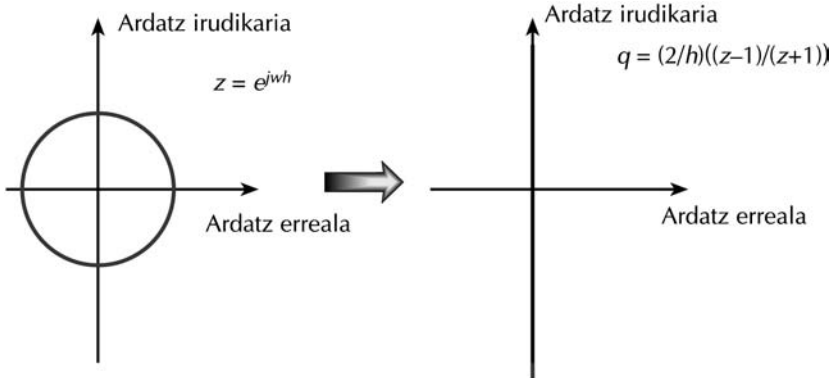
Transferentzia-funtzio harmonikoa kalkulatu ahal izateko,  $z$  aldagaia  $e^{j\omega h}$  balioaz ordezkatu behar dugu. Beraz, (6.48) formulaz  $z$  aldagaia  $e^{j\omega h}$  balioaz ordezkatzuz gero, Tustin transformatua honela eratuko da.

$$q = \frac{2}{h} \cdot \frac{e^{j\omega h} - 1}{e^{j\omega h} + 1}$$

$$q = \frac{2}{h} \cdot \frac{e^{j\omega \frac{h}{2}} - e^{-j\omega \frac{h}{2}}}{e^{j\omega \frac{h}{2}} + e^{-j\omega \frac{h}{2}}} \cdot \frac{e^{j\omega \frac{h}{2}}}{e^{j\omega \frac{h}{2}}} \quad (6.51)$$

$$q = j \frac{2}{h} \cdot \operatorname{tg} \left( \omega \frac{h}{2} \right)$$

$w$  maiztasun-aldagaiaren balio-tartea  $\pm w_e/2$  denez,  $z$  planoan 1 erradioko zirkunferentzia egiten du. Tustin transformatuak 1 erradioko zirkunferentziaren ardatz irudikaria du iruditatzat.



**6.3 irudia.** Tustin transformatua, non 1 erradioko zirkunferentziaren irudia baita ardatz irudikaria.

$q$  aldagaiak beti balio irudikariak hartzen dituzenez,  $q$  aldagaiaren ordez  $jv$  jarriko dugu.

$$q = jv \quad (6.52)$$

Beraz,  $v$  aldagaia  $w$  maiztasunaren arabera idatz daiteke.

$$v = \frac{2}{h} \operatorname{tg} \left( \omega \frac{h}{2} \right) \quad (6.53)$$

$w$  aldagaiaren tartea  $\pm w_e/2$  denez,  $v$  aldagaiaren tartea  $[-\infty, \infty]$  da.  $w$  maiztasunak 0 balioa hartzen duenean,  $v$  aldagai berriak ere 0 balioa hartzen du. Transferentzia-funtzio harmonikoa  $v$  aldagaiaren mende utziz gero, lortzen den adierazpen matematikoa arrazionala da.

$$G(jv) = G \left( \frac{1 + j \frac{h}{2} v}{1 - j \frac{h}{2} v} \right) \quad (6.54)$$

Sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoaren beste adierazpen matematiko bat da (6.54) formula. Dena den, (6.54) formula ez dago  $w$  maiztasunaren mende. (6.54) formula  $w$  maiztasunaren baitan utziz gero, (6.53) formula erabiliz egin behar da. Dena den, (6.53) formula ez da lineala, eta horrek kalkuluak zailtzen ditu. Beraz, (6.53) formularen hurbilketa bat erabiliko ditugu. Normalean,  $w$  aldagaiak balio txikiak izaten ditu  $2/h$  balioarekiko, hau da, laginketa-pultsazioaren erdiarekin erkatuz gero.

$$v = \frac{2}{h} \operatorname{tg} \left( \omega \frac{h}{2} \right) \approx \frac{2}{h} \left( \omega \frac{h}{2} \right) \quad (6.55)$$

$$v = w$$

Beraz, transferentzia-funtzio harmonikoa,  $v$  aldagaiaren mende dagoenean,  $w$  maiztasunaren mende dagoen transferentzia-funtzio harmonikoaren hurbilketa bat da, baldin eta  $v$  aldagaia  $w$  aldagaiaz ordezkatzeko bada.

$$G(jv) = G \left( \frac{1 + j \frac{h}{2} v}{1 - j \frac{h}{2} v} \right) \Rightarrow G(jw) = G \left( \frac{1 + j \frac{h}{2} w}{1 - j \frac{h}{2} w} \right) \approx G(e^{jwh}) \quad (6.56)$$

## 6.2 adibidea

Har dezagun aurreko adibidea eta kalkula dezagun sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoa,  $w$  eta  $v$  aldagaiei mende utzita. Gogoan izan behar dugu  $h$  laginketa-tartea edo -periodoa dela, eta 0,001 s/laginketa balio duela. Sistemaren transferentzia-funtzioa  $G(z)$  da.

$$G(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{4}} \quad (6.57)$$

Sistema horren transferentzia-funtzio harmonikoa kalkulatu, hau geratu zaigu:

$$G(e^{jwh}) = G(e^{j1000w}) = \frac{e^{j1000w}}{e^{j1000w} - \frac{1}{4}} \quad (6.58)$$

Sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoa  $v$  aldagaiaren mende uzteko, Tustin transformatua aplikatu behar dugu. Horretarako,  $z$  aldagaia  $q$  aldagaiaz ordezkatu behar dugu.

$$z = \frac{1 + \frac{q}{500}}{1 - \frac{q}{500}} = \frac{500 + q}{500 - q} \quad (6.59)$$

Sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoa kalkulatu ahal izateko, gogoan izan behar dugu  $z = e^{j\omega h}$  dela. Beraz,  $q$  aldagaia  $w$  aldagaiaren mende utzi behar dugu; horretarako, (6.51) formula erabiliko dugu.

$$q = j \frac{2}{h} \cdot \operatorname{tg} \left( \omega \frac{h}{2} \right) \quad (6.60)$$

Transferentzia-funtzio harmonikoa  $v$  aldagaiaren mende uzteko, lehenik  $q$  aldagaiaren mende utzi behar dugu.

$$G(q) = \frac{\frac{500 + q}{500 - q}}{\frac{500 + q}{500 - q} - \frac{1}{4}} = \frac{4(500 + q)}{1500 + 5q} = \frac{4(500 + q)}{5(300 + q)} \quad (6.61)$$

Ondoren, transferentzia-funtzio harmonikoa  $v$  aldagaiaren funtzioan jartzeko,  $q = jv$  ordezkapena egin behar dugu.

$$G(jv) = \frac{4}{5} \frac{500 + jv}{300 + jv} \quad (6.62)$$

Ikus daitekeenez,  $v$  aldagaiaren mende dagoen transferentzia-funtzio harmonikoa oso erraz kalkulatu da. Transferentzia-funtzio harmonikoa  $v$  aldagaiaren mende utziz gero lortzen den adierazpen matematikoa arrazionala da. Funtzioa arrazionala denez, oso erraz margotu daitezke Bode diagramak. Dena den,  $v$  aldagaia ez du  $w$  maiztasun-aldagaiaren esanahi bera; izan ere,  $w$  eta  $v$  matematikoki lotuta daude (6.53) formularen bidez.

$$v = \frac{2}{h} \cdot \operatorname{tg} \left( \omega \frac{h}{2} \right) \quad (6.63)$$

Beraz,  $v$  aldagaiaren mende dagoen transferentzia-funtzio harmonikoa  $w$  aldagaiaren mende utzi nahiko bagenu, adierazpen matematiko hau lortuko genuke:

$$G(jw) = \frac{4}{5} \frac{500 + j2000 \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{w}{2000} \right)}{300 + j2000 \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{w}{2000} \right)} \quad (6.64)$$

Egiazta daiteke (6.64) eta (6.58) formulak berdinak direla. Transferentzia-funtzio harmonikoaren hurbilketa bat lortzeko, (6.55) formula erabiliko dugu.

$$G(e^{j\omega h}) \approx G(j\omega) = \frac{4}{5} \frac{500 + j\omega}{300 + j\omega} \quad (6.65)$$

Ikus daitekeenez,  $G(e^{j\omega h})$  transferentzia-funtzio harmonikoaren hurbilketa arrazionala da. Horrek asko errazten du transferentzia-funtzio harmonikoaren irudikapena. Moduluaren Bode diagrama irudikatzeko, (6.65) berdintzaren modulua kalkulatu behar dugu, eta, ondoren, asintoten teknikaren bitartez irudika daiteke.

$$\begin{aligned} |G(e^{j\omega h})| &= \frac{4}{5} \sqrt{\frac{500^2 + \omega^2}{300^2 + \omega^2}} \Rightarrow 20 \log |G(e^{j\omega h})| = \\ &= \begin{cases} 20 \log(4/3) : \omega < 300 \\ 20 \log 400 - 20 \log \omega : 300 < \omega < 500 \\ 20 \log(4/5) : 500 < \omega \end{cases} \end{aligned} \quad (6.66)$$

Sistema baten transferentzia-funtzio harmonikoaren moduluen Bode diagramak logaritmo-eskaletan irudikatzen dira. (6.4.) irudian ikus daitezke moduluen eta fasearen Bode diagramak.

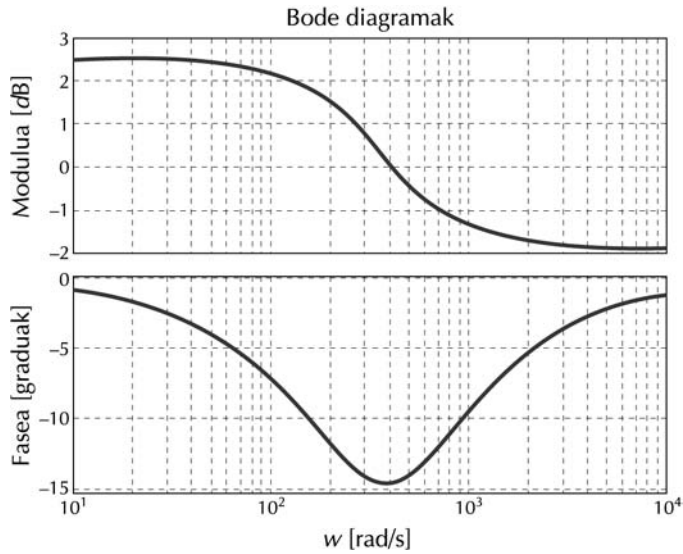
Fasearen Bode diagrama ere asintoten teknikaren bidez irudikatzen da. Beraz, transferentzia-funtzio harmonikoaren fasean, adierazpen matematiko hau dugu.

$$\text{Arg}(G(e^{j\omega h})) = \arctan\left(\frac{\omega}{300}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{500}\right) \quad (6.67)$$

Dena den, (6.67) formularen irudikapena (6.4) irudian ikusten da.

$$\text{Arg}(G(e^{j\omega h})) \approx \begin{cases} 0 : \omega < 300 \\ -\frac{\pi}{2} : 300 < \omega < 500 \\ 0 : 500 < \omega \end{cases} \quad (6.68)$$

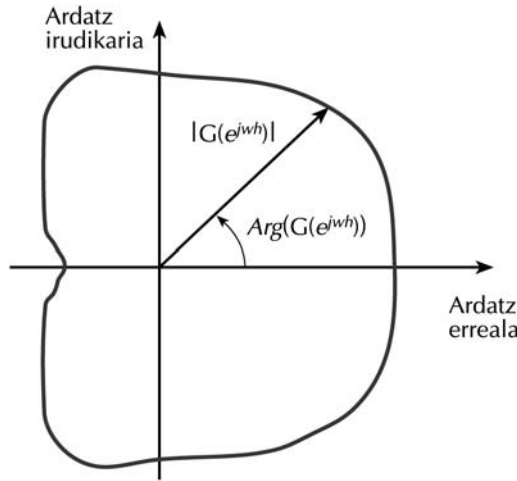
(6.68) formula transferentzia-funtzio harmonikoaren fasearen hurbilketa bat besterik ez da, eta fasearen marrazketa egiteko aukera ematen digu.



**6.4 irudia.** Transferentzia-funtzio harmonikoa, Tustin hurbilketa erabiliz.

### 6.3.3 Nyquist diagrama

6.3.2. atalean Bode diagramak azaldu ditugu, orain Nyquist diagrama azalduko dugu. Nyquist diagramak eta Bode diagramek informazio bera ematen dute. Nyquist diagrama sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoaren irudikapena da. Irudikapen hori plano konplexuan egiten da. Beraz,  $G(e^{j\omega h})$  sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoaren atal erreala  $x$  ardatzean jartzen da, eta atal irudikaria,  $y$  ardatzean.



### 6.5 irudia. Sistema baten Nyquist diagrama

Beraz, (6.5) irudian ikus daitekeenez,  $\omega$  maiztasuna edo pultsazioari  $[-\omega_e/2, \omega_e/2]$  tartean balioak emanez,  $G(e^{j\omega h})$  sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoa kalkulatzeko erabiltzen dugu.  $G(e^{j\omega h})$  funtzioak balio konplexuak dituenaz, bi ataletan banatzen da: atal erreala eta atal irudikaria.

$$G(e^{j\omega h}) = \text{Erreala}(G(e^{j\omega h})) + j \text{Irudikaria}(G(e^{j\omega h})) \quad (6.69)$$

Beraz, transferentzia-funtzio harmonikoaren atal erreala eta atal irudikaria marraztuz gero, Nyquist diagrama osatzen dugu. Dena den, Nyquist diagrama marraztu nahi badugu, kontuan izan behar dugu Nyquist diagrama ardatz errealekiko simetrikoa dela, hau da, sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoak hartzen dituen balioak,  $\omega$  pultsazioan eta  $-\omega$  pultsazioan dituen balioak, zenbaki konplexu konjugatuak direla.

$$\begin{aligned} G(e^{j\omega h}) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(kh) e^{-j\omega kh} = |G(e^{j\omega h})| \cdot e^{j \text{Arg}(G(e^{j\omega h}))} \\ G(e^{-j\omega h}) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(kh) e^{j\omega kh} = |G(e^{j\omega h})| \cdot e^{-j \text{Arg}(G(e^{j\omega h}))} \end{aligned} \quad (6.70)$$

Nyquist diagrama hobeto azaltzeko, 6.2 adibideko sistema hartuko dugu, eta 6.3 adibidean sistema horren Nyquist diagrama marraztuko dugu.

### 6.3 adibidea

Har dezagun 6.2 adibideko  $G(z)$  sistemaren transferentzia-funtzioa, Nyquist diagrama marrazteko. Gogoan izan sistemaren  $h$  laginketa-periodo edo -tarteak 0,001 s/laginketa balioa duela.

$$G(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{4}}$$

Sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoa kalkulatz gero, berdintza hau lortuko dugu.

$$G(e^{jwh}) = \frac{e^{jwh}}{e^{jwh} - \frac{1}{4}} = \frac{e^{jwh} \left( e^{-jwh} - \frac{1}{4} \right)}{\left( e^{jwh} - \frac{1}{4} \right) \left( e^{-jwh} - \frac{1}{4} \right)}$$

$$G(e^{jwh}) = \frac{1 - \frac{e^{jwh}}{4}}{\frac{17}{16} - \frac{e^{-jwh} + e^{jwh}}{4}} = \frac{1 - \frac{e^{jwh}}{4}}{\frac{17}{16} - \frac{2\cos(wh)}{4}} = \frac{16 - 4\cos(wh) - j4\sin(wh)}{17 - 8\cos(wh)}$$

$$G(e^{jwh}) = \frac{16 - 4\cos(wh)}{17 - 8\cos(wh)} - j \frac{4\sin(wh)}{17 - 8\cos(wh)}$$

$$\text{Erreala}(G(e^{jwh})) = \frac{16 - 4\cos(wh)}{17 - 8\cos(wh)}$$

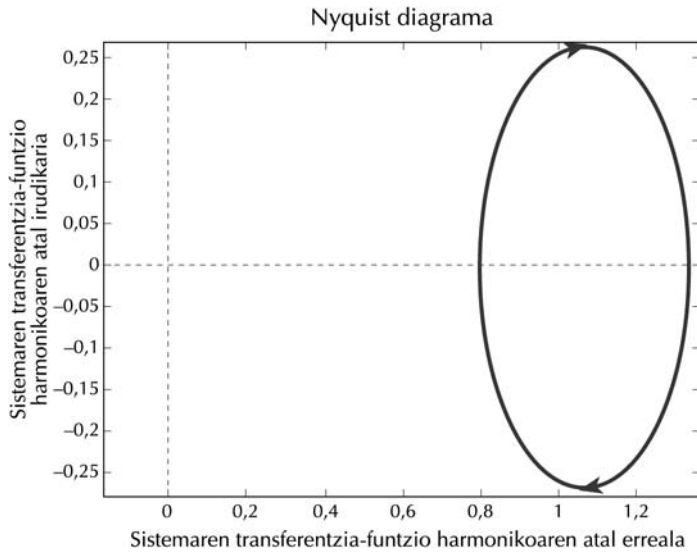
$$\text{Irudikaria}(G(e^{jwh})) = - \frac{4\sin(wh)}{17 - 8\cos(wh)}$$

Sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoaren atal erreala eta atal irudikaria plano konplexu berean marraztuz gero, sistemaren Nyquist diagrama lortuko dugu. Hala ere, sistema baten Nyquist diagrama beste era batera ere egin daiteke, sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoaren modulua eta fasea marraztuta; bere adierazpen matematikoak hauek dira:

$$|G(e^{jwh})| = \frac{1}{\sqrt{\frac{17}{16} - \frac{\cos(w/1000)}{2}}}$$

$$\text{Arg}\left(G(e^{j\omega h})\right) = \omega/1000 - \arctan\left(\frac{\sin(\omega/1000)}{\cos(\omega/1000) - 1/4}\right)$$

Azken bi funtzio horiek kalkulatu ditugu,  $\omega$  pulsazioari  $[-\omega_e/2, \omega_e/2]$  tartean balioak emanda. Gogoan izan  $\omega_e/2$  pulsazioa  $1.000 \pi$  rad/s dela. Ondoren, sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoa irudikatuko dugu.

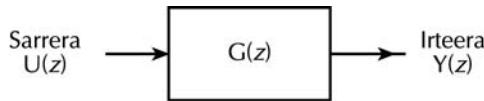


**6.6 irudia.** 6.2 adibideko sistemaren Nyquist diagrama

## 6.1 ariketa

Kalkulatu  $G(z)$  transferentzia-funtzioa duen sistemaren irteera, sarreran sinu-itxura duen seinalea badu. Sarrerako anplitudearen balioa 1 da, eta seinalearen pultsazioak  $w$  balioa du. Sistemaren  $h$  laginketa-periodoa ezaguna da.

$$G(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{5}}$$



**6.7 irudia.** Sistema honen sarrerak sinu-itxura du:  $u(kh) = \sin(wkh)$

Sarreraren  $z$  transformatua honelakoa da:

$$U(z) = \frac{\sin(wh)z}{z^2 - 2\cos(wh)z + 1}$$

Sistemaren irteeraren  $z$  transformatua  $G(z)$  eta  $U(z)$  funtzioen arteko biderketa da.

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

$$Y(z) = \frac{z}{\left(z + \frac{1}{5}\right)} \frac{\sin(wh)z}{(z^2 - 2\cos(wh)z + 1)}$$

Sistemaren irteeraren  $z$  transformatua zatiketa gisa idatziko dugu.

$$Y(z) = \frac{Az + B}{(z^2 - 2\cos(wh)z + 1)} + \frac{D}{z + \frac{1}{5}}$$

Zatiketa horien koefizienteak,  $A$ ,  $B$  eta  $D$ , izendatzaile komuna eginez kalkulatzen dira.

$$Y(z) = \frac{Az + B}{(z^2 - 2\cos(wh)z + 1)} + \frac{D}{z + \frac{1}{5}} = \frac{(Az + B)\left(z + \frac{1}{5}\right) + D(z^2 - 2\cos(wh)z + 1)}{(z^2 - 2\cos(wh)z + 1)\left(z + \frac{1}{5}\right)}$$

$$Y(z) = \frac{(Az+B)\left(z+\frac{1}{5}\right) + D(z^2 - 2\cos(wh)z + 1)}{(z^2 - 2\cos(wh)z + 1)\left(z+\frac{1}{5}\right)} = \frac{\sin(wh)z^2}{(z^2 - 2\cos(wh)z + 1)\left(z+\frac{1}{5}\right)}$$

Bi aldeetako zenbakitzaileak berdinduz, A, B eta D koefizienteak lotzen dituzten ekuazioak lortuko ditugu.

$$\left. \begin{aligned} \sin(wh)z^2 &= \left(z + \frac{1}{5}\right)(Az+B) + D(z^2 - 2\cos(wh)z + 1) \\ \sin(wh)z^2 &= z^2(A+D) + z\left(B + \frac{A}{5} - 2\cos(wh)D\right) + \left(D + \frac{B}{5}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sin(wh) &= A+D \\ B + \frac{A}{5} - 2\cos(wh)D &= 0 \\ D + \frac{B}{5} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\sin(wh)(25 + 10\cos(wh))}{26 + 10\cos(wh)} \\ B &= \frac{-5\sin(wh)}{26 + 10\cos(wh)} \\ D &= \frac{\sin(wh)}{26 + 10\cos(wh)} \end{aligned} \right.$$

Sistemaren irteera denborarekiko kalkulatu dugu, sinu-itxura duen seinale baten transformatua honela idatz daitekeela jakinda:  $Z\{\sin(wkh)\} = \frac{\sin(wh)z}{z^2 - 2\cos(wh)z + 1}$

$$Y(z) = \frac{A}{\sin(wh)} \frac{z \sin(wh)}{(z^2 - 2\cos(wh)z + 1)} + \frac{Bz^{-1}}{\sin(wh)} \frac{\sin(wh)z}{(z^2 - 2\cos(wh)z + 1)} + Dz^{-1} \frac{z}{z + \frac{1}{5}}$$

$$y(kh) = \frac{A}{\sin(wh)} \sin(wkh)u(kh) + \frac{B}{\sin(wh)} \sin(w(k-1)h)u(kh-h) + \\ + D \left(-\frac{1}{5}\right)^{(k-1)} u(kh-h)$$

$$\text{non } u(kh) = \begin{cases} 1: k \geq 0 \\ 0: k < 0 \end{cases}$$

## 6.2 ariketa

Kalkulatu  $G(z)$  transferentzia-funtzioa duen sistema baten erantzun harmonikoa. Sistemaren erantzun harmonikoa beti egonkorra izango al da edozein  $w$  pultsaziotarako? Azaldu erantzuna.

$$G(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1}$$

Sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoa kalkulatzeko,  $z = e^{jwh}$  aldagaia aldatu egingo dugu.

$$G(e^{jwh}) = \frac{1}{e^{j2wh} + e^{jwh} + 1} = \frac{1}{\cos(2wh) + \cos(wh) + 1 + j(\sin(2wh) + \sin(wh))}$$

Transferentzia-funtzio harmonikoaren modulua honela idatz daiteke.

$$|G(e^{jwh})| = \frac{1}{\sqrt{(\cos(2wh) + \cos(wh) + 1)^2 + (\sin(2wh) + \sin(wh))^2}}$$

Transferentzia-funtzio harmonikoaren fasea, berriz, honela adieraziko dugu.

$$\text{Arg}(G(e^{jwh})) = -\arctan\left(\frac{\sin(2wh) + \sin(wh)}{\cos(2wh) + \cos(wh) + 1}\right)$$

Sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoa lortu eta gero, sistemaren erantzun harmonikoa kalkulatzeko, sistemaren sarreran sinu-itxurako seinale bat jarriko dugu.

$$U(z) = \frac{\sin(wh)z}{z^2 - 2\cos(wh)z + 1}$$

Sistemaren irteeraren  $z$  transformatua  $G(z)$  eta  $U(z)$  funtzioen arteko biderketa da.

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1} \frac{\sin(wh)z}{(z^2 - 2\cos(wh)z + 1)}$$

Sistemaren  $Y(z)$  irteera kalkulatuakotan, zatiki bakunetan idatzi beharko dugu, baldin eta sistemaren erantzun harmonikoa denboraren mendeko adierazpen baten bidez adierazi nahi badugu. Zatiketa gisa idazteko,  $Y(z)$  irteeraren izendatzailearen erroak kalkulatu behar ditugu.

$$\left\{ \begin{array}{l} z^2 + z + 1 = \left( z - \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( z - \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ z^2 - 2 \cos(wh) z + 1 = (z - \cos(wh) - j \sin(wh)) (z - \cos(wh) + j \sin(wh)) \end{array} \right. \Rightarrow$$

Sarreraren erroak  $z = \cos(wh) \pm j \sin(wh)$  konplexuak dira, eta sistemaren transferentzia-funtzioaren  $z = \frac{1}{2}(1 \pm j\sqrt{3})$  erroak ere konplexuak dira. Erro horiek

berdinak ez badira, zatiketa ezberdinetan irudikatu daiteke.

$$Y(z) = \frac{Cz + D}{z^2 + z + 1} + \frac{Az + B}{(z^2 - 2 \cos(wh) z + 1)}$$

A, B, C eta D koefizienteak aurreko ariketan egin dugun bezala kalkula daitezke. Irteera denboraren mende utziko bagenu, erantzun hau lortuko genuke:

$$\begin{aligned} y(kh) = & \frac{2C}{\sqrt{3}} \sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)k\right) u(kh) + \frac{2D}{\sqrt{3}} \sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)(k-1)\right) u(kh-h) \\ & + \frac{A}{\sin(wh)} \sin(whk) u(kh) + \frac{B}{\sin(wh)} \sin(wh(k-1)) u(kh-h) \end{aligned}$$

Horrelako egoeran, sistemaren erantzun harmonikoa, sarrerak sortutako erantzuna izateaz gain, sistemaren berezko erantzuna da. Ikus daitekeenez, sistemaren berezko erantzuna ez da desagertzen. Erroak berdinak ez badira, horrelako sistema baten erantzuna oszilatzailea da, baina ez du infiniturantz jotzen.

$z = \cos(wh) \pm j \sin(wh)$  eta  $z = \frac{1}{2}(1 \pm j\sqrt{3})$  erroak berdinak badira,  $Y(z)$  honela adierazi beharko dugu:

$$\begin{aligned} Y(z) = & \frac{Cz + D}{z^2 + z + 1} + \frac{Az + B}{(z^2 - 2 \cos(wh) z + 1)} = \frac{C_1}{z + \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{C_2}{\left(z + \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \\ & + \frac{C_3}{z + \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{C_4}{\left(z + \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ y(kh) = & \left[ C_1 \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1} + C_2 k \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1} + C_3 \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1} + C_4 k \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1} \right] u(kh-h) \end{aligned}$$

Kasu horretan,  $Y(z)$  irteera zatiketa gisa adieraztean, lau zatiketa agertzen dira. Izendatzailearen berretzailea berdin bi duten zatiketek erantzun ez-mugatua dute. Horrek esan nahi du sistemak ez duela erantzun harmonikorik maiztasun horretarako. Sistema egoera horretan dagoenean, esaten da erresonantzian sartu dela. Beraz, sistemaren erresonantzia-maiztasuna honela idatz daiteke:

$$w = \frac{1}{h} \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

### 6.3 ariketa

Demagun aztertu nahi dugun sistemaren transferentzia-funtzioak itxura hau duela:  $H(z) = \frac{0,0975}{z - 0,95}$ . Kalkula ezazu  $H(jv)$  eta dagozkion Nyquist ibilbidea eta Bode diagramak. Laginketa-periodoa 0,025 segundo da.

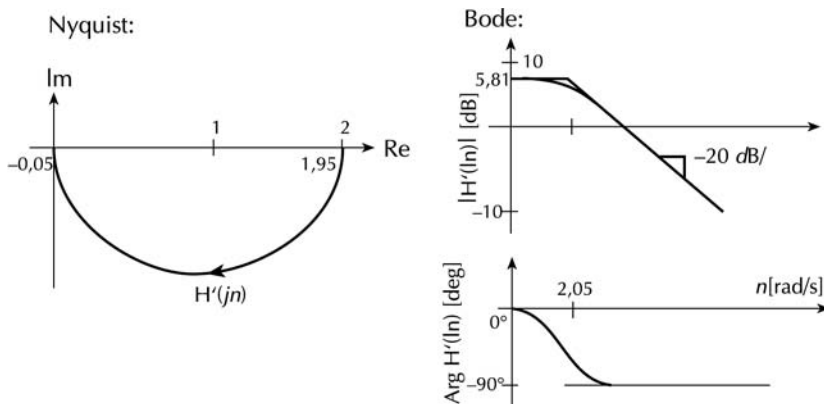
$h = 0,025$  [s] bada:

$$H'(w) = H\left(\frac{1 + 0,0125w}{1 - 0,0125w}\right) = \frac{0,0975}{\frac{1 + 0,015w}{1 - 0,0125w} - 0,95} = 0,05 \frac{80 - w}{w + 2,05}$$

Non,

$$H'(jv) = 0,05 \frac{80 - jv}{jv + 2,05}$$

Nyquist eta Bode diagramak irudi hauetan ikus daitezke:





# 7

## Egonkortasuna

### 7.1 SARRERA

Berrelikadura duen arkitektura orotan hautematen den arriskueta bat ezegonkortasuna da, hau da, hondamenezko fenomeno. Begizta itxiko egonkortasuna beharrezko kondizioa da, nahiz eta gutxitan den nahikoa, eta kontrol automatiko orok bete behar du. Gai horri buruz dihardu kapitulu honek.

Hiru suposizioak pentsarazten digute, maila konplexuan, 1 erradioko zirkuluaren barnealdeak berebiziko funtzioa duela egonkortasunaren aldetik. Lehenik eta behin, 4. atalean (seinale diskretuen behin-behineko izaerari buruzkoan) jasotzen denez, *1 erradioko zirkuluaren barnealdean* dauden seinale baten  $z$  transformatuaren poloek baino ez dituzte sortzen denboran zehar indargetzen diren kontribuzioak. Bigarrenik, eremu egonkor analogikoa, hau da, ezkerreko planoerdi konplexua, laginketa bidez eraldatzen da *1 erradioko zirkuluaren barnealdean*. Eta, azkenik, 6. atalean erantzun harmonikoa kalkulatzen da. Ikusi da denborak aurrera egin ahala erregimen iragankorrak zeroranzko joera duela, soilik baldin aztertzen ari garen elementuaren polo guztiak *1 erradioko zirkuluaren barnealdean* badaude. Egonkortasunari dagozkion susmo horiek zeharo zuzenak dira.

7. atala egonkortasunaren definizio naturalarekin hasten da. Interesatzen zaizkigun pausagunean dauden prozesu diskretu, lineal, kausal eta geldikorren kasurako, definizioa orokorragoa da; alegia, ez dagokie soilik berrelikadurazko muntaiei. Atal horretan argitzen da egonkortasunaren eta 1 erradioko zirkuluaren barnealdearen

arteko harremana. Aljebra hutsezko irizpideak 7. atalean ageri dira. Horien eta kasu analogikoaren arteko lotura azkar egiten da, aplikazio bilinealaren bitartez, ezkerreko planoerdia 1 erradioko zirkuluaren barnealde bilakatuz (7.3.1); gero, Juryren irizpidea deskribatzen da, sistema diskretuek zuzenean ustia dezaketena (7.3.2). Aljebra-irizpideek ideia honi erantzuten diote: egonkorra den ala ez; horregatik deitzen zaio **egonkortasun absolutua**. Nyquisten irizpideak, 7.4 atalean garatzen denak, **egonkortasun erlatiboaren** arazoa ebatzen du. Irizpide horrek adierazten du begizta itxian gertatutako prozesua egonkorra den ala ez; eta ez hori bakarrik, informazio gehigarri ugari ere eskaintzen du egonkortasunaren kalitatearen eta mailaren inguruan. 7.4.1 ataleko sarreraren ondoren, 7.4.2 atalean, Nyquisten irizpidea azaltzen da osotasunean. Erabiltzen erraza den bertsio sinplifikatua proposatzen da 7.4.3 atalean. Irabazi- eta fase-marjinaren kontzeptuak 7.5 atalean ageri dira; 9. kapituluaren behin eta berriz aipatuko dira erreguladore digitalen sintesirako. Errore iraunkorrak 7.6 atalean kalkulatu dira, serbositema-egituran (7.6.1) eta erregulazio-egituran (7.6.2). Azkenik, 7.6.3 atalean bateratzen dira emaitzak.

## 7.2 BIBO EGONKORTASUNA

BIBO (*Bounded Input Bounded Output*) egonkortasunaren ezinbesteko definizioa azaldu baino lehen, gogora dezagun  $\{\omega(k)\}$  seinale diskretu bat **bornatua** (mugatua) dagoela esaten dugula baldin  $C$  zenbaki finitua existitzen bada; alegia  $|\omega(k)| \leq C$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

### 7.1 Definizioa

Pausagunean dagoen sistema diskretu, lineal, kausal eta geldikor bat **BIBO egonkorra** da, baldin eta sarrera mugatu orok irteera mugatua eragiten badu.

Definizio hori sarrera- eta irteera-seinaleez baliatzen da; ez da zuzenean inongo barne-aldagairik aipatzen. Hala, BIBO egonkortasunaren kontzeptua berez *kanpoko* da. Gainera, nabarmentzekoa da, izaera mugatua salbu, sarrera absolutuki *edozein* dela eta ez duela nahitaez agertu behar kasu arruntak biltzen dituen 4.3. taulan.

Hirugarren kapituluaren jaso dugunez, pausagunean dagoen prozesu diskretu, lineal, kausal edo geldikorra ezartzen zaion kitzikapenaren eta eragiten duen bulkada-erantzunaren arteko konboluzio-biderkadura da.

$$y(k) = \sum_{l=0}^k u(l)g(k-l)$$

Konboluzio-biderkadura hori trukakorra da (3.2. teorema).

$$y(k) = \sum_{l=0}^k g(l)u(k-l)$$

Hurrengo teoremak beharrezkoa eta nahikoa den kondizioa adierazten du, bulkada-erantzuna bete behar duena BIBO egonkortasuna ziurtatuko bada.

### 7.1 Teorema

Pausagunean dagoen –hots, hasierako kondizioak nuluak dituen– sistema diskretu, lineal, kausal eta geldikorra BIBO egonkorra da, baldin eta soilik baldin, C zenbaki finitua existitzen bada eta bulkada-erantzunak egiaztatzen badu:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| \leq C \quad (7.1)$$

*Egiaztatpena:*

Lehenik eta behin, frogatuko dugu desberdintzak (7.1) BIBO egonkortasuna eragiten duela. Jo dezagun  $\{u(k)\}$  sarrera mugatua dela; beraz,  $|u(k)| \leq C'$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  betetzen du, non  $C'$  zenbaki finitua baita:

$$\begin{aligned} |y(k)| &= \left| \sum_{l=0}^k u(l)g(k-l) \right| \\ &= \left| \sum_{l=0}^k g(l)u(k-l) \right| \\ &\leq \sum_{l=0}^k |g(l)| |u(k-l)| \\ &\leq C' \sum_{l=0}^k |g(l)| \\ &\leq C' \sum_{l=0}^{\infty} |g(l)| \\ &\leq C'C \end{aligned}$$

Bada, hortaz,  $CC'$  zenbaki finitu bat da, non  $|y(k)| \leq CC'$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots: \{y(k)\}$  irteera mugatua baita.

BIBO egonkortasunak (7.1) formula inplikatzen duela egiaztatzen bada, horren kontrakoak BIBO egonkortasunaren aurkakoa egiaztatzen duela frogatuko da aldi berean.

Demagun, beraz,  $\sum_{k=0}^{\infty} |g(l)|$  seriea ez dela konbergentea. Erantzun ez-mugatua eragingo duen sarrera mugatu bat aurkituz gero, erabat frogatuko dugu 7.1 teorema.

$\sum_{k=0}^{\infty} |g(l)|$  seriea dibergentea izaki,  $C^* \geq 0$  zenbaki ororentzat aurki daiteke  $K$  zenbaki oso bat non:

$$\sum_{k=0}^K |g(k)| > C^* \quad (7.2)$$

Sarrera hau *mugatua* da, non  $0 \leq k \leq K$

$$u(k) = \text{ikurra } (g(K - k)) = \begin{cases} 1 & \text{baldin } g(K - k) > 0 \\ 0 & \text{baldin } g(K - k) = 0 \\ -1 & \text{baldin } g(K - k) < 0 \end{cases}$$

$q = K - k$ ,  $0 \leq q \leq K$  eginez gero, hautaturiko sarrera hau da:

$$u(K - q) = \text{ikurra } (g(q))$$

Konboluzio-biderkadurak eragiten du  $Kh$  unean gertatzen den irteera:

$$y(K) = \sum_{q=0}^K g(q) u(K - q)$$

$$= \sum_{q=0}^K g(q) \text{ikurra}[g(q)]$$

$$= \sum_{q=0}^K |g(q)|$$

$$> C^*$$

Azken desberdintza (7.2) formula erabiliz sortzen da. Beraz,  $C^* \geq 0$  zenbaki ororentzat bada  $K$  zenbaki oso bat; non  $y(K) > C^*$  elementuaren erantzuna ez-mugatua baita. Beraz, frogatu dugu (7.2) seriea dibergentea denean sistema ez dela BIBO egonkorra, aukeratutako sarrera jakin horretarako irteera ez baita mugatua. Hala, guztiz frogatu dugu 7.1 teorema.

Aurreko kapituluek agerian utzi dute posible dela  $z$  aldagai konplexuaren transferentzia arrazionalen funtzioetarako deskribatzen den prozesu ugari irudikatzea.

Aurreko teorema azaltzen duenez, BIBO egonkortasunerako (7.1) formulak finkatzen duen kondizioa, plano konplexuan transferentzia-funtzio horretako poloek duten posizioaren murrizketaren baliokidea da.

## 7.2 Teorema

$K(z)$  transferentzia-funtzio arrazional propio batek deskribatzen duen pausagunean dagoen sistema diskretu, lineal, kausal eta geldikorra BIBO egonkorra da, baldin eta soilik baldin, bere polo guztiak 1 erradioko zirkuluaren barruan badaude.

### Egiaztapena

4. ataletik ondorioztatzen denez,  $K(z)$  delako  $z$  transformatu arrazional propioa elementu bakunetan sinplifika daiteke. Banaketa horretan,  $l$  anizkoiztasuneko polo nuluari loturik dagoen zatia honela adierazten da:

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots + \frac{c_l}{z^l} \quad (7.3)$$

eta  $l$  anizkoiztasuna duen  $p \neq 0$  polo baterako (litekeena da konplexua izatea):

$$\frac{c_1 z}{z - p} + \frac{c_2 z}{(z - p)^2} + \dots + \frac{c_l z}{(z - p)^l} \quad (7.4)$$

$k \geq 0$  denbora-eremuan, (7.3) eta (7.4) adierazpenek seinale diskretu hauek eratzen dituzte, hurrenez hurren:

$$c_0 \Delta(k) + c_1 \Delta(k-1) + \dots + c_l \Delta(k-l) \quad (7.5)$$

$$c_1 p^k + c_2 k p^{k-1} + \dots + c_l \frac{1}{(l-1)!} \prod_{i=0}^{l-2} (k-i) p^{k-l-1} \quad (7.6)$$

Beraz,  $kh$  uneko  $g(k)$  bulkada-erantzuna (7.5) eta (7.6) motako kontribuzioen batura finitua da. Hortaz, erraz egiazta daiteke (d'Alemberten irizpidea) ezen  $K(z)$ ren polo guztiek 1 baino modulu hertsiki txikiagoak izateko kondizioaren baliokidea dela (7.1) desberdintza.

Bestalde,  $K(z)$ ren poloak 1 erradioko zirkuluaren barruan ez daudenean,  $\lim_{k \rightarrow \infty} g(k) \neq 0$ ;  $\sum_{k=0}^{\infty} g(k)$  seriea dibergentea da, eta (7.1) desberdintza hausten da.

### 7.1 adibidea

Integratzaile digitalaren transferentzia-funtzioak polo bat du 1 erradioko zirkuluaren gainean, beraz ez da BIBO egonkorra izango. Adibide gisa,  $\{\dots, 0, 1, 1, 1, \dots\}$  sarrera mugatua izanez gero,  $\{\dots, 0, 0, h, 2h, 3h, \dots\}$  irteera ez-mugatua izango dugu; beraz, argi eta garbi dago integratzaile digitala ez dela BIBO egonkorra.

### 7.2 adibidea

Jo dezagun kontrolatu beharreko sistema bat dugula. Sistema lineala dela jakinik, sistemaren transferentzia-funtzio diskretuak zehazten du eredu lagindua:

$$\frac{1 - e^{-ah}}{z^d (z - e^{-ah})} \quad a > 0$$

Polo guztiak daude 1 erradioko zirkuluaren barruan; hortaz, BIBO egonkorra da.

Lan neketsua da, oro har, transferentzia arrazionalako funtzio baten poloen kalkulu esplizitua egitea, plano konplexuan duten banaketa zehazteko, baita era digitalean ere. Balioztapen hori, besterik gabe, ez da posible poloak parametro baten arabera direnean. Egoera arrunta da, berriz, kontrol automatikoan: sistema itxi bateko poloak, esate baterako, kontroladorearen irabaziaren arabera dira. Badira, oro har, sinpleak diren aljebra-irizpideak, polinomio bateko zeroak 1 erradioko zirkuluaren barnean diren zehaztea ahalbidetzen dutenak, *zuzenean kalkulatu behar izanik gabe*. Metodo horiek transferentzia-funtzio arrazionalaren izendatzaileari ezartzea BIBO egonkortasuna egiaztatzeko bide eraginkorrak dira. Atal hauetan zehazten da prozedura hori.

## 7.3 ALJEBRA-IRIZPIDEAK

### 7.3.1 Transformazio bilineala

Atal honetako ideia nagusia da aplikazio egokia eraikitzea, 1 erradioko zirkuluaren barnealdea ezkerreko planoerdi konplexuan transforma dezan. Hala, polinomio bateko zeroak 1 erradioko zirkuluaren barnean dauden aztertu baino gehiago, Routh-Hurwitz-en aljebra-irizpidea erabiliko da, besteak beste, zeroen irudiak ezkerreko planoerdiari dagozkion ala ez kontrolatzeko.

1 erradioko zirkuluaren barnealdea ezkerreko planoerdi konplexua bihurtzen duen transformazioari **transformazio bilineal** edo **Möbius-en transformazio** deritzogu, eta honela zehazten da:

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad z \neq -1 \quad (7.7)$$

Badago aplikazio horren alderantzizkoa ere:

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad w \neq 1$$

Hortaz, bijektiboa da (korrespondentzia biunibokoa dute). Egin dezagun:

$$w = \sigma + j\omega$$

$$|z| = \left| \frac{1+w}{1-w} \right| = \left| \frac{1+\sigma+j\omega}{1-\sigma-j\omega} \right| = \sqrt{\frac{(1+\sigma)^2 + \omega^2}{(1-\sigma)^2 + \omega^2}}$$

$|z| < 1$  beteko da, baldin eta soilik baldin,  $\sigma < 0$  bada. Horrek esan nahiko du 1 erradioko zirkuluaren irudia ezkerreko planoerdi konplexuan dagoela. Hala,  $A(z)$  polinomioaren zeroak 1 erradioko zirkuluaren barnean daude, baldin eta soilik baldin,  $A(z) \left( \frac{1+w}{1-w} \right) = A'(w)$  adierazpeneko zeroak ezkerreko planoerdian badaude.  $A'(w)$

adierazpena, jakina, arrazionala da, eta, zenbakitzaileko polinomioaz bidertuz gero, polinomio bilakatzen da. Polinomio horri Routh-Hurwitz-en irizpidea ezarritik gero, eta egiaztatzen bada  $A'(w)$ ren zeroak ezkerreko planoerdian daudela, esan dezakegu  $A(z)$ ren zeroak 1 erradioko zirkuluaren barnean daudela.  $K(z)$  transferentzia-funtzio arrazionalaren bidezko prozesu diskretu baten egonkortasuna aztertzean, aurkeztu berri den teknika osoa  $K(z)$ ren izendatzaileari aplikatzen zaio. Adibideak azaldu

aurretik, nabarmendu behar da (7.7) transformazio bilineala kasu honetan 6. atalean egin den aldagai-aldaketa bilakatzen dela,  $2/h$  faktorea gabe, ez baita beharrezkoa.

### 7.3 adibidea

Ikus dezagun polinomio hau, non  $a_1$  eta  $a_2$  koefizienteak errealak baitira:

$$A(z) = z^2 + a_1 z + a_2$$

Orduan,

$$\begin{aligned} A'(w) &= A\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + a_1 \left(\frac{1+w}{1-w}\right) + a_2 \\ &= \frac{(1-a_1+a_2)w^2 + 2(1-a_2)w + 1+a_1+a_2}{w^2 - 2w + 1} \end{aligned}$$

Hurwitzen irizpidea polinomioan erabilia:

$(1-a_1+a_2)w^2 + 2(1-a_2)w + 1+a_1+a_2$ , desberdintza hauek lortzen dira:

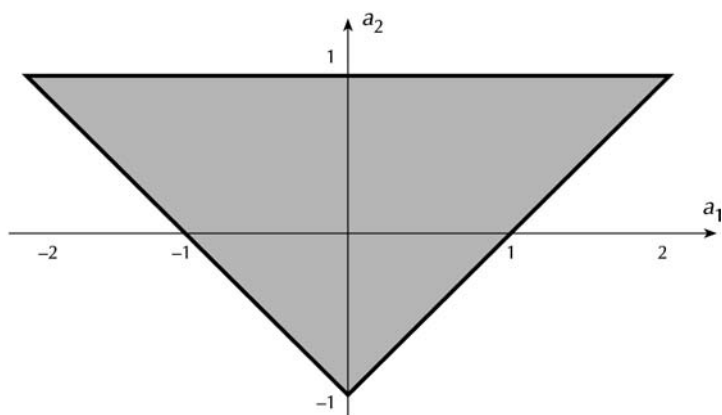
$$a_2 < 1$$

$$a_2 > -1 + a_1$$

$$a_2 > -1 - a_1$$

Hala,  $A(z)$  polinomioko zeroak 1 erradioko zirkuluaren barnean daude, baldin

$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$  11 bektorea 7.1 irudiko multzo koloreztatuaren barnean badago.



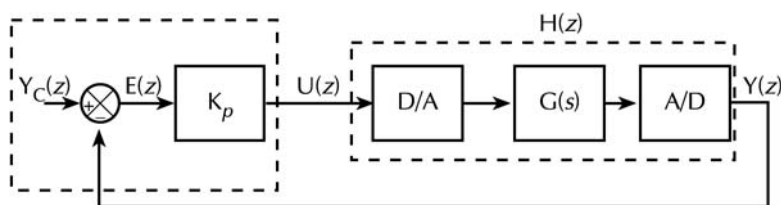
**7.1 irudia.**  $A(z)$ ren zeroak 1 erradioko zirkuluaren barnean daudela ziurtatzen duten  $a_1$  eta  $a_2$  koefizienteen balioak.

#### 7.4 adibidea

Demagun sistema bat kontrolatu nahi dugula erreguladore proportzional baten bidez.

Baldin sistemaren  $H(z)$  transferentzia-funtzioa  $H(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{z(z-1)}$  bada, sistema itxiaren transferentzia-funtzio diskretuak itxura hau du:

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{K_p(z - \frac{1}{2})}{z^2 + z(K_p - 1) - \frac{K_p}{2}}$$



**7.2 irudia.** Sistema baten kontrol proportzionala.

Sistemaren polinomio bereizgarria  $A(z) = z^2 + z(K_p - 1) - \frac{K_p}{2}$  izanda,  $A'(w)$  kalkulatuakoa, hau lortuko dugu:

$$\begin{aligned}
A'(w) &= A\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = z^2 + z(K_p - 1) - \frac{K_p}{2} \\
&= \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + \left(\frac{1+w}{1-w}\right)(K_p - 1) - \frac{K_p}{2} \\
&= \frac{1}{(1-w)^2} \left( (1+w)^2 + (1-w^2)(K_p - 1) - (1-w)^2 \frac{K_p}{2} \right) \\
&= \frac{1}{(1-w)^2} \left( 1 + 2w + w^2 + K_p - 1 - (K_p - 1)w^2 - (1 - 2w + w^2) \frac{K_p}{2} \right) \\
&= \frac{1}{(1-w)^2} \left( \left(2 - \frac{3K_p}{2}\right)w^2 + (2 + K_p)w + \frac{1}{2}K_p \right) = 0 \\
\left(2 - \frac{3K_p}{2}\right)w^2 + (2 + K_p)w + \frac{1}{2}K_p &= 0
\end{aligned}$$

Routh-Hurwitzen irizpidea aplikatuz, adierazpen hau lortuko dugu.

$$\begin{array}{ccc|c}
\left(2 - \frac{3K_p}{2}\right) & \frac{1}{2}K_p & \Rightarrow & 2 - \frac{3K_p}{2} > 0 \\
(2 + K_p) & 0 & \Rightarrow & (2 + K_p) > 0 \\
\frac{K_p}{2} & 0 & \Rightarrow & \frac{K_p}{2} > 0
\end{array}$$

Routh-Hurwitzen irizpidea adierazpen horren zenbakitzaileari aplikatuta:

$$4/3 > K_p$$

$$K_p > -2$$

$$K_p > 0$$

Beraz,  $0 < K_p < 4/3$  betetzen duen irabaziak bermatzen du begizta itxiko prozesuaren BIBO egonkortasuna.

### 7.3.2 Jury-ren irizpidea

1 erradioko zirkuluaren barnealdea ezkerreko planoerdi konplexuan transformatzen duen aplikazio bilinealak asko zailtzen du ordena handiko polinomioak kalkulatzeko,

eta ordenagailu bidez programatzea ez da horren erraza. Juryren irizpideak, orain aztertuko dugunak, polinomio bateko zeroak 1 erradioko zirkuluaren barnean diren zuzenean zehaztea ahalbidetzen du; hala, lehen aipaturiko eragozpenak desagertzen dira.

Hona hemen koefiziente errealeak dituen polinomioa:

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (7.8)$$

Lehenik eta behin, taula hau osatu behar da:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & a_{n-1}^{(n-1)} \\ a_0^{(n-1)} & a_0^{(n-1)} & \dots & a_{n-1}^{(n-1)} & & \\ a_{n-1}^{(n-1)} & a_{n-2}^{(n-1)} & \dots & a_0^{(n-1)} & & \alpha_{n-1} = \frac{a_{n-1}^{(n-1)}}{a_0^{(n-1)}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n-1} \quad a_n \\ - \quad \frac{a_n \quad a_{n-1} \quad \dots \quad a_1 \quad a_0}{a_0} \Big| \alpha_n = \frac{a_n}{a_0} \\ a_0^{(n-1)} \quad a_1^{(n-1)} \quad \dots \quad a_{n-1}^{(n-1)} \\ - \quad \frac{a_{n-1}^{(n-1)} \quad a_{n-2}^{(n-1)} \quad \dots \quad a_0^{(n-1)}}{a_0^{(n-1)}} \Big| \alpha_{n-1} = \frac{a_{n-1}^{(n-1)}}{a_0^{(n-1)}} \\ \dots \end{array}$$

Taularen lehen lerroa (7.8) polinomioaren koefizienteek osatzen dute. Bigarrenean ere koefizienteak daude jasota, baina alderantziz hartuta. Bigarren lerroaren eta  $\alpha = \frac{a_n}{a_0}$ -ren biderkadura lehen lerroari kenduta, hirugarren lerroa lortuko dugu.

Hirugarren lerroko azken koefizientea, beraz, nulua da. Laugarren lerroa hirugarren lerroko koefizienteek osatzen dute, alderantziz jarrita. Eragiketa horiek errepikatu egin behar dira, harik eta taulak  $2n + 1$  lerro izan arte; azken lerroak zenbaki bakarra du.

Hurrengo teoremaren (**Juryren irizpidea** izenekoaren) egiaztapena lan honen esparrutik at dago; beraz, ez da aipatuko.

### 7.3 Teorema

$a_0 > 0$  denean, (7.8) polinomioaren erro guztiak 1 erradioko zirkuluaren barnean egongo dira, baldin eta soilik baldin,  $a_0^{(i)} > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  bada.

Baldin  $a_0^{(i)} > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  bada, froga daiteke  $a_0^{(0)} > 0$  kondizio bi desberdintzen baliokidea dela.

$$A(1) > 0$$

$$(-1)^n A(-1) > 0$$

Desberdintza horiek erabilgarriak dira egiaztapen azkarra egiteko, baita taula eraiki baino lehen ere. Hala eta guztiz ere, beharrezkoak izanik ere nahikoak ez direnez, oro har, ezinbestekoa da, desberdintzak betetzen direnean test osoa egitea.

Teoremaren  $a_0 > 0$  hipotesia ez da inondik inora ere murriztailea. Alegia,  $a_0 > 0$  denean, aski da  $A(z)$  polinomioko koefiziente guztien zeinua aldatzea  $-A(z)$  polinomioa lortzeko; horri Juryren irizpidea aplikatzen zaio. Prozedura hori egokia da  $A(z)$ ren eta  $-A(z)$ ren erroak berak direlako.

### 7.5 adibidea

Itzul gaitezen 7.3. adibideko bigarren mailako polinomiala:

$$A(z) = z^2 + a_1 z + a_2$$

Aplikazio horretarako, taula hau dugu:

|                |                                              |       |                                  |
|----------------|----------------------------------------------|-------|----------------------------------|
| 1              | $a_1$                                        | $a_2$ |                                  |
| $a_2$          | $a_1$                                        | 1     | $\alpha_2 = a_2$                 |
| $1 - a_2^2$    | $a_1(1 - a_2)$                               |       |                                  |
| $a_1(1 - a_2)$ | $1 - a_2^2$                                  |       | $\alpha_1 = \frac{a_1}{1 + a_2}$ |
|                | $1 - a_2^2 - \frac{a_1^2(1 - a_2)}{1 + a_2}$ |       |                                  |

Juryren irizpideak kondizio beharrezko eta nahikoak ematen ditu:

$$1 - a_2^2 > 0$$

$$(1 + a_2)^2 > a_1^2$$

Desberdintza horiek honen baliokideak dira:

$$-1 < a_2 < 1$$

$$(1 + a_2)^2 > a_1^2$$

Bigarren desberdintzak hau ematen du:

$$1 + a_2 > a_1 \quad \text{baldin } a_1 \geq 0 \text{ eta}$$

$$1 + a_2 > -a_1 \quad \text{baldin } a_1 \leq 0$$

Berriro aurkitzen dugu 7.1 irudiko multzo koloreztatua.

## 7.6 adibidea

Har dezagun gogoan polinomio hau:

$$A(z) = z^2 + z(K_p - 1) - K_p/2$$

Taula hau dugu:

|                                           |                                           |                                                                            |                     |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| 1                                         | $K_p - 1$                                 | $-K_p/2$                                                                   |                     |
| $-K_p/2$                                  | $K_p - 1$                                 | 1                                                                          | $\alpha_2 = -K_p/2$ |
|                                           |                                           |                                                                            |                     |
| $1 - \left(\frac{K_p}{2}\right)^2$        | $(K_p - 1)\left(1 + \frac{K_p}{2}\right)$ |                                                                            |                     |
| $(K_p - 1)\left(1 + \frac{K_p}{2}\right)$ | $1 - \left(\frac{K_p}{2}\right)^2$        | $\alpha_1 = \frac{(K_p - 1)(1 + K_p/2)}{1 - \left(\frac{K_p}{2}\right)^2}$ |                     |

$$1 - \left(\frac{K_p}{2}\right)^2 - \frac{(K_p - 1)^2 (1 + K_p/2)^2}{\left(1 - \left(\frac{K_p}{2}\right)^2\right)} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\left(1 - \left(\frac{K_p}{2}\right)^2\right) \left(1 - \frac{K_p}{2}\right) - (K_p - 1)^2 \left(1 + \frac{K_p}{2}\right)}{\left(1 - \frac{K_p}{2}\right)} > 0$$

$$1 - \left(\frac{K_p}{2}\right)^2 > 0 \Rightarrow 1 - \frac{K_p}{2} > 0$$

$$\left(1 - \left(\frac{K_p}{2}\right)^2\right) \left(1 - \frac{K_p}{2}\right) - (K_p - 1)^2 \left(1 + \frac{K_p}{2}\right) > 0 \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{K_p}{2}\right) \left(1 - \frac{K_p}{2}\right)^2 - (K_p - 1)^2 \left(1 + \frac{K_p}{2}\right) > 0 \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{K_p}{2}\right) \left(1 - \frac{K_p}{2}\right)^2 - (K_p - 1)^2 \left(1 + \frac{K_p}{2}\right) > 0 \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{K_p}{2}\right) \left[ \left(1 - \frac{K_p}{2}\right)^2 - (K_p - 1)^2 \right] > 0 \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{K_p}{2}\right)^2 - (K_p - 1)^2 > 0 \Rightarrow$$

$$1 - K_p + \frac{K_p^2}{4} - K_p^2 + 2K_p - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{3K_p^2}{4} + K_p > 0 \Rightarrow K_p \left(1 - \frac{3}{4}K_p\right) > 0$$

Beraz, sistema egonkorra izan dadin,  $K_p$  parametroak tartea honen barruan egon behar du:

$$\begin{cases} K_p > 0 \\ K_p < 4/3 \end{cases}$$

## 7.4 NYQUISTEN IRIZPIDE DISKRETUA

### 7.4.1 Sarrera

Aurreko aljebra-irizpideek hainbat eragozpen dute. Lehenik eta behin, aztertzen ari garen instalazioaren *eredu matematikoaren* transferentzia-funtzioa ezagutzea eskatzen dute, eta ez dira egokiak azterketa esperimentalak egiteko. Gainera, metodo horiek egonkortasunaren galderari era '*bitarrear*' erantzuten diote; alegia, baiezkoa edo ezezkoa ematen dute. Ez dute inongo informaziorik ematen egonkortasunaren kalitateari buruz: ez da posible egonkortasuna bermatzen duen segurtasun-marjina balioztatzea eredu-errorerik badago, edo transferentzia-funtzioaren parametro batzuetan fluktuazioak badaude. Gainera, jatorrizko sistema ezegonkorra bada, ezin da egonkor bihurtzeari buruzko argibiderik deskribatu. Azkenik, kalkulu kopurua asko hazten da *prozesuaren ordenaren* arabera.

Orain **Nyquisten irizpidea** proposatuko dugu, izaera *geometrikoagoa* baitu aljebraikoak baino. Berrelikadura duen sistemaren BIBO egonkortasunaren arazoa ebazten du, *begizta irekiko* transferentzia-funtzio harmoniko diskretua oinarri hartuta; eredia eratuz edota esperimentalki lor daiteke. Nyquisten irizpideak balio handiko informazioa ere ematen du egonkortasunaren kalitateari buruz (7.5. atala). Irizpide hori osoro erabiliko da 9. kapituluaren kontroladore digitalak sintetizatzeko. Azkenik, esan behar da haren konplexutasuna, praktikan, ez dela prozesuaren ordenaren arabera.

$K(z)$  da kontroladorea duen transferentzia-funtzio diskretua, eta  $H(z)$ , kontrolatu behar den sistemaren transferentzia-funtzio lagindua. 5. atalean ikusi dugunez, hau da prozesu itxiaren transferentzia-funtzio diskretua serbosisteman muntatzeko:

$$\frac{G(z)H(z)}{1 + G(z)H(z)} \quad (7.9)$$

$H(z)$  eta  $K(z)$   $z$ -ren funtzio arrazionalak dira, forma esplizituan, non  $A(z)$ ,  $B(z)$ ,  $R(z)$  eta  $S(z)$  maila egokiko polinomioak baitira, alegia:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$G(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$$

Ekuazio horiek (7.9)ra eramanez gero, beste hau lortuko dugu:

$$\frac{G(z)H(z)}{1+G(z)H(z)} = \frac{\frac{S(z)}{R(z)} \cdot \frac{B(z)}{A(z)}}{1 + \frac{S(z)}{R(z)} \cdot \frac{B(z)}{A(z)}} = \frac{B(z) \cdot S(z)}{A(z)R(z) + B(z) \cdot S(z)}$$

Sistema itxia BIBO egonkorra da, baldin eta soilik baldin, haren transferentzia-funtzioko poloak, hau da,  $A(z)R(z) + B(z)S(z)$  polinomioaren zeroak, 1 erradioko zirkuluaren barnean badaude. Kontuan hartu behar da polinomio horren zeroak eta  $1 + K(z) \cdot H(z)$  polinomioaren zeroak berak direla; alegia:

$$1+G(z)H(z) = 1 + \frac{S(z)}{R(z)} \cdot \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{A(z)R(z) + B(z) \cdot S(z)}{A(z)R(z)} \quad (7.10)$$

Beraz, (7.9) formulak irudikatzen duen serbositema-muntaia BIBO egonkorra da, baldin eta soilik baldin,  $1+K(z)H(z)$  polinomioaren zero guztiak 1 erradioko zirkuluaren barnean badaude.

Erregulazio-muntaian ezin da, oro har, begizta itxiko transferentzia-funtzio diskreturik definitu. Hala ere, perturbazio konstantea egonda, transferentzia-funtzio diskretua defini daiteke, seinale horren bertsio laginduaren eta kontrolatu beharreko magnitudearen artean.

$$\frac{H(z)}{1+G(z)H(z)}$$

Handik hau lortzen da:

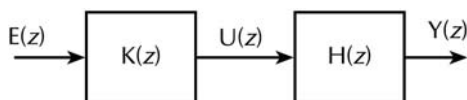
$$\frac{H(z)}{1+G(z)H(z)} = \frac{\frac{B(z)}{A(z)}}{1 + \frac{S(z)}{R(z)} \cdot \frac{B(z)}{A(z)}} = \frac{B(z) \cdot R(z)}{A(z)R(z) + B(z) \cdot S(z)}$$

Berriz ere  $A(z)R(z) + B(z)S(z)$  polinomioa dugu izendatzailean; hala, BIBO egonkortasunerako kondizioa serbositema-muntaian egiaztatu beharreko kondizioa bera da.

Interesgarria da ohartzea kontrolatu beharreko prozesuen poloak ( $A(z)$ ren zeroak) eta sistema itxiko poloak ( $A(z)R(z) + B(z)S(z)$ ren zeroak) zeharo desberdinak direla: kontrolatu beharreko magnitudearen berrelikadura sartzeak erabateko aldaketa eragiten dio poloek plano konplexuan duten banaketari. Ezaugarri hori aprobetxatzen da, besteak beste, instalazio ezegonkorak egonkor bihurtzeko; 1 erradioko zirkulutik kanpo diren poloak barrura sartzen dira oso kontuz dimentsionaturiko berrelikadura baten bidez. Bestalde, kontrolatu beharreko sistemako zeroak ( $B(z)$ ren zeroak) bere

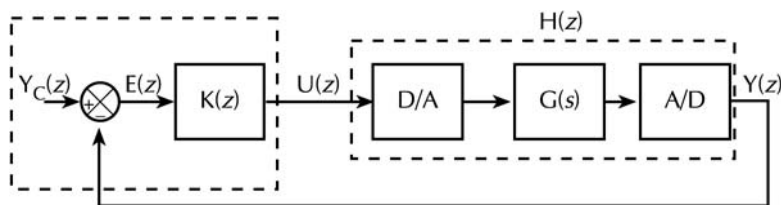
horretan ageri dira begizta itxian, bai serbosisteman egindako muntaian bai jarraipenean egindako muntaian: kontrolatu beharreko magnitudearen berrelikadura zeroak gehituz adierazten da.

$K(z)H(z)$  adierazpena  $K(z)$  eta  $H(z)$  elementuen transferentzia-funtzio diskretua da, seriean jarrita, 7.3 irudian adierazten denez.



7.3 irudia.  $K(z)$  eta  $H(z)$  seriean jarrita

Eskema funtzional hori bera lortzen da kontroladore digitalaren muntaia estandarreko 1. puntuan berrelikadura etenez gero (7.4 irudia); horregatik du  $K(z)H(z)$  **begizta irekiko transferentzia-funtzio diskretua** izena. Konfigurazio horretan,  $Y_c(z)$  kontsigna  $E(z)$  errorea bezalakoa da.



7.4 irudia. Begizta irekiko sistema

6. atalean azaldu denez,  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  begizta irekiko transferentzia-funtzio harmoniko diskretua analitikoki —eredu matematikoa eratuz— nahiz esperimentalki lor daiteke. Lehen hurbilketan,  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  polinomioaren irudikapen grafikoa egin daiteke eskuz, 6. ataleko  $w$  aldagai konplexuaren laguntzaz. Esperimentazioan, aldiz, algoritmoan sinusoide diskretua injektatzen da kontsigna edo errore gisa, eta erantzuna 1 puntuan aztertzen da. Berehala ondorioztatzen da horrelako saiakerek ez dutela zentzurik prozesadorea BIBO egonkorra ez bada begizta irekian. Azkenik, esan beharra dago begizta irekiko saiakera harmonikoak abantaila bat duela: ez du instalazioa arriskuan jartzen.

(7.10) erlazioak adierazten du  $K(z)H(z)$ ren poloak  $A(z)$   $R(z)$ ren zeroak)  $1 + K(z)H(z)$ ren polo berak direla.

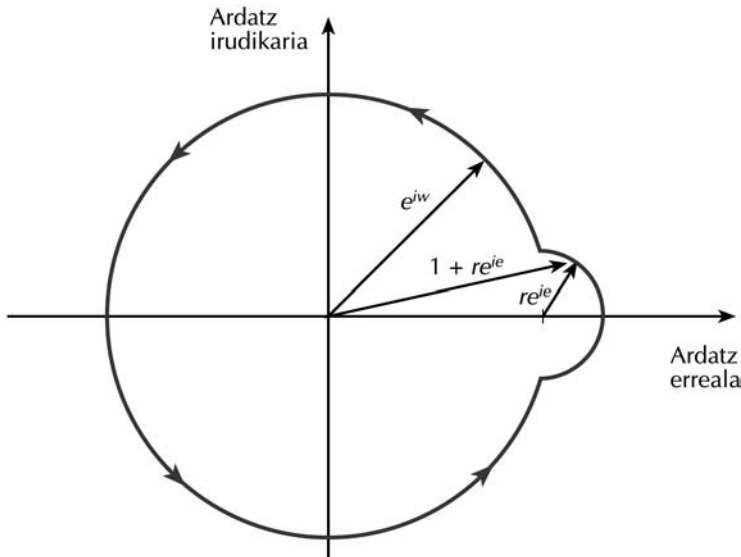
Begizta irekiko transferentzia-funtzio diskretuak 1 balioa duen polo bat edo gehiago izan ditzake, eta horrek efektu integratzaileak islatzen ditu. Ikusiko denez, polo horiek bereziki ezinbestekoak dira erreguladorearen doitasun estatikoa ona izan

dadin. Onartzen badugu 1 balioa duten / polo daudela,  $K(z)H(z)$  forma hau izango du, non  $B(z)$  eta  $A(z)$  maila egokiko polinomioak baitira:

$$G(z)H(z) = \frac{B(z)}{(z-1)^l A(z)} \quad (7.11)$$

### 7.4.2 Nyquisten irizpide osoa

Nyquisten irizpide diskretua aplikazioa bat da,  $C$  inguru sinple itxi baten zehar (**Nyquisten ingurua ere esaten zaio**, eta 7.5 irudian ageri da). Inguru hori 1 erradioko zirkunferentzia da; baina,  $K(z)H(z)$  transferentzia-funtzioak polo batzuk zirkunferentzia horren gainean izanez gero, polo horiek saihestu egin behar ditugu erradio infinitesimaleko zirkunferentzien bidez. 7.5 irudian  $K(z)H(z)$  transferentzia-funtzioak  $z = 1$  poloa duen sistema bati dagokion Nyquisten ingurua marraztu da.  $z = 1$  poloa saihesteko, zentroa  $z = 1$  puntuan duen zirkunferentzia bati jarraituko diogu. Zirkunferentzia horren  $r$  erradioak zerorantz jotzen du eta  $\theta$  argumentuak  $-\pi/2$  tik  $\pi/2$ -rantz.



**7.5 irudia.** Nyquisten ingurua prozesu diskretuetarako.

$C$ -ren ingurua erlojuaren aurkako noranzkoan definituko dugu.  $\Gamma$   $C$ -ren gainean aplikatzean lortzen den Nyquisten  $C$  inguruaren irudia ( $z \rightarrow K(z)H(z)$ ) adierazpideak definitzen du inguru hori) aztertuko dugu orain. Sistema bati dagokion begizta irekiko transferentzia-funtzioa aplikatuz gero, Nyquisten inguruaren gainean lortzen dugun

ibilbideari sistema horren Nyquisten irudia edo ibilbidea deritzogu. Horretarako, adibide gisa, ondorengo begizta irekiko  $K(z)H(z)$  transferentzia-funtzioa duen sistema aztertuko dugu. 7.6 irudian ageri da sistema horren Nyquisten irudia edo ibilbidea.

$$K(z)H(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2 - 0,5z + 0,3125)}$$

Lehenik, 1 erradioko zirkunferentziari dagokion irudia kalkulatu dugu. Horretarako, transferentzia-funtzioan  $z = e^{jw}$  aldagaia aldatu egingo dugu. Gogoan izan behar dugu  $w = 0^+$  baliotik hasten dela eta  $w = 2\pi^-$  balioan bukatzen duela.

$$K(e^{jw})H(e^{jw}) = \frac{e^{jw}}{(e^{jw} - 1)(e^{j2w} - 0,5e^{jw} + 0,3125)}$$

$w$  aldagaiari balioak emanez, begizta irekiko transferentzia-funtzioaren balio konplexuak lortuko ditugu; aipamen berezia dute  $w = 0^+$  eta  $w = 2\pi^-$  balioek. Horretarako, aurreko adierazpenaren limiteak kalkulatu behar ditugu balio horietarako. Lehenik,  $K(e^{jw})H(e^{jw})$  transferentzia-funtzio harmonikoa atal erreal baten eta irudikari baten batuketa gisa idatziko dugu. Horretarako, aurreko berdintzaren eskuinaldeko zatiketaren izendatzailearen konjugatuaz biderkatuko eta zatituko dugu  $K(e^{jw})H(e^{jw})$  transferentzia-funtzioa. Horrenbestez, transferentzia-funtzioa honela idatziko dugu:

$$K(e^{jw})H(e^{jw}) = \frac{(\cos(w) - 1 + j \sin(w)) [-0,5 + 1,3125 \cos(w) - j 0,6875 \sin(w)]}{2(1 - \cos(w)) |e^{j2w} - 0,5e^{jw} + 0,3125|^2}$$

$$K(e^{jw})H(e^{jw}) = R(w) + jI(w)$$

$$R(w) = \frac{(\cos(w) - 1)(-0,5 + 1,3125 \cos(w)) + 0,6875 \sin^2(w)}{2(1 - \cos(w)) |e^{j2w} - 0,5e^{jw} + 0,3125|^2}$$

$$R(w) = \frac{(\cos(w) - 1)[(-0,5 + 1,3125 \cos(w)) + 0,6875(\cos(w) + 1)]}{2(1 - \cos(w)) |e^{j2w} - 0,5e^{jw} + 0,3125|^2}$$

$$R(w) = \frac{[0,1875 + 2 \cos(w)]}{2 |e^{j2w} - 0,5e^{jw} + 0,3125|^2} \Rightarrow \begin{cases} R(0^+) = \lim_{w \rightarrow 0^+} R(w) = -1,6568 \\ R(2\pi^-) = \lim_{w \rightarrow 2\pi^-} R(w) = -1,6568 \end{cases}$$

Atal irudikaria, berriz, honela:

$$I(e^{jw}) = \frac{\sin(w) [-0,5 + 1,3125 \cos(w)] - 0,6875 \sin(w) (\cos(w) - 1)}{2(1 - \cos(w)) \left| e^{j2w} - 0,5e^{jw} + 0,3125 \right|^2}$$

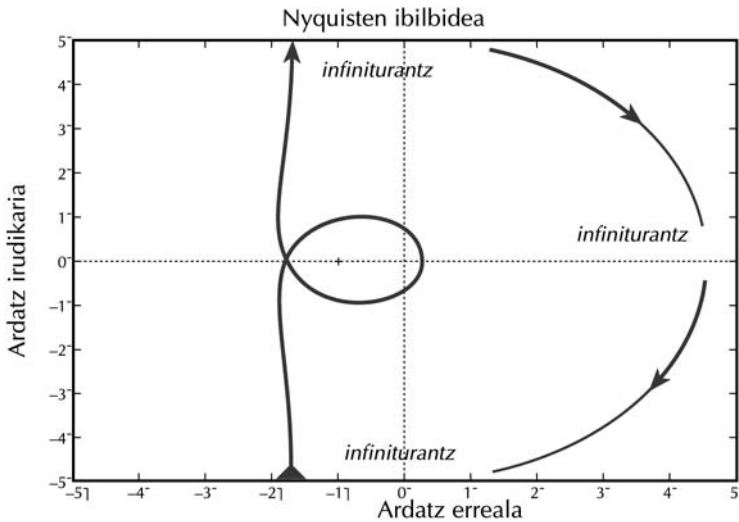
$$I(e^{jw}) = \frac{\sin(w) [0,1875 + 0,625 \cos(w)]}{2(1 - \cos(w)) \left| e^{j2w} - 0,5e^{jw} + 0,3125 \right|^2}$$

Beraz, atal irudikariaren limiteak honela lortuko ditugu:

$$I(0^+) = \lim_{w \rightarrow 0^+} \frac{\sin(w) [0,1875 + 0,625 \cos(w)]}{2(1 - \cos(w)) \left| e^{j2w} - 0,5e^{jw} + 0,3125 \right|^2} = \infty$$

$$I(2\pi^-) = \lim_{w \rightarrow 2\pi^-} \frac{\sin(w) [0,1875 + 0,625 \cos(w)]}{2(1 - \cos(w)) \left| e^{j2w} - 0,5e^{jw} + 0,3125 \right|^2} = -\infty$$

Sistemaren begizta irekiko transferentzia-funtzioak  $z = 1$  poloa duenez,  $w$  aldagaiak 0 baliorantz edo  $2\pi$  baliorantz jotzen duenean,  $K(e^{jw})H(e^{jw})$  transferentzia-funtzioak infiniturantz jotzen du. Beraz, puntu hori saihesteko,  $z = 1$  puntuan zentratutako erradio oso txikiko (berez, zerorantz jotzen du) ibilbidea hartuko dugu.



**7.6 irudia.**  $z \rightarrow K(z)H(z)$  aplikazioaren bidezko Nyquisten C inguruaren irudia.

(1,0) saihesten duen erradio infinituki txikia duen zirkuluerdia honela deskribatzen da:  $z = 1 + r \cdot e^{j\theta}$ ,  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . (7.11) formulari jarraikiz, adierazpen hau lortuko dugu:

$$K(z)H(z) = \frac{a}{r} e^{-j\theta} \quad a = \frac{B(1)}{A(1)}$$

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{z}{(z^2 - 0,5z + 0,3125)} \Rightarrow \frac{B(1)}{A(1)} = \frac{1}{0,8125}$$

$$K(z)H(z) = \frac{1}{0,8125r} e^{-j\theta}$$

$\theta$  aldagaia  $-\pi/2$ 'tik  $\pi/2$ '-ra doa. Horrenbestez,  $r$ -k zerorantz jotzen duenean,  $K(z)H(z)$  funtzio konplexuaren moduluak infiniturantz joko du.  $\theta$  aldagaiari hainbat balio emanez, transferentzia-funtzioaren modulua eta argumentua adieraziko ditugu.

| $\theta$ | $ K(z)H(z)  = \frac{1}{0,8125r}$<br>$r \rightarrow 0$ | $Arg(K(z)H(z)) = -\theta$ |
|----------|-------------------------------------------------------|---------------------------|
| $-\pi/2$ | $\infty$                                              | $\pi/2$                   |
| 0        | $\infty$                                              | 0                         |
| $\pi/2$  | $\infty$                                              | $-\pi/2$                  |

7.6 irudian ikus daitekeenez, Nyquisten inguruari dagokion irudiak  $z = 1$  poloa saihesteko erradio infinitua duen zirkunferentzia bat egin behar du.

Dena den, honako hau argitu behar dugu:  $z = 1$  poloa anizkoitza ez bada, hots,  $l = 1$  bada, irudiak egiten duen ibilbidea beti zirkuluerdia izango da. Bestalde, hainbat zirkuluerdi izango dira, baldin  $l > 1$  bada eta haien erradioa infinituki handia bada.

$$G(z)H(z) = G(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$$

C ingurua eta 1 erradioko zirkunferentzia bat datozenez neurri handi batean, Nyquisten inguruaren irudia honela azaldu daiteke: sistema baten erantzun harmonikoa kalkulatzean,  $z = e^{j\omega h}$  egiten da, non  $\omega \in (0, 2\pi/h)$  aldagaia maiztasuna

baita. Beraz, Nyquisten inguruaren irudia begizta irekiko *transferentzia-funtzio harmonikoa* da:

Bestalde,  $K(z) \cdot H(z)$  begizta irekiko transferentzia-funtzio harmonikoak sistema fisiko baten eredu gisa jokatzan du; hortaz, hau beteko da:  $G(\bar{z})H(\bar{z}) = \overline{G(z)H(z)}$ ; eta C-ren ingurua ardatz errealekiko simetrikoa denez,  $\Gamma$  irudia ere bada ardatz errealekiko simetrikoa. Beraz,  $z \rightarrow K(z)H(z)$  aplikatuz lortzen den kurbaren irudiak, ardatz errealekiko simetria hutsagatik, Nyquisten inguruaren erdia erabiliz  $\Gamma$ -ren irudi osoa eraikitzea ahalbidetzen du. Nyquisten inguruaren erdia ekuazio hauek ematen dute:

$$\begin{aligned} z &= 1 + r e^{j\theta} & \theta &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ z &= e^{j\omega h} & \omega &\in (0, \omega_N) \end{aligned} \quad (7.12)$$

**Nyquisten irizpide osoa** honela azaldu eta frogatu daiteke:

#### 7.4 teorema

$1+K(z)H(z)$  *transferentzia-funtzioaren* erroak (hots, begizta itxiko poloak) 1 erradioko zirkuluaren barnean daude, baldin eta soilik baldin,  $1+K(z)H(z)$  argumentuaren aldakuntza  $P2\pi$  bada  $z$  aldagai konplexuak Nyquisten ingurua egiten duenean.  $P$  da 1 erradioko zirkuluaren kanpoko  $K(z)H(z)$ ren polo kopurua, betiere, anizkoitzasunak aintzat hartuta.

Era berean,  $1+K(z)H(z)$ ren erroak 1 erradioko zirkuluaren barnean daude, baldin eta soilik baldin,  $z \rightarrow K(z)H(z)$  aplikaturik, C-ren  $\Gamma$  irudiak  $(-1,0)$  **puntu kritikoa** inguratzen badu noranzko zuzenean eta P-ren balio bereko aldi kopuruan.

#### Egiaztapena

$K(z)H(z)$  begizta irekiko transferentzia-funtzioa arrazionala da, eta demagun  $K(z)H(z)$  funtzioak ez duela polorik Nyquisten C inguruaren gainean; ondorioz, jakina, gauza bera gertatzen da  $1 + K(z)H(z)$ rekin. Horrenbestez,  $z \rightarrow 1 + K(z)H(z)$  funtzioa C-ren gainean aplikatzean,  $1 + K(z)H(z)$ ren argumentu-aldaketa honela idatz daiteke:

$$\Delta \arg [1+K(z)H(z)] = (Z_i - P_i) 2\pi \quad (7.13)$$

$\Delta \arg [1+K(z)H(z)]$  funtzioak  $1 + K(z)H(z)$ ren argumentuaren aldakuntza adierazten du  $z$ -k C ibilbidea egiten duenean.  $Z_i$  eta  $P_i$ ,  $1 + K(z)H(z)$ ren zero eta polo kopurua dira, hurrenez hurren, C-ren barnean, haren anizkoitzasunak aintzat hartuta.

(7.10) erlazioak adierazten du bera dela  $1 + K(z)H(z)$  adierazpenaren izendatzailearen maila eta zenbakitzailearena; demagun  $n$  dela maila horien balioa.  $1 + K(z)H(z)$ ren  $z$  polo kopurua  $C$ -tik kanpo, beraz,  $n - Z_i$  da;  $1 + K(z)H(z)$ ren  $P$  polo kopurua  $C$ -tik kanpo  $n - P_i$  da arrazoi beragatik; horrenbestez, (7.13)ren arabera:

$$\Delta \arg [1 + K(z)H(z)] = (P - Z)2\pi$$

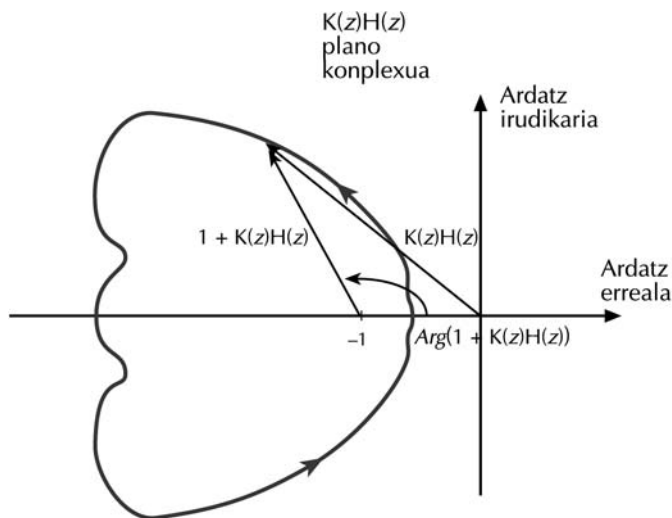
$1 + K(z)H(z)$ ren erro guztiak  $C$ -ren barnean daude, baldin eta soilik baldin,  $Z = 0$  bada, edo beste era batera esanda:

$$\Delta \arg [1 + K(z)H(z)] = P2\pi \quad (7.14)$$

$K(z)H(z)$ k 1 moduludun polorik ez duenean, 1 erradioko zirkulua da  $C$ -ren ingurua; hortaz, egoera jakin horretarako, teoremaren lehen zatia frogatzen da.

$K(z)H(z)$ k, edo  $1 + K(z)H(z)$ k,  $z = 1$  den polo bat edo gehiago badu, ikusi dugu  $C$ -k puntu hori saihesten duela eskuineko aldetik. 1 erradioko zirkuluaren kanpoaldea eta  $C$  inguruaren kanpoaldea multzo berdin-berdinak dira. Bestalde, barnealdeak desberdinak dira  $(1,0)$  puntua dela medio, nahiz eta puntu hori ezin den  $1 + K(z)H(z)$ ren zero izan. Alegia, hori gertatuko balitz, desagertu egingo litzateke,  $1 + K(z)H(z)$ ren  $z = 1$  poloetako batekin sinplifikatuko bailitzateke. Hortaz, aurreko ondorioan, zilegi da  $C$  ingurua 1 erradioko zirkuluaz ordezkatzeari aldaketarik gabe.

Orain teoremaren bigarren zatia frogatuko dugu.  $z$  aldagai konplexuak  $C$  egiten duenean,  $1 + K(z)H(z)$ ren argumentuaren  $2\pi$  aldakuntzak adierazten du Nyquisten inguruaren irudiak behin inguratzen duela  $(-1,0)$  puntu kritikoa noranzko zuzenean. (7.7 irudia)



**7.7 irudia.**  $1 + K(z)H(z)$ ren argumentuaren  $2\pi$  aldakuntzak adierazten du Nyquisten inguruaren irudiak behin inguratzen duela  $(-1,0)$  puntu kritikoa noranzko zuzenean.

Nyquisten inguruaren irudiari  $\Gamma$  inguru deritzogu. (7.14) kondizioa betetzen da, baldin eta soilik baldin,  $\Gamma$  inguruak  $P$  aldiz inguratzen badu  $(-1,0)$  puntua, noranzko zuzenean.

7.4.1 atalean adierazi denez, serbositeman zein kontrolean egindako muntaia BIBO egonkorra da, baldin eta soilik baldin  $1 + K(z)H(z)$  polinomioaren zero guztiak 1 erradioko zirkuluaren barnean badaude. Beraz, Nyquisten irizpideak berrelikadura duten prozesuen BIBO egonkortasuna aztertzea ahalbidetzen du. Ez du behar poloen kalkulurik; hala ere, 1 erradioko zirkulutik kanpoko  $K(z)H(z)$ ren  $P$  polo kopurua ezagutu behar da.

Nabarmentzekoa da  $1 + K(z)H(z)$ ren argumentuaren aldakuntza, *zuzenean*  $(-1,0)$  puntu kritikotik *abiatuta* neurtzen dela,  $K(z)H(z)$  plano konplexuan aztertuz gero. Beraz, Nyquisten irizpidea erabiltzeko, aski da  $K(z)H(z)$  eraikitzea  $z$ -k  $C$  ingurua egitean.

Praktikan, sarritan jakiten da  $K(z)H(z)$ k ez duela polorik 1 erradioko zirkuluaren kanpoaldean. Horrek esan nahi du  $P = 0$  dela, eta irizpidea erraztu egiten da:

$z$ -k  $C$  ibiltzen duenean,  $1 + K(z)H(z)$ en argumentuaren aldakuntzak nulua izan behar du edo, beste era batera esanda,  $\Gamma$ -k ez du puntu kritikoa inguratu behar.

Onartu dugu  $K(z)H(z)$ k ez duela polorik 1 erradioko zirkuluaren gainean, nahiz eta litekeena izan, salbuespen gisa, polo bat edo gehiago  $z = 1$  baliokoak izatea. Sarritan

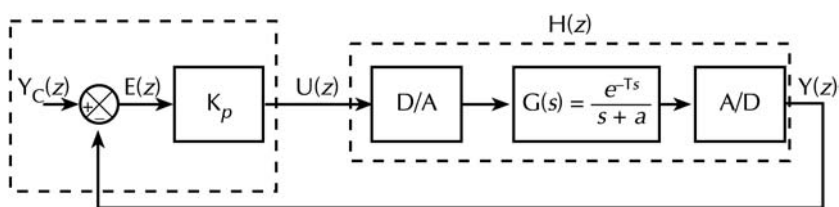
hipotesi hori da betetzen dena; hala eta guztiz ere, hala ez bada, posible da Nyquisten  $C$  ingurua pixka bat aldatzea; hala, 1 erradioko zirkuluko poloak, hautamenez, kanpoaldetik saihestaraz ditzan lortzen da erradio infinituki txikia duten eta zentroa puntu horietan duten zirkuluerdien bitartez. Erraza da egiaztatzea Nyquisten irizpideak ez duela aldaketarik jasaten.

Teorema ezin da aplikatu  $1 + K(z)H(z)$   $C$ -ren gainean nulua denean. Hala ere, egoera hori berehala hautamaten da; alegia,  $K(z)H(z) = -1$  ekuazioak emaitza bat edo gehiago dituen  $C$ -ren gainean,  $\Gamma$  ingurua ( $C$ -ren irudia,  $z \rightarrow K(z)H(z)$  aplikatuta)  $(-1,0)$  puntu kritikotik igarotzen da. Kasu horretan, serbosistema-muntaiak zein kontrol gisa egindako muntaiak ez dira BIBO egonkorak; izan ere, haien transferentzia-funtzioek poloak dituzte 1 erradioko zirkuluaren gainean.

### 7.7 adibidea

Demagun  $G(s)$  transferentzia-funtzioa duen sistema bat kontrolatu nahi dugula. Sistema horrek  $T = 1$  segundoko atzerapena du. Gainera, suposa dezagun  $a = 1$  dela. Bestalde, sistema hori kontroladore proportzional baten bidez kontrolatuko dugu. Beraz,  $K(z) = K_p \cdot 1[s]$  den sistema hori kontrolatzeko,  $h = 1$  segundoko laginketa-periodoa hautatuko dugu. Muntaia osoaren eskema funtzionala 7.8 irudian ageri da.

$$G(s) = \frac{e^{-Ts}}{s + a}$$



**7.8 irudia.** Atzerapena duen sistema baten kontrol proportzional digitala

Begizta irekiko transferentzia-funtzioa hau da:

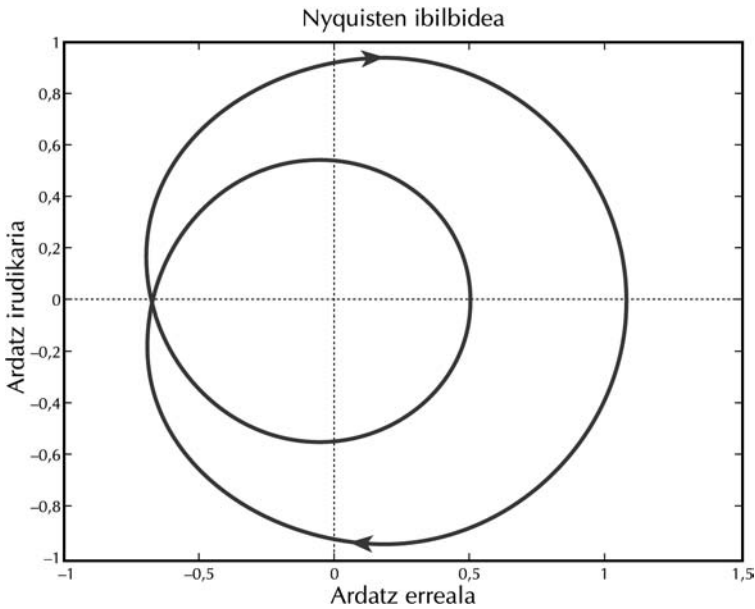
$$K(z)H(z) = K_p \frac{0,6321}{z(z - 0,3679)}$$

Adierazpen horrek ez du  $z = 1$  polorik; beraz, Nyquisten C ingurua 1 erradioko zirkulu osoa da. Horrenbestez,  $z = e^{jwh}$  egin beharko dugu, non  $w \in (-w_N, w_N)$  balio-tartea hartu beharko dugu.

$$K(e^{jwh})H(e^{jwh}) = K_p \frac{0,6321}{e^{jwh}(e^{jwh} - 0,3679)}$$

$z = e^{jwh} \rightarrow K(z)H(z)$  aplikazioaren irudia begizta irekiko transferentzia-funtzio harmonikoa da, eta 7.9 irudian adierazten da. Kontuan izan behar dugu  $K_p = 1$  eginez egin dudala 7.9 irudia.

Begizta irekiko transferentzia-funtzioak ez du polorik 1 erradioko zirkulutik kanpo, beraz,  $P = 0$  da.  $1+K(z)H(z)$ ren argumentuaren aldakuntza,  $z$  aldagai konplexuak 1 erradioko zirkunferentzian zehar ibiltzean, nulua da, edo, beste era batera esanda,  $\Gamma-k$  ez du puntu kritikoa inguratzen. 7.8 irudiko sistema itxia BIBO egonkorra da.



**7.9 irudia.** Nyquisten ibilbidea,  $K_p = 1$  denean.

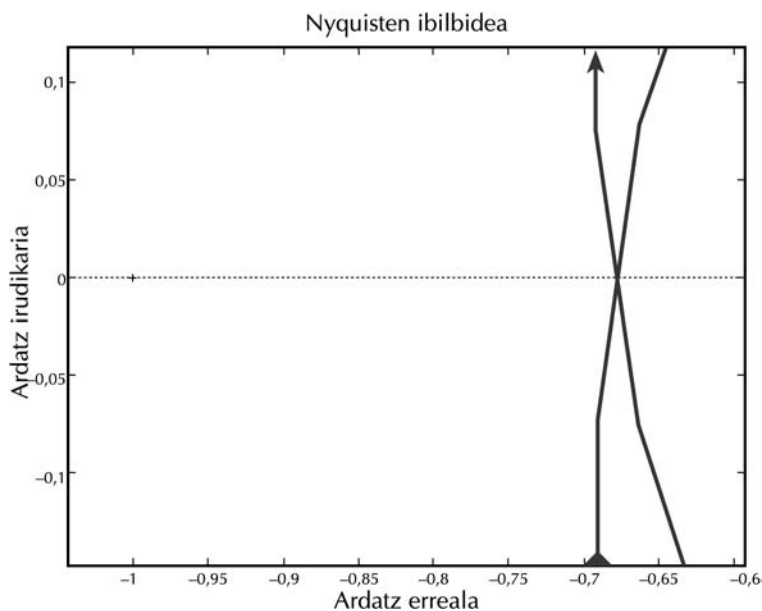
Sistema honen begizta itxiko transferentzia-funtzioa hau da:

$$\frac{K(z)H(z)}{1+K(z)H(z)} = \frac{K_p 0,6821}{z^2 - 0,3679z + K_p 0,6821}$$

Begizta itxiko izendatzailearen erroak hauek dira.

| Erroa                  | Modulua |
|------------------------|---------|
| $Z = 0,1840 + 0,8051i$ | 0,8259  |
| $Z = 0,1840 - 0,8051i$ | 0,8259  |

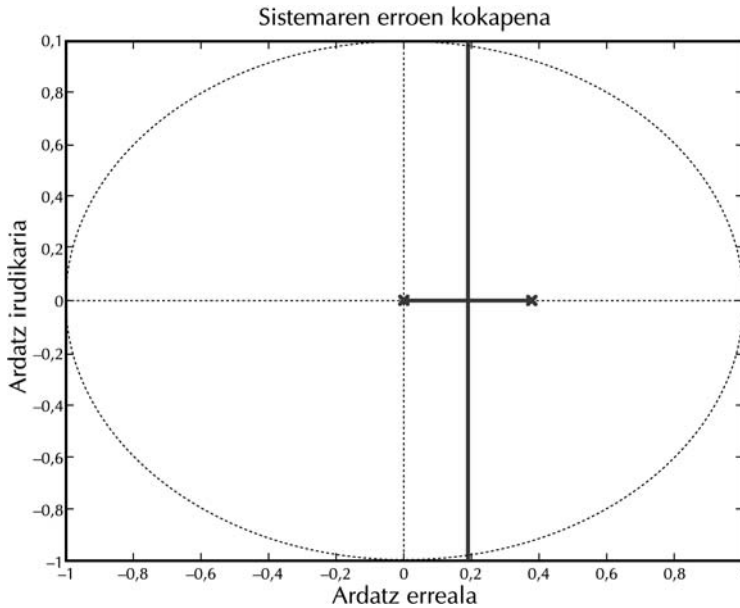
Ikus daitekeenez, sistema egonkorra izan arren egonkortasunaren mugatik oso gertu dago, erro konplexuen moduluek ia 1 balioa dutelako. Bestalde, Nyquisten ibilbidearen xehetasun bat eginez ikusiko dugu  $z = -1$  puntu kritikoa inguratzeaz gaudela; beraz, teknika honen bidez, sistemaren egonkortasunaren kalitatea edo maila adierazteko erabili ahal izango dugu.



**7.10 irudia.** Sistemaren Nyquisten ibilbidearen xehetasuna  $z = -1$  puntu kritikoaren inguruan.

(7.10) irudian ikus daiteke sistema  $z = -1$  puntu kritikotik oso gertu dagoela; beraz, horrek esan nahi du sistemaren begizta itxiko transferentzia-funtzioaren izendatzailearen erroak egonkortasunaren mugatik gertu daudela.

Hori hobeto ikusi ahal izateko, sistemaren erroen kokapena egingo dugu. (7.11) irudian ikus daitekeenez, sistema  $K_p$  jakin baterako bat erradioko zirkulutik irteten da.



**7.11 irudia.** Sistemaren erroen kokapenaren irudikapena.

Sistemak egonkorra izateari utz diezaion izan behar dugun  $K_p$  kritikoa kalkulatzeko, begizta itxiko izendatzailea 1 moduluko erro konplexuez zatitu behar dugu, eta hondarra hutsera berdindu.

$$\left[ z - (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) \right] \left[ z - (\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)) \right] = z^2 - 2 \cos(\alpha) z + 1$$

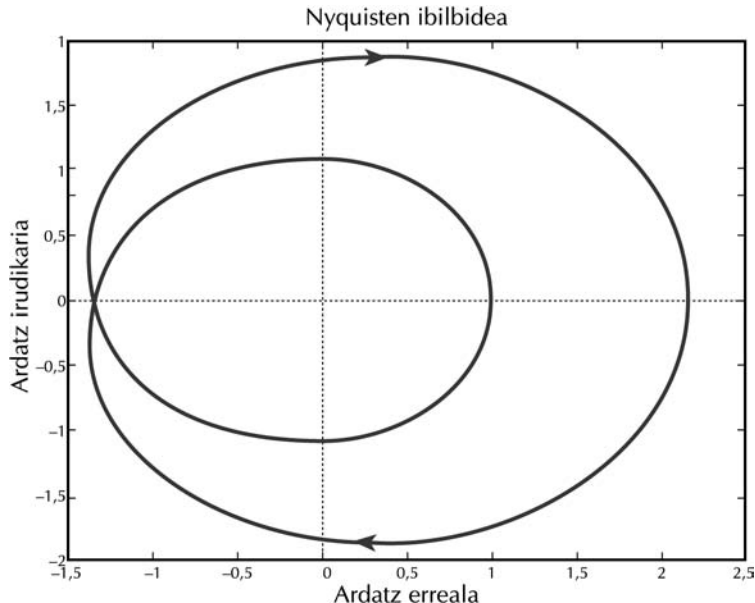
$$z^2 - 0,3679z + K_p 0,6821$$

|       |                             |                  |
|-------|-----------------------------|------------------|
| $z^2$ | $-0,3679z$                  | $0,6821 K_p$     |
| $z^2$ | $-2\cos(\alpha)z$           | $1$              |
| $0$   | $[2\cos(\alpha) - 0,3679]z$ | $0,6821 K_p - 1$ |

Beraz,  $K_p$  irabaziaren muga kritikoa kalkula daiteke aurreko zatiketaren hondarraren gai guztiak hutsera berdinduz gero.

$$2 \cos(\alpha) - 0,3679 = 0 \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{0,3679}{2} = 0,1840$$

$$0,6821 K_p - 1 = 0 \Rightarrow K_p = \frac{1}{0,6821} = 1,4661$$



## 7.8 adibidea

$$K(z)H(z) = K_p \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+1)}$$

Argi dago sistemaren begizta irekiko polo bat erradioko zirkunferentziaren gainean dagoela ( $z = -1$ ). Beraz, polo hori saihesteko, zerorantz jotzen duen eta  $z = -1$  puntuan zentratutako zirkunferentzia bati jarraituko diogu. Beraz, Nyquisten ingurua definitzean, honela egingo dugu.

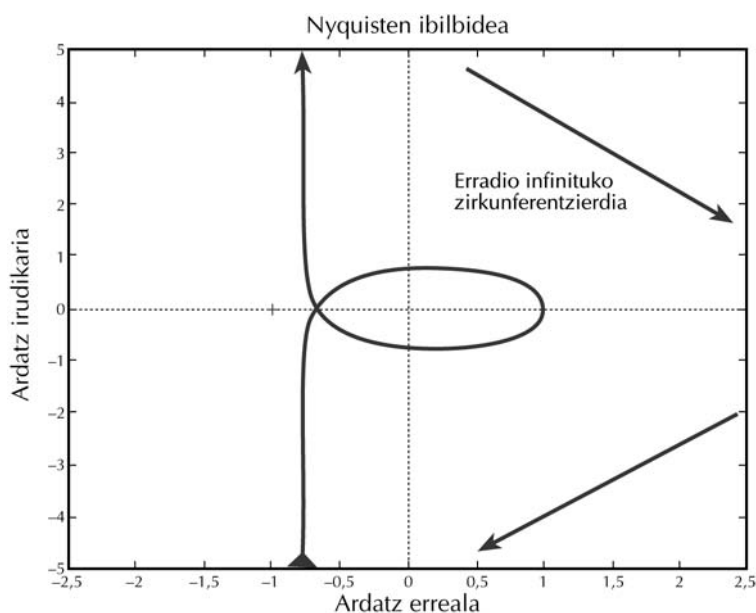
$$z = e^{jwh} : w \in \left( -\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right)$$

$$z = -1 + re^{j\theta} : \theta \in \left( \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right), r \rightarrow \infty$$

$$K(e^{jwh})H(e^{jwh}) = K_p \frac{1}{\left( e^{jwh} - \frac{1}{2} \right) (e^{jwh} + 1)} : w \in \left( -\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right)$$

$$K(re^{j\theta})H(re^{j\theta}) = K_p \frac{1}{\left( re^{j\theta} - \frac{3}{2} \right) (re^{j\theta})} \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} \frac{-2K_p}{3re^{j\theta}} : \theta \in \left( \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$$

Kontuan izanik  $h$  laginketa-periodoa dela,  $w$  aldagaia  $-\pi/h$  balioetik  $\pi/h$  baliora doala eta  $\theta$  aldagaia  $\pi/2$  balioetik  $(3\pi)/2$  baliora doala, Nyquisten ibilbidea honela irudika dezakegu:



### 7.13 irudia. Nyquisten ibilbidea.

Nyquisten ibilbideak ez du inguratzen  $z = -1$  puntu kritikoa; beraz,  $Z = P$  da. Begizta irekiko transferentzia-funtzioaren poloak eta  $1 + K(z)H(z)$  funtzioaren poloak berdinak dira. Beraz,  $z = 1/2$  eta  $z = 1$  poloak 1 erradioko zirkuluaren barnean daudenez,  $P = 0$  da; eta  $1 + K(z)H(z)$  funtzioaren erroak 1 erradioko zirkulutik kanpo ez daudenez, ( $Z = P$ ) sistema egonkorra da.

### 7.9 adibidea

Prozesu batean, haren begizta irekiko transferentzia-funtzio diskretua hau da:

$$K(z)H(z) = \frac{1}{z-2}$$

Haren poloa ez da 1, eta, beraz, 1 erradioko zirkulu osoa da Nyquisten C ingurua.  $z \rightarrow K(z)H(z)$  aplikazioaren bidezko C-ren  $\Gamma$  irudia begizta irekiko transferentzia-funtzio harmonikoa da. Irudiaren forma eskuz egiteko, 6. gaian erabilitako  $w$  aldagai konplexua sartzen da, non  $h = 1[s]$  baita.

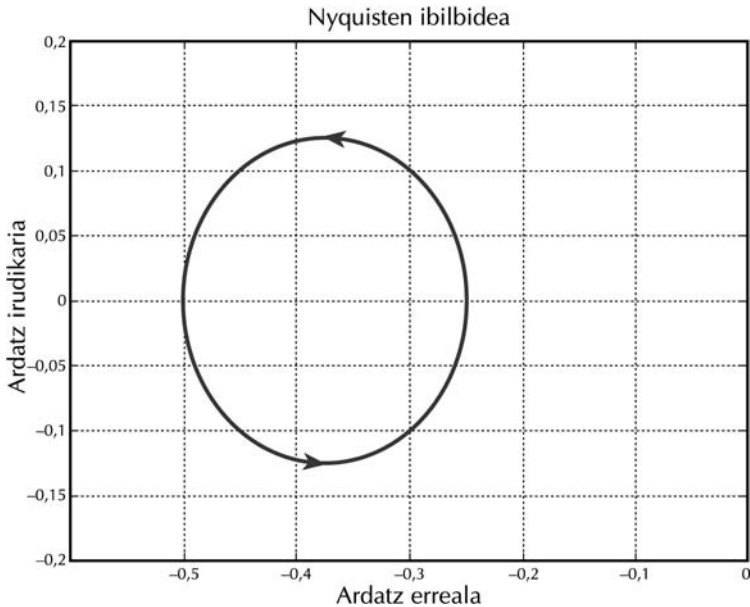
Beraz,

$$\begin{aligned} K'(z)H'(z) &= K\left(\frac{1+0,5w}{1-0,5w}\right)H\left(\frac{1+0,5w}{1-0,5w}\right) \\ &= \frac{1}{\frac{1+0,5w}{1-0,5w} - 3} \\ &= \frac{1-0,5w}{2(w-1)} \end{aligned}$$

Ondorioz,

$$K(jv)H(jv) = \frac{(1-0,5jv)}{2(jv-1)}$$

7.14 irudiko lerro jarraituko zirkuluerdia honela lortzen da:  $v \in [0, \infty)$ ; ardatz errealekiko simetriak ematen du puntuko zirkuluerdia, eta, hala,  $\Gamma$ -en ingurua osorik lortzen da. Gogoan izan behar dugu  $\Gamma$  ingurua Nyquisten ibilbidea dela.



**7.14 irudia.** Nyquisten ibilbidearen hurbilketa transformazio bilinealaren bitartez.

Begizta irekiko transferentzia-funtzioaren poloa 1 erradioko zirkulutik kanpo dago; beraz,  $P = 1$  da. Bestalde  $z$  aldagaia 1 erradioko zirkunferentziaren gainean ibiltzean,

$1 + K(z)H(z)$  funtzioak ez du puntu kritikoa inguratzen. Horrenbestez,  $Z = 1$  izan behar du; ondorioz, begizta itxian sistema ez da BIBO egonkorra izango. Gogoan izan behar dugu aurreko irudia benetako Nyquisten ibilbidearen hurbilketa bat besterik ez dela.

## 7.5 IRABAZI-MARJINA ETA FASE-MARJINA

$K(z)H(z)$  begizta irekiko ereduan parte hartzen duten parametroetan doitasunik eza egon daiteke. Horrez gain, parametroek denborarekin aldatuz doaz, eta sistemaren transferentzia-funtzioan *fluktuazio* txikiak sortzen dira. Gainera, kontrol-prozesuaren eta, neurri txikiagoan, kontrol-algoritmoaren eredua eratzean huts egitea (baztertzekoak diren denbora-konstante txikiak, atzerapenak eta neurri txikiko linealtasunik ezak, esaterako) edo parametro jakin batzuk zehaztasunik gabe ezagutzea saihestezina da praktikan.  $K(z)H(z)$ n egiten diren errore horiek guztiek eragina dute  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$ n. Begizta irekiko transferentzia-funtzio harmoniko *erreal*a irudikatzen duen kurba oso bestelakoa izan daiteke  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  eredua arabera aurreikusitako lerroaren aldean, eta, kasurik okerrenean,  $-1$  puntu kritikoa eskuinetara utz dezake: sistema itxiaren BIBO egonkortasuna galtzen da.

Antzeko fenomenoak gertatzen da  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  esperimentu bidez lortzen denean, neurketa-erroreak direla medio.

Arazoa argitzen laguntzen saiatuko gara ondoren, eredua eratzeko fasean atzerapen hau kontuan hartu ez denean:  $T = dh$  segundoko,  $d \in \mathbb{N}$ . Eredu hori eratzean sortzen den begizta irekiko transferentzia-funtzio harmonikoa  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  da; praktikan,  $\frac{1}{e^{j\omega dh}} G(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  da.

Honako hau dugu:

$$\text{Arg} \left[ \frac{1}{e^{j\omega dh}} G(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h}) \right] = -\omega dh + \text{Arg} [G(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})]$$

Hartara, atzerapen hutsa baztertzen bada,  $-\omega dh$  fase-galera ez da aintzat hartzen, eta horrek BIBO egonkortasuna deuseztatzea dakarkio begizta itxiko sistemari,  $-1$  puntu kritikoa ingura dezakegulako kontuan izan ez dugun  $-\omega dh$  fase-galera hori dela medio. 7.15 irudian ikus daiteke horrelako atzerapen batek eragin dezakeela sistemak egonkorra izateari uztea.

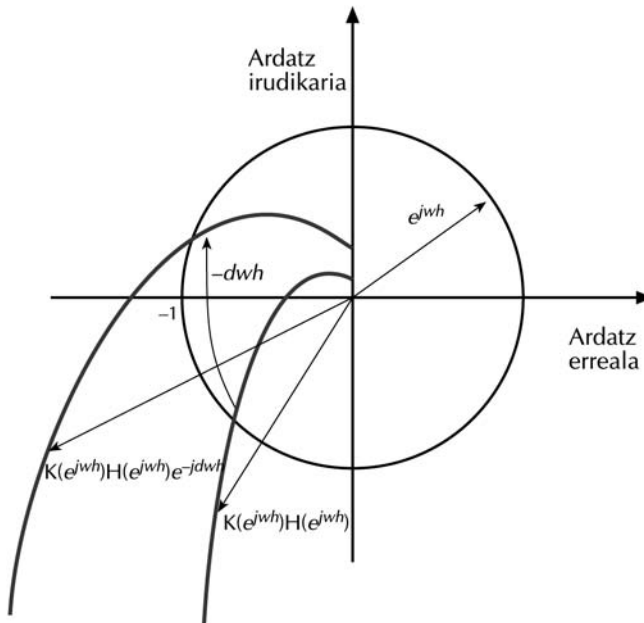
Parametroen fluktuazioen aurrean zein eredua eratzean eta esperimendueta egindako errorean aurrean, egonkortasunak duen sendotasuna edo segurtasun-marjina  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  kurbaren eta  $-1$  puntu kritikoaren artean dagoen aldearen arabera da. Alde hori irabazi-marjinaren bidez eta fase-marjinaren bidez neurtzen da. Ondoren definituko dira marjina horiek.

### 7.2 definizioa

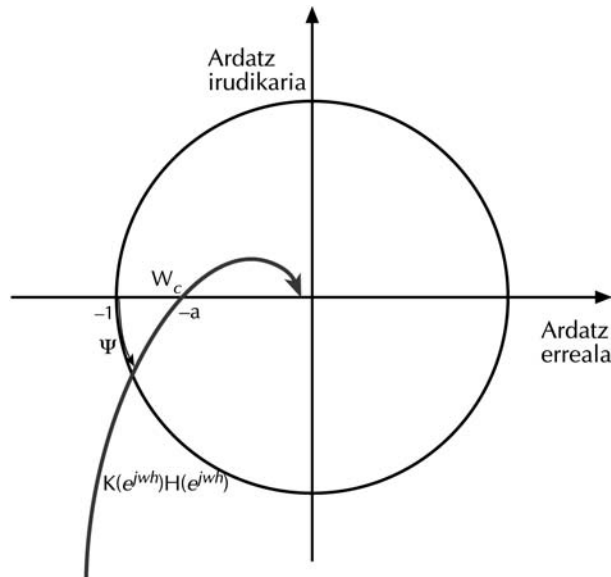
Ezkerretara utzirik  $-1$  puntu kritikoa,  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  kurbak ardatz erreala ebakitzen du  $\omega_c$  **pultsazio kritikoan**,  $-a$  puntuan,  $0 < a < 1$  dela.  $1/a$  zenbakia da **irabazi-marjina**. Dezibeleetan (dB) adierazi ohi da; hortaz,  $-20 \log a > 0$  da.

### 7.3 definizioa

Puntu kritikoa ezkerretara utzirik,  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  kurbak 1 erradioko zirkulua ebakitzen du  $\omega_x$  **gurutzatze-pultsazioan**,  $-180^\circ + \Psi$  argumentua duen puntu batean,  $\Psi > 0$  dela.  $\Psi$  angelua da **fase-marjina**, eta gradutan neurtu ohi da.



**7.15 irudia.** Ereduztatu gabeko atzerapen bat, berez dugun transferentzia-funtzioaren eta uste dugun transferentzia-funtzioaren arteko aldea.



**7.16 irudia.** Sistema baten fase-marjina eta irabazi-marjina.

Irabazi-marjina, fisikoki, dezibelekin adierazten den faktorea da, eta faktore horretaz biderka daiteke begizta irekiko transferentzia-funtzioa, egonkortasun-mugara iristeko. Fase-marjinari dagokionez, muga horretara eramaten duen fase-galera da, gradutan neurtua 1 erradioko zirkuluaren gainean.

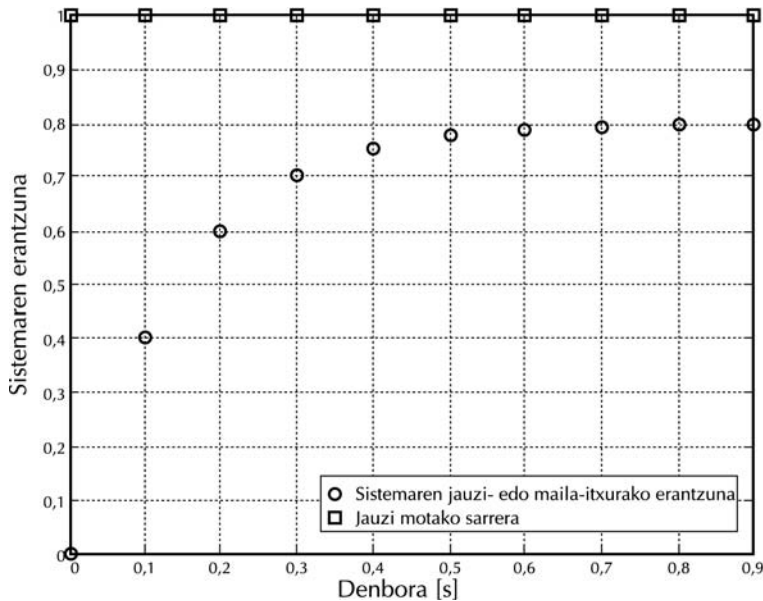
Fase-marjinei eta irabazi-marjinei dagozkien emaitza gehienak berdin-berdinak dira kasu analogikoetan eta kasu diskretuetan. Hartara, marjina horiek erraz ondorioztatzen dira Bode diagrama diskretuetatik. Egonkortasun erregularren eta kondiziozko egonkortasunaren kontzeptuak ez dira aldatzen (bigarrenak irabazi-marjinarako behar dituen neurriak hartuta). Praktikan oinarriturik, 4 dB eta 12 dB bitarteko balioak hartzen dira irabazi-marjinatzat, eta 30° eta 60° bitarteko balioak fase-marjinatzat. Garrantzizkoa da aldi berean arrazoizko irabazi-marjinak zein fase-marjinak ezartzea. Izan ere, irabazi-marjina zuzena bakarrik ez da aski  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  puntu kritikotik aldentzeko, 7.16 irudiaren goiko zatiak erakusten duenez; fase-marjinarako gauza bera gertatzen da (7.16 irudiaren beheko aldean).

Esan behar dugu irabazi-marjinek eta fase-marjinek nolabaiteko kalitate dinamikoa ematen dutela begizta itxian, egonkortasunari sendotasuna eman baino gehiago. Ezaugarri garrantzitsu horren funtsak 9. kapituluaz azalduko ditugu.

## 7.6 SISTEMA KONTROLATUAREN DOITASUNA: ERRORE IRAUNKORRAK

### 7.6.1 Berrelikadura edo serbosistema-egitura

Serbosistema baten lehen uneetan, kontrolatu beharreko  $y(k)$  magnitudea eta  $y_c(k)$  kontsigna oso bestelakoak dira, 7.17 eta 7.18 irudietan adierazten den bezala.



**7.17 irudia.** Sistemaren jauzi- edo maila-itxurako errorearen balio egonkortuari serbosistemako errore iraunkor deritzogu.

Erregimen iragankor honen azterketa zehatza 9. kapituluaz azalduko da. Prozesu itxia BIBO egonkorra denean (atal honetan zehar hartu den hipotesia), **serbosistemako errore iraunkorra** egon daiteke, edo ez. Errore hori  $e(k) = y_c(k) - y(k)$  errorearen muga da kontsignaren eta kontrolatu beharreko magnitudearen artean,  $k$  infiniturantz hurbiltzen dela (7.24 irudia). Zenbateko hori analizatzea funtsezkoa da, serbosistema-muntaiaren doitasun estatikoa zehazteko.

Begizta itxiko sistema baten errorearen  $z$  transformatua hau izan daiteke:

$$E(z) = \frac{1}{1 + G(z)H(z)} Y_c(z) \quad (7.15)$$

Sistema itxia BIBO egonkorra den hipotesiak ezinbestez ezartzen du  $1 + K(z)H(z)$ ko zero guztiak 1 erradioko zirkuluaren barruan daudela.

Agerian uzten da orain / anizkoitzasuneko  $z = 1$  poloa,  $K(z)H(z)$  begizta irekiko transferentzia-funtzioan azaltzen dena, eta eragin integratzaileak islatzen ditu (4.22 adibidea):

$$G(z)H(z) = \frac{B(z)}{(z-1)^\gamma A(z)} \quad (7.16)$$

$A(z)$  eta  $B(z)$  maila egokiko polinomioak dira.

#### 7.4 definizioa

**Serbosistema-egituran, begizta irekiko sistemaren mota** deritzo / zenbaki osoari. (*Mota* kontzeptua ez da nahasi behar *ordena* kontzeptuarekin).

#### 7.5 definizioa

**Begizta irekiko irabazi estatikoa** deritzo  $\gamma = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^\gamma G(z)H(z) = \frac{B(1)}{A(1)}$

zenbakiari.

**1. kasua.** *0 motako sistema.* Demagun integrazioarik ez duen sistema bat (*0 motako sistema*) dugula, eta  $Y_c(z) = \frac{z}{z-1}$  jauzi motako sarrera dugula. Orduan, (7.15)en bidez:

$$E(z) = \frac{1}{1 + G(z)H(z)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Bukaerako balioaren teorema honako hau ematen digu:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1 + G(z)H(z)} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1 + \gamma}$$

Errore iraunkor horri **serbosistema-estatismo** deritzo (7.17 irudia). Har dezagun malda diskretuaren forma duen  $Y_c(z) = \frac{hz}{(z-1)^2}$  kontsigna.

Errore-seinalea hau izango da:

$$E(z) = \frac{1}{1 + G(z)H(z)} \cdot \frac{hz}{(z-1)^2}$$

1 balioa duen polo *bikoitza* du  $z$  transformatu horrek. Beraz, ezin gara bukaerako balioaren teoremaz baliatu; horrenbestez, ez dago  $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k)$  limiterik. Eraitza bera lortzen da maila handiagoko kontsignak erabiliz, hala nola kontsigna parabolikoak:  $y_c(k) = \frac{1}{2} (kh)^2$ ,  $k \geq 0$ ,

**2. kasua.** Demagun orain *1. motako sistema bat* dugula. Hau izan daiteke 1. mailako jauzi-kontsigna diskretu baterako errorea:

$$E(z) = \frac{1}{1 + \frac{B(z)}{(z-1)A(z)}} \cdot \frac{z}{(z-1)} = \frac{z}{z-1 + \frac{B(z)}{A(z)}}$$

Ondorioz,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{z-1 + \frac{B(z)}{A(z)}} = 0$$

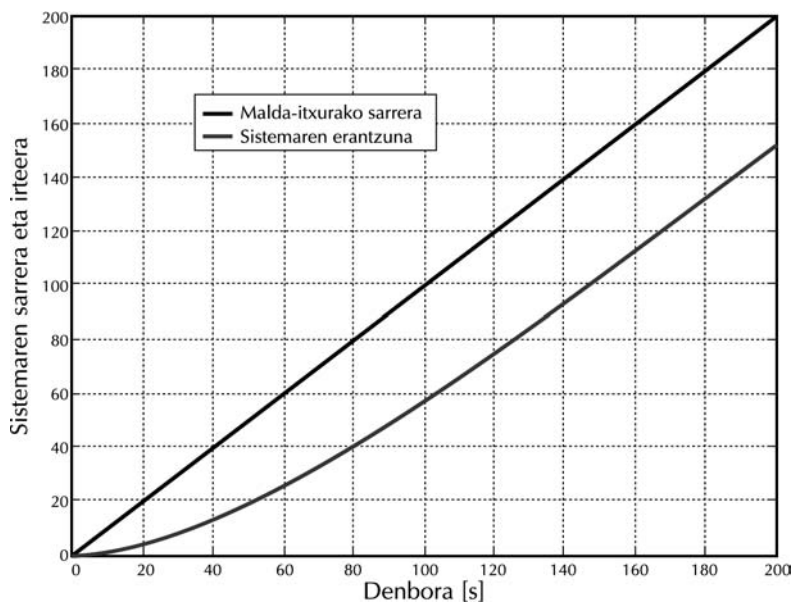
Errore iraunkorra nulua da malda diskretuko forma duen kontsigna batekin:

$$E(z) = \frac{1}{1 + \frac{B(z)}{(z-1)A(z)}} \cdot \frac{hz}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-1 + \frac{B(z)}{A(z)}} \cdot \frac{hz}{z-1}$$

Beraz,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{z-1 + \frac{B(z)}{A(z)}} \cdot \frac{hz}{z-1} = \frac{h}{\gamma}$$

serbosistemako errore iraunkorra izango dugu, eta errore horri jarraipen- edo **segimendu-errore** deritzogu (7.18 irudia).



**7.18 irudia.** Jarraipen-errorea.

Demagun sarreraren  $z$  transformatuak itxura hau duela:  $Y_c(k) = \frac{h^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$ .

Beraz, sistemaren sarrera denboraren mende utziz gero, adierazpen hau lortuko dugu:  $y_c(k) = \frac{1}{2}(kh)^2$ ,  $k \geq 0$ , hots, sarrerak parabola-itxura du. Orduan,

$$E(z) = \frac{1}{1 + \frac{B(z)}{(z-1)A(z)}} \cdot \frac{h^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{1}{z-1 + \frac{B(z)}{A(z)}} \cdot \frac{h^2 z(z+1)}{2(z-1)^2}$$

Adierazpen horrek  $z = 1$  polo *bikoitza* du; horrenbestez, ez dago  $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k)$  limiterik.

2. *motako prozesu* baten kasuan, lehen bezala ondorioztatzen dira errore iraunkorrak; xehetasunak, berriz, irakurlearen esku uzten dira, ariketa egin dezan.

7.1 taulan daude jarrita emaitzak.

| Kontsigna<br>mota | $y_c(k) = 1$                  | $y_c(k) = kh$                                  | $y_c(k) = \frac{1}{2}(kh)^2$ |
|-------------------|-------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------|
| 0                 | Estatismoa<br>$\frac{1}{1+g}$ | $\infty$                                       | $\infty$                     |
| 1                 | 0                             | Jarraipena<br>Segimendua<br>$\frac{h}{\gamma}$ | $\infty$                     |
| 2                 | 0                             | 0                                              | $\frac{h^2}{\gamma}$         |

**7.1 taula.** Serbosistemako errore iraunkorrak 0, 1. eta 2. motetako sistemetarako.

Serbosistemako errore iraunkor finituak eta ez-nuluak ere badira, txikiagoak  $\gamma$  irabazi estatikoa handia denean. Praktikan, begizta itxiko BIBO egonkortasunak mugatzen du  $\gamma$ ; izan ere, sarritan,  $\gamma$ -ren ondorio zuzena izaten da  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  kurba  $-1$  puntu kritikora hurbiltzea.

7.1 taulak erakusten du serbosistemako errore iraunkorrak *txikitu egiten direla* prozesuko *l motarekin batera*. Berrir ere, begizta itxiko BIBO egonkortasunak, zoritxarrez, *l* zenbakia mugatzen du. Egiaztapen hori frogatzeko, ikus ditzagun  $z = 1$  erako *l* poloren ondorioak  $K(z)H(z)n$ .  $1/(z - 1)^l$  faktoreak honako desfase hau sortzen du begizta irekiko transferentziak eratzen duen kurban:

$$\text{Arg} \frac{1}{\left( \frac{1 + \frac{h}{2} j\nu}{1 - \frac{h}{2} j\nu} - 1 \right)^l} = \text{Arg} \left( \frac{1 - \frac{h}{2} jh}{hj\nu} \right)^l$$

$$= l \left( -\text{Arctg} \frac{h}{2} \nu - \frac{\pi}{2} \right) \quad \nu \in (0, \infty)$$
(7.17)

Desfase hori negatiboago egiten da *l* handitu ahala; bada, hortaz,  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  kurba puntu kritikora hurbiltzeko joera duen fase-galera bat da.

Horra hor nola sortzen den doitasuna / egonkortasuna dilema, kontrol automatikoan beti ageri dena: errore iraunkorrak txikiagotzen dira irabazi estatikoa eta mota handiagotzen direnean; ordainetan, handiagotze horrek irabazi-marjinaren eta fase-marjinaren degradazioa ekartzen du.

0 edo 1. motako sistemetarako,  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  kurba ardatz errealean hasten da,  $B(1)/A(1)$  puntuan (ikus (7.16) berdintza), edo infinituan,  $-\pi/2$  argumentuaren arabera (balio hori (7.17)tik ondorioztatzen da,  $l = 1$  eta  $v \ll 1$  direla). Begizta itxiko BIBO egonkortasuna, beraz, beti berma daiteke,  $\gamma$  egokia hautatuz. 2. motako prozesu baterako,  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  kurba infinituan hasten da,  $-\pi$  argumentua duela, eta Nyquisten irizpidearen kondizioa betetzea zailago bihurtzen da. Arazoa oso zail bilakatzen da 3. motako edo handiagoko sistemetarako. Horrexegatik, 3. motako edo handiagoko prozesuak oso urriak dira.

Adibideei heldu aurretik, ohar gaitezen errore iraunkorrak  $h$  laginketa-periodoaren mende egon daitezkeela.

### 7.10 adibidea

Azter dezagun hurrengo sistema. Sistemaren kontroladorearen transferentzia-funtzioa  $K(z) = K_p$  da; beraz, kontroladorea proportzionala da. Baldin sistemaren begizta irekiko transferentzia-funtzioa  $K(z)H(z) = K_p \frac{0,1}{z(z-0,9)}$  bada, sistema 0 motakoa da. Ondorioz, errore iraunkor batek, 1. mailako jauzi-kontsigna baten aurrean, balio hau hartuko du:  $\frac{1}{1+K_p}$ .

$K_p = 9,56$  bada,  $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0,0947$  serbosistema-estatismoa lortuko dugu.

### 7.11 adibidea

Aurreko adibidea abiadura eran kontrolatzen zaio oraingoan,  $K_p$  irabazia duen kontrol proportzional baten bidez. Kontrolatu beharreko sistema analogikoaren transferentzia-funtzioa hau da:

$$K(s) = \frac{1}{s+1}$$

Kalkulu batzuk egin ondoren, laginketa-periodoa  $h = 0,1[s]$  da:

$$H(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] \right\} = \frac{0,09516}{z - 0,9048}$$

Kontroladore proportzional bat erabiliz gero,  $H(z)$  transferentzia-funtziotik ondorioztatzen da, horrenbestez, begizta irekiko transferentzia-funtzioa:

$$K(z)H(z) = K_p \frac{0,09516}{z - 0,9048}$$

0 motako sistema da, eta  $\gamma = K_p$  da; horrek  $\frac{1}{1 + K_p}$  serbosistema-estatismoa dakar.

Kontrol proportzionalaren ordeztu kontroladore proportzional integratzailea (PI) ezartzen bada, kontroladorearen transferentzia-funtzio hau lortuko dugu:

$$K(z) = K_p \frac{z + \frac{h}{T_i} - 1}{z - 1}$$

Begizta irekiko transferentzia-funtzioa hau izango da:

$$K(z)H(z) = K_p \frac{z + \frac{h}{T_i} - 1}{z - 1} \frac{0,09516}{z - 0,9048}$$

0 motatik 1. motara igarotzen da, eta estatismoa erabat kentzen da.  $\frac{h}{T_i} = 1$  eta  $K_p = 40$  eginda, jarraipenak balio hau hartuko du:  $\frac{h}{\gamma} = \frac{0,1}{40} = 0,0025$

## 7.6.2 Kontrol-egitura edo erregulazio-muntaia

Perturbazio baten ondorioz, kontsigna nulua izanik, kontrolatu beharreko magnitudeak, lehenik, erregimen iragankorra izaten du (7.17 eta 7.18 irudietan ikus daiteke sistemak denbora bat igaro eta gero fase iragankor batera jotzen duela).

Fase iragankor horren azterketa 9. kapitulurako utzi dugu. Begizta itxiko BIBO egonkortasuna ziurtatuta dagoela, **kontroleko errore iraunkorra** egon daiteke, edo ez. Kontroleko muntaiaaren doitasun estatikoaren neurria da zenbaki hori.

Kontroladorearen ( $l$  anizkoitasunekoa)  $K(z)$  transferentzia-funtzioan eta kontrolatu beharreko prozesuaren ( $l'$  anizkoitasunekoa) eredu laginduaren  $H(z)$  transferentzia-funtzioan ageri diren  $z = 1$  poloak dira:

$$G(z) = \frac{S(z)}{(z-1)^l R(z)}$$

$$H(z) = \frac{B(z)}{(z-1)^{l'} A(z)}$$

Sistema kausala izan dadin,  $A(z)$ ,  $B(z)$ ,  $R(z)$  eta  $S(z)$  maila egokiko polinomioak dira.

### 7.6 definizioa

Kontrol-egituran, sistemaren begizta irekiko mota deritzo  $l$  zenbaki osoari.

### 7.7 definizioa

Kontroladorearen irabazi estatikoa  $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^l K(z) = \frac{S(1)}{R(1)}$  zenbakia da.

Kontroleko sistemari dagokion mota eta begizta irekiko sistemari dagokion mota ongi bereizi behar dira, eta, halaber, kontroladorearen irabazi estatikoa eta begizta irekiko irabazi estatikoa. 7.6 eta 7.7 definizioek  $K(z)$  erreguladorea baino ez dute kontuan hartzen. 7.4 eta 7.5 definizioek, aldiz,  $K(z)$  kontuan hartzen dute, bai eta kontrolatu beharreko prozesuaren  $H(z)$  eredu lagindua ere.

Badakigu ezin dela definitu perturbazioaren eta bertsio laginduen arteko transferentzia-funtzio diskretu bat, baldin eta perturbazioak denboran zehar adierazpen matematiko bat ez badu. Hala ere, sarritan perturbazio horiek konstanteak izan ohi dira. Kasu hori sarritan ematen denez, aztertu egingo dugu hurrengo orrietan.  $W(z) = \frac{z}{z-1}$  perturbazioarekin, ekuazioa honela geratzen da:

$$E(z) = -\frac{H(z)}{1+G(z)H(z)} \frac{z}{z-1} \quad (7.18)$$

Har dezagun kontroleko 0 motako sistema bat; orduan,

$$E(z) = - \frac{\frac{B(z)}{(z-1)^{l'} A(z)}}{1 + G(z) \frac{B(z)}{(z-1)^{l'} A(z)}} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Bukaerako balioaren limitearen teoremaren arabera:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) &= - \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\frac{B(z)}{(z-1)^{l'} A(z)}}{1 + G(z) \frac{B(z)}{(z-1)^{l'} A(z)}} \cdot \frac{z}{z-1} \\ &= - \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\frac{B(z)}{A(z)} z}{(z-1)^{l'} + G(z) \frac{B(z)}{A(z)}} \end{aligned}$$

$l' = 0$  denean, emaitza hau lortzen da:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = - \frac{\frac{B(1)}{A(1)}}{G(1) \frac{B(1)}{A(1)}} = - \frac{1}{G(1)}$$

eta  $l' > 0$  denean:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = - \frac{\frac{B(1)}{A(1)}}{G(1) \frac{B(1)}{A(1)}} = - \frac{1}{G(1)}$$

Errore iraunkor horiei (ia beti  $K(1)$  erreguladorearen irabazi estatikoa handia izan ohi da) **kontrol-estatismo** deritzegu.

1. motako prozesuetarako:

$$E(z) = - \frac{\frac{B(z)}{(z-1)^{l'} A(z)}}{1 + \frac{S(z)}{(z-1)R(z)} \cdot \frac{B(z)}{(z-1)^{l'} A(z)}} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$= - \frac{\frac{B(z)}{(z-1)^{j'} A(z)} z}{z-1 + \frac{S(z)}{R(z)} \cdot \frac{B(z)}{(z-1)^{j'} A(z)}}$$

Bukaerako balioaren teoremaren ondorioz, errore iraunkor batek ere ez dirau, denborak aurrera egin ahala.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = - \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{\frac{B(z)}{(z-1)^{j'} A(z)} z}{z-1 + \frac{S(z)}{R(z)} \cdot \frac{B(z)}{(z-1)^{j'} A(z)}} = 0$$

Azkenik, kontroleko sistema 2. motakoa bada:

$$\begin{aligned} E(z) &= - \frac{\frac{B(z)}{(z-1)^{j'} A(z)}}{1 + \frac{S(z)}{(z-1)^2 R(z)} \cdot \frac{B(z)}{(z-1)^{j'} A(z)}} \cdot \frac{z}{z-1} \\ &= - \frac{\frac{B(z)}{(z-1)^{j'} A(z)} z}{z-1 + \frac{S(z)}{(z-1)R(z)} \cdot \frac{B(z)}{(z-1)^{j'} A(z)}} \end{aligned}$$

Beraz,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = - \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{\frac{B(z)}{(z-1)^{j'} A(z)} z}{z-1 + \frac{S(z)}{(z-1)R(z)} \cdot \frac{B(z)}{(z-1)^{j'} A(z)}} = 0$$

7.2 taulan ageri dira laburbildurik emaitza horiek guztiak.

| Peirte irbazio mota | $w(t) = 1$                                                                                              |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0                   | Estatismoa<br>$\begin{cases} -\frac{H(1)}{1+K(1)H(1)} & l' = 0 \\ -\frac{1}{K(1)} & l' > 0 \end{cases}$ |
| 1                   | 0                                                                                                       |
| 2                   | 0                                                                                                       |

**7.2 taula.** Erregulazio-errore iraunkorrak, 1. mailako jauzi-kontsigna baterako, 0, 1. eta 2. motetako prozesuetan;  $l'$  zenbaki osoak  $H(z)$ n dagoen  $z = 1$  poloen kopurua adierazten du.

Perturbazioa  $w(t) = t$  denean, errore horiek infinituak, finituak edo nuluak dira, kontrol-egituraren mota 0, 1, edo 2 denean, hurrenez hurren.  $w(t) = 1/2 t^2$  dugunean, berriz, infinituak dira kontrol-egituraren sistemaren motaren balioa 0 edo 1 denean, eta finituak kontrol-egituraren sistemaren motaren balioa 2 denean.

Zenbat eta handiagoa izan kontrolaren irabazi estatikoa, orduan eta txikiagoak dira kontroleko errore iraunkorrak. Sistema motarekin, gainera, murriztu egiten dira. Zoritxarrez, serbosistema-egituraren bezala, begizta itxiko BIBO egonkortasunak mugatu egiten ditu erreguladorearen irabazi estatikoa eta mota: berriz ere, horra hor doitasunaren eta egonkortasunaren arteko dilema.

### 7.6.3 Serbosistema eta kontrol-muntaia

Serbosistema-egiturako eta kontrol-egiturako arazoak aldi berean agertzen direnean, nahikoa da bereizketa-printzipioari jarraikiz serbosistema-egituraren eta kontrol-egituraren errore iraunkorren batuketa egitea, sistema osoaren errore iraunkorra lortzeko.

## 7.1 ariketa

Demagun sistema baten 0 bat 1 erradioko zirkulutik kanpo dagoela. Sistema hori kontroladore proportzional batekin kontrolatuko dugu. Egiazta ezazu begizta itxian kontroladore proportzionalaren  $K_p$  parametroa behar bezain handia denean sistemak bere egonkortasuna galduko duela.

Kontrolatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzioa hau izan daiteke.

$$H(z) = \frac{(z-b)B(z)}{A(z)}$$

$$|b| > 1$$

Horrenbestez, begizta itxiko transferentzia-funtzioa honela idatz dezakegu:

$$H_{B/Itxia} = \frac{K_p \frac{(z-b)B(z)}{A(z)}}{1 + K_p \frac{(z-b)B(z)}{A(z)}} = \frac{K_p (z-b)B(z)}{A(z) + K_p (z-b)B(z)}$$

Sistemaren izendatzailea berdin zero eginez gero, honako hau lortuko dugu.

$$A(z) + K_p (z-b)B(z) = 0$$

$K_p$  parametroa behar bezain handia denean, begizta itxiko sistemaren poloak, baldin badaude, sistemaren begizta irekiko zeroak izango dira.

$$K_p \rightarrow \infty \Rightarrow A(z) + K_p (z-b)B(z) \approx K_p (z-b)B(z)$$

$$K_p (z-b)B(z) = 0$$

Beraz, begizta itxiko sistemaren poloak,  $K_p$  parametroak infiniturantz jotzen duenean, sistemaren begizta irekiko zeroetarantz jotzen dute edo infiniturantz jotzen dute; ondorioz, sistemak egonkortasuna galduko du,  $K_p$  parametroa behar bezain handia denean.

Adibide gisa har dezagun hurrengo begizta irekiko sistemaren transferentzia-funtzioa, eta kalkula ditzagun sistema horren begizta itxiko poloak.

$$H(z) = \frac{z-10}{(z-0,5)^2}$$

$$H_{Bltxia} = \frac{K_p(z-10)}{(z-0,5)^2 + K_p(z-10)}$$

Sistemaren begizta itxiko izendatzailea berdin zero eginez gero, polinomio hau lortuko dugu.

$$(z-0,5)^2 + K_p(z-10) = 0 \Rightarrow z^2 - z + \frac{1}{4} + K_p z - 10K_p = 0$$

Polinomio horren erroak kalkulatz eta erro horien limitea eginez, ikusiko dugu erro batek infiniturantz jotzen duela, eta besteak, sistemaren begizta irekiko zerorantz.

$$z^2 + (K_p - 1)z + \left(\frac{1}{4} - 10K_p\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1 - K_p + \sqrt{(K_p - 1)^2 - 4\left(\frac{1}{4} - 10K_p\right)}}{2} \\ z_2 = \frac{1 - K_p - \sqrt{(K_p - 1)^2 - 4\left(\frac{1}{4} - 10K_p\right)}}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{K_p \rightarrow \infty} z_1 = \lim_{K_p \rightarrow \infty} \frac{(1 - K_p)^2 - (K_p - 1)^2 + 4\left(\frac{1}{4} - 10K_p\right)}{2\left[1 - K_p - \sqrt{(K_p - 1)^2 - 4\left(\frac{1}{4} - 10K_p\right)}\right]}$$

$$\lim_{K_p \rightarrow \infty} z_1 = \lim_{K_p \rightarrow \infty} \frac{1 - 40K_p}{2\left[1 - K_p - \sqrt{(K_p - 1)^2 - 4\left(\frac{1}{4} - 10K_p\right)}\right]}$$

$$\lim_{K_p \rightarrow \infty} z_1 = \lim_{K_p \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{K_p} - 40}{2\left[\frac{1}{K_p} - 1 - \sqrt{\frac{(K_p - 1)^2 - 4\left(\frac{1}{4} - 10K_p\right)}{K_p^2}}\right]} = 10$$

$$\lim_{K_p \rightarrow \infty} z_2 = \infty$$

Ikus daitekeenez, sistemaren begizta itxiko poloak 1 erradioko zirkulutik kanpo egongo dira,  $K_p$  balio jakin batetik gora. Beraz, begizta irekian 1 erradioko zirkulutik kanpo dauden zeroak sistemaren begizta itxiko polo bihurtzen direnez  $K_p$  balio

handietarako, sistemak egonkortasuna galduko du begizta itxian,  $K_p$  balio handi batzuetatik gora.

Lehen mailako sistema izanez gero, errazago uler daiteke efektu hori. Demagun begizta irekian sistema hau dugula.

$$H(z) = \frac{z-10}{z-0,5}$$

Kontroladore proportzional bat izanez gero, sistemaren begizta itxiko transferentzia-funtzioa hau da.

$$H_{Bilxia} = \frac{K_p(z-10)}{(z-0,5) + K_p(z-10)}$$

Sistemaren begizta itxiko poloa honela kalkulatu dugu.  $K_p$  parametroak infiniturantz jotzen duenean, sistemaren begizta irekiko zerorantz joko dugu. Zero hori egonkorra ez denez, begizta irekian,  $K_p$  behar bezain handia denean, sistemak egonkortasuna galduko du.

$$(z-0,5) + K_p(z-10) = 0$$

$$z = \frac{0,5 + 10K_p}{1 + K_p} \Rightarrow \lim_{K_p \rightarrow \infty} z = 10$$

## 7.2 ariketa

Demagun hurrengo sistemaren begizta irekiko transferentzia-funtzioa dugula, eta kontroladore proportzional batekin begizta itxiko dugula.

1. Irudikatu erroen kokapena
2. Zer ondoriozta dezakegu?
3. Kontroladorean zer-nolako aldaketa proposatuko zenuke?

$$H(z) = \frac{z+0,5}{(z-0,5)(z-2)}$$

1. Hasiera batean, kontroladore proportzional batekin aztertuko dugu sistema. Sistemaren jarrera dinamikoa aztertzeko erarik onena sistemaren begizta itxiko

erroen kokapena plano konplexuan irudikatzea da. Matematikoki kalkulatz gero, adierazpen matematiko hauek lortuko ditugu.

$$H_{B/txia}(z) = \frac{\frac{K_p(z+0,5)}{(z-0,5)(z-2)}}{1 + \frac{K_p(z+0,5)}{(z-0,5)(z-2)}} = \frac{K_p(z+0,5)}{(z-0,5)(z-2) + K_p(z+0,5)}$$

$$(z-0,5)(z-2) + K_p(z+0,5) = 0$$

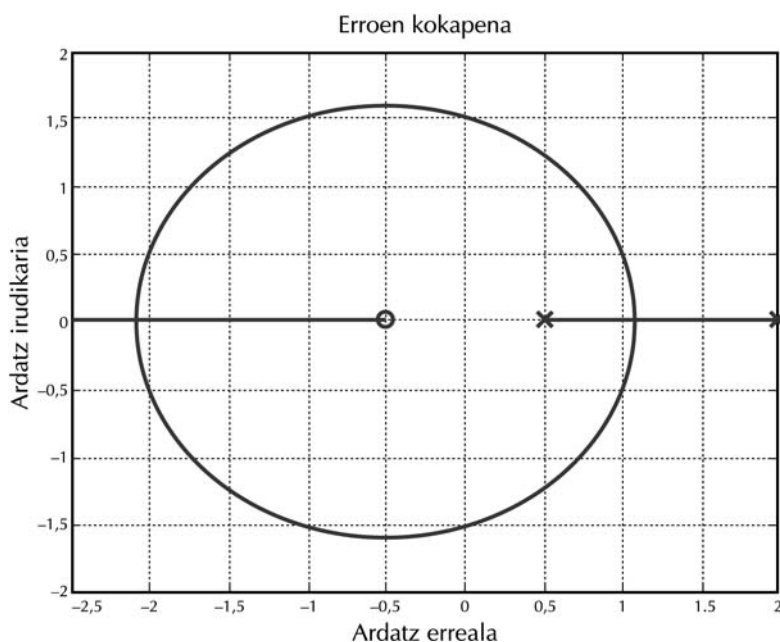
$$z^2 + (K_p - 2,5)z + 1 + \frac{K_p}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{(2,5 - K_p) + \sqrt{(K_p - 2,5)^2 - 4\left(1 + \frac{K_p}{2}\right)}}{2} \\ z_2 = \frac{(2,5 - K_p) - \sqrt{(K_p - 2,5)^2 - 4\left(1 + \frac{K_p}{2}\right)}}{2} \end{cases}$$

$$K_p \in (0, \infty)$$

Sistemaren erroen kokapena irudikatzeko, beraz, hiru aukera ditugu. Aurreko  $z_1$  eta  $z_2$  berdintza matematikoetan  $K_p$  parametroari balioak emanez, erroen kokapena lor daiteke. Bigarren aukera eskuz irudikatzeko, urrats hauei jarraitu behar diegu:

1. Lehenik sistemaren begizta irekiko poloak eta erroak plano konplexuan irudikatu behar ditugu.
2.  $z = a + jb$  plano konplexuko puntu bat erroen kokapenekoak izan dadin,  $H(z)K_p = -1$  berdintza bete behar da. Beraz erroen kokapenekoak diren ardatz errealeko tarteak kalkulatzeko erabiliko dugu azken kondizio hori.
3. Bestetik, erroen kokapenen asintota kopurua eta asintota horien malda eta gurutzatze-puntua lortu behar ditugu.
4. Azkenik erroen kokapena irudikatzea besterik ez dugu egin behar.

Hirugarren aukera da analisi matematikorako programa erabiliz erroen kokapena zenbakizko era baten bidez kalkulatzeko. Hona hemen programa baten bidez lortutako emaitza.



### 7.19 irudia. Erroen kokapena.

Argi dago sistemak beti duela erro bat erradioko zirkulutik kanpo.  $K_p$  parametroak balio txikiak dituenean, erro bat  $z = 0,5$  polotik gertu egongo da, eta bestea, berriz,  $z = 2$  polotik gertu.  $K_p$  balio handiagoetarako, erroak konplexu konjugatuak bilakatzen dira, eta zirkunferentzia bat osatzen dute; baina sistemak dituen erro biek beti 1 erradioko zirkulutik kanpo egongo dira. Beraz, sistema ez da egonkorra. Bestalde,  $K_p$  balio handiagotarako, erro baten moduluak infiniturantz jotzen du; beraz, edozein  $K_p$  baliotarako, begizta itxian ez da izango egonkorra sistema.

Hori hobeto ulertzeko, azter dezagun  $K_p$  parametroaren tarte ezberdinetarako erroen moduluak.

- 1.1 Poloak erro errealak dira, baldin eta  $0 < K_p < 0,3377$  tartean bagaude. Begizta itxiko transferentzia-funtzioaren izendatzailea aztertuz gero, ikus daiteke  $0 < K_p < 0,3377$  edo  $6,6623 < K_p$  betetzean sistemaren begizta itxiko poloak errealak direla.  $K_p = 0$  denean, begizta itxiko poloak  $z = 0,5$  eta  $z = 2$  dira;  $K_p$  handitu ahala,  $z = 0,5$  poloa handituz doa eta  $z = 2$  poloa txikituz.  $K_p = 0,3377$  denean, sistemaren polo biak bat egiten dute. Polo horiek ardatz errealeko  $z = 1,0812$  puntuan bat egiten dute. Beraz,  $K_p < 0,3377$  bada, sistemaren polo bat, gutxienez, 1 erradioko zirkulutik kanpo dago.

- 1.2 Poloak erro konplexu konjugatuak izango dira,  $0,3377 < K_p < 6,6625$  kondizioa betetzen bada.

Sistemaren begizta itxiko poloak konplexu konjugatuak badira, honela idatzi beharko ditugu poloak.

$$\begin{cases} z_1 = \frac{(2,5 - K_p) + j\sqrt{4\left(1 + \frac{K_p}{2}\right) - (K_p - 2,5)^2}}{2} \\ z_2 = \frac{(2,5 - K_p) - j\sqrt{4\left(1 + \frac{K_p}{2}\right) - (K_p - 2,5)^2}}{2} \end{cases}$$

Poloen modulua kalkulatz gero berdintza hau lortuko dugu.

$$|z|^2 = \frac{(2,5 - K_p)^2 + \left(4\left(1 + \frac{K_p}{2}\right) - (K_p - 2,5)^2\right)}{4}$$

$$|z|^2 = \frac{4\left(1 + \frac{K_p}{2}\right)}{4} = \left(1 + \frac{K_p}{2}\right)$$

Beraz, horrenbestez, poloen modulua 1 baino handiagoa izango da,  $K_p$   $0,3377 - 6,6625$  tartean dagoen bitartean.

- 1.3  $K_p$  parametroa 6,6625 baino handiagoa denean, sistemaren poloak erreal bilakatzen dira osteraz; beraz,  $K_p = 6,6625$  denean, sistemak polo bikoitzak izango ditu, eta  $z = -2,0812$  izango da.  $K_p$  handitzean, bi poloak bereizi egingo dira; bi polo horietako batek  $-\infty$  baliorantz joko du, eta besteak,  $z = -0,5$  baliorantz. Horrenbestez, begizta itxian sistema ez da inoiz egonkorra izango.
2. Beraz, aurreko atalean ikusi dugunez, sistema ez da inoiz egonkorra izango eta kontroladorea aldatu beharko dugu.
3. Sistemaren begizta itxiko jarrera dinamikoa aldatzeko, beste kontroladore mota bat proposatu behar dugu. Azken batez, erroen kokapena 1 erradioko zirkulura erakarri behar dugu. Horretarako, zero bat sartu behar dugu kontroladorearen transferentzia-funtzioan. Kontroladore proportzional deribatzaile bat proposatzen dugu erroen kokapena 1 erradioko zirkulura eramateko.

$$K(z) = K_p \frac{z - \alpha}{z}$$

Egitura hori eginez gero, sistemak transferentzia-funtzioa hau izango du begizta irekian:

$$K(z)H(z) = K_p \frac{z - \alpha}{z} \frac{(z + 0,5)}{(z - 0,5)(z - 2)}$$

Erroen kokapenaren adarrak elkartzen diren puntua 1 erradioko zirkuluaren barruan egon dadin,  $\alpha$  parametroa kalkulatu dugu.  $\alpha = 0,5$  eginez gero, erroen kokapena 1 erradioko zirkuluan sartuko da.

$$K(z)H(z) = K_p \frac{(z + 0,5)}{z(z - 2)}$$

$K_p$  parametroari 0,75 balioa emanaz gero, sistemak 0,75 eta 0,5 poloak izango ditu begizta itxian, hots, sistema egonkorra izango da.



# 8

## Digitalizazioa

### 8.1 SARRERA

Aurreko kapituluetan, prozesu laginduen analisia landu dugu batik bat, eta analisi horretan pisu handia izan dute kontrolatu beharreko magnitudearen berrelikadura duten arkitekturek. Aztertu nahi dugun eta guztiz ezaguna den sistema izango da abiapuntua. Arazo garrantzitsu batzuk konpondu ditugu, hala nola begizta itxian egonkortasuna aztertzea, irabazi- eta fase-marjinen balioztapena edota errore iraunkorrak kalkulatzeko. Aitzitik, kapitulu horietan ez dugu sintesiaren arazoa aztertu. Zehazki, eta ezarritako espezifikazio batzuk betetzeko, ez dugu kontrol-algoritmoa dimentsionatu.

Oro har, 8.1 irudian ikusten bezala, sei eratara sintetiza daiteke erreguladore digitala.

Lehen sarbideari dagokionez, Ziegler-Nicholsen metodoa erabili da. Saiakuntza experimental batean oinarritzen da —kontrolatu beharreko prozesuaren begizta irekian edota begizta itxian—, eta  $K(s)$  erreguladore analogikoa da emaitza. Erreguladore hori  $K(z)$  transferentzia-funtzioak irudikatzen duen algoritmoan adierazten da ahalik eta erarik fidelenean. Hori adierazteko aldiari digitalizazio esaten zaio. Eta digitalizazioa da, hain zuzen ere, kapitulu honen helburua.

Erregulatu behar den sistema analogikoan egindako saiakuntza harmoniko batean oinarrituta dago sintetizatzeko bigarren era. Azkenean,  $G(j\omega)$  transferentzia-funtzio

harmonikoa lortzen da. Sintesi guztiz analogikoa dugu hau. Ez da bihurgailu analogiko-digitalik erabiltzen, ez eta digital-analogikorik ere.  $K(s)$  erreguladore analogikoa da emaitza, eta hori da azkenean digitalizatzen dena.

Hirugarren metodoa, berriz, kontrolatu beharreko prozesua zuzentzen duten lege fisikoez baliatzen da; esate baterako, mekanikako, termodinamikako, hidraulikako, elektrizitateko... ekuazioez baliatzen da eredu ezagun bat eratzeko. Lege horiek diferentzialak direnez, lortutako eredua (beharrezkoa bada, funtzionamendu-puntu baten —bai eta funtzionamendu-ibilbide baten— inguruan linealtasuna eratuz eta errore-aldagaiak sartuz)  $G(s)$  transferentzia-funtzio analogikoa da. Sintesi analogikoak  $K(s)$  erreguladore analogikora garamatza, eta, horren ondoren, digitalizatu egiten da.

| Bideak | Urrats analog koak                                         |                                       | Urrats diskret uak                   |                                      |
|--------|------------------------------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1      | Ziegler-Nichols metodoa $\rightarrow K(s)$                 |                                       | Digitalizazioa $\rightarrow K'(z)$   |                                      |
| 2      | Saio harmoniko analogikoa $\rightarrow G(j\omega)$         | Sintesi analogikoa $\rightarrow K(s)$ | Digitalizazioa $\rightarrow K'(z)$   |                                      |
| 3      | Ereduztapena $\rightarrow G(s)$                            | Sintesi analogikoa $\rightarrow K(s)$ | Digitalizazioa $\rightarrow K'(z)$   |                                      |
| 4      | Ereduztapena $\rightarrow G(s)$                            |                                       | Laginketa $\rightarrow H(z)$         | Sintesi diskretua $\rightarrow K(z)$ |
| 5      | Lagindutako saio harmonikoa $\rightarrow H(e^{j\omega h})$ |                                       | Sintesi diskretua $\rightarrow K(z)$ |                                      |
| 6      | Ez dago                                                    |                                       | Ereduztapena $\rightarrow H(z)$      | Sintesi diskretua $\rightarrow K(z)$ |

**8.1 irudia.** Erreguladore digitalaren sintesia. Sinplifikatzearren, sinbolo berarekin adierazi dira transferentzia-funtzioak, baina ez du zertan hala izan.

Laugarren metodoa ere  $G(s)$  eredu ezagunean oinarritzen da, hots, 5. kapituluko irizpideei jarraituz lagindutako ereduan. Lortzen den  $H(z)$  transferentzia-funtzio diskretuak parte hartzen duten fenomeno diskretu guztiak hartzen ditu kontuan. 9. eta 10. kapituluetan adieraziko ditugu sintesi diskretuaren teknika batzuk.

Bosgarren adarra, bestetik, bihurgailu analogiko-digitalak eta digital-analogikoak dituen kontrolatu beharreko sisteman saiakuntza harmoniko diskretua egitean datza. Aldi horretan,  $H(e^{j\omega})$  transferentzia-funtzio harmoniko diskretua lortzen da, sintesi diskretua ahalbidetzen duena.

Seigarren eta azken bidea ez da erregulatu behar den prozesuko lege fisikoetan soilik oinarritzen. Aitzitik, prozesu horretan *in situ* egindako saiakuntza errealekin lortutako emaitzetan oinarritzen da. Identifikazio-prozedura batek **adierazpide-eredu** bat sortzen du; eredu horrek, hain zuzen, kontrolatu beharreko instalazioak duen jokaeraren antzeko jokaera du. Emaizta  $H(z)$  transferentzia-funtzio diskretua da zuzenean. Horrek zuzentzen du kontrolatu beharreko sistema lagindua. Parametro-identifikazio modernoaren teknikak 11. kapituluan aztertuko ditugu.

Esan daiteke lehen hiru metodoetan mundu analogikoa eta mundu digitala bereizten dituen muga kontroladorearen sintesiaren ondoren dagoela (8.1 irudia). Laugarren adarrean, erregulatu beharreko prozesuen digitalizazioari esker, muga hori gainditu egiten da, eredia egin eta berehala. Azkenik, bosgarren eta seigarren adarretako teknikak eremu digitalaren mende daude.

Esan beharra dago, kontrol automatikoko arazo batean, analisi eta sintesi-aldiak errepikaturik gauzatzen direla. Adibidez, oso komenigarria da digitalizazioa egin eta gero egonkortasuna aztertzea begizta itxian. Baliteke-eta azterketa hori egitean beste digitalizazio bat behar izatea.

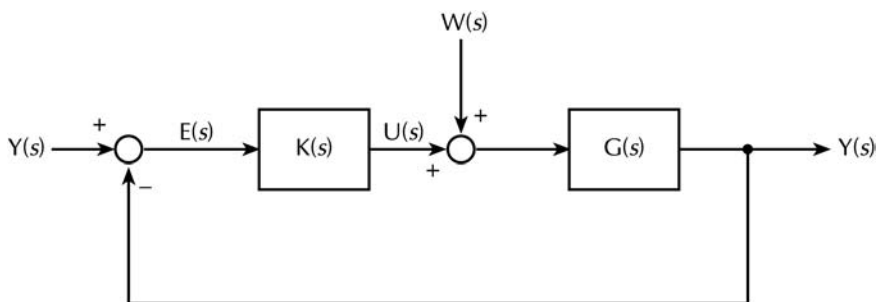
Erreguladore analogikoaren sintesia modu laburrean ekarriko dugu gogora 8.2.1 atalean. Gero, elementua digitalizatzeko dauden zenbait era aztertuko ditugu: 8.2.2 atalean laginketa bidezko hurbilketa aztertuko dugu. Bestalde, 8.2.3 atalean hurbilketa digital batzuk zehaztuko ditugu. Horrez gain, 8.2.4 atalean iruzkin batzuk daude. Erreguladore proportzional integral deribatzailea aztertuko dugu 8.3 atalean. Era estandarrean (8.3.1 atala) eta era inkrementalean egin dugu hori (8.3.2 atala). 8.3.3 atalean aldagai bat ikusiko dugu. Aldagai horretan, gai deribatzailea gainerako ekarpenetatik bereizten da. 8.3.4 atalean, *reset windup* esaten zaion fenomeno ikusiko dugu. Era berean, fenomeno areagotzeko neurri batzuk azalduko ditugu, bai eta ezabatzekeo neurri batzuk ere. 8.3.5 atala, azkenik, gai integralari loturiko arazo digitalen ingurukoa da.

## 8.2 KONTROLADORE ANALOGIKOAREN DIGITALIZAZIOA

### 8.2.1 Kontroladore analogikoaren sintesia

Gogora dezagun kontroladore analogikoaren parametroak zehazteko bi era daudela: lehengo parametroa kalkulu bat da, hain zuzen ere moteltzeko kondizio absolutuak eta erlatiboak esleitzeko poloen tokian egindako kalkulu bat; bigarrena, maiztasun-sintesia da (esate baterako, irabazi- eta fase-marjinak inposatzea). Gainera, errore iraunkorrei buruzko espezifikazio batzuk bete behar dira. Ziegler-Nicholsen metodoa ere aipa daiteke, praktikan oso ezaguna baita beti.

Atal honetan eskaintzen ditugun teknikak edozein kontroladorearen *sintesi guztiz analogikoarekin* hasten dira. Lehen azaldutako hurbilketa horietako bat hautatuz,  $K(s)$  transferentzia-funtzioa lor dezakegu. Aldi horretan erabilitako eskema funtzionalean ez da azaltzen bihurgailu analogiko-digitalik, ez eta digital-analogikorik ere. 8.2 irudian azaltzen da irudi estandarrekin. Irudi horretan,  $G(s)$ -k kontrolatu beharreko sistemako transferentzia-funtzioa ordeztzen du, eta ezagutza bidez lortu da.  $Y_c(s)$  kontsigna da,  $W(s)$  perturbazioa,  $U(s)$  irteera-magnitudea,  $Y(s)$  kontrol-magnitudea, eta  $E(s)$  da  $Y_c(s) - Y(s)$  errorea.

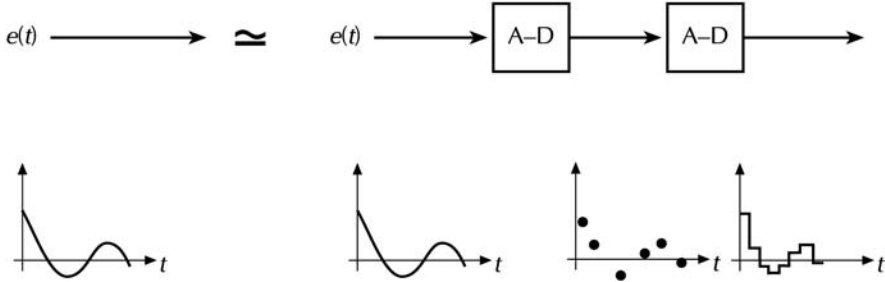


**8.2 irudia.**  $K(s)$  kontrol analogikoa dimentsionatzen parte hartzen duen eskema funtzionala.

### 8.2.2 Kontroladore analogikoaren laginketa

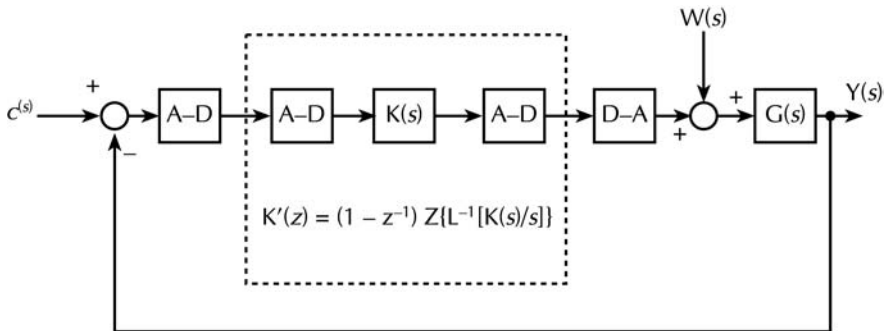
Sintesi analogikotik ondorioztatzen den  $K(s)$  transferentzia-funtzioa mikroprozesadore batek exekuta dezakeen algoritmo bihurtzeko moduetako bat Eulerren *hurbilketan* oinarritzen da. 8.3 irudiko eskeman ikusten den bezala, seriean jarritako bihurgailu analogiko-digitek eta digital-analogikoei seinale analogikoa ia ez itxuraldatzean datza hurbilketa hori. Garbi ikusten da, ezen zenbat eta motzagoa

izan laginketa-periodoa eta zenbat eta polikiago aldatu parte hartzen duten sarrera-seinaleak, orduan eta hurbilketa hobea lortzen dela.



**8.3 irudia.** Kontroladore analogikoaren laginketa bidezko digitalizazioan erabilitako hurbilketa. Sinplifikatzearen, ez da erlojuaren blokea adierazi.

$K(s)$  transferentzia-funtzioa lortzean, A-D eta D-A bihurgailuen artean jarriko dugu, 8.4 irudian agertzen den bezala.

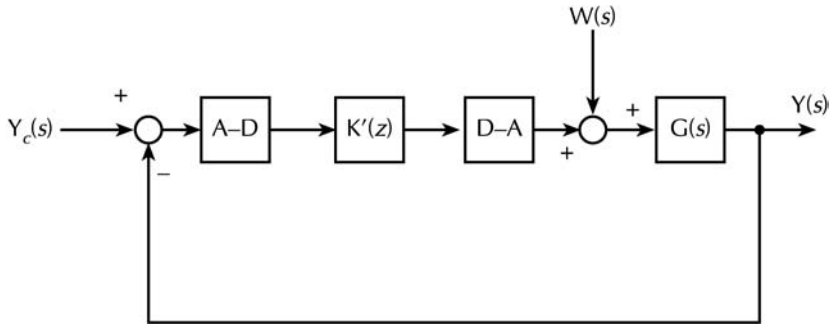


**8.4 irudia.** 8.2 irudiko eskemari A/D eta D/A bihurgailuak gehituz lortzen den aldaketa.

8.4 irudian, D/A bihurgailua,  $K(s)$  transferentzia-funtzio analogikoa eta A/D bihurgailua serieran jartzea azpimarratu dugu puntuen bidez; 5. atalaren arabera, zati hori transferentzia-funtzio diskretuaren bidez zehazten da.

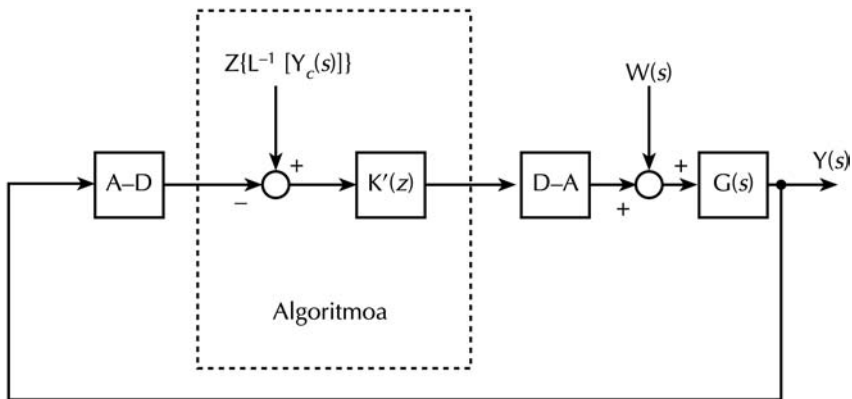
$$K'(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{K(s)}{s} \right] \right\}$$

Hortik, 8.5 irudiko eskema funtzionala ondorioztatu da.



**8.5 irudia.**  $K(s)$ ren laginketatik lortzen den eskema funtzionala.

Bihurgailu analogiko-digitalaren linealtasuna onartuta,  $y_c(t) - y(t)$  seinale analogikoaren lagindutako bertsioak  $y_c(k) - y(k)$  balio du, eta 8.6 irudian azaltzen den aldaketa egin daiteke eskeman. Irudi horretan,  $Z\{L^{-1}[Y_c(s)]\}$  adierazpideak adierazten du  $L^{-1}[Y_c(s)]$  seinale analogikoaren bertsio laginduaren  $z$  transformatua.



**8.6 irudia.** Serbosistemako eta segimenduko muntaiaren era estandarra.

$K'(z)$ ko parametroak balioztatzea erraza da: nahikoa da  $K'(z)$ ri loturiko gehikuntza-ekuazioa kodifikatuz algoritmoa egitea, 5. atalean azertu ditugun urratsei jarraituz.

BIBO egonkorra den  $K(s)$  kontroladore bat ( $K(s)$ ren poloak, ardatz irudikariaren ezkerreko aldean) BIBO egonkorra den  $K'(z)$  kontroladore digital bihurtu behar dugu ( $K'(z)$ ren poloak, 1 erradioko zirkulu barruan) laginketaren edo digitalizazioaren bidez.

## 8.1 adibidea

Demagun transferentzia-funtzioaren kontroladore proportzional integral deribatzaile (PID) analogikoa dugula.

$$G(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} \right)$$

Horrela, kontroladorean iragazki bat dago gai deribatzailean, eta  $T_d/N$  denbora-konstantea du.  $N$  zenbakia 3 eta 20 bitartekoa da eskuarki. Maiz,  $N = 10$  balioa erabiltzen da. Erreguladorean horrelako iragazki bat jartzea gomendatzen da. Hala ere, azken horren sintesian,  $T_d/N$  denbora-konstantea baztertu egin daiteke.

$K_p$ ,  $T_i$  eta  $T_d$  parametroak 8.2.1. atalean adierazi bezala doitu direla onartzen da.

Orduan,

$$G'(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{g}{s} \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} \right) \right] \right\}$$

Kalkulu batzuk egin eta gero, hau lortzen da:

$$K'(z) = K_p \left[ 1 + \frac{\frac{h}{T_i}}{z-1} + \frac{N(z-1)}{z - e^{-N \frac{h}{T_d}}} \right]$$

### 8.2.3 Hurbilketa digitalak

Har dezagun abiapuntutzat sintesi analogiko batetik datorren  $K(s)$  kontroladore bat.

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{b_0 s^m + \dots + b_{m-2} s^2 + b_{m-1} s + b_m}{s^n + \dots + a_{n-2} s^2 + a_{n-1} s + a_n} \quad n \geq m \quad (8.1)$$

Edo, bestela, ekuazio diferentzial bat:

$$u^{(n)}(t) + \dots + a_{n-2} \ddot{u}(t) + a_{n-1} \dot{u}(t) + a_n u(t)$$

$$= b_0 e^{(m)}(t) + \dots + b_{m-2} \ddot{e}(t) + b_{m-1} \dot{e}(t) + b_m e(t)$$

Erlazio hori denboraren arabera adieraziko dugu  $t = kh$ :

$$\begin{aligned} u^{(n)}(kh) + \dots + a_{n-2} \ddot{u}(kh) + a_{n-1} \dot{u}(kh) + a_n u(kh) \\ = b_0 e^{(m)}(kh) + \dots + b_{m-2} \ddot{e}(kh) + b_{m-1} \dot{e}(kh) + b_m e(kh) \end{aligned} \quad (8.2)$$

Atal honetako helburuak diren teknika guztien ideia nagusia da magnitude diferentzialak, hala nola  $\dot{u}(kh)$ ,  $\ddot{u}(kh)$ , ...,  $u^{(n)}(kh)$ ,  $\dot{e}(kh)$ ,  $\ddot{e}(kh)$ , ...,  $e^{(m)}(kh)$  deribatuak, hurbilketa diskretuek ordeztzea.

Lehenik, **Eulerren lehen metodoa** aztertuko dugu:

$$\dot{u}(kh) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(kh+h) - u(kh)}{h} \quad \text{beste berdintza honen bidez hurbil daiteke:}$$

$$\frac{u(kh+h) - u(kh)}{h} \quad (8.3)$$

Era berean,  $\ddot{u}(kh) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dot{u}(kh+h) - \dot{u}(kh)}{h}$  beste honekin ordeztzen da:  $\frac{\dot{u}(kh+h) - \dot{u}(kh)}{h}$ . Eta hori (8.3) adierazpidean ordeztuta, ekuazio hau lortzen da:

$$\begin{aligned} \ddot{u}(kh) &= \frac{\frac{u(kh+2h) - u(kh+h)}{h} - \frac{u(kh+h) - u(kh)}{h}}{h} \\ &= \frac{u(kh+2h) - 2u(kh+h) + u(kh)}{h^2} \end{aligned} \quad (8.4)$$

$n$ -garren deribatua kalkulatzeko bigarren deribatua zenbatesteko teknika bera erabiliko bagenu, ekuazio hau lortuko genuke:

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(n)}(kh) = \frac{u^{(n-1)}(kh+h) - u^{(n-1)}(kh)}{h} \\ u^{(n-1)}(kh) = \frac{u^{(n-2)}(kh+h) - u^{(n-2)}(kh)}{h} \\ \dots \\ \ddot{u}(kh) = u^{(2)}(kh) = \frac{u^{(1)}(kh+h) - u^{(1)}(kh)}{h} \\ \dot{u}(kh) = u^{(1)}(kh) = \frac{u(kh+h) - u(kh)}{h} \end{array} \right. \Rightarrow +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z\{u^{(n)}(kh)\} = \left(\frac{z-1}{h}\right) Z\{u^{(n-1)}(kh)\} \\ Z\{u^{(n-1)}(kh)\} = \left(\frac{z-1}{h}\right) Z\{u^{(n-2)}(kh)\} \\ \dots \\ Z\{u^{(2)}(kh)\} = \left(\frac{z-1}{h}\right) Z\{u^{(1)}(kh)\} \\ Z\{u^{(1)}(kh)\} = \left(\frac{z-1}{h}\right) Z\{u(kh)\} \end{array} \right.$$

Aurreko ekuazioak ordezkatzuz eta Z transformatua aplikatuz, ekuazio hau lortuko dugu:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{z-1}{h}\right)^n U'(z) + \dots + a_{n-2} \left(\frac{z-1}{h}\right)^2 U'(z) + a_{n-1} \left(\frac{z-1}{h}\right) U'(z) + a_n U'(z) \\ &= b_0 \left(\frac{z-1}{h}\right)^m E'(z) + \dots + b_{m-2} \left(\frac{z-1}{h}\right)^2 E'(z) + b_{m-1} \left(\frac{z-1}{h}\right) E'(z) + b_m E'(z) \end{aligned}$$

Berdintza horretan,  $U'(z) = Z\{u(kh)\}$  eta  $E'(z) = Z\{e(kh)\}$ . Transferentzia-funtzioa hau da:

$$K'(z) = \frac{U'(z)}{E'(z)} = \frac{b_0 \left(\frac{z-1}{h}\right)^m + \dots + b_{m-2} \left(\frac{z-1}{h}\right)^2 + b_{m-1} \left(\frac{z-1}{h}\right) + b_m}{\left(\frac{z-1}{h}\right)^n + \dots + a_{n-2} \left(\frac{z-1}{h}\right)^2 + a_{n-1} \left(\frac{z-1}{h}\right) + a_n} \quad (8.5)$$

(8.1) eta (8.5) alderatuta egiaztatu dugu nahikoa dela  $s$  aldagai konplexuaren ordez  $\frac{z-1}{h}$  jartzea  $K(s)$  transferentzia-funtzioa digitalizatzeko

Hurbilketa horri esker  $z = sh + 1$  denez, Erreala(s) < 0, hots ezkerreko planoerdi konplexua, Erreala(z) < 1 planoerdi bihurtzen da: BIBO egonkorra den  $K(s)$  kontroladore analogikoak egonkorra ez den  $K'(z)$  erreguladore digitala bidera dezake. Beraz, ez da  $K(s)$  kontroladore analogikoak digitalizatzeko modu egokia.

## 8.2 adibidea

Demagun, berriz ere, 8.1 adibideko PID kontroladore analogikoa dugula. s-ren ordeztu  $\frac{z-1}{h}$  jartzen badugu, hau lortuko dugu:

$$G'(z) = g \left[ 1 + \frac{\frac{h}{T_i}}{z-1} + \frac{N(z-1)}{z - \left(1 - N \frac{h}{T_d}\right)} \right]$$

Hauek dira sistema horren poloak dauden tokiak: 1 eta  $1 - N \frac{h}{T_d}$ .  $1 - N \frac{h}{T_d}$  polo erreala -1 baino handiagoa da, baldin eta soilik baldin  $h < \frac{2T_d}{N}$  kondizioa errespetatzen bada.

**Eulerren bigarren metodoan**, honela definitzen da  $u(kh)$  deribatua:

$$\dot{u}(kh) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(kh) - u(kh-h)}{h}$$

Adierazpen horren ordeztu beste hau jarri dugu:

$$\frac{u(kh) - u(kh-h)}{h}.$$

Era berean,  $\ddot{u}(kh)$  bigarren deribatuaren ordeztu beste hau jarri da:

$$\frac{\dot{u}(kh) - \dot{u}(kh-h)}{h},$$

non:

$$\frac{\frac{u(kh) - u(kh - h)}{h} - \frac{u(kh - h) - u(kh - 2h)}{h}}{h} = \frac{u(kh) - 2u(kh - h) + u(kh - 2h)}{h^2}$$

(8.2)n dagozkion aldaketak egin eta gero, eta bi atalen  $z$  transformatua hartuta:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1-z^{-1}}{h} \right)^n U'(z) + \dots + a_{n-2} \left( \frac{1-z^{-1}}{h} \right)^2 U'(z) + a_{n-1} \left( \frac{1-z^{-1}}{h} \right) U'(z) + a_n U'(z) \\ &= b_0 \left( \frac{1-z^{-1}}{h} \right)^m E'(z) + \dots + b_{m-2} \left( \frac{1-z^{-1}}{h} \right)^2 E'(z) + b_{m-1} \left( \frac{1-z^{-1}}{h} \right) E'(z) + b_m E'(z) \end{aligned}$$

Azkenean, hau da transferentzia-funtzioa:

$$K'(z) = \frac{U'(z)}{E'(z)} = \frac{b_0 \left( \frac{1-z^{-1}}{h} \right)^m + \dots + b_{m-2} \left( \frac{1-z^{-1}}{h} \right)^2 + b_{m-1} \left( \frac{1-z^{-1}}{h} \right) + b_m}{\left( \frac{1-z^{-1}}{h} \right)^n + \dots + a_{n-2} \left( \frac{1-z^{-1}}{h} \right)^2 + a_{n-1} \left( \frac{1-z^{-1}}{h} \right) + a_n} \quad (8.6)$$

(8.1) eta (8.6) aztertuz gero, *ikusiko dugu  $K(s)$  transferentzia-funtzioa digitalizatzeko  $s$  aldagaiaren ordez beste hau jarri behar dela:*

$$\frac{1-z^{-1}}{h} = \frac{z-1}{hz}$$

Hurbilketa horretan,  $z = \frac{1}{1-sh}$  dugu. Gero,  $s = \sigma + j\omega$  ordezkapena eginda:

$$|z| = \frac{1}{|1-(\sigma + j\omega)h|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\sigma h)^2 + \omega^2 h^2}}$$

$\frac{z-1}{hz}$  hurbilketa erabiliz gero, Erreal(s) < 0 edo ezkerreko planoerdi konplexua

$|z| < 1$  edo 1 erradioko zirkulu bihurtzen da. Beraz, hau da Eulerren bigarren metodoak duen abantaila: BIBO egonkorra den  $K(s)$  kontroladore analogikoak BIBO egonkorra den  $K'(z)$  kontroladore digitala ematen du. Eta hori oso ezaugarri garrantzitsua da.

### 8.3 adibidea

s-ren ordeaz  $\frac{z-1}{hz}$  jartzen badugu, hau izango da PID kontroladore analogikoa:

$$G'(z) = g \left[ 1 + \frac{\frac{h}{T_i} z}{z-1} + \frac{N(z-1)}{\left(1 + N \frac{h}{T_d}\right) z-1} \right]$$

8.2 adibideko erreguladorearen osagai integrala eta orain lortzen dena honela idazten dira:

$$g \frac{\frac{h}{T_i}}{z-1}, \quad g \frac{\frac{h}{T_i} z}{z-1}$$

Edo, bestela:

$$g \frac{\frac{h}{T_i} z^{-1}}{1-z^{-1}}, \quad g \frac{\frac{h}{T_i}}{1-z^{-1}}$$

Bigarren kasuan  $z^{-1}$  faktorea desagertu da, eta faktore horrek laginketa-periodo bati dagokion atzerapena sortzen duenez, kontsignaren eta kontrolatu behar den magnitudearen arteko errore-seinalea *berehala* erabili da. Hori ona izan daiteke laginketa-periodo luzeetarako.

**Hirugarren hurbilketa** ere proposatuko dugu. Horretarako, 8.1 transferentzia-funtzioa s-ren berretura negatiboetan adieraziko dugu.

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{b_0 s^{-(n-m)} + b_1 s^{-(n-m+1)} + \dots + b_m s^{-n}}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} + \dots + a_n s^{-n}} \quad (8.7)$$

Beraz, (8.7) ekuazioa honela idatz daiteke.

$$\begin{aligned} U(s) + a_1 \frac{1}{s} U(s) + a_2 \frac{1}{s^2} U(s) + \dots + a_n \frac{1}{s^n} U(s) \\ = b_0 \frac{1}{s^{n-m}} E(s) + b_1 \frac{1}{s^{n-m+1}} E(s) + \dots + b_m \frac{1}{s^n} E(s) \end{aligned}$$

Azken berdintza hori denboraren mende utzita, honako hau lor dezakegu. Ezkerreko ataleko lehen hirurak baino ez ditugu idatziko:

$$u(t) + a_1 \int_0^t u(\tau) d\tau + a_2 \int_0^t \int_0^\tau u(\sigma) d\sigma d\tau + \dots = \dots$$

Denbora  $t = kh$  eginez, hots denbora diskretizatuz, ekuazio hau lortuko dugu:

$$u(kh) + a_1 \int_0^{kh} u(\tau) d\tau + a_2 \int_0^{kh} \int_0^\tau u(\sigma) d\sigma d\tau + \dots = \dots \quad (8.8)$$

Egin dezagun:

$$i_1(kh) = \int_0^{kh} u(\tau) d\tau$$

$$i_2(kh) = \int_0^{kh} \int_0^\tau u(\sigma) d\sigma d\tau$$

Integral horiek **trapezioaren erregelaren** bidez hurbiltzen dira:

$$i_1(kh) = i_1(kh - h) + \frac{h}{2} [u(kh - h) + u(kh)]$$

$$i_2(kh) = i_2(kh - h) + \frac{h}{2} [i_1(kh - h) + i_1(kh)]$$

**z** transformatuak hartzen baditugu:

$$I_1(z) = z^{-1} I_1(z) + \frac{h}{2} [z^{-1} U'(z) + U'(z)]$$

$$I_2(z) = z^{-1} I_2(z) + \frac{h}{2} [z^{-1} I_1(z) + I_1(z)]$$

Handik hau lortzen da:

$$I_1(z) = z^{-1} I_1(z) + \frac{h}{2} [z^{-1} U'(z) + U'(z)]$$

$$I_2(z) = z^{-1} I_2(z) + \frac{h}{2} [z^{-1} I_1(z) + I_1(z)]$$

Adierazpen horiek 8.8. ekuaziora eramango ditugu. Aldez aurretik  $z$  transformatua ezarri zaie bi atalei.

$$\begin{aligned} U'(z) + a_1 \frac{h}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} U'(z) + a_2 \left( \frac{h}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right)^2 U'(z) + \dots + a_n \left( \frac{h}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right)^n U'(z) \\ = b_0 \left( \frac{h}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1} \right)^{n-m} E'(z) + b_1 \left( \frac{h}{2} \cdot \frac{z-1}{z+1} \right)^{n-m+1} E'(z) + \dots + b_m \left( \frac{2}{h} \cdot \frac{z-1}{z+1} \right)^n E'(z) \end{aligned}$$

Hortik ondorioztatzen denez, hau da transferentzia-funtzio diskretua:

$$\begin{aligned} K'(z) = \frac{U'(z)}{E'(z)} = \\ = \frac{b_0 \left( \frac{h}{2} \cdot \frac{z-1}{z+1} \right)^{-(n-m)} + b_1 \left( \frac{h}{2} \cdot \frac{z-1}{z+1} \right)^{-(n-m+1)} + \dots + b_m \left( \frac{h}{2} \cdot \frac{z-1}{z+1} \right)^{-n}}{1 + a_1 \left( \frac{2}{h} \cdot \frac{z-1}{z+1} \right)^{-1} + a_2 \left( \frac{2}{h} \cdot \frac{z-1}{z+1} \right)^{-2} + \dots + a_n \left( \frac{2}{h} \cdot \frac{z-1}{z+1} \right)^{-n}} \quad (8.9) \end{aligned}$$

(8.7) eta (8.9) alderatu eta gero, argi geratu da *nahikoa dela  $s$  aldagai konplexuaren ordeztu  $\frac{2}{h} \cdot \frac{z-1}{z+1}$  jartzea  $K(s)$  transferentzia-funtzioa digitalizatzeko.*

Hurbilketa horri **Tustin-en hurbilketa** esan ohi zaio.

Tustin-en hurbilketak sortzen duen  $K'(z)$  transferentzia-funtzioaren egonkortasuna aztertzeko lehenik  $z = \frac{1+s \frac{h}{2}}{1-s \frac{h}{2}}$  Tustin-en hurbilketa aztertuko dugu,  $s = \sigma + j\omega$

eginez:

$$|z| = \left| \frac{1 + (\sigma + j\omega) \frac{h}{2}}{1 - (\sigma + j\omega) \frac{h}{2}} \right| = \sqrt{\frac{(1 + \sigma)^2 + \left(\omega \frac{h}{2}\right)^2}{(1 - \sigma)^2 + \left(\omega \frac{h}{2}\right)^2}}$$

Beraz,  $|z| < 1$  dugu, baldin  $\sigma < 0$  bada: Erreal(a)s < 0 edo ezkerreko planoardi konplexua  $|z| < 1$  edo 1 erradioko zirkulu bihurtzen da. Beraz, Tustinen hurbilketarekin, BIBO egonkorra den  $K(s)$  kontroladore analogiko batek BIBO egonkorra den  $K'(z)$  kontroladore digitala sortzen du.

## 8.4 adibidea

$s = \frac{2}{h} \cdot \frac{z-1}{z+1}$  baldin bada, PID kontroladore analogikoa hau da:

$$G'(z) = g \left[ 1 + \frac{\frac{h}{2T_i}(z+1)}{z-1} + \frac{N(z-1)}{\left(1 + N \frac{h}{2T_d}\right)z - \left(1 - N \frac{h}{2T_d}\right)} \right]$$

### 8.2.4 Iruzkinak

Kontroladore analogikoa orain arte azaldutako metodoren batekin digitalizatuz, jokaera zuzenak lortzen dira, baldin eta laginketa-periodoa ongi hautatu bada. Teorikoki, hobe da laginketa-periodoa motza izatea. Nolanahi ere, hurrengo atalean argituko ditugun arrazoi digitalak direla-eta, ez da inolaz ere komeni balio batetik behera jaistea.

Digitalizazioan ez dira kontuan hartzen bihurgailu analogiko-digitalak eta digital-analogikoak. Izan ere, kontroladorearen sintesia guztiz eredu analogikoan oinarritzen da. Gainera, kontroladore proportzionalen kasuan izan ezik,  $K(s)$  transferentzia-funtzio analogiko batetik  $K'(z)$  transferentzia-funtzio diskretura pasatzeko urratsa hurbilketaz beterik dago. Ezinezkoa da sintesi analogikoan aurreikusitako emaitzak (fase- eta irabazi-marjinak, moteltze-kondizioak eta egonkortasuna bera) ezarpen erreal laginduan jasotzea.

## 8.5 adibidea

Azter dezagun sistema hau. Transferentzia-funtzio hau du begizta irekian.

$$G(s)_{\text{Begizta irekian}} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Kontroladore proportzional digitala digitalizazio bidez sintetizatzen da.  $K_p = 1$  aukeratu dugu digitalizazioaren bidez, eta begizta itxiko transferentzia-funtzio hau lortu dugu.

$$G(s)_{\text{Begizta itxia}} = \frac{s^2 + s + 1}{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 3s + 2}$$

Laginketa-periodoa  $h = 0,5$  segundo izanik, hau da begizta itxian dugun transferentzia-funtzioa:

$$H_{Bltxia}(z) = \frac{0,1044 z^3 - 0,05933 z^2 - 0,06149 z + 0,05355}{z^4 - 2,723 z^3 + 3,153 z^2 - 1,777 z + 0,4214}$$

Laginketa-periodoa  $h = 0,25$  segundo izanik, hau da begizta itxian dugun transferentzia-funtzioa:

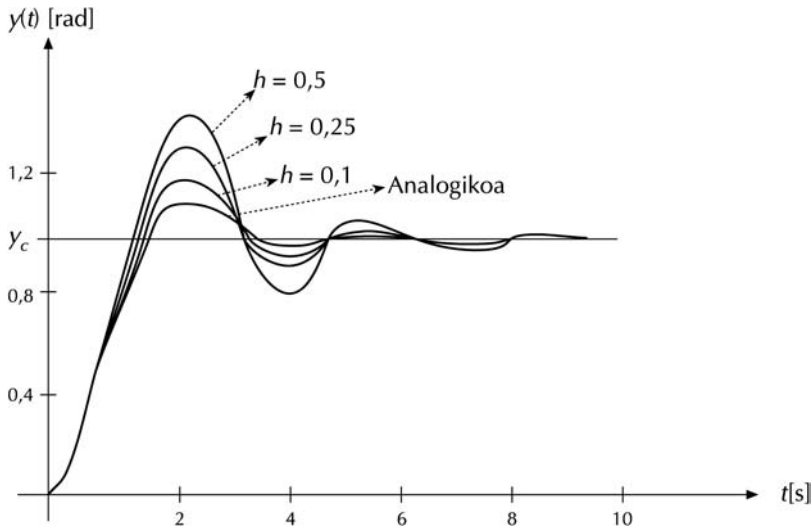
$$H_{Bltxia}(z) = \frac{0,02865 z^3 - 0,02303 z^2 - 0,02312 z + 0,02053}{z^4 - 3,419 z^3 + 4,506 z^2 - 2,708 z + 0,6271}$$

Laginketa-periodoa  $h = 0,1$  segundo izanik, hau da begizta itxian dugun transferentzia-funtzioa:

$$H_{Bltxia}(z) = \frac{0,004833 z^3 - 0,004486 z^2 - 0,004487 z + 0,00423}{z^4 - 3,786 z^3 + 5,397 z^2 - 3,434 z + 0,823}$$

Ikus daitekeen bezala, sistemaren jarrera dinamikoa aldatuz doa  $h$  laginketa-periodoaren arabera. Ondorengo irudian indize-erantzunak adieraziko ditugu begizta itxian, lehenik P erreguladore analogikoarekin, eta gero  $h = 0,1$ ;  $0,25$ ; eta  $0,5$  [s] laginketa-periodoak hautatuz.

Ikusten denez, jarrera dinamikoa degradatu egiten da  $h$  gora doan heinean. Hor  $K(s) = K_p = K'(z)$  denez, aukeratutako digitalizazioa edozein izanda ere, sintesi analogikoan A/D eta D/A bihurgailuak kontuan ez hartzea da degradazioaren arrazoa.



**8.7 irudia.** Indize-erantzuna,  $h$  laginketa-periodoko hainbat baliotarako erreguladore analogiko eta digitalekin.

Seriean muntatutako A/D eta D/A bihurgailuak oso landua ez den eran irudika daitezke  $F'(j\omega) = \frac{1}{h} F(j\omega)$  transferentzia-funtzio harmoniko analogikoaren bidez.

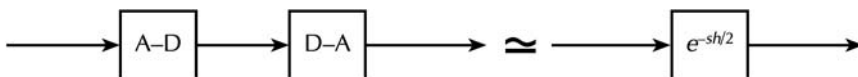
Funtzio horretan  $F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega h})$ , baldin  $\omega \gg \omega_N$ . Ondoren,

$1 - j\omega h + \frac{(j\omega h)^2}{2}$  -ra hurbiltzen badugu  $e^{-j\omega h}$ , hau lortuko dugu:

$$F'(j\omega) = \frac{1}{j\omega h} \left\{ 1 - \left[ 1 - j\omega h + \frac{(j\omega h)^2}{2} \right] \right\} = 1 - j\omega \frac{h}{2}$$

$1 - j\omega \frac{h}{2}$  adierazpena  $e^{-j\omega h/2}$ -ren hurbilketatzat har daiteke. Beraz, oro har, A/D eta

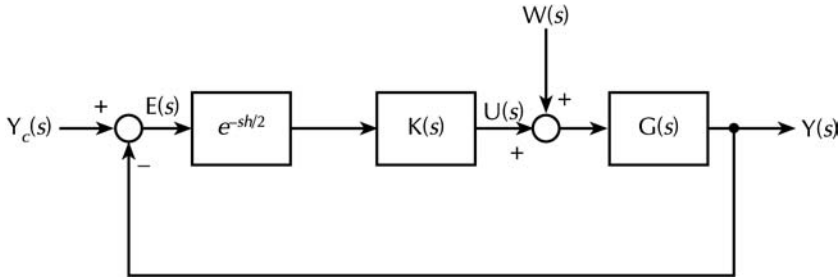
D/A bihurgailuek laginketaren periodoerdi bati dagokion atzerapen hutsa sortzen dute, 8.8 irudiko eskeman ikusten den bezala.



**8.8 irudia.** D/A eta A/D bihurgailuen eredu analogiko landugabea.

Jada badakigu atzerapen hutsak segimendu digitalean nolako eragin txarra duen, fase-marjina galtzeari dagokionez batez ere.

Sintesi analogikoa aztertzean bihurgailuen eragina kontuan hartzeko modu bat dugu: 8.2 irudiko eskema funtzionalean  $e^{-sh/2}$  elementu betegarria sartzen da serieran. Hori da 8.9 irudian egin duguna, hain zuzen.



**8.9 irudia.**  $G(s)$  kontrol analogikoa dimentsionatzen parte hartzen duen eskema funtzional doitua.

Nabarmen dezagun  $e^{-sh/2}$  adierazpena  $\frac{1}{e^{s\frac{h}{2}}}$  gisa ere idatz daitekeela, eta, beraz,  $\frac{1}{1+s\frac{h}{2}}$  funtzio arrazionalaren bidezko hurbilketa gisa. Era berean, funtzio hori  $\frac{e^{-s\frac{h}{4}}}{e^{s\frac{h}{4}}}$  ere idatz daiteke. Azken adierazpen hori  $\frac{1-s\frac{h}{4}}{1+s\frac{h}{4}}$  Pade-ren hurbilketarekin ordezka daiteke.

Hori eginez gero, eredu analogikoa doitu beharrean, sintesi analogikoa  $h$  laginketa-periodoaren mende jartzen dugu, zoritxarrez. Horren ondorioz,  $h$  aldatuz gero, beste sintesi analogiko oso bat behar da.

## 8.3 KONTROLADORE PROPORZIONAL INTEGRAL DERIBATZAILE DIGITALA

### 8.3.1 Era estandarra

8.1 eta 8.4 adibideek praktikan asko erabiltzen den algoritmo partikular baten aldaera batzuk islatzen dituzte: kontroladore proporzional integral deribatzaile (PID) digitala. Gai

proportzional, integral eta deribatzaileen arrazoi fisikoak eta segimendu analogikoan aurreratu diren arrazoiak berak dira. Zehazki, integrazioak  $z = 1$  polo sartzen du, eta horrek serbosistema-egiturako eta kontrol-egiturako motak handitu egiten ditu. Deribazioari dagokionez, eragin egonkortzailea du bere jarrera aurreratzaileari esker.

$\frac{1}{T_i s}$  gai integrala digitalizatzeko, nahiago izaten da Eulerren lehen metodoa.

Aldiz,  $\frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}}$  gai deribatzaileko hobe da Eulerren bigarren metodoa. Horren

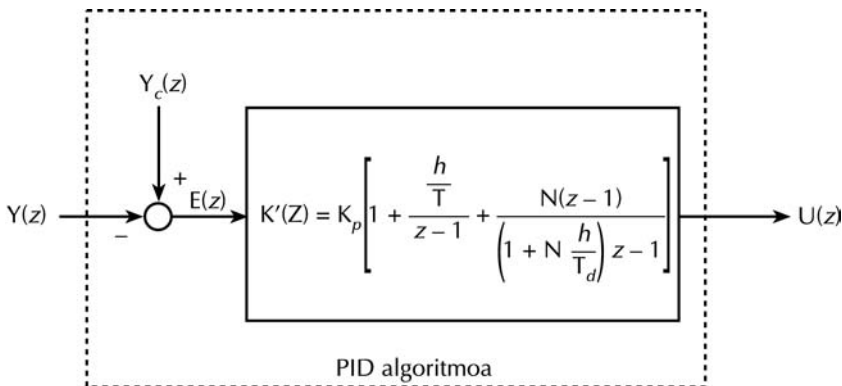
ondorioz, transferentzia-funtzio diskretu hau lortzen da:

$$K'(z) = K_p \left[ 1 + \frac{\frac{h}{T_i}}{z-1} + \frac{N(z-1)}{\left(1 + N \frac{h}{T_d}\right) z - 1} \right] \quad (8.10)$$

8.2 adibidean adierazten den bezala, Eulerren lehen metodoa saihestu egiten da gai deribatzaileko; izan ere, egonkortasuna bermatzen da horrela, laginketa-periodoa edozein izanda ere. Beste batzuetan, Eulerren bigarren metodoa erabiltzen da gai integralarekin. 8.3 adibidean eman dugu horren azalpena.

8.10 erreguladoreari **posizio-forma** deritzo; lastertasun-forma edo forma inkremental bat da, eta 8.3.2 atalean azaltzen da.

PID algoritmo estandarren eskema funtzionala 8.10 irudian azaltzen da. Irudi horretan,  $Y_c(z)$  kontsigna irudikatzen du,  $U(z)$  kontrol-magnitudea,  $Y(z)$  kontrolatutako magnitudea eta  $E(z)$ k, berriz,  $Y_c(z) - Y(z)$  errorea.

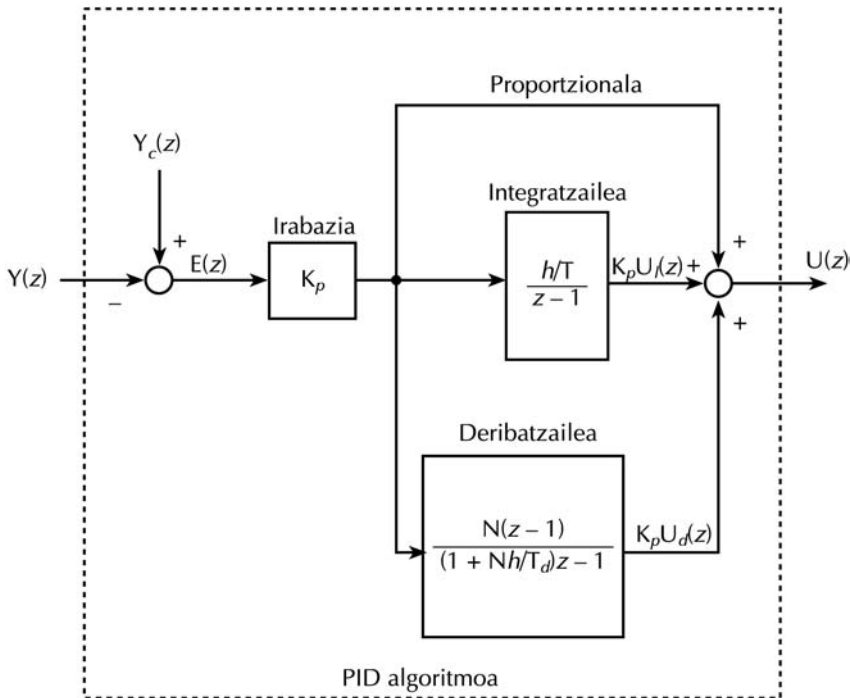


8.10 irudia. PID algoritmo digitalaren eskema funtzionala.

$K'(z)$  transferentzia-funtzioak zehaztutako gehikuntza-ekuazioaren bidez algoritmoa zuzenean kodifikatu aurretik, komeni da gai proportzional, integral eta deribatzaileak bereiztea. 8.11 irudiko eskema funtzional aldatuak argitasunez bereizita erakusten ditu, batez ere, erreguladorearen  $K_p$  **irabazia**, haren gai

proportzionala,  $\frac{h}{T_i}$  gai integrala eta  $\frac{N(z-1)}{\left(1+N\frac{h}{T_d}\right)z-1}$  gai deribatzailea.

Garrantzitsua da ikustea orain definitutako  $K_p$  irabazia eta  $K_p \frac{h}{T_i}$  irabazi estatikoa ezberdinak direla.



**8.11 irudia.** PID algoritmoaren eskema funtzionala, gai proportzionala, integrala eta deribatzailea bereizita.

Definizioz, honako hau jartzen da:

$$U_i(z) = \frac{h}{T_i} E(z)$$

$$U_d(z) = \frac{N(z-1)}{\left(1 + N \frac{h}{T_d}\right)z - 1} E(z)$$

Ekuazio horiek  $z$ -ren berretzaile negatiboekin idatziko ditugu, kontroladorearen gehikuntza-ekuazioak lortzeko:

$$U_i(z) = \frac{\frac{h}{T_i} z^{-1}}{1 - z^{-1}} E(z)$$

$$U_d(z) = \frac{N(1 - z^{-1})}{1 + N \frac{h}{T_d} - z^{-1}} E(z)$$

Beraz, kodifikatzeko gertu dagoen algoritmo hau lortzen da:

$$\begin{aligned} e(kh) &= y_c(kh) - y(kh) \\ u_i(kh) &= u_i(kh-h) + \frac{h}{T_i} e(kh-h) \end{aligned} \quad (8.11)$$

$$u_d(kh) = \frac{T_d}{T_d + Nh} \{u_d(kh-h) + N[e(kh) - e(kh-h)]\} \quad (8.12)$$

$$u(kh) = K_p [e(kh) + u_i(kh) + u_d(kh)] \quad (8.13)$$

8.12 adierazpenean  $e(kh) - e(kh-h)$  *kenketa* ikusi dugu. Lagin horiek, hots,  $e(kh)$  eta  $e(kh-h)$  laginek balio bera izango dute laginketa-periodoa oso txikia denean. Horrelakoetan, laginen arteko aldea balioztatzean benetan garrantzitsu bilakatzen dira kuantifikazioa eta biribiltze-erroreak. Beraz, praktikan, laginketa-periodorako ez da arrazoizkoa muga jakin batetik behera jaistea.

PID erreguladoreari dagokion osagaia edota osagaiak kenduz lortzen dira P erreguladore digital proportzionalak, PI erreguladore proportzional integralak eta PD erreguladore proportzional deribatzaileak. Hona hemen horien transferentzia-funtzioak:

$$K'(z) = K_p$$

$$K'(z) = K_p \left( 1 + \frac{\frac{h}{T_i}}{z-1} \right)$$

$$K'(z) = K_p \left[ 1 + \frac{N(z-1)}{\left(1 + N \frac{h}{T_d}\right) z - 1} \right]$$

### 8.3.2 Era inkrementala

PID erreguladore digitalaren **era inkrementala** edota **lastertasun-era** bat badago. Forma horretan, ez da  $u(kh)$  kontrol-magnitudea balioztatzen (8.10 transferentzia-funtziotik ondorioztatu da magnitude hori),  $\Delta u(kh) = u(kh) - u(kh-h)$  **gehikuntza** edo **eguneratzea** baizik. Hauxe dugu:

$$\begin{aligned} \Delta U(z) &= Z\{\Delta u(kh)\} \\ &= (1 - z^{-1})U(z) \\ &= (1 - z^{-1})K_p(z)E(z) \\ &= \frac{z-1}{z}K_p \left[ 1 + \frac{\frac{h}{T_d}}{z-1} + \frac{N(z-1)}{\left(1 + N \frac{h}{T_d}\right) z - 1} \right] E(z) \\ &= K_p \left[ \frac{z-1}{z} + \frac{h}{T_d z} + \frac{N(z^2 - 2z + 1)}{\left(1 + N \frac{h}{T_d}\right) z^2 - z} \right] E(z) \end{aligned}$$

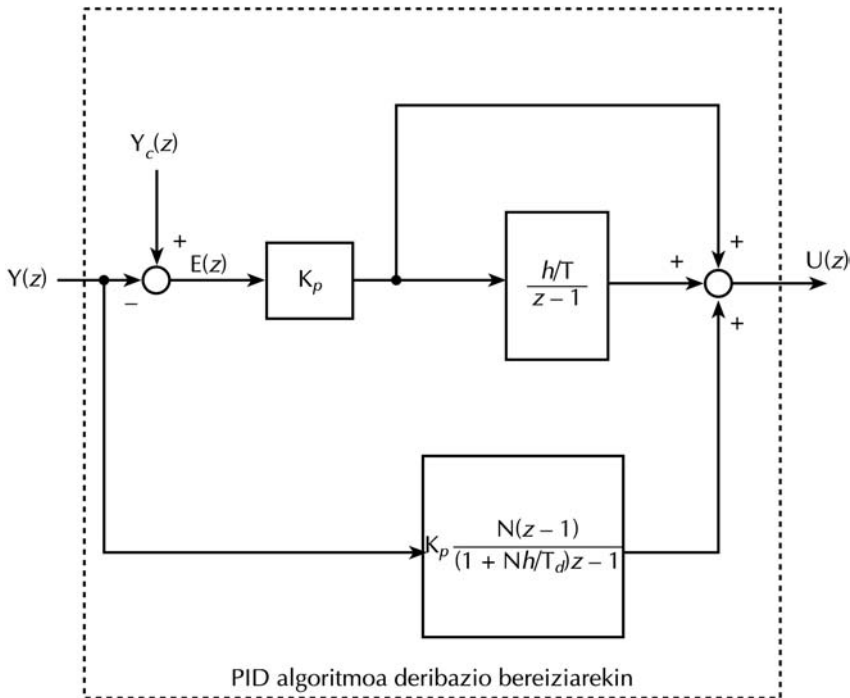
Hortik, azkenean, ikusten da PID kontroladorearen  $K_t(z)$  transferentzia-funtzioaren forma inkrementala hau dela:

$$K'_t(z) = \frac{\Delta U(z)}{E(z)} = K_p \left[ \frac{z-1}{z} + \frac{h}{T_d z} + \frac{N(z^2 - 2z + 1)}{\left(1 + N \frac{h}{T_d}\right) z^2 - z} \right]$$

Konfigurazio horretan, PID algoritmo digitala  $kh$  laginketa-periodoan hasten da,  $e(kh)$  errore-kalkuluarekin. Horren atzetik  $\Delta u(kh)$ rena dator,  $K_t(z)$ tik lortutako gehikuntza-ekuazioaren arabera. Azkenik,  $u(kh) = u(kh-h) + \Delta u(kh)$  eguneratze-eragiketatik dator, non  $u(kh-h)$  zenbakia memoriatik ateratzen baita. Eguneratze hori integrazio digitala baino ez da, eta batzuetan erreguladorearen kanpoko aldean egiten da.

### 8.3.3 Deribazio banatua

8.11 irudiko PID egiturak badu eragozpen bat, kontrol-magnitudearen anplitude handiak sortzen baititu kontsigna-aldaketa bortitzak daudenean; 1 erradioko jauzi baten aurrean PID kontroladoreak duen erantzuna, esate baterako. Argi eta garbi ikusten da fenomenoak gai deribatzaileak sortua dela. Arazo hori konpon daiteke, ordea;  $e(kh) = y_c(kh) - y(kh)$  errorea deribatu beharrean,  $y(kh)$  bakarrik deribatu baino ez da egin behar. Hori ikusten da 8.12 irudian.



**8.12 irudia.** PID algoritmo digitalaren eskema funtzionala, kontrolatu beharreko magnitudeetik bereizitako deribazioarekin.

### 8.3.4 Antireset Windup (Gaingitze-berrezartzearen aurkako kontroladoreak)

Kontroladorearen gai integralak arreta berezia eskatzen du. Izan ere,  $y_c(kh)$  kontsignaren eta  $y(kh)$  magnitude kontrolatuaren arteko  $e(kh)$  errore-seinala denbora luzez handia denean,  $K_p u_i(kh)$  gai integralak balio handia har dezake (ikusi 8.11 irudia). Horren ondorioz, erreguladoreak  $u(kh)$  kontrol-magnitude handiak sortzen ditu nahitaez. Erreguladore ostean dauden elementuek ezin dituzte jasan  $u(kh)$  balio handiegia.

Esate baterako, eragingailuetan gertatzen da hori; beraz, gai integrala etengabe hazten denez, asetzearen mugara heltzen gara. Sistemak jasan dezakeen  $u(kh)$  balio handienari sistemaren osatze-muga deritzogu.

Denbora-tarte handia behar da integratzailea uzteko, hots, matematikoki, asetze-eremutik irteten den kontrol-magnituda sortu eta eremu linealera itzuli baino lehen  $K_p u_i(kh)$  seinalearen anplitudea murrizteko. Itzultze horretan,  $e(kh)$  erroreaken zeinua nahitaez aldatzen da; beraz, gainditu egiten da. Besterik gabe hautatu dugun ingelesezko terminologian, kualitatiboki azalduko dugun jokabide horren izena **reset windup** edo **integral windup** da. Gainditze handiak sortzen ditu, bai eta oszilazioak ere. Sistema itxiaren egonkortasuna ere honda dezake. Sintesian aurreikusi ez diren erantzun horiek domeinu ez-linealera ateratzen diren asetzeen ondorio dira. Soilik analisi ez-linealarekin (askotan oso konplexua izaten da) eta simulazioekin lortzen da *integral windup* deritzona kuantitatiboki ulertzea.

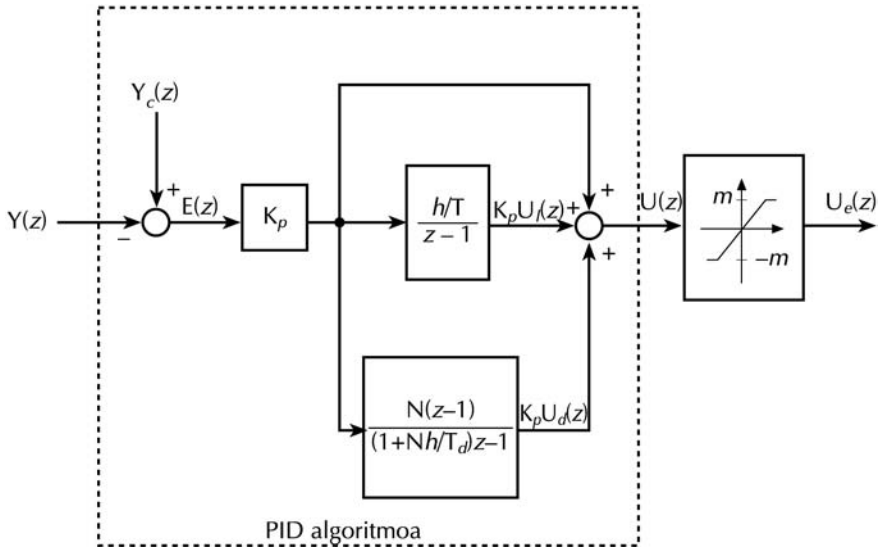
Hasieratik esan behar dugu ezinezkoa dela *integral windup* egotea forma inkrementaleko erreguladorea badago, integrazioa kanpotik egiten delako. Asetzea gertatzen denean,  $\Delta u(kh)$  gehikuntzak ez dira gehiago kontuan hartzen, eta  $u(kh) = u(kh - h) + \Delta u(kh)$  integrazioa ez da egiten.

*Integral windup* fenomenoak saihesteko edo moteltzeko, hainbat neurri har ditzakegu, baita neurri enpirikoak ere. Neurri horiei **antireset windup** edo **gai integralaren zuzenketa** esaten zaie. Hurrengo lerrootan azalduko ditugu praktikan jartzeko neurri errazak.  $K_p u_i(kh)$  gai integralaren kudeaketa adimendunean oinarrituta daude. Interesgarria da adieraztea horiek erraz kudea daitezkeela kontroladore digitaletan; bestalde, kontroladore analogikoetan, malgutasunik eza dela eta, politika sinplistik baino ez dira kontuan hartzen.

Aurrerantzean, kontroladorearen aurrean jarritako asetze-eredu orokorra erabiliko da. Onartzen dugu kontrolatzeko prozesuan emandako  $u_e(kh)$  kontrol eraginkorreko magnitudeak  $-\mu$  eta  $\mu$  artean egon behar duela, non  $\mu$  zenbakia positiboa baita eta sistemaren asetze-muga baiteritzogu.

$$u_e(kh) = \begin{cases} \mu & \text{si } u(kh) > \mu \\ u(kh) & \text{si } u(kh) \in [-\mu, \mu] \\ -\mu & \text{si } u(kh) < -\mu \end{cases}$$

Sinpletasuna lortzearen, linealtasunik eza simetrikoa dela jotzen da. Gai integralen zuzenketa egiteko, 8.11 irudiko eskema funtzional estatikoa aldatu behar dugu elementu ez-lineal batekin. Elementu horrek erreguladoreak baino asetze-muga apalagoa du (8.13 irudia).



**8.13 irudia.** PID algoritmoaren eta kontrol-magnitudearen asetzearen eskema funtzionala.

**1.- Baldintzapeko integrazio** deritzon lehen *antireset windup* teknika gai integrala kontuan ez hartzean datza, baldin eta kontsignaren eta kontrolatu beharreko magnitudearen arteko errorea, balio absolutuan, behar bezain ahula ez bada. 8.11. berdintza beste honekin ordeztzen da:

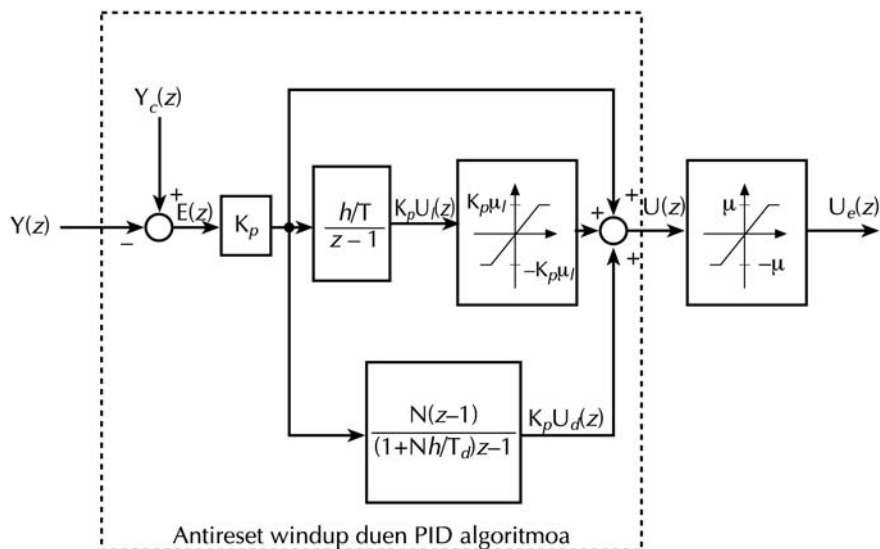
$$u_i(kh) = \begin{cases} 0 & \text{si } |e(kh)| > \varepsilon \\ u_i(kh-h) + \frac{h}{T_i} e(kh-h) & \text{si } |e(kh)| \leq \varepsilon \end{cases}$$

$\varepsilon$  zenbaki positiboa simulazio bidez edo esperimentu bidez doitzen da.

**2.-** Gai integralaren mugapenean oinarritutako *Antireset windup* delakoa lortzeko beste era bat da **gai integralaren balioak mugatzea**, kontrol-magnitudearen asetze-mugak bezalakoak edo txikiagoak izan daitezen. Hori eginez gero, 8.11 eta 8.12 erlazioen artean lerro hau sartu behar da.

$$u_i(kh) = \begin{cases} \mu_i & \text{si } u_i(kh) > \mu_i \\ -\mu_i & \text{si } u_i(kh) < -\mu_i \end{cases}$$

$\mu_i$  zenbakia positiboa da. Kontrol-magnitudearen  $\mu$  asetze-mugak  $K_p \mu_i$  baino handiagoa edo hura bezalakoak izan behar du. 8.14 irudian dago *antireset windup* teknika hori gauzatzen duen PID algoritmoa.



**8.14 irudia.** Gai integrala mugatzearen bidezko *antireset windup* teknikaren PID algoritmoaren eskema funtzionala.

**3.-** Beste aukera bat da **integrazioa blokeatzea**, kontrol-magnitudea asetze-egoeran egon eta gero. Jarraibide hauek sartu behar dira 8.13 ekuazioaren eta digital/analogiko bihurtzearen artean, 8.13 ekuaziotik lortutako  $u(kh)$  zenbakiak  $|u(kh)| > \mu$  inekuazioa betetzen duenean soilik.

$$u_i(kh) = u_i(kh - h)$$

$$u(kh) = K_p [e(kh) + u_i(kh) + u_d(kh)]$$

Aurreko hurbilketarekin alderatuta, gai integralean ezarritako muga-balioa aldakortzat har daiteke orain, bai eta  $K_p e(kh)$  eta  $K_p u_d(kh)$  beste ekarpen batzuen mendekotzat ere.

1. eta 2. *antireset windup* neurriek ez dute bermatzen  $|u(kh)| \leq \mu$  inekuazioan ebakidura segurua egiaztatzen duen  $u(kh)$  seinalea sortuko denik; beste era batera esanda, sistema ase daiteke. Hala ere, metodo honek duen alde erakargarria da gai integralak, neurri handi batean, esanahi fisikoa gordetzen duela. 3. teknikak, hots, **antireset windup estandar** deritzonak, ez du halako abantailarik: gai integrala gutxitu ere egin daiteke kontsignaren eta kontrolatutako magnitudearen arteko errorearen erroreak gora egiten duenean. Aitzitik,  $|u(kh)| \leq \mu$  inekuazioa ez da inoiz ere urratzen. *Antireset windup* estandarrek oinarritzat hartzen duen kontzeptua zera da; berriz kalkulatzeko 8.13. ekuaziotik lortu den  $u(kh)$  kontrol-magnitudea

asetze-egoeran dagoenean; alegia,  $u(kh) > \mu$  edo  $u(kh) < -\mu$  denean,  $K_p u_i(kh)$  gai integralak  $u(kh)$  kontrol-magnitude berria sortzen du, eta magnitude horrek  $\mu$  edo  $-\mu$  balioak hartzen ditu, hurrenez hurren. Beraz, baldin eta 8.13 ekuazioa gauzaturik  $u(kh) > \mu$  lortzen bada,  $K_p u_i(kh)$  gai integral aldatuak berdintza hau bete behar du:

$$K_p u_i(kh) = \mu - K_p [e(kh) + u_d(kh)]$$

eta  $u(kh) < -\mu$  gertatzen denean:

$$K_p u_i(kh) = -\mu - K_p [e(kh) + u_d(kh)]$$

Horren ondorioz, 8.13 berdintzaren eta digital/analogiko bihurtaren artean jarraibide hauek gehituz aktibatzen da *antireset windup* estandarra delakoa:

$$u_i(kh) = \begin{cases} \frac{\mu}{K_p} - e(kh) - u_d(kh) & \text{baldin, } u(kh) > \mu \\ -\frac{\mu}{K_p} - e(kh) - u_d(kh) & \text{baldin, } u(kh) < -\mu \end{cases}$$

$$u(kh) = K_p [e(kh) + u_i(kh) + u_d(kh)] \quad \text{baldin, } u(kh) \notin [-\mu, \mu]$$

### 8.3.5 Integrazio-errorea

PID erreguladore digitalaren gai integrala 8.11 ekuazioaren arabera balioztatzen da. Hona hemen errepikatuta:

$$u_i(kh) = u_i(kh - h) + \frac{h}{T_i} e(kh - h)$$

Berdintza horren ondorioz,  $\frac{h}{T_i} e(kh - h)$  adierazpena lortzen da;  $u_i(kh)$  sortzearren,  $u_i(kh - h)$ ri eginiko aldaketatzat interpreta daiteke.  $h$  laginketa-periodoa kuantifikatze-ataria baino askoz ere txikiagoa denean, nulua izango da,  $e(kh - h)$  errorea zero ez izan arren. Fenomeno gogaikarri horrek errore iraunkor bat sortzen du (ekintza integral analogikoan ez dago halakorik). Errore horrek **integrazio-errore** izena hartzen du.

Jakina denez, gai integrala barne hartzen duten kalkulu guztietan hitzak handituz saihesten daiteke arazoa. Nahiko irtenbide garestia da. Bada merkeagoa den beste irtenbide bat ere:  $\frac{h}{T_i} e(kh - h)$  aldaketa balioztatu baino lehen,  $e(kh - h)$  erroreak

erabili gabeko zatia programa bidez kentzea. Zati hori memorian sartzen da, hurrengo laginketa-periodoko erroreaki gehitzeko. Beraz, laginketa-periodo, integrazio-konstante eta aurreko adierazpide berberak gordeko ditugu.

Hemen proposatutako azken neurrian  $h/T_i$ -z biderkatzen dena ez da  $e(kh - h)$  errorea, errore guztiak biltzen dituen  $i(kh)$  batura baizik. 8.11 ekuazioaren ordeztasunak, beste hau jartzen da:

$$i(kh) = i(kh - h) + e(kh - h)$$

$$u_i(kh) = \frac{h}{T_i} i(kh)$$

Hurbilketa hori aurrekoa baino sinpleagoa da. Bere mugak ez gainditzeko,  $i(kh)$  nahiko hitz luzean biltegiatzea eskatzen du, normalean 32 biteko hitz batean.

# 9

## Sintesi diskretua

### 9.1 SARRERA

Kapitulu hau 8. kapituluaren hasitako erreguladore digitalen sorkuntzari buruzkoaren jarraipena da. Orain 8.1 irudiko azken hiru lerroei dagozkien zenbait metodo aztertzen dira: sintesiaren oinarria, funtsean, erregulatu behar den prozesuko  $H(z)$  eredu lagindua da, edo haren  $H(e^{j\omega h})$  transferentzia-funtzio harmonikoa, tresna analogikoak *a priori* aintzat hartu gabe. Beraz sintesi diskretuak beti eredu diskretu bat du oinarritzat erreguladore digitalak kalkulatzeko.

Kapituluaren hasieran begizta itxiko sistemak seinale estandarrei ematen dien erantzunaren kalkulua ageri da, lehenik serbosistema-muntaiarako (9.2.1) eta gero erregulazio-muntaiarako (9.2.2).

Errore iraunkorrei buruzko espezifikazioak 9.3 atalean berrikusten dira. Irabazi-marjina eta fase-marjina 9.4 atalean berrikusten dira laburki. Erregimen iragankorraren moteltzea 9.5 atalean zehazten da. Hasieran sarrera bat dago (9.5.1), eta 9.5.2 paragrafoan moteltzea gertatzeko kondizio absolutuak azaltzen dira; bestalde, moteltzea gertatzeko kondizio erlatiboak 9.5.3 paragrafoan aurkezten dira. Bi egoerak aldi berean hartzen dira aintzat 9.5.4 paragrafoan. Marjinen eta moteltzearen arteko lotura enpirikoa eskaintzen da 9.5.5 paragrafoan. 9.5.6 paragrafoan, aldiz, indize-erantzunari buruzko espezifikazioak ematen dira.

Sentikortasuna ere kontzeptu garrantzitsua da, eta horri buruz dihardugu 9.6 kapitulan. Bestalde, begizta itxiko transferentzia-funtzio harmonikoaren forma komenigarria zein den azaltzen da 9.7 kapitulan. Nabarmentzekoa da espezifikazio guztiak ikuspegi digitaletik deskribatzen direla, sintesiaren oinarria eredu diskretua baita. Erreguladorea erroen tokian sintetizatzea da 9.8 atalaren edukia. 9.8.1 paragrafoko sarreraren ondoren, 9.8.2 paragrafoan toki hori deformatzeko era bat aurkezten da; 9.8.3 paragrafoak dipoloen teoriari buruz, eta 9.8.4 paragrafoak, PID erreguladore digitalaren sintesiari buruz dihardu. Hurbilketa digital bat, Bode diagraman, hain zuzen, azaltzen da 9.9 atalean. Hainbat ohar egin eta gero (9.9.1), printzipioak eratzten dira 9.9.2 paragrafoan. PD, PI eta PID erreguladoreen sintesia, berriz, 9.9.3, 9.9.4 eta 9.9.5 paragrafoetan azaltzen da, hurrenez hurren. Azkenik, Smith iragarlea ageri da 9.10 atalean.

## 9.2 SEINALE ESTANDARREI ERANTZUTEA

### 9.2.1 Serbosistema-muntaia

Kasu batzuetan izan ezik, sarrerako seinale batzuk aintzat hartu dira 6. kapitulan eta 7 atalean, batik bat. Serbosistema-muntaiarako, honela idatz daiteke begizta itxiko sistemaren  $Y_a(z)$  erantzuna  $Y_c(z)$  kontsignarekin.

$$Y_a(z) = \frac{K(z)H(z)}{1 + K(z)H(z)} Y_c(z)$$

Erreguladorearen transferentzia-funtzioari dagokio  $K(z)$ , eta  $H(z)$ , berriz, erregulatu behar den prozesuko transferentzia-funtzio laginduari.

Begizta itxiko sistemaren ezaugarriak balioztatzeko irizpideetako bat  $\{y_a(kh)\}$  irteeraren formaren azterketan datza. Kontsigna onargarrien multzoa infinitua da. Horregatik, balioztatzeko oinarria praktika da, hau da, sarrien ageri diren **seinale estandarrek** erabiltzen dira; 9.1 taulak horietako bost azaltzen ditu.

Nabarmentzekoa da kontsigna estandarren  $z$  transformatuak  $z$ -ren funtzio arrazional propioak direla.  $K(z)H(z) / (1 + K(z)H(z))$  ere  $z$ -ren funtzio arrazional propioa denez,  $Y_a(z)$  irteera ere hala izango da.  $y_a(kh)$ -ren kalkulua egin daiteke  $Y_a(z)$ -ren elementu sinpleen deskonposizioaren bidez:  $Y_a(z)$ -ren poloak zalantzan jartzen ditu horrek. Polo horiek dira, batetik,  $1 + K(z)H(z)$ -ren  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , zeroak, alegia, begizta itxiko transferentzia-funtzioaren poloak, eta, bestetik,  $Y_c(z)$  kontsignaren  $p_a$  poloak. 9.1 taulan ageri denez,  $p_a$  poloaren gehienezko anizkoiztasuna 3 da. Azalpena arintze aldera, joko dugu  $p_a$  poloak sinpleak direla, eta

sistemaren poloak eta sarreraren poloak ezberdinak direla, hots,  $p_i \neq p_a$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  dela. Honela idazten da  $Y_a(z)$ -ren deskonposizioa elementu sinpleetan:

$$Y_a(z) = c_{0a} + \frac{c_{1a}z}{z-p_1} + \frac{c_{2a}z}{z-p_2} + \dots + \frac{c_{ka}z}{z-p_k} + \frac{\gamma_{1a}z}{z-p_a} + \frac{\gamma_{2a}z}{(z-p_a)^2} + \frac{\gamma_{3a}z}{(z-p_a)^3}$$

| Izena              | $\{y_c(kh)\}_i$                                                                | $\gamma(z)$                  |
|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| 1. mailako bulkada | $y_c(kh) = \begin{cases} 0 : k \neq 0 \\ 1 : k = 1 \end{cases}$                | 1                            |
| 1. mailako jauzia  | $y_c(kh) = \begin{cases} 0 : k < 0 \\ 1 : k \geq 0 \end{cases}$                | $\frac{z}{z-1}$              |
| Sinu konplexua     | $y_c(kh) = \begin{cases} 0 : k < 0 \\ e^{jwhk} : k \geq 0 \end{cases}$         | $\frac{z}{z-e^{jwh}}$        |
| Malda              | $y_c(kh) = \begin{cases} 0 : k < 0 \\ kh : k \geq 0 \end{cases}$               | $\frac{hz}{(z-1)^2}$         |
| Parabola           | $y_c(kh) = \begin{cases} 0 : k < 0 \\ \frac{(kh)^2}{2} : k \geq 0 \end{cases}$ | $\frac{h^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$ |

**9.1 taula.** Seinale estandarrak; kontsigna sinusoidala izanez gero, kalkuluak esponentzial konplexu baten bitartez egiten dira.

Hautatutako kontsignaren arabera, gerta daiteke  $\gamma_{1a}$ ,  $\gamma_{2a}$ ,  $\gamma_{3a}$  balioak nuluak izatea. Gainera,  $p_i$  poloa 0 denean,  $c_{0a}$  ordeztu egin behar da  $c_{0a} + \frac{c_{0a,1}}{z}$  formaren kontribuzioarekin. Horrek ez ditu hurrengo paragrafoko ondorioak aldatzen. Denbora-eremuan:

$$y_a(kh) = c_{0a}\Delta(n) + c_{1a}p_1^n + c_{2a}p_2^n + \dots + c_{ka}p_k^n + \gamma_{1a}p_a^n + \gamma_{2a}np_a^{n-1} + \gamma_{3a}\frac{1}{2}n(n-1)p_a^{n-2}$$

$$k \geq 0$$

$c_{0a}\Delta(k) + c_{1a}p_1^k + c_{2a}p_2^k + \dots + c_{na}p_n^k$  zatiak, begizta itxiko sistemako  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) lotuta dagoenak, **erregimen iragankorra** edo **erantzun propioa** izena du. Gai bakoitza **modu** bat da. **Sarrerak sortzen du**  $\gamma_{1a}p_a^k + \gamma_{2a}kp_a^{k-1} + \gamma_{3a}\frac{1}{2}k(k-1)p_a^{k-2}$  zatia, eta **erregimen iraunkorra** edo **erantzun behartua** esaten zaio.

9.2.2 Erregulazio-egitura edo -muntaia

Erregulazioan, begizta itxiko  $Y_r(z)$  irteera  $W(s)$  perturbazio analogikoak kitzikatzen du, eta transferentzia-funtzio hau sortzen du:

$$Y_r(z) = \frac{Z\left\{\left(L^{-1}(G(s)W(s))\right)_{t=kh}\right\}}{1 + G(z)H(z)}$$

Erregulatu behar den prozesu analogikoko transferentzia-funtzioa  $G(s)$  da.

Begizta itxiko sistemaren ezaugarriak lehen bezala ikus daitezke  $\{y_r(kh)\}$  erantzuna aztertuz. Kasu horretan ere, perturbazio onargarrien multzoa infinitua da, eta, sarritan,  $w(t)$  perturbazioa ez da aldeztu aurretik ezagutzen. Hori dela kausa, balioztatzeko oinarriak **seinale estandarrek** dira, 9.2 taulan ageri direnak.

| izena                        | $w(t)$                                                                        | $Vl(s)$              |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| Dirac-en bulkada edo pultsua | $w(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 : t \neq 0 \\ \infty : t = 0 \end{cases}$ | 1                    |
| 1. mailako jauzia            | $w(t) = \begin{cases} 0 : t < 0 \\ 1 : t \geq 0 \end{cases}$                  | $\frac{1}{s}$        |
| Sinu konplexua               | $w(t) = \begin{cases} 0 : t < 0 \\ e^{jw_0 t} : t \geq 0 \end{cases}$         | $\frac{1}{s - jw_0}$ |
| Malda                        | $w(t) = \begin{cases} 0 : t < 0 \\ t : t \geq 0 \end{cases}$                  | $\frac{1}{s^2}$      |
| Parabola                     | $w(t) = \begin{cases} 0 : t < 0 \\ \frac{t^2}{2} : t \geq 0 \end{cases}$      | $\frac{1}{s^3}$      |

**9.2 taula.** Perturbazioaren seinale estandarrek; perturbazio sinusoidala izanez gero, kalkuluak esponentzial konplexu baten bitartez egiten dira.

Bat-bateko perturbazio laburra, hala nola haize-bolada batek antena baten gain edota posizioaren kontrola automatikoa duten eguzki-plaken gain eragindakoa, Dirac-en pultsuaren bitartez eratzen da. Sinuak, eskuarki, perturbazio periodikoa adierazten du. Perturbazio horien aurrean, erraza da  $Y_r(z)$  artea funtzio arrazional propioa dela ondorioztatzea.  $Y_r(z)$ -ren elementu sinpleen deskonposizioaren bidez baliozta daiteke  $y_r(kh)$ . Berriz ere  $1 + K(z)H(z)$ -ren  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , zeroak ageri dira, eta haiei  $Z\left\{\left(L^{-1}(G(s)W(s))\right)_{t=kh}\right\}$ -ren poloak gehitzen zaizkie. Adi aztertuz gero, agerian geratzen da  $G(s)$ -k azken adierazpen horretan sartzen dituen poloak sinplifikatu egiten direla  $H(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\left(L^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right)_{t=kh}\right\}$ -tik datozen  $1 + K(z)H(z)$ -ren poloekin.  $Y_r(z)$  erantzunean  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , poloek baino ez dira, bai eta  $W(s)$ -k sortutako poloak ere ( $p_r$  izendatuko dugu). 9.2 taulatik ondorioztatzen da poloa, gehienez ere, 3. ordenakoa izango dela. Onartzen badugu  $p_r$ -ren poloak sinpleak direla eta  $p_i \neq p_r$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , dela,  $Y_r(z)$  elementu sinpleen deskonposizioak itxura hau dute:

$$Y_r(z) = c_{0r} + \frac{c_{1r}z}{z - p_1} + \frac{c_{2r}z}{z - p_2} + \dots + \frac{c_{nr}z}{z - p_n} + \frac{\gamma_{1r}z}{z - p_r} + \frac{\gamma_{2r}z}{(z - p_r)^2} + \frac{\gamma_{3r}z}{(z - p_r)^3}$$

Denbora-eremuan

$$y_r(kh) = c_{0r}\Delta(n) + c_{1r}p_1^n + c_{2r}p_2^n + \dots + c_{nr}p_n^n + \gamma_{1r}p_r^n + \gamma_{2r}np_r^{n-1} + \gamma_{3r}\frac{1}{2}n(n-1)p_r^{n-2} \quad k \geq 0$$

Aurreko paragrafoaren amaieran serbokontrolleko muntaiarako ageri diren oharrak eta definizioak erregulazio-muntaiaren ezartzen dira beti. Erregulazio-muntaiarako transferentzia-funtzioak ez du zentzurik baldin eta  $w(t)$  perturbazioa konstantea ez bada; orduan,  $1 + K(z)H(z)$ -ren  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  zeroak dira haren poloak.  $w(t)$  denboran zehar aldatzen denean,  $1 + K(z)H(z)$ -ren zeroak  $Y_r(z)$  seinalearen poloak dira. Hala ere, hizkera-ohituren eraginez, begizta itxiko *sistemaren* poloak esaten zaie oraindik ere.

### 9.2.3 Oharrak

Ohartu gara  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  poloak, erregimen iragankorreki dagokienez, serbokontrolleko eta erregulazio-muntaietarako polo berak direla. Hala ere,  $c_{ia}$  eta  $c_{ir}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , zenbakiak desberdinak dira bi kasuetarako,  $Y_a(z)$ -ren eta  $Y_r(z)$ -ren poloen

eta zeroen araberakoak direlako. Hortaz, egiazta daiteke begizta itxiko sistemaren baitako denborazko ezaugarriak, hau da,  $\Delta(kh)$  eta  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , seinaleak, berak direla bi muntaietarako. Bestalde, oinarritzko seinale horiek balioztatzekeo haztapenak,  $c_{ia}$  eta  $c_{ir}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , zenbakiak finkatzen dituztenak, oso desberdinak dira. Hurrengo ataletan azalduko den bezala, sistemaren ezaugarrien zenbait espezifikazio erregimen iraunkorrean daude, batik bat errore iraunkorrei dagozkienak.

### 9.3 ERREGIMEN IRAUNKORREKO ERROREAK

Errore iraunkorrak, bai serbokontrollekoak eta bai erregulaziokoak, 7 atalean definitu eta aztertu ditugu. Eraitza haiek oinarri hartuta, hautematen da errore iraunkorrei buruzko espezifikazioek serbosistema zein erregulazio motak finkatzen dituztela zuzenean, bai eta begizta irekiko irabazi estatikoa eta erreguladorearen irabazi estatikoa ere. Hala, 7 ataleko taulak tresna paregabeak dira kontroladorea gutxi gorabehera hautatzeko, bereziki egitura hautatzeko. Adibidez, erregimen iraunkorreko eskaerak aztertu eta gero erabakitzen da gai integratzailea sartuko den ala ez.

Berebizikoa da doitasuna / egonkortasuna dilema gogoan izatea: gerta daitekeena da errore iraunkorrei buruzko espezifikazioek mota edo irabazi estatiko jakin bat ezartzea, eta mota edo irabazi estatiko horiek begizta itxiko jokaera iragankor txarra, bai eta ezegonkortasuna ere, eragitea. Horregatik, biziki gomendatzen dugu analisi sakona egitea, egonkortasunarena behinik behin, errore iraunkorrei buruzko espezifikazioak baino ematen ez direnean.

---

#### 9.1 adibidea

---

Demagun kontrolatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzioak itxura hau duela, non  $h$  laginketa-periodoa 0,025 segundo baita:

$$H(z) = \frac{10^{-3}}{(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

Serbosistemako erregimen iraunkorreko errore nulua eskatzen dute espezifikazioek: segimendu-errorea 0,05 baino txikiagoa edo haren berdina izatea onartzen da.  $K(z) = K_p$  kontroladore proportzional bat erabiliko dugu.

---

Serbosistemaren mota 1 da; hortaz, serbosistema-estatismo guztia desagerrarazten da. Begizta irekiko irabazi estatiko hau dugunez:

$$\gamma = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)K_p \frac{10^{-3}}{(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2K_p}{1000}$$

7 ataleko taulen arabera, segimendu-errorea hau ateratzen da:

$$\frac{h}{\gamma} = \frac{25}{2K_p} \Rightarrow 0,05 \geq \frac{25}{2K_p} \Rightarrow K_p \geq 250$$

Aurreko inekuazioak  $K_p \geq 250$  izatea eragiten du.  $K(z) = 250$  kontroladore proportzional digitalak erregimen iraunkorrari dagozkion espezifikazioak errespetatzea ahalbidetzen du. Gainera, begizta itxiko egonkortasuna bermatuta dago, lortzen dugun begizta itxiko transferentzia-funtzioa hau delako.

$$H_{Bl}(z) = \frac{0,25}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{3}{4}}$$

Begizta itxiko erroak hauek dira:  $p_{0,1} = 0,75 \pm 0,433j$ , eta erro horien, moduluak bat baino txikiagoak dira  $|p_{0,1}| = 0,866 < 1$  ikusiko dugu zoritxarrez ezin direla beti bete kontroladore proportzional batekin nahi ditugun espezifikazio guztiak, eta aldaketa handiak behar direla eskaera horiek betetzeko.

## 9.4 IRABAZI-MARJINAK ETA FASE-MARJINAK

Irabazi-marjina eta fase-marjina 7 atalean azaldu dira. Oro har, multzoaren egonkortasuna indartzen dute; hurrengo ataletan frogatuko da marjinek zuzenean eragin osagarri bizi onuragarriak sortzen dituztela. Erabilgarria da gogoan izatea 4 dB eta 12 dB bitarteko balioak hartzen ditugula irabazi-marjinatzat, eta 80° eta 60° bitarteko balioak fase-marjinatzat. Nola diseinatzen edo dimentsionatzen da erreguladore bat marjina egokiak bermatzeko? Galdera garrantzitsu hori, oro har, hainbat analisiren eta sintesiren bidez erantzuten da. Oso teknika sinplea eskaintzen da 9.9 atalean.

## 9.5 ERREGIMEN IRAGANKORRA MOTELTZEA

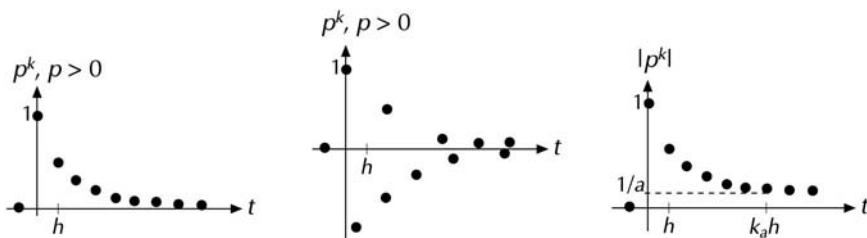
### 9.5.1 Sarrera

9.2 ataletik ondorioztatzen denez, erregimen iragankorrak eta erregimen iraunkorrak osatzen dute serbositemako  $y_a(kh)$  irteera eta erregulazioko  $y_r(kh)$  erantzuna. Erregimen iraunkorrak egonkortasun-doitasuna finkatzen du, eta 9.3 atalean azaldu da. Erregimen iragankorra, gertatzen denean, sistema automatikoaren kalitate dinamikoari lotzen zaio. Erregimen horri dagozkion espezifikazio anitz dago; atal honetan ohikoenak deskribatuko ditugu.

### 9.5.2 Moteltze-kondizio absolutuak

Erregimen iragankorraren modu batek –serbositemako erregimenean nahiz erregulaziokoan–  $cp^k$  forma du, non  $p$  begizta itxiko transferentzia-funtzioko polo bat baita (9.2 atala); prozesu itxiaren egonkortasuna ezinbesteko kondizioa denez, poloak  $|p| < 1$  inekuazioa egiaztatzen du.

Hasteko, demagun  $p$  erreala dela.  $p^k$  seinalearen forma 9.1 irudian ageri da  $p > 0$  eta  $p < 0$  kasuetarako.



9.1 irudia.  $p^k$  seinalea,  $p \in \mathbb{R}$ , moteltze-kondizio absolutuaren eraginpean.

$$|p^{na}| \leq \frac{1}{a} \Rightarrow$$

$$|p| \leq \frac{1}{a} \Rightarrow$$

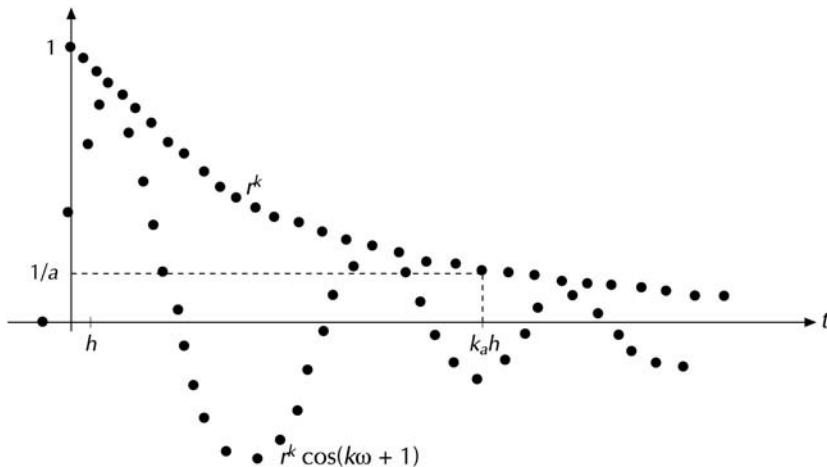
$$\ln |p| \leq \frac{-\ln a}{na} \text{ eta, azkenik,}$$

$$|p| \leq e^{\frac{-\ln a}{na}}$$

$p = re^{j\omega}$  polo konplexu bat badugu;  $\bar{p} = re^{-j\omega}$  zenbaki konplexu konjugatua begizta itxiko sistemaren polo bat ere izango da. Beraz, polo konplexu batek  $cp^n$  eta  $\bar{c} \cdot \bar{p}^n$  gaiak ditu, eta elkarrekin konbina daitezke  $2|c|r^k \cos(k\omega + \varphi)$  motako seinale oszilakor moteldua sortuz, non  $c = x + jy$  eta  $j = \arctg \frac{y}{x}$  baitira. Berriz gogorazariko dugu  $r < 1$  izatea ezinbestekoa dela; denboraren arabera aldatzen den  $r^n \cos(n\omega + \varphi)$  zati aldakorra 9.2 irudian azaltzen da.

Kasu honetan, moteltze-kondizio absolutua  $r^k$  seinalearen gain ezartzen da, lehen bezalaxe. 9.2 irudian dago adierazita, eta desberdintza eragiten du.

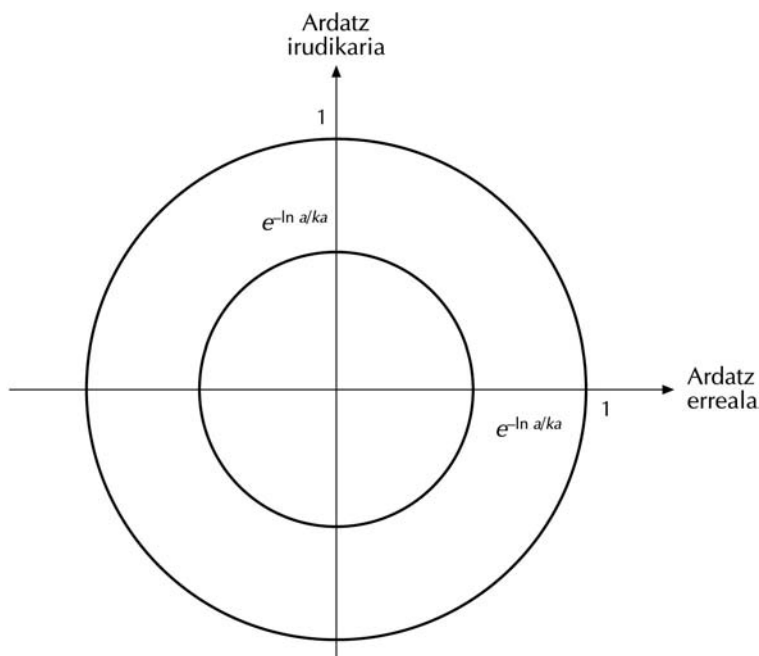
$$r \leq e^{\frac{-\ln a}{na}} \quad (9.1)$$



**9.2 irudia.**  $r^n \cos(n\omega + j)$  seinalea, moteltze-kondizio absolutuaren eraginpean.

Hala,  $p = re^{j\omega}$  eta  $\bar{p} = re^{-j\omega}$  polo konplexuen  $r$  moduluak (9.1) bete behar du.

Hortaz, ondorioztatzen da, gutxienez  $a$  alditako moteltze-kondizio absolutua  $k_a h$  denboran ezarri nahi bada, serbosistemako edo erregulazioko begizta itxiko sistemaren polo guztiek  $e^{\frac{-\ln a}{na}}$  erradioa duen zirkuluaren (jatorrian zentratua) barnean edo gainean egon behar dutela (9.3 irudia).



**9.3 irudia.** Begizta itxiko sistemaren poloek egon behar duten eremua, baldin eta moteltze-kondizio absolutua betetzen badute.

### 9.5.3 Moteltze-kondizio erlatiboa

Moteltze egokiaren eskaera beste era batera ere adieraz daiteke. Alegia, denbora neurtzeko unitate absolutuak erabili ordez, erregimen iragankorra osatzen duten poloei lotutako unitateak erabilita. Moteltze-kondizio erlatiboak ezartzen duenez,  $r^k$  faktorea ( $p = re^{j\omega}$  eta  $\bar{p} = re^{-j\omega}$  polo konplexu konjugatuei lotutako  $p = re^{j\omega}$  seinale guztietan ageri da) gutxienez  $a$  aldiz txikitzen da  $N$  osilaziotan. Beraz, erabiltzaileak ematen ditu  $a$  eta  $N$  parametroak. Nabarmentzekoa da  $(0, \pi)$  tartarako  $\omega$  hauta daitekeela, orokortasunik galdu gabe.  $r^n \cos(n\omega + \varphi)$  seinaleak eta  $\cos(k\omega + \varphi)$  seinaleak periodo bera dutenez,  $\cos(k\omega + \varphi)$  seinalearen periodoa erabiliko dugu  $r^n \cos(n\omega + \varphi)$  seinaleak zenbat denbora behar duen ( $N$  osilazio egiteko) jakiteko.

$\omega$  pultsazio 'diskretuak' nahitaez  $(0, \pi)$  tartean egon behar du Shannonen teorema ezartzen duen bezala seinale analogiko baten gehienezko  $\omega_a$  pultsazio analogiko handienak laginketa-pultsazioaren erdia baino txikiagoa izan behar duelako. Shannonen teorema betetzen ez badugu,  $\omega_a$  pultsazio analogikoak azkenean  $(0, \pi)$  tarteko pultsazio digital baliokide bat izango du 'Aliasing' efektuaren bitartez.

Hurrengo  $\omega_a$  pultsazioko seinale senoidala diskretizatuz, hobeto ulertuko dugu  $\omega_a$  eta  $\omega$  pultsazioen arteko erlazioa.

$$\cos(\omega_a t + \varphi) = \cos(\omega_a h k + \varphi), \quad t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

$$\omega_a h = \omega$$

$$\cos(\omega_a h k + \varphi) = \cos\left(\omega_a \frac{2\pi}{\omega_e} k + \varphi\right)$$

Baldin  $\omega_e/2$  baino txikiagoa bada  $\omega_a$ :

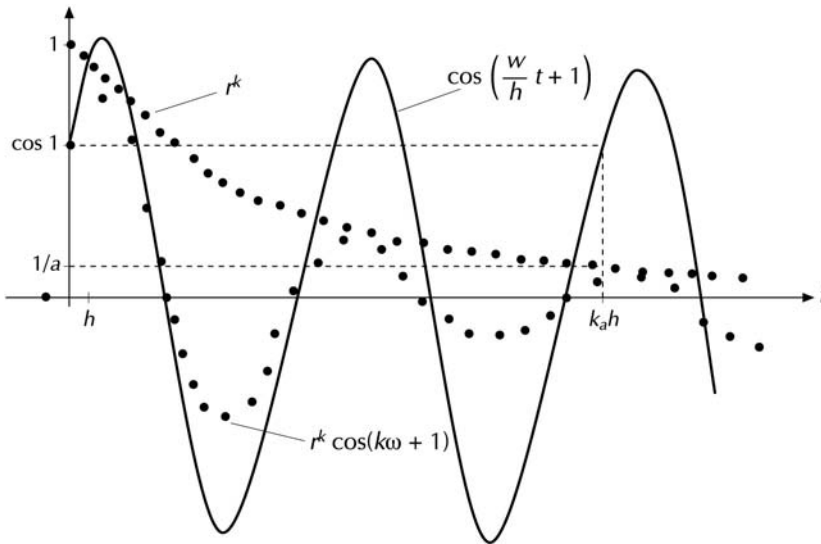
$$\left. \begin{array}{l} \cos\left(2\pi \frac{\omega_a}{\omega_e} k + \varphi\right) \\ \frac{\omega_a}{\omega_e} < \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\pi \frac{\omega_a}{\omega_e} = \omega < \pi$$

Baldin  $\omega_e/2$  baino handiagoa bada  $\omega_a$ :

$$\left. \begin{array}{l} \cos\left(2\pi \frac{\omega_a}{\omega_e} k + \varphi\right) \\ \frac{\omega_a}{\omega_e} > \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\omega_a}{\omega_e} = \frac{N_1}{2N_2} > \frac{1}{2} : N_1, N_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$2\pi \frac{\omega_a}{\omega_e} k = 2\pi \frac{N_1}{2N_2} k = 2\pi \frac{qN_2 + N}{2N_2} k : N_1 = qN_2 + N, |N| < |N_2|, q \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{Z}$$

$$2\pi \frac{\omega_a}{\omega_e} k = \pi \frac{N}{N_2} k + \pi q k \Rightarrow \omega = \pi \frac{N}{N_2} < \pi$$



#### 9.4 irudia. Moteltze-kondizio erlatiboa.

Demagun, beraz,  $k_a$  denbora-tartean  $N$  oszilazio dituela sistemaren irteerak, non  $k_a$ , oro har, ez baita zenbaki oso bat.  $k_a$  hori ez da aldeztu aurretik finkatzen, baizik eta  $N$  oszilazio **kopuruari** lotzen zaio, eta berdintza hau betetzen du:

$$\omega k_a = 2\pi N \quad (9.2)$$

Bestalde, aurreko paragrafoko garapenari jarraituz, adierazpide hau lortuko dugu:

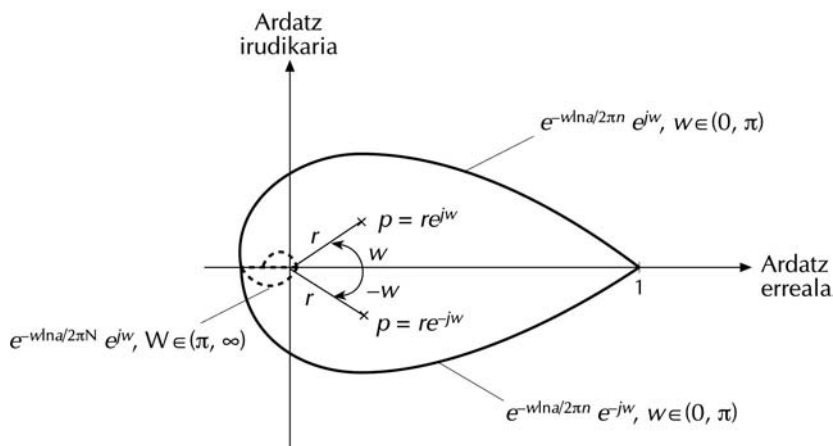
$$r \leq e^{\frac{-\ln a}{na}} \quad (9.3)$$

eta bi adierazpen matematikoak bateratuz gero, inekuazio honetara helduko gara:

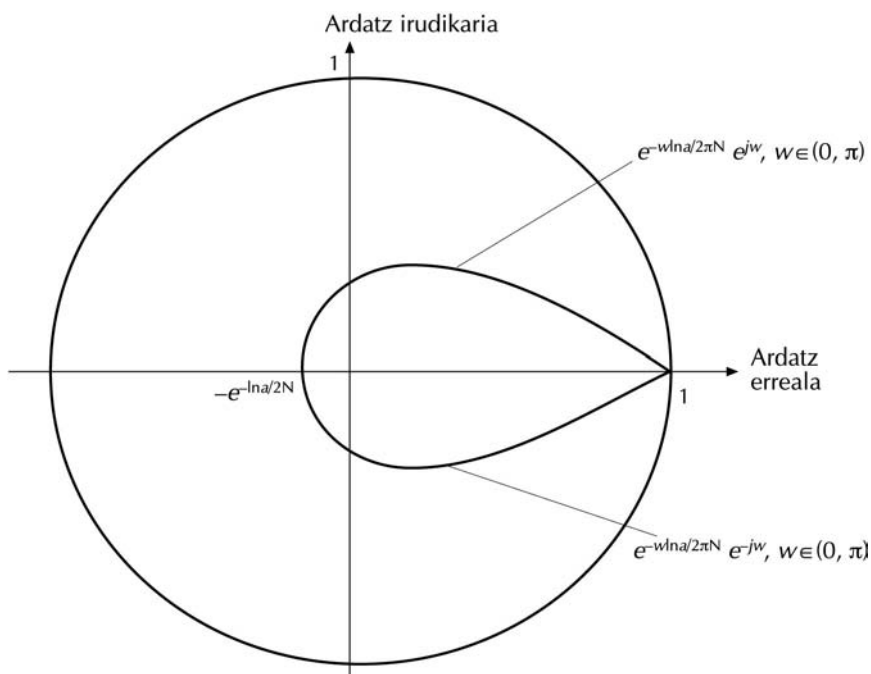
$$r \leq e^{\frac{-\ln a}{2\pi N \omega}} \quad (9.4)$$

$e^{\frac{-\ln a}{2\pi N \omega}} \cdot e^{j\omega}$  kurba,  $\omega \in (0, \pi)$ , logaritmo-espiralaren zati bat da, 9.5 irudian lerro lodiz azaltzen denez.  $\omega < [\pi, \infty)$ -ri dagokion logaritmo-espiralaren zatia lerro etenez marraztu da, argitze aldera.  $e^{\frac{-\ln a}{2\pi N \omega}} \cdot e^{j\omega}$  kurba,  $\omega \in (0, \pi)$ , irudian lerro etenez ageri dena, lerro lodiz marraztu den aldearekiko simetria hutsaz lortzen da.  $p = re^{j\omega}$  eta  $\bar{p} = re^{-j\omega}$  polo konplexu konjugatuen  $r$  moduluak  $r \leq e^{\frac{-\ln a}{2\pi N \omega}}$  inekuazioa bete behar du. Hortaz, *a* baino txikiagoa den *faktore baten moteltze-kondizio erlatiboa* *N* oszilazio **kopuruan** ezarri nahi bada, *serbosistemako edo erregulazioko begizta itxiko*

sistemaren polo konplexu guztiek egon behar dute  $e^{\frac{-\ln a}{2\pi N} w} \cdot e^{jw}$  eta  $e^{\frac{-\ln a}{2\pi N} w} \cdot e^{-jw}$ ,  $w \in (0, \pi)$ , logaritmo-espiralek mugatzen duten eremuaren barnean edo mugan (9.6 irudia).



9.5 irudia. Logaritmo-espiralak.

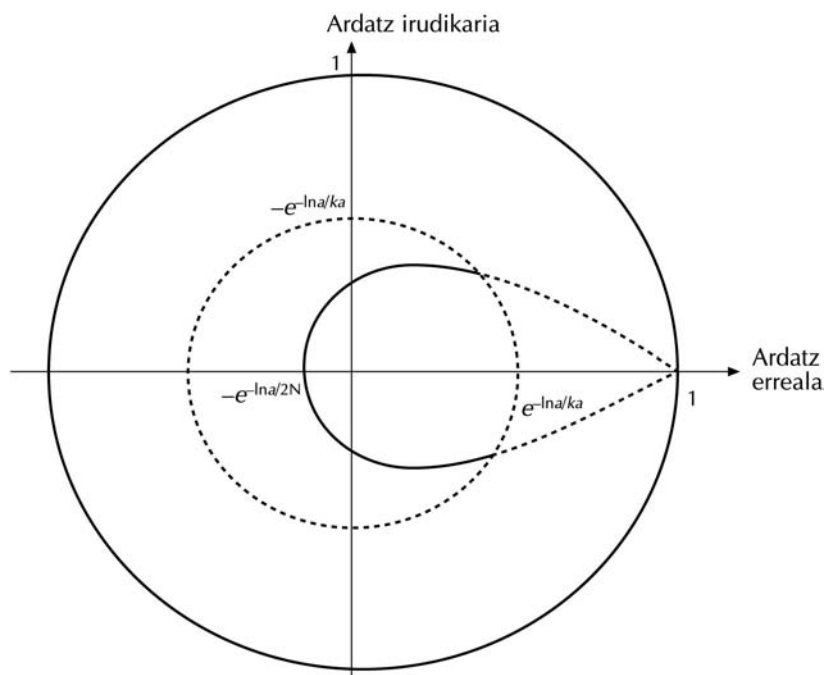


9.6 irudia. Begizta itxiko prozesuaren polo konplexuek egon behar duten eremua, baldin eta poloei moteltze-kondizio erlatiboa betetzen badute.

Ardatz erreal positiboko poloek, definizioz, moteltze-kondizio erlatiboan eraginpean egon ezin diren moduak sortzen dituzte, polo erreal positiboek oszilatzen ez dutelako. Hala ere, ardatz errearen  $[-e^{-\ln a/2N}, 1]$  segmentua, hitzarmenez, 9.6 irudian logaritmo-espilaren barruan daudela esaten dugu.

### 9.5.4 Moteltze-kondizio absolutuak eta erlatiboak

Praktikan, moteltze-kondizio absolutuak eta erlatiboak zehazten dira. Begizta itxiko sistemaren poloek 9.3 eta 9.6 irudietan ageri diren multzoen elkarguneetan egon behar dute (9.7 irudia).



**9.7 irudia.** Begizta itxiko prozesuaren poloek egon behar duten eremua, baldin eta poloek moteltze-kondizio absolutua eta erlatiboa betetzen badute.

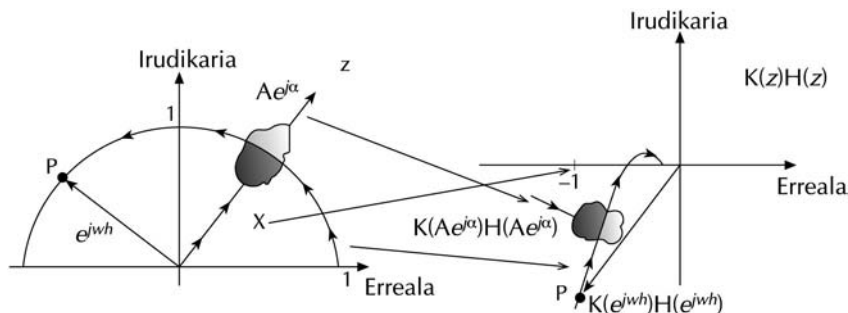
Nola sintetizatzen da kontroladore bat, begizta itxiko sistemaren poloak 9.7 irudiko eremuan egon daitezen? Arazo garrantzitsu hori 9.8 atalean azaltzen da.

Bestalde, jakina da erregimen iragankorreko modu batek  $cp^k$  forma duela. Moteltze-kondizioek  $p$  poloari bakarrik eragiten diote; aitzitik, inolako murrizketak ez dio eragiten  $c$  koefizienteari. Komeni da aintzat hartzea koefiziente horrek (poloen eta

zeroen araberakoa da) eragin handia duela begizta itxiko prozesuen denbora-jokabidearen gain.

### 9.5.5 Marjinen eta moteltzeen arteko harreman enpirikoa

Nyquisten irizpide sinplifikatuaren jatorria  $z \rightarrow K(z)H(z)$  funtzioari  $z = e^{j\omega h}$  ibilbidea eginaraziz sortzen den ibilbide konplexua da.  $K(z)$ -k erreguladorearen transferentzia-funtzioa adierazten du, eta  $H(z)$ -k, kontrolatu behar den sistemaren transferentzia-funtzio lagindua. Simetria-arrazoiak direla eta, atera dezagun  $\omega \in [0, \omega_N]$ -ri dagokion zatia (9.8 irudia). Definizioz,  $1 + K(z)H(z)$  adierazpenaren zero batek, irudian X batez nabarmendua dagoenak,  $-1$  puntu kritikoa du iruditzen;  $z = e^{j\omega h}$  1 erradioko zirkuluerdia, berriz,  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$ ,  $\omega \in [0, \omega_N]$ , begizta irekiko transferentzia-funtzio harmonikoa izatera igaro da.



**9.8 irudia.**  $z \rightarrow K(z)H(z)$  aplikazioa.  $1 + K(z)H(z)$  adierazpenaren zeroetik 1 erradioko zirkulura dagoen distantziak  $-1$  puntutik  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  kurbarainoko distantzia sortzen du.

Irudian ikus daitekeenez,  $z = e^{j\omega h}$  ibilbidearen ezkerrekoa  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  kurbaren ezkerrekoa bihurtzen da  $K(z)H(z)$  planoan. Bestetik,  $z = e^{j\omega h}$  ibilbidearen eskuinekoa  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  kurbaren eskuinekoa bihurtzen da  $K(z)H(z)$  planoan. Beraz, pentsa daiteke  $1 + K(z)H(z)$  funtzioaren zero guztiak  $-1$  hots, begizta itxiko poloak, egonkorak badira,  $-1$  puntu kritikoa  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  kurbaren eskuinean egongo dela.

Marjinak  $-1$  puntu kritikoaren eta  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  kurbaren arteko distantziak izanik, eta moteltze-kondizioek nolabait begizta itxiko transferentzia-funtzioaren poloen  $-1 + K(z)H(z)$  adierazpenaren zeroen eta 1 erradioko zirkuluaren arteko distantzia finkatzen dutenez, ondorioztatzen da moteltze-kondizioek eta  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  kurbaren marjinek antzeko eragina dutela egonkortasunean.



Azkenik, ikusten dugu espezifikazioak, batzuetan, erregulazioko indize-erantzunerako ezartzen direla, serbosistemakorako baino gehiago, hau da, 1. mailako jauzi analogikoko perturbazioaren eraginpean jarri dagoen begizta itxiko sistemaren gainean.

## 9.6 SENTIKORTASUNA

$H(z)$  transferentzia-funtzioak adierazten du kontrolatu behar den prozesuaren eredu lagindua.  $H(z)$ -k zehazgabetasun handia du, ereduaren eratzeko sortutako errorearen edota ereduaren parametroak aldatzearen ondorioz. Berrelikadurazko arkitekturen garaipen erabakigarrietako bat, hain zuzen, sistemaren parametroak aldatzeak eragindako ondorioak arintzea da.

Formaren aldetik, **sentikortasun**-kontzeptuaren bidez egiten zaio aurre arazo horri. Har dezagun kontuan  $f$  funtzio bat, plano konplexutik plano konplexura definituta dagoena eta deribagarria dena, non  $z$  zenbaki konplexuari  $f(z)$  zenbaki konplexua lotzen baitio.  $S_z^f$  sentikortasuna,  $f$ -ren  $\Re \rightarrow \Re$   $z$ -n definizioz, lortzen da  $f$ -ren aldakuntza erlatiboa zati  $z$ -ren aldakuntza erlatiboa eginda.

$$S_z^f(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{f(z)}}{\frac{\Delta z}{z}} = \frac{\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}}{\frac{f(z)}{z}} = \frac{\frac{df}{dz}(z)}{\frac{f(z)}{z}}$$

Adierazpen horietan argi dago  $\Delta z \in \Re$  dela.

Serbosistema-muntaian, lehendabizi  $H_o(z)$  begizta irekiko transferentzia-funtzioa honela idazten da:

$$H_o(z) = K(z)H(z)$$

$K(z)$  kontroladoreko transferentzia-funtzioa da; oraingoz, ez du perturbaziorik, eta, horregatik,  $H_o(z)$  funtzioa  $H(z)$  funtzioak bakarrik alda dezake. Hala, kontrolatu behar den sistemaren  $H(z)$  eredu laginduaren  $H_o(z)$  sentikortasuna ondorioztatzen da:

$$S_H^{H_o} = \frac{\frac{dH_o}{H_o(H)}}{\frac{H}{H}} = \frac{K}{KH} = 1$$

Ikus daitekeenez, balio hori oso handia da,  $H(z)$ -ren fluktuazio orok erabat eragiten diolako  $H_o(z)$ -ri.

Begizta itxian, transferentzia-funtzioa honela adieraz daiteke:

$$H_{Bltx} = \frac{KH}{1+KH} \quad (9.5)$$

Honela kalkulatu behar den  $H$  eredu laginduekiko  $H_{Bltx}$ -ren sentikortasuna:

$$S_H^{H_{Bltx}}(H) = \frac{\frac{dH_{Bltx}}{dH}(H)}{\frac{H_{Bltx}(H)}{H}} = \frac{\frac{(1+KH)K - KHK}{(1+KH)^2}}{\frac{1}{H} \frac{KH}{1+KH}} \quad (9.6)$$

$K$  eta  $H$  konplexuak izaki, sentikortasuna ere konplexua da, eta interpolazioa zaildu egiten da. Hala ere,  $S_H^{H_{Bltx}}$  kontsigna sinusoidalekin azter daiteke, jakina,  $\omega_N$  baino pultsazio apalagoekin, Shannonen teorema ez hausteko. Horretarako, jar dezagun  $z = e^{j\omega h}$   $K(z)$ -n eta  $H(z)$ -n:

$$\left| S_H^{H_{Bltx}} \left[ H(e^{j\omega h}) \right] \right| = \frac{1}{\left| 1 + K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h}) \right|}$$

Espezifikazio posible bat da moduluko sentikortasuna gutxienez  $\sigma$  zenbakiaren baliokidea izatea; hori guztia  $[0, \omega_0]$  maiztasun-hein jakin batean:

$$\left| S_H^{H_{Bltx}} \left[ H(e^{j\omega h}) \right] \right| = \frac{1}{\left| 1 + K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h}) \right|} \leq \sigma, \omega \in [0, \omega_0]$$

Begizta irekiko sentikortasuna txikiagoa eskaintzearen,  $\sigma$  limitea 1 baino txikiagoa da. Beraz,

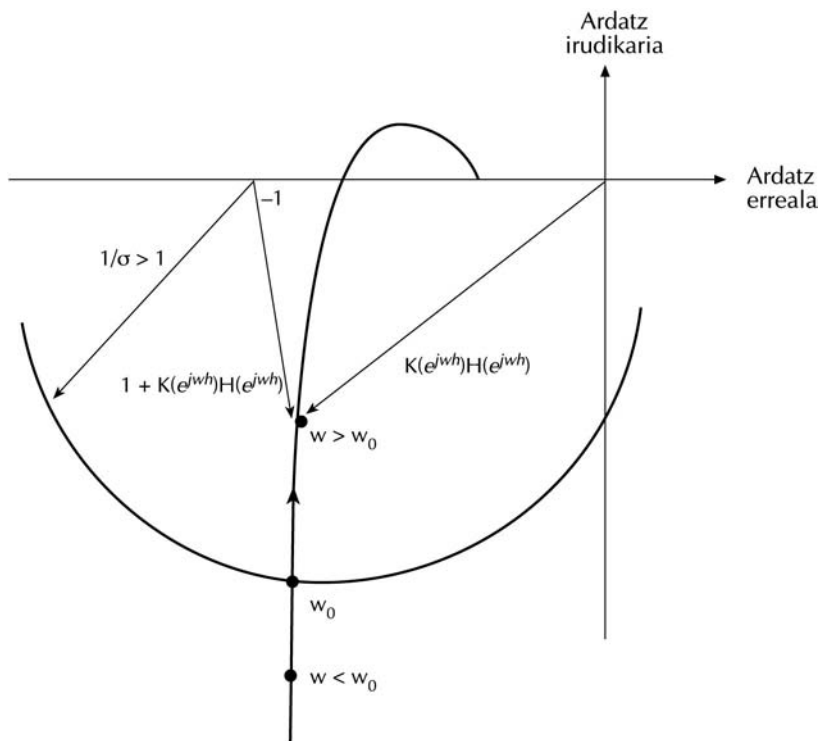
$$\left| 1 + G(e^{j\omega T})H(e^{j\omega T}) \right| \geq \frac{1}{\sigma} > 1, \omega \in [0, \omega_0] \quad (9.7)$$

Kondizio hori Nyquisten diagraman jartzen da agerian bereziki (9.10 irudia). Ikusten dugun bezala, kondizioa ez da errespetatzen, eta begizta irekiko funtzio harmonikoa adierazten duen kurba, aldiz, ez dago  $-1$  puntu kritikoan zentratutako  $1/\sigma$  erradioko zirkuluaren barruan.

Gutxika aldatzen diren edo egonkorak diren kontsignei dagozkien maiztasun apalak baino ez baditugu aintzat hartzen, nabarmentzekoa da  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$ -ren moduluak (9.7) asetzeko adinakoa izan behar duela. Horretarako,  $K(z)H(z)$ -n  $z = 1$

betetzen duen polo bat jarri behar da. Hala, efektu integratzailea, edo irabazi estatiko handikoa, islatuko da.

Orain arte, beti onartu dugu erregulatu beharreko magnitudea eta haren neurria seinale berak direla. Neurri haren kalitateak duen garrantzia adierazteko, jo dezagun  $Y(z)$  kontrolatu beharreko magnitudea eta haren  $Y'(z)$  neurria une batez desberdinak direla, eta  $C(z)$  transferentzia-funtzioak lotzen dituela (9.11 irudia).



**9.10 irudia.** Nyquisten diagraman interpretatzea.

$Y(z)/Y_c(z)$  zatiketa begizta itxiko transferentzia-funtzioa da ( $H_{Bltx}$  adierazten da) eta  $C(z)$  transferentzia-funtzioaren mende dago. (9.11) irudia ikusita, erraza da begizta itxiko transferentzia-funtzioa kalkulatzeko:

$$H_{Bltx} = \frac{KH}{1+KHC}$$

Begizta itxiko transferentzia-funtzioaren sentikortasuna kalkulatu,  $C(z)$  lortuko dugu:

$$S_C^{H_{Bltx}} = \frac{\frac{dH_{Bltx}}{dC}}{\frac{H_{Bltx}}{C}} = \frac{\frac{-(KH)^2}{(1+KHC)^2}}{\frac{1}{C} \frac{KH}{1+KHC}}$$

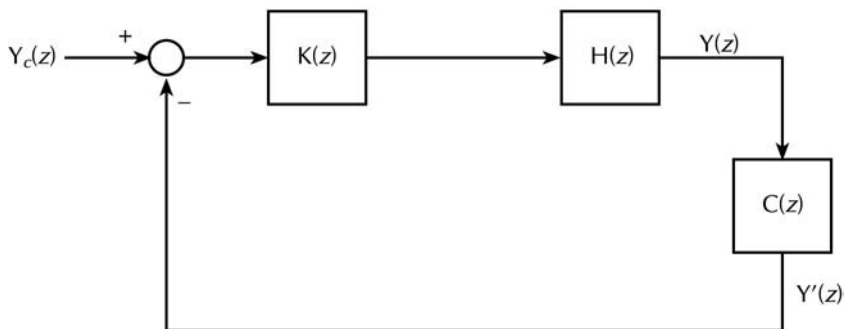
$$S_C^{H_{Bltx}} = \frac{-KHC}{(1+KHC)}$$

$$S_C^{H_{Bltx}} = -1 + \frac{1}{(1+KHC)}$$

Neurgailu ezin hobe batean  $C(z) = 1$  da. Balio nominal horren gaineko aldakuntzak begizta itxiko sentikortasunari eragiten dio.

$$S_C^{H_{Bltx}} = -1 + \frac{1}{1+KH}$$

Berririo maiztasun apaleko erregimen harmonikoari begiratuta, non, lehen aipatutako arrazoiengatik,  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$ -ren modulu altua hautatzen baita, sentikortasuna  $-1$  era hurbiltzen da, balio egiazki txarrera, alegia. Hala, kontrolatu behar den magnitudea neurtzen duen kaptadoreak kalitate paregabea izan behar du: akatsik gabe egon behar du kalibratuta, eta inguruarekiko sendotasun handia izan behar du. Bestalde, kaptadorea izaten da, sarritan, berrelikadurazko muntaietako osagairik garestienetakoa.



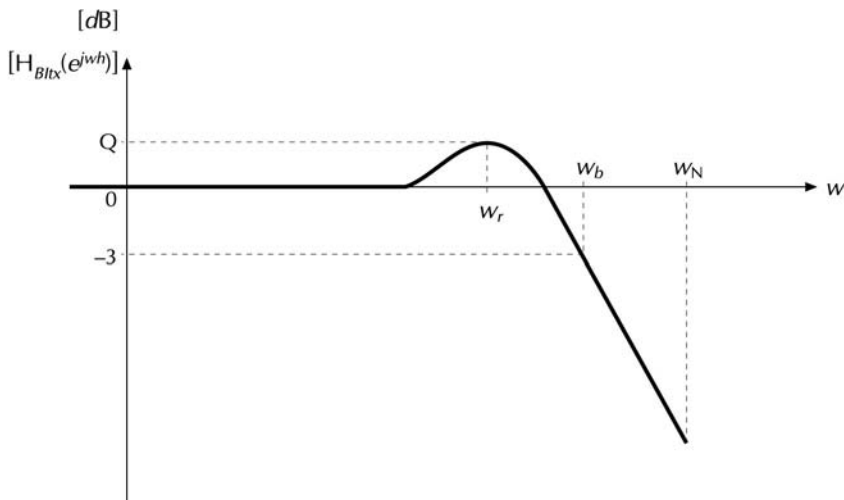
**9.11 irudia.** Serbosistema-muntaiaaren eskema funtzionala, non kontrolatu behar den  $Y(z)$  magnitudea eta haren  $Y'(z)$  neurria desberdinak baitira.

## 9.7 BEGIZTA ITXIKO TRANSFERENTZIA-FUNTZIO HARMONIKOA

Demagun  $H_{Bltx}(z) = \frac{K(z)H(z)}{1+K(z)H(z)}$  transferentzia-funtzioa duen serbosistema-

muntaia bat dugula; kontsigna sinusoidalekin aztertzen da hori atal honetan. Beti bezala, seinale horien pultsazioak  $\omega_N$  baino txikiagoak dira. 9.12 irudiak Bode diagrama batean erakusten ditu begizta itxiko transferentzia-funtzio harmonikoaren ereduaren ezarri ohi diren espezifikazioak.

$$H_{Bltx}(e^{j\omega h}) = \frac{K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})}{1+K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})}.$$



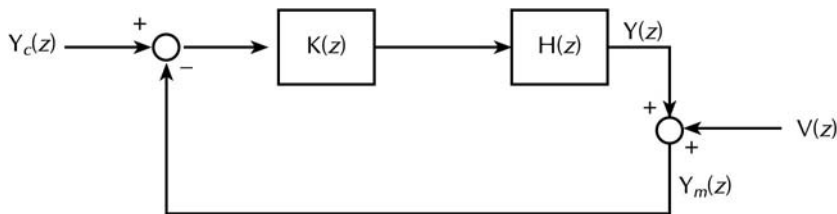
**9.12 irudia.** Begizta itxiko transferentzia-funtzio harmonikoa.

Komeni da  $|H_{Bltx}(e^{j\omega h})|$  konstantea izatea banda jakin batean eta 1 baliokoa izatea (hau da, 0 dB). Hala, banda horretan pultsazioa duten kontsigna guztiak transmititu eta esleitu ahal izango zaizkio kontrolatu beharreko magnitudeari. Batzuetan amplifikazio txiki bat onartzen da. Amplifikazio horrek Q gehieneko balioa hartzen du  $\omega_r$  **erresonantzia-pultsazioan**; **erresonantzia-irabazi** deritzo horri. Geroago,  $|H_{Bltx}(e^{j\omega h})|$  modulua erori egiten da, eta -3 dB gainditzen ditu  $\omega_b$  **ebakidura-pultsazioan**.  $[0, \omega_b]$  tarteak begizta itxiko sistemaren **banda-zabalera** izena hartzen du. Zaraten (batez ere neurrienak) eragina moteltzeko behar bezain negatiboa izan behar du banda-zabaleratik haratago doan  $|H_{Bltx}(e^{j\omega h})|$ -ren maldak.

Lehen arrazoa da malda negatibo handiak zaraten eragina –neurrian, bereziki– moteltzeko balio duela. Izan ere, demagun  $Y(z)$  kontrolatu beharreko magnitudearen  $Y_m(z)$  neurria kutsatuta dagoela  $V(z)$  zarata gehigarriarekin (perturbazio analogiko baten bertsio laginduaren  $z$  transformatua izan daiteke).

$$Y_m(z) = Y(z) + V(z).$$

Egoera 9.13 irudian dago deskribatuta.



**9.13 irudia.** Serbosistema-muntaia baten eskema funtzionala. Kontrolatu beharreko seinalearen  $Y_m(z)$  neurria  $V(z)$  zaratarekin kutsatuta dago.

$V(z)$ -k  $Y(z)$ -n duen eragina eta  $Y_c(z)$  kontsignan duena bera da, zeinua aintzat hartu gabe. Beraz, honako honen baliokidea da:  $-\frac{K(z)H(z)}{1+K(z)H(z)}V(z)$ .  $\omega < \omega_N$

pultsazioko zarata sinusoidala dagoenean, erregimen iraunkorrean, kontribuzio hori pultsazio bereko seinale sinusoidala da, baina motelduta. Hau da arintzen duen faktorea:

$$H_{Bltx}(e^{j\omega h}) = \frac{K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})}{1+K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})}.$$

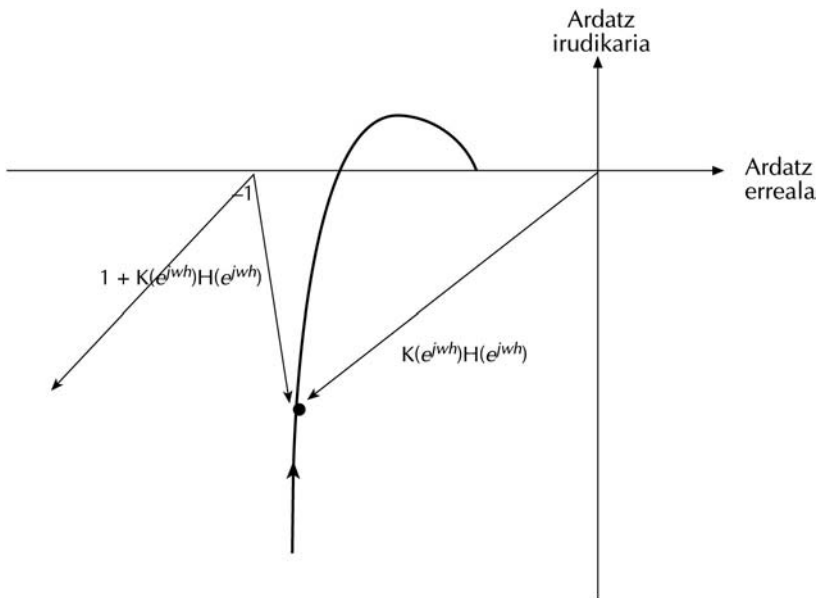
$\omega$  pultsazioa  $\omega_b$  pultsazioa baino handiagoa denez, moteltzea eraginkorra izateko,  $|H_{Bltx}(e^{j\omega h})|$  asko txikiagotu behar da banda-zabaleratik kanpo.  $[0, \omega_b]$  banda-zabaleratik kanpo  $|H_{Bltx}(e^{j\omega h})|$  asko eta bizkor txikiagotzearen bigarren arrazoa da lotura duela eredua eratzean sarri baztertzen diren modu azkarrekin. Denbora-konstante txiki horiek eragina dute  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  begizta irekiko transferentzia-funtzio harmonikoan,  $\omega$  pultsazioa handia den tokian, hots,  $[0, \omega_b]$ -tik kanpo. Doitasunik ezak eta ziurgabetasunak oso arriskutsuak dira begizta itxiko egonkortasunerako,  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  kurba  $-1$  puntu kritikotik behar hainbat urrun ez dagoen egoeran,  $\omega < \omega_b$  izaki. Arazoa konpontzeko modu eraginkor bat da  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$ -ren modulua,  $\omega_b$  ebakidura-pultsazioa atzean geratu bezain laster,

berehala jaits dadin ezartzea. Begizta itxiko transferentzia-funtzioa honela adieraz daiteke:

$$H_{Bltx}(e^{j\omega h}) = \frac{K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})}{1 + K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})}. \quad (9.8)$$

Erlazio horrek adierazten du  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$ -ren modulua asko jaisten dela  $\omega$ -rekin. Gauza bera gertatzen da  $|H_{Bltx}(e^{j\omega h})|$ -ren moduluarekin. Horren ondorioz sortzen da adierazitako bigarren arrazoia.

(9.8) adierazpenetik ondorioztatu dugu ezen, ia banda-zabalera osoan  $|H_{Bltx}(e^{j\omega h})|$  konstantea eta unitatearen baliokoa izan dadin,  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$ -ren moduluak handia izan behar duela. Kondizio hori gauzatzeko,  $z = 1$  polo bat edo begizta irekiko irabazi estatiko handi bat ezartzen da  $K(z)H(z)$ -n. Aitzitik, banda-zabaleratik kanpoko aldean,  $|H_{Bltx}(e^{j\omega h})|$  erortzea beharrezkoa den aldean, hain zuzen,  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$ -ren moduluak bizkor egin behar du behera  $\omega$ -rekin. Kontrolatu beharreko prozesuak behe-paseko iragazkitzat jotkatzen du, eta beherapen hori berez sortzen du. (9.8) aztertzen jarraitzen badugu,  $1 + K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  modulua txikia denean erresonantzia dagoela nabarmendu behar da.  $1 + K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  zenbaki konplexua Nyquisten diagraman adierazita dago. Diagramak  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  begizta irekiko transferentzia-funtzio harmonikoa irudikatzen du (9.14 irudia).



**9.14 irudia.**  $1 + K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$ -ren irudikapena Nyquisten diagraman.

$1 + K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  modulua jaitsi egiten da  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  kurba  $-1$  puntu kritikora hurbiltzen den heinean. Gero, behar adinakoak ez diren marjinetatik erresonantzia handia dator. Marjinak egokiak izanez gero, fenomeno hori desagerrarazi edo moteldu egiten dute.

Q erresonantziaren irabazia erraz kalkulatzeko oinarritzko teorema hau baliaturik:

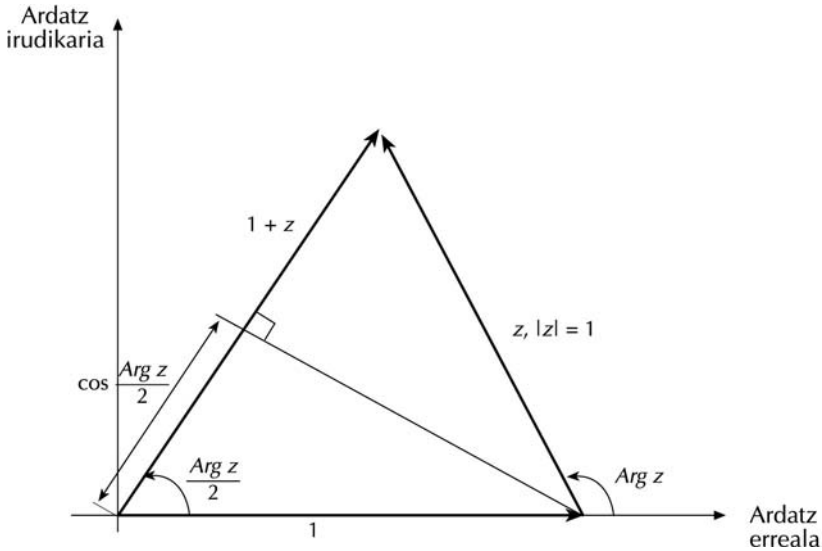
### 9.1 teorema

Demagun  $z$  zenbaki konplexua dugula eta haren moduluak 1 balio duela. Orduan,

$$|1 + z| = 2 \cdot \cos\left(\frac{\text{Arg}(z)}{2}\right).$$

### Egiaztatpena

Emaitza hori 9.15 irudiari lotutako trigonometrietatik ondorioztatzen da berehala.



**9.15 irudia.**  $|1 + z| = 2 \cdot \cos\left(\frac{\text{Arg}(z)}{2}\right)$ .

$K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  kurba  $\omega_r$  erresonantzia-pultsazioan  $-1$  puntutik gertu dagoenean,  $K(e^{j\omega_r h})H(e^{j\omega_r h})$ -ren modulua 1 zenbakiaren baliokidea da gutxi gorabehera. Lehengo teorema dioenaren arabera:

$$\left|1 + K(e^{j\omega_r h})H(e^{j\omega_r h})\right| = 2 \cdot \cos \frac{\text{Arg}\left(K(e^{j\omega_r h})H(e^{j\omega_r h})\right)}{2}.$$

Hortik, erresonantzia-irabazia hau da:

$$Q = \left|H_{\text{Bltx}}(e^{j\omega_r h})\right| = \frac{\left|K(e^{j\omega_r h})H(e^{j\omega_r h})\right|}{2 \cdot \cos\left(\frac{\text{Arg}\left(K(e^{j\omega_r h})H(e^{j\omega_r h})\right)}{2}\right)}$$

Bada oraindik ere nahiko arazo garrantzitsu ebazteko. Nola sintetiza daiteke  $\omega_b$  ebakidura-pultsazio jakin bat –eta, hortaz, begizta itxiko banda-zabalera– ematen duen kontroladorea? 9.9 atalean erantzungo diogu galdera horri.

Atal hau laginketa-maiztasuna aukeratzeari buruzko ohar batekin amaituko dugu.  $[0, \omega_b]$  banda-zabaleran pultsazioak dituzten kontsignak definizioz transmititzen dira. Shannonen teoremaren arabera, laginketa-pultsazioak  $2\omega_b$ -tik gorakoa izan behar du.

Gainera, badakigu, praktikan, hartzen den laginketa-pultsazioak  $10 \omega_b$  edo  $20 \omega_b$  baino handiagoa izan behar duela.

## 9.8 ERREGULADOREAREN SINTESIA ERROEN TOKIAN

### 9.8.1 Sarrera

Begizta itxiko sistemaren poloen banaketak zehazten du plano konplexuan erregimen iragankorra moteltzea. Zehazki, moteltze-kondizio absolutuak eta erlatiboak betetzearren, polo horiek 9.7 irudian azaltzen den eremuan egon behar dute. Antolamendu hori erroen tokiarekin ere ebatz daiteke era eraginkorrean. **Erroen tokia** da *begizta itxiko sistemaren* poloen tokia, parametro bat –kontroladorearen irabazia gehienetan– zeroaren eta infinituaren artean aldatzen denean. Prozesu itxiko poloak  $1+K(z)H(z)$  adierazpeneko zeroak dira, bai serbosisteman bai erregulazioan. Ikusten denez, eta oso ohar garrantzitsua egitearren, adierazpen hori sistema analogikoetan zegoen *bera* da. Beraz, prozesu analogikoetarako zehaztu diren berak dira propietateak eta erroen toki baten erabilerak kasu diskretu batean. Argi dago poloen posizioaren *interpretazioa* ezberdina dela. Horrek bereziki eragiten die egonkortasunari (1 erradioko zirkuluaren barruko poloak), moteltze egokia bermatzen duen eremuari (9.7 irudia) eta efektu integratzaileari ( $z = 1$  poloa).

$K_p$  irabaziaren zehaztapena baino behar ez duen  $K(z) = K_p$  erreguladore proportzionalaren sintesia erroen tokia eraikiz egiten da,  $K_p \in [0, \infty]$  gertatzen denean. Espezifikazioak errespetatzen dituen eran hautatzen da irabazia; ez dago, nahitaez, irtenbide bakar bat.

Adibide bat ikusi aurretik, adierazi nahi dugu erroen tokian erreguladore digitalaren sintesiak ez duela inongo zailtasunik, kontrolatu beharreko sisteman laginketa-periodoaren multiplo osoa den atzerapen hutsa agertzen zaigunean.

---

### 9.2 adibidea

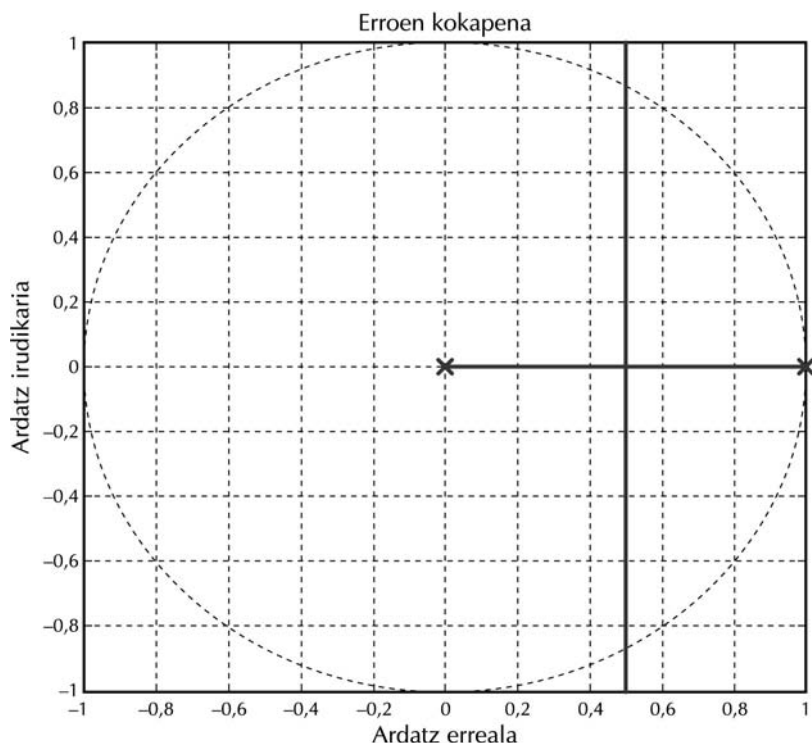
---

Demagun kontrolatu nahi dugun sistemak honelako transferentzia-funtzioa duela. Gogoan izan behar dugu erabiliko dugun kontroladorea proportzionala dela eta sistemaren begizta irekiko transferentzia-funtzioan sartu dugula.

$$K(z)H(z) = \frac{K_p}{z(z-1)}$$


---

Eskatzen den moteltze-kondizio absolutuaren faktoreak gutxienez  $a = 20$  izan behar du,  $k_a = 10$  erloju-kolpetan. Gogoan izan behar dugu kontroladorearen  $K_p$  parametroak balio positiboak soilik har ditzakeela:  $K_p \in [0, \infty]$ . Poloek duten tokia 9.16 irudian ikus daiteke.



**9.16 irudia.** Erreguladore proportzionalerako erroen tokia.

Begizta itxiko poloek itxura hau hartuko dute:

$$z_{0,1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4K_p}}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_{0,1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4K_p}}{2} : K_p \leq \frac{1}{4} \\ z_{0,1} = \frac{1 \pm j\sqrt{4K_p - 1}}{2} : K_p > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Badakigu polo horien moduluak, moteltze-kondizio absolutuagatik, ezin duela 0,7411 baliotik gora egin.

$$|z_{1,0}| \leq e^{\frac{\ln(a)}{k_a}} \Rightarrow |z_{1,0}| \leq e^{\frac{\ln(20)}{10}} \Rightarrow |z_{1,0}| \leq 0,7411$$

Ahalik eta  $K_p$  irabazirik handiena hautatzen da segimendu-errorea ahalik eta txikiena izan dadin. Beraz, polo konplexuak izango ditugu. Polo konplexuak izanez gero, moduluen adierazpen matematikoa honelakoa da.

$$|z_{0,1}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4K_p - 1}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4K_p - 1} = \sqrt{K_p} = 0,7411 \Rightarrow$$

$$K_p = 0,5492$$

$K_p = 0,5492$  eginda, moteltze-kondizioa betetzen da, P kontroladore batekin erregimen iraunkorreko errore txikiagoa lortzearen. Horrela kokatzen dira bi polo konjugatu moteltze-kondizioari lotutako zirkuluaren gainean. Begizta itxian lortzen den transferentzia-funtzioa hau da:

$$H_{Bl}(z) = \frac{0,5492}{z^2 - z + 0,5492}$$

### 9.8.2 Erroen tokia deformatzea

Moteltze-kondizioak betetzeko, batzuetan komeni da poloen tokia deformatzea, besoak ezkerrera desplazatuz.

### 9.3 adibidea

Demagun kontrolatu nahi dugun sistemaren transferentzia-funtzioa hau dela:

$$H(z) = \frac{1}{(z-1)(z-0,8)}$$

Erabiliko dugun kontroladorea proportzionala da:  $K(z) = K_p$ . Ez da serbosistemako erregimen iraunkorreko errorerik onartzen. Hala ere, 0,05eko segimendu-errorea onartzen dugu. Ezar dezagun moteltze-kondizio absolutu bat: gutxienez,  $a = 20$  eta  $k_s = 10$  erloju-kolpe. Halaber, moteltze-kondizio erlatiboa ezarriko dugu, eta haren faktorea, gutxienez,  $a = 11$  izango da,  $N = 1$  oszilaziotan. Laginketa-periodoa  $h = 0,025$  segundo da.

Lehenik sistemaren begizta irekiko transferentzia-funtzioa idatziko dugu:

$$K(z)H(z) = \frac{K_p}{(z-1)(z-8)}$$

Sistema horren mota serbosistema-egituran jarritz gero, 1 izango da. Beraz, sistemak ez du estatismorik izango. Segimendu-erroreak  $K_p$  parametroaren gutxieneko balio bat finkatuko digu.

$$\gamma = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{K_p}{(z-1)(z-8)} = 5K_p \Rightarrow \frac{h}{\gamma} = \frac{0,025}{5K_p} \leq 0,05 \Rightarrow$$

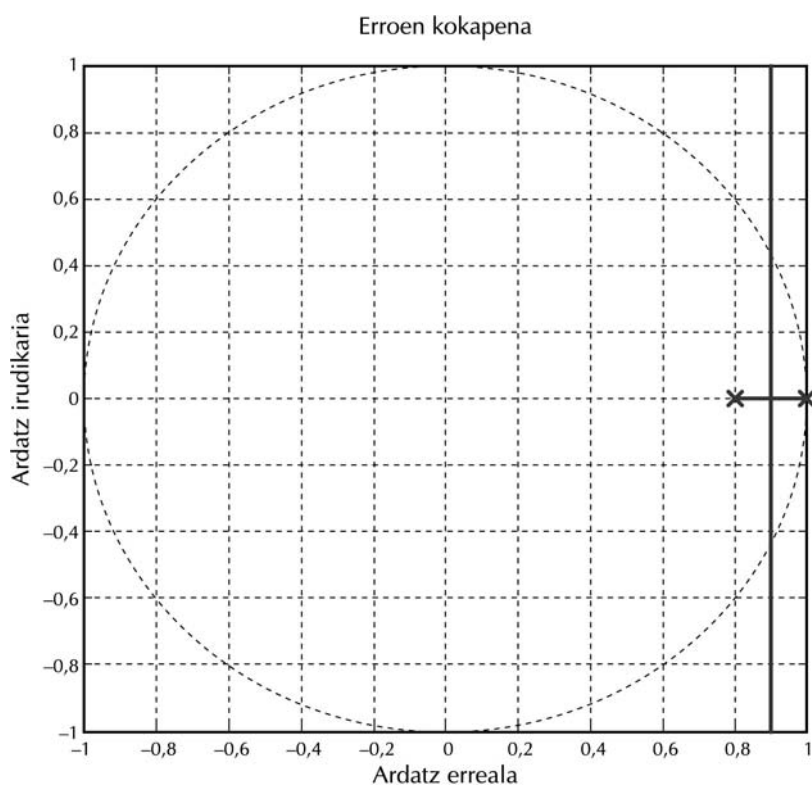
$$0,1 \leq K_p$$

9.17 irudian marraztu dugu transferentzia-funtzio horren erroen tokia. Erroen toki horretan,  $K_p$  parametroak balio positiboak soilik hartzen ditu. Badirudi  $K_p$  irabazi-balio batek ere ez duela uzten moteltze-kondizioa betetzen. Beraz, kontroladorea antolatu behar da berriz ere. Izan ere, erraz ikusten da besoak ezkerrera desplazatuta deformatu behar dela toki hori. Sistema horren begizta itxiko poloak kalkulatz gero, berdintza hauek lortuko ditugu. Gogoan izan behar dugu sistema horren begizta itxiko moduluak 0,9 baino handiagoak direla. Bestalde, moteltze-kondizio absolutuak behartzen gaitu inekuazio hauek betetzera:

$$|z_{1,0}| \leq e^{\frac{\ln(a)}{K_a}} \Rightarrow |z_{1,0}| \leq e^{\frac{\ln(20)}{10}} \Rightarrow |z_{1,0}| \leq 0,7411$$

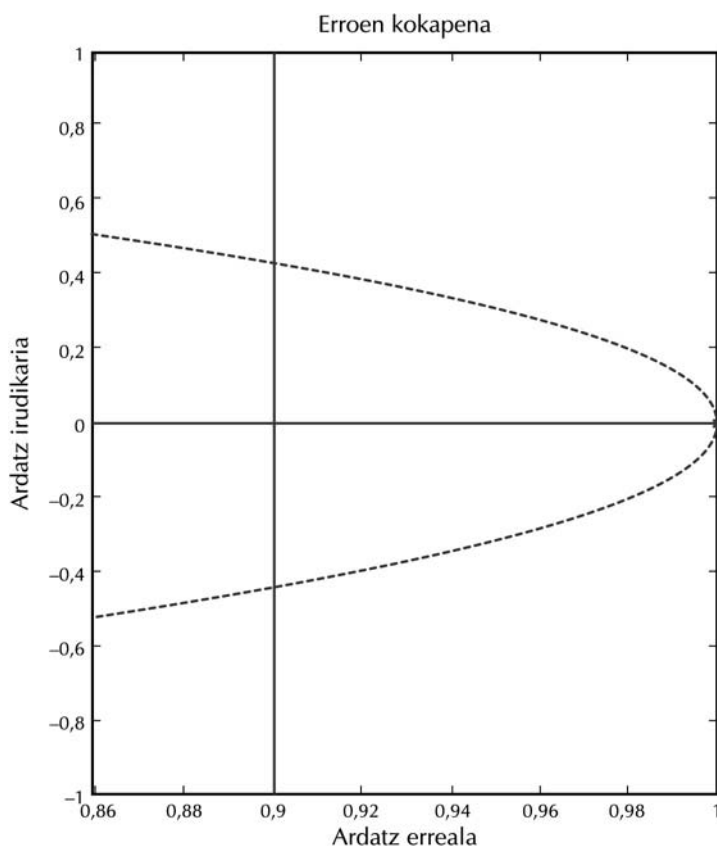
$$H_{Bl}(z) = \frac{K_p}{(z-1)(z-0,8)+K_p} \Rightarrow z^2 - 1,8z + (0,8+K_p) = 0 \Rightarrow$$

$$z_{1,0} = \frac{1,8 \pm \sqrt{1,8^2 - 4(0,8+K_p)}}{2} \Rightarrow |z_{1,0}| > 0,9$$



**9.17 irudia.** Erroen tokia, kontrol proportzional batekin.

Interesgarria da ikustea ariketa honetan eskatutako espezifikazioak ezin direla bete.



**9.18 irudia.** Erroen tokia: kontrol proportzional honek egonkortasun-arazoak izango ditu, irudian ikus daitekeenez sistema honen polo baten modulua 0,9 baino handiagoa izango delako beti. Gogoan izan irudi honetan ardatz errealeko unitateak eta ardatz irudikariko unitateak ez direla berdinak.

$K(z)H(z)$  begizta irekiko transferentzia-funtzioa, arrazionala eta propioa dena, honela alda daiteke: esplizitu eginez  $z_j$  zeroak,  $j = 1, 2, \dots, m$ , eta haien  $p_i$  poloak,  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$G(z)H(z) = \frac{b_0 \cdot z^m + b_1 \cdot z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{b_0 \cdot \prod_{j=1}^m (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}$$

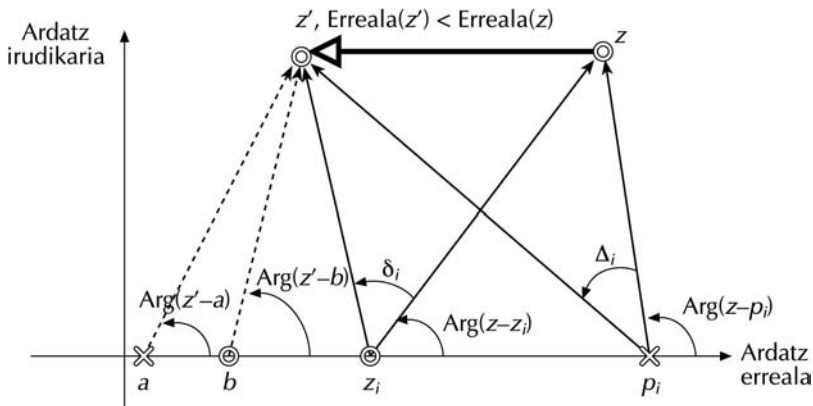
$1 + K(z)H(z) = 0$  ekuazioak poloen toki hau definitzen du:

$$\frac{b_0 \cdot \prod_{j=1}^m (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} = -1 \quad (9.9)$$

Har dezagun berdintza horretako atal bien argumentua, eta demagun  $b_0 > 0$  dela:

$$\sum_{j=1}^m \text{Arg}(z - z_j) - \sum_{i=1}^n \text{Arg}(z - p_i) = (2q + 1)\pi, \quad q \in \mathbb{Z} \quad (9.10)$$

Beharrezko kondizio hori 9.19 irudian irudikatu da:  $z$  zenbaki konplexu edozeinetariko bat poloen tokikoa bada,  $z - z_j$  zenbaki konplexuen argumentuen batura,  $z - p_i$  zenbaki konplexuen argumentuen batura kenduta,  $\pi$ -ren multiplo bakoitia izango da.



**9.19 irudia.** Erroen tokia ezkerreara higitzen da, 0ek erroen tokia erakartzen dutelako.

Kasu horretan,  $z$  ezkerreantz desplazatuta dago, plano konplexuko  $z'$  puntu finkoan (9.19 irudia). Honako hau dugu hor:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \text{Arg}(z' - z_j) - \sum_{i=1}^n \text{Arg}(z' - p_i) = \\ & = \sum_{j=1}^m \text{Arg}(z - z_j) - \sum_{i=1}^n \text{Arg}(z - p_i) - \left( \sum_{i=1}^n \Delta_i - \sum_{j=1}^m \delta_j \right) \neq (2q + 1)\pi, \quad q \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$n \geq m$  gertatzen denez,  $-\left(\sum_{i=1}^n \Delta i - \sum_{j=1}^m \delta j\right)$  gehigarria negatiboa da normalean.

Horren ondorioz,  $z'$  puntua poloen tokikoa izateko nahitaezko kondizioa urratzen da. Arazoa konpontzearen,  $b$  zero erreala sartzen da. Bestela, hobe da kontroladorearen transferentzia-funtzioan a polo bat eta  $b$  zero erreal gehigarriak sartzea, kontrol-algoritmoaren kausalitatea bermatzeko (9.19 irudia).  $z'$  puntua poloen toki berrian egoteko, kondizio hau bete behar da:

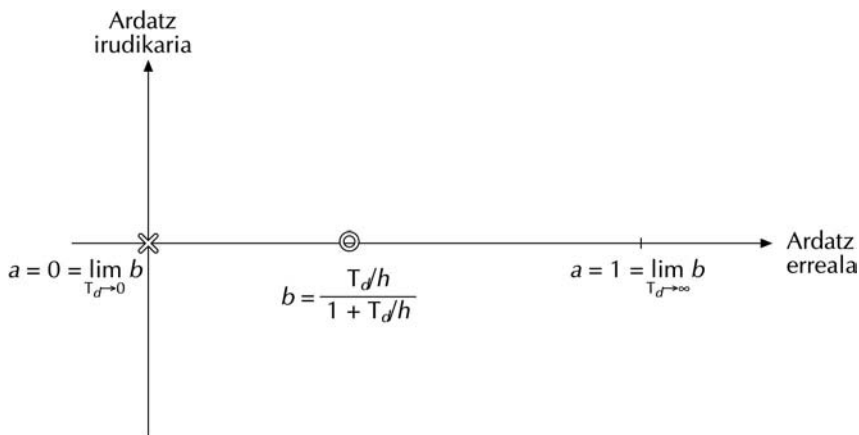
$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \text{Arg}(z' - z_j) + \text{Arg}(z' - b) - \left[ \sum_{i=1}^n \text{Arg}(z' - p_i) + \text{Arg}(z' - a) \right] = \\ & = \sum_{j=1}^m \text{Arg}(z - z_j) - \sum_{i=1}^n \text{Arg}(z - p_i) - \left( \sum_{i=1}^n \Delta i - \sum_{j=1}^m \delta j \right) + \text{Arg}(z' - b) - \text{Arg}(z' - a) = (2q + 1)\pi \end{aligned} \quad (9.11)$$

(9.10)tik eta (9.11)tik ondorioztatzen denez, gertatzen den  $-\left(\sum_{i=1}^n \Delta i - \sum_{j=1}^m \delta j\right) + \text{Arg}(z' - b) - \text{Arg}(z' - a)$  adierazpenak  $-\left(\sum_{i=1}^n \Delta i - \sum_{j=1}^m \delta j\right) \leq 0$  baita— nuluia izan behar du. Horretarako, ezinbestekoa da  $\text{Arg}(z' - b) \geq \text{Arg}(z' - a)$  izatea. Gero,  $b$  zeroa  $a$  poloaren eskuineko aldean jarriko dugu (9.19 irudia). Poloen tokiaren ezkerreko deformazioaren neurria  $a$  eta  $b$  zenbakien bidez doitzen da, kasuaren arabera.

PD kontroladoreak transferentzia-funtzio hau du:

$$K_p \left( 1 + \frac{T_d}{T} \cdot \frac{z-1}{z} \right) = K_p \frac{\left( 1 + \frac{T_d}{T} \right) \left( z - \frac{T_d/T}{1 + T_d/T} \right)}{z} \quad (9.12)$$

PD algoritmoa ez dago iragazita: 8 ataleko era estandarrean dagoen  $T_d/N$  denbora-konstantea ez da adierazi; izan ere,  $N = 10$  balio estandarrekin, alboratu egin daiteke sintesian.  $T_d$  edozein izanda ere, ikusi dugu  $b = \frac{T_d/T}{1 + T_d/T}$  zero erreala  $a = 0$  poloaren eskuineko aldean jartzen dela (9.20 irudia).



**9.20 irudia.** Kontrol proportzional deribatzaile baten poloa eta zeroa.

$K_p$  transferentzia-funtzioaren kontroladore proportzional batean gai deribatzailea gehitzean,  $b$  zeroa sartzen da  $a = 0$  poloaren eskuineko aldean. Horrek erroen tokia ezkerrera desplazatzea dakar.  $\lim_{T_d \rightarrow 0} b = a = 0$ , eta  $\lim_{T_d \rightarrow \infty} b = 1$  gertatzen denez, deformazioa dosifikatu egin daiteke,  $T_d$  dela medio. (9.12) berdintzak erakusten duenez,  $\lim_{z \rightarrow 1} K(z) = K_p$ : kontroladorearen irabazi estatikoa ez da aldatu gehigarri horrekin.

Beraz, PD kontroladorearen sintesia honela egiten da:  $T_d$ -ren balio finkorako, erroen tokia kontroladorearen  $K_p$  irabazia 0tik infinitura aldatuz eratzen da. Hala behar izanez gero, eragiketa hori  $T_d$ -ren beste balio batzuekin errepikatuko da, toki-aldaketak espezifikazioak betetzea ahalbidetzen duen arte. Horrelakorik izanez gero, bilakaera ez da bakarra nahitaez.

#### 9.4 adibidea

Demagun aurreko adibideko sistema bera kontrolatu nahi dugula, eta sistemari eskatzen dizkiogun espezifikazioak berdinak direla. Laburbilduz datu hauek ditugu.

1.- Sistemaren transferentzia-funtzioa

$$H(z) = \frac{1}{(z-1)(z-0,8)}$$

## 2.- Sistemak begizta itxian bete behar dituen kondizioak

2.1. Ez du estatismorik izan behar

2.2. Segimendu-erroreak 0,05 baino txikiagokoa izan behar du

2.3. Moteltze-kondizio absolutuak:  $a = 20$ ,  $k_a = 10$

2.4. Moteltze-kondizio erlatiboak:  $a' = 11$ , oszilazio bakar baten

Aurreko adibidean ikusi dugu kontrol proportzional batekin ezin dugula kontrolatu eskatu zaizkigun espezifikazioei jarraituz. Ikusi ahal izan dugunez, kontroladore proportzional bat erabili beharrean kontrol proportzional deribatzaile bat erabiliko dugu erroen tokia ezkerrera erakartzeko. Mota horretako kontrolak bi parametro ditu.  $z = b$  zero bat eta  $z = 0$  beste polo bat sartzen dio begizta irekiko transferentzia-funtzioan.

$$K(z) = K_{pb} \frac{z-b}{z}$$

Beraz, begizta irekiko transferentzia-funtzioa honela geratuko zaigu:

$$K(z)H(z) = K_{pb} \frac{z-b}{z(z-1)(z-0,8)}$$

Bestalde, serbosistema-egitura 1 motakoa da, beraz, ez dugu estatismorik izango. Segimenduan izan dezakegun errorerik handiena 0,05 bada,  $K_{pb}$  parametroak gutxienez balio hau izan behar du.

$$\gamma = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)K(z)H(z) = \lim_{z \rightarrow 1} K_{pb} \frac{z-b}{z(z-0,8)} = 5K_{pb}(1-b) \Rightarrow$$

$$\frac{h}{\gamma} = \frac{0,025}{5K_{pb}(1-b)} \leq 0,05 \Rightarrow 0,1 \leq K_{pb}(1-b) \Rightarrow K_{pb} \geq \frac{0,1}{(1-b)}$$

Kontroladorearen zeroa finkatuko dugu orain. Horretarako jakin behar dugu zer puntutatik igaro behar duen erroen tokiak, moteltze-kondizioak betetzeko. Bestalde, ahalik eta  $K_{pb}$  parametrorik handiena hartu behar dugu, segimendu-errorea ahalik eta txikiena izan dadin. Beraz, hori betetzen duten puntuak moteltze-kondizio absolutuaren eta erlatiboaren mugak elkartzen diren puntuak dira. Beraz, erroen tokia puntu horretatik igaro dadila egingo dugu.

- 1.- Moteltze-kondizio absolutuak finkatzen duen poloen modulurik handiena hauxe da:

$$|p_{1,0}| = e^{-\frac{\ln(a)}{k_a}} = e^{-\frac{\ln(20)}{10}} = 0,7411$$

- 2.- Moteltze-kondizio erlatiboak finkatzen duen poloen modulurik handiena hauxe da:

$$|p_{1,0}| = e^{-\frac{\ln(a')}{2\pi N}w} = e^{-\frac{\ln(11)}{2\pi}w}$$

Gogoan izan behar dugu poloen argumentua edo angelua  $w$  dela.

Bi modulu horiek berdinduz  $w$  kalkulatu ahal izango dugu, eta, ondorioz, baita zein puntutatik igaro behar duen erroen tokiak ere.

$$0,7411 = e^{-\frac{\ln(11)}{2\pi}w} \Rightarrow w = 0,7851 \Rightarrow \begin{cases} p_0 = 0,7411e^{j0,7851} \\ p_1 = 0,7411e^{-j0,7851} \end{cases}$$

Erroen tokia edo kokapena nahitaez polo horietatik igaro dadin, begizta itxiko transferentzia-funtzioaren izendatzaileak  $(z - 0,7411e^{-j0,7851})(z - 0,7411e^{j0,8751})$  polinomioaz zatigarria izan behar du. Begizta itxiko transferentzia-funtzioaren izendatzailea honela idatz daiteke.

$$z(z-1)(z-0,8) + K_{pb}(z-b) = z^3 - 1,8z^2 + z(0,8 + K_{pb}) - bK_{pb}$$

Azken polinomio hori  $(z - 0,7411e^{-j0,7851})(z - 0,7411e^{j0,8751})$  polinomioaz zatituz gero, hondar hau lortuko dugu:

$$z(K_{pb} - 0,5374) + (0,4129 - bK_{pb})$$

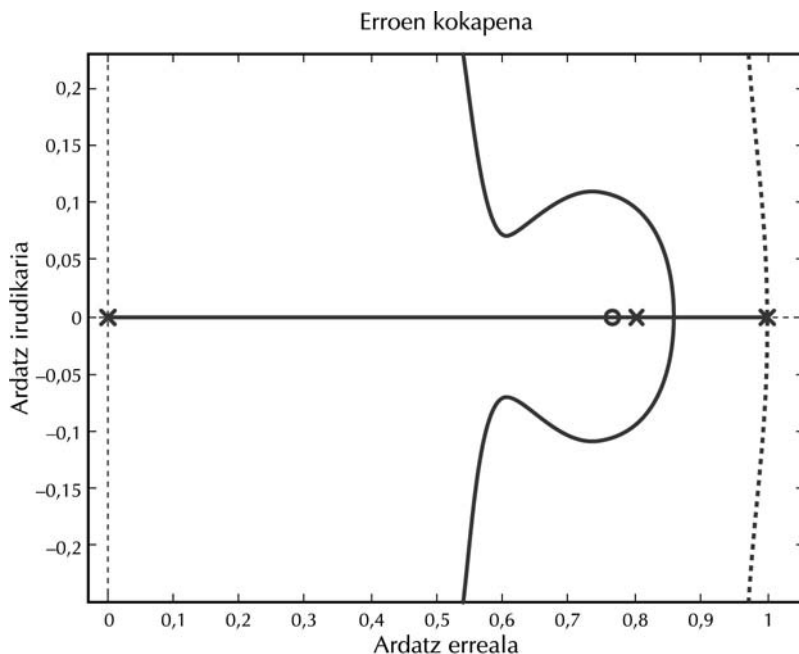
Hondarrak zero izan behar duenez,  $K_{pb} = 0,5374$  eta  $b = 0,7683$  izango dira nahitaez. Gogoan izan behar dugu azken bi parametro horiek PD kontroladore baten

benetako parametroak kalkulatzeko baliagarriak izango direla:  $b = \frac{\frac{T_d}{h}}{1 + \frac{T_d}{h}}$  eta

$$K_{pb} = K_p \left( 1 + \frac{T_d}{T} \right)$$

Horrenbestez, begizta itxiko transferentzia-funtzioaren izendatzaileak itxura hau hartuko du:

$$z^3 - 1,8z^2 + 1,3374z - 0,4128 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0,7515 \\ p_2 = 0,5243 + 0,5240i \\ p_3 = 0,5243 - 0,5240i \end{cases}$$



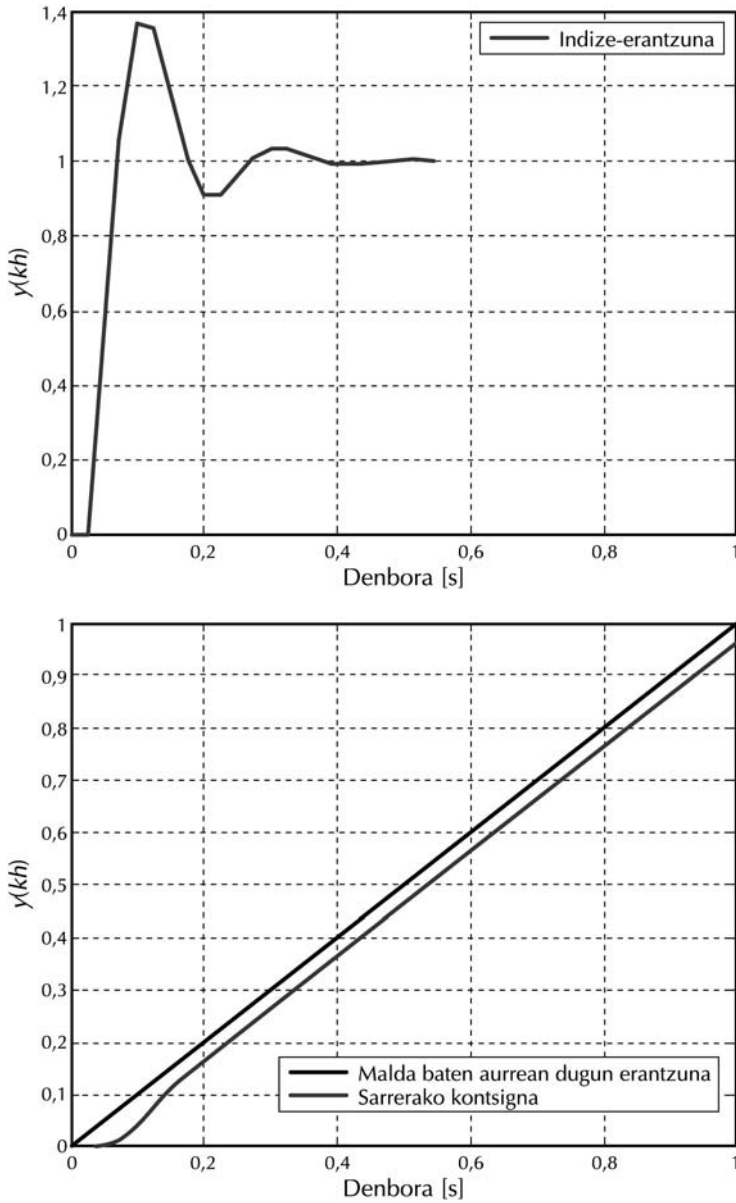
**9.21 irudia.** Sistemaren erroen tokia kontroladore proportzional deribatzaile batekin.

9.17 irudiarekin alderatuta, ikusten da tokiko besoak oso ongi daudela, eta ezkerrean *makurtuta* daudela.  $K_{pb} = 0,5374$  denean, moteltze-kondizioak bete egiten dira.

Sistemak begizta itxian duen segimendu-errorea, berriz, honela lortuko dugu. Gogoan izan behar dugu segimendu-erroreak 0,05 baino txikiagoa izan behar duela.

$$\frac{h}{\gamma} = \frac{0,025}{5K_{pb}(1-b)} = \frac{0,025}{0,6225} = 0,0401 \leq 0,05$$

Hurrengo irudietan ikus daitezke sistemaren begizta itxiko 1. mailako erantzuna eta arrapala-itxurako sarrera baten aurrean dugun erantzuna.



**9.22 irudia.** PD kontroladore batekin lan egiten duen sistema batek jauzi-itxurako sarrera baten aurrean emandako erantzuna adierazten du goiko irudiak. Beheko irudiak, bestetik, malda diskretu baten aurrean sistemak emandako erantzuna erakusten du.

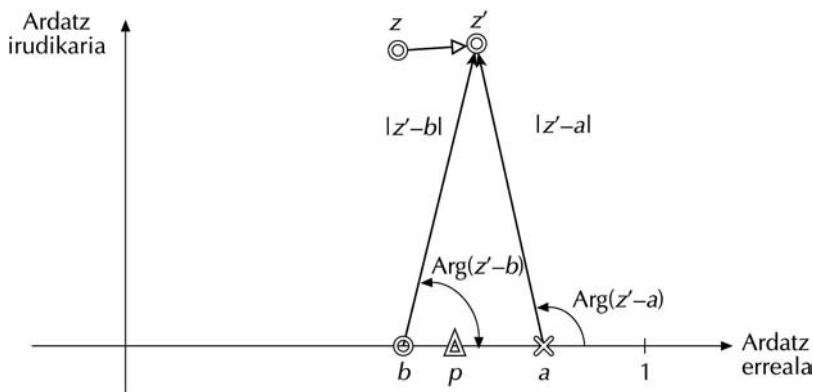
### 9.8.3 Dipoloa

Jakina denez, errore iraunkor txikiak lortzeko –sentikortasuna maiztasun txikira murriztearren eta banda-zabalerako distortsioak moteltzearren–, nahitaezko osagaiak dira  $K(z)H(z)$  begizta irekiko transferentzia-funtzioaren  $z = 1$  poloa, edo irabazi estatiko handia. Demagun egitura jakineko kontroladore bati lotuta dagoen poloen tokiak erregimen iragankorreko moteltze-espezifikazio guztiak betetzeko moduko forma duela. Hala ere,  $K(z)H(z)$ -n  $z = 1$  polorik ez badago, eta behar adinako irabazi estatikorik ez badu, ezin da bermatu, kontsigna transmititzean, nahi diren doitasun estatikoko, sentikortasuneko eta fideltasuneko kondizioak egongo direnik. Demagun irabazi estatikoa ezin dela gehiago areagotu. Sar al daiteke  $z = 1$  poloa erroen tokia asko aldatu gabe? Zoritxarrez, 9.8.2 paragrafoan dagoen arrazoitze berberak erakusten duenez,  $z = 1$  polo bakar bat sartzeak erroen tokiaren besoak eskuinera desplazatzen ditu. Gehienetan deformazio hori, hain handia izaki, onartezina da. Eskuarki, 1 erradioko zirkuluaren noranzkoan egiten da, hau da, egonkortasun-mugarantz. Egonkortasunaren eta doitasunaren arteko beste dilema bat da.

Arazo hori konpontzeko, dipolo bat gehitzen zaio erreguladoreari, alegia,  $a$  poloa eta  $b$  zeroa dituen  $\{a, b\}$  multzoa:

$$b < a \leq 1 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Gainera,  $a$  eta  $b$  zenbakiak elkarren ondokoak dira eta 1etik hurbil daude (9.23 irudia).



9.23 irudia. Dipoloa.

Erroen tokia (9.9) ekuazioak zehazten du. Nahitaezko lehen kondizioa (9.10) ekuaziotik ondorioztatzen da. Bigarrena (9.9)ko bi ataleko modulua hartuta lortzen da:

$$\frac{b_0 \prod_{j=1}^m |z - z_j|}{\prod_{i=1}^n |z - p_i|} = 1 \quad (9.13)$$

$z$  zenbaki konplexu edozeinetariko bat erroen tokikoa izango da, baldin (9.10) eta (9.12) erlazioak betetzen badira. Kontroladorean  $\{a, b\}$  dipoloa gehituz gero,  $z$  puntua beste toki bateko  $z'$  punturantz desplazatzen da *a priori* (9.23 irudia). Matematikoki,  $z'$  puntua dipolotik urruntzen denean,  $|z' - a|$  eta  $|z' - b|$  moduluak handitu egiten dira.  $\text{Arg}(z' - b) - \text{Arg}(z' - a)$  ia nulua da, eta  $|z' - b| / |z' - a|$  zatidura ia unitatearen baliokidea. Hipotesi hori hobeki egiaztatzen da  $a$  eta  $b$  elkarrengandik hurbil daudenean. Horrelakoetan, gutxi gorabehera, honako hau gertatzen da:

$$\begin{aligned} \frac{b_0 \prod_{j=1}^m |z' - z_j| |z' - b|}{\prod_{i=1}^n |z' - p_i| |z' - a|} &= \frac{b_0 \prod_{j=1}^m |z' - z_j|}{\prod_{i=1}^n |z' - p_i|} = 1 \\ \sum_{j=1}^m \text{Arg}(z' - z_j) + \text{Arg}(z' - b) - \left[ \sum_{i=1}^n \text{Arg}(z' - p_i) + \text{Arg}(z' - a) \right] &= \\ = \sum_{j=1}^m \text{Arg}(z' - z_j) - \sum_{i=1}^n \text{Arg}(z' - p_i) &= (2q + 1)\pi \end{aligned}$$

Erlazio bi horien eskuineko berdintzak eta (9.10) eta (9.13)koak berak dira. Horrek esan nahi du  $z' = z$ ; beraz, kontroladoreei dipoloa gehitzeak ez du ia aldatzen erroen tokia. Zer gertatzen da dipolotik hurbil, non  $\text{Arg}(z' - b) - \text{Arg}(z' - a) \neq 0$  eta  $|z' - b| / |z' - a| \neq 1$  dela betetzen baita? Sarritan, adar osagarria sortzen du ardatz errearen gainean. Ardatz hori  $a$  polo batetik  $b$  zerora doa (9.23 irudia). Begizta itxiko  $p \in (b, a)$  poloak –adar horretan kokatutakoak–  $cp^n$  modu iragankorra sortzen du. Dipoloa, definizioz, 1etik hurbil dagoenez,  $p^n$  seinaleak kolpe batez urratzen du: edozein moteltze-kondizio! Zorionez, parte hartzen duen  $c$  koefizientea nahi den eran murriztu daiteke. Horren ondorioz, haren eragina alboratu egin daiteke.

Azken egiaztapena frogatzeko, 7 atalean lortutako emaitzetan oinarrituko gara: serbosistema-muntaiarako, dipoloaren  $b$  zeroa begizta itxiko transferentzia-funtzioko zeroa da. Beraz,  $\frac{z-b}{z-p}$  faktorea lortzen da.  $Y_c(z)$  kontsignari emandako  $Y(z)$

erantzuna  $Y(z) = \frac{z-b}{z-p} \cdot \frac{B(z)}{A(z)} \cdot Y_c(z)$  eran adieraz daiteke, non  $(z-p)A(z)$  eta  $(z-b)B(z)$  begizta itxiko transferentzia-funtzioaren izendatzailea eta zenbakitzailea baitira hurrenez hurren.

$Y(z)$  elementu sinpleen deskonposizioan, besteak beste,  $cp^n$  modua ematen duen  $\frac{cz}{z-p}$  gaia lortzen da. Honako formula honen arabera kalkulatzeko da  $c$  koefizientea:

$$c = \lim_{z \rightarrow p} \frac{z-p}{z} \cdot Y(z) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{z-p}{z} \cdot \frac{z-b}{z-p} \cdot \frac{B(z)}{A(z)} \cdot Y_c(z) = \frac{p-b}{p} \cdot \frac{B(p)}{A(p)} \cdot Y_c(p)$$

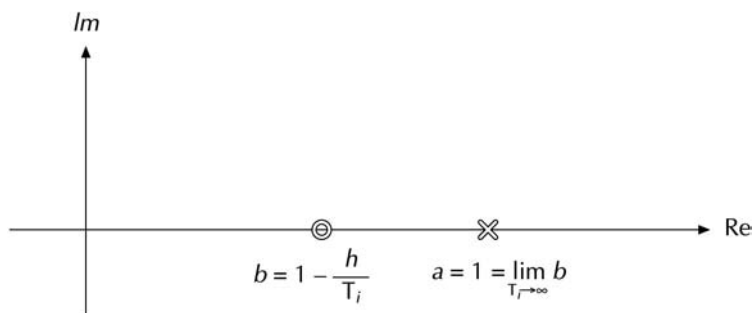
Txikia da  $p-b$  faktorea. Izan ere,  $p \in (b, a)$ , eta  $a$ , definizioz,  $b$ -ren ondokoa da. Begizta itxiko  $p$  poloa nahi den neurrian egon daiteke begizta irekiko  $b$  zerotik hurbil. Horretarako aski da nahiko irabazi handia hautatzea.

Efektu integratzailea du  $a = 1$  betetzen duen dipoloa erreguladorean jartzeak.  $a \neq 1$  gertatzen denean, begizta irekiko irabazi estatikoa eta erreguladorearena  $\frac{1-b}{1-a} - z$  biderkatzen da. Gainera,  $b < a$  betetzen denez, anplifikazioa da. Badirudi dilema bat sortu dela: irabazi estatikoa asko igo bada, halabeharrez,  $1-b$  askoz handiagoa izango da  $1-a$  baino; bestalde,  $a$ -k eta  $b$ -k elkarren ondokoak izan behar dute. Berez, dilema hori ez da existitzen; izan ere, dipoloaren antolamenduak  $z = 1$  polotik hurbil egon behar du (9.23 irudia). Irabazi estatikoa handitzen den neurria  $a$  eta  $b$  zenbakien bidezko ezarpenekin doitzen da.

PI erreguladore proporzional integratzailearen eredua honako transferentzia-funtzio honen bidez eratzten da:

$$K_p \cdot \left( 1 + \frac{\frac{h}{T_i}}{z-1} \right) = K_p \cdot \frac{z - \left( \frac{h}{T_i} \right)}{z-1}$$

Ikusten denez,  $b = 1 - h/T_i$  zero erreala  $a = 1$  poloaren ezkerreko aldean dago,  $T_i$  edozein dela ere (9.24 irudia).



**9.24 irudia.** PI erregulatzaille proportzional integratzailearen poloa eta zeroa.

Hala,  $K_p$  transferentzia-funtzioa duen erreguladore proportzionalen gai integratzailea sartzea,  $b$  zeroa gehitzen du  $a = 1$  poloaren ezkerraldean.  $\lim_{T_i \rightarrow \infty} b = a$  denez,  $b$  zeroa  $a = 1$  polotik hurbil doi daiteke:  $\{a, b\}$  multzoa dipoloa da. PI erreguladorearen sintesia honela egiten da: hasteko, erreguladore proportzionala dimentsionatzen da,  $K_p \in [0, \infty]$ -rekin poloen tokia trazatuz. Onartzen dugu erregimen iragankorreko moteltzeari dagozkion espezifikazioak bete daitezkeela, baina, hala ere, efektu integratzailea falta dela;  $\{1, 1 - h/T_i\}$  dipoloa sartzen da. Hasieran hautatutako  $K_p$  irabaziak izan behar du begizta itxiko polo gehigarria ( $\{1, 1 - h/T_i\}$  adarraren gainean)  $1 - h/T_i$  zerotik hurbil egoteko modukoa. Hemen ere, soluzioa, baldin badago, ez da bakarra.

## 9.5 adibidea

Demagun, kontrolatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzioak itxura hau duela:

$$H(z) = \frac{1}{z - 0,75}$$

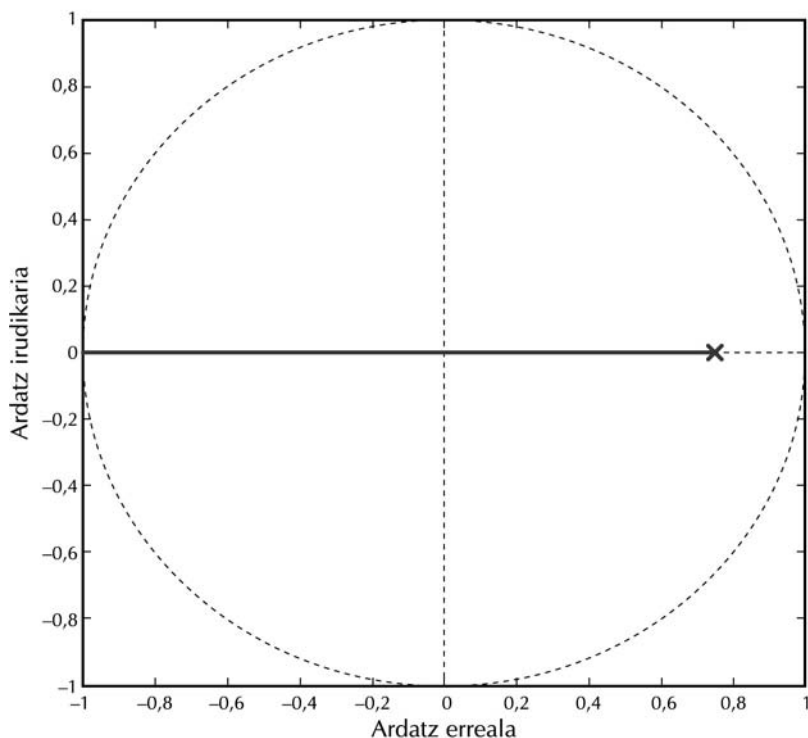
Laginketa-periodoa 0,025 segundo da. Kontrolaren espezifikazioak edo eskakizunak hauek dira:

- 1.- Ez da errorerik onartzen serbosistemako erregimen iraunkorrean, hots, ez da estatismorik onartzen.
- 2.-  $k_a = 5$  erloju-kolpetan gutxienez  $a = 20$  faktorea duen moteltze-kondizio absolutua.

Lehenik, erreguladore proportzional bat hartuko dugu. 9.25 irudian azaltzen den erroen tokiak erakusten duenez, moteltze-kondizioak betetzen dira  $K_p$  parametroak balio hau hartzen duenean:

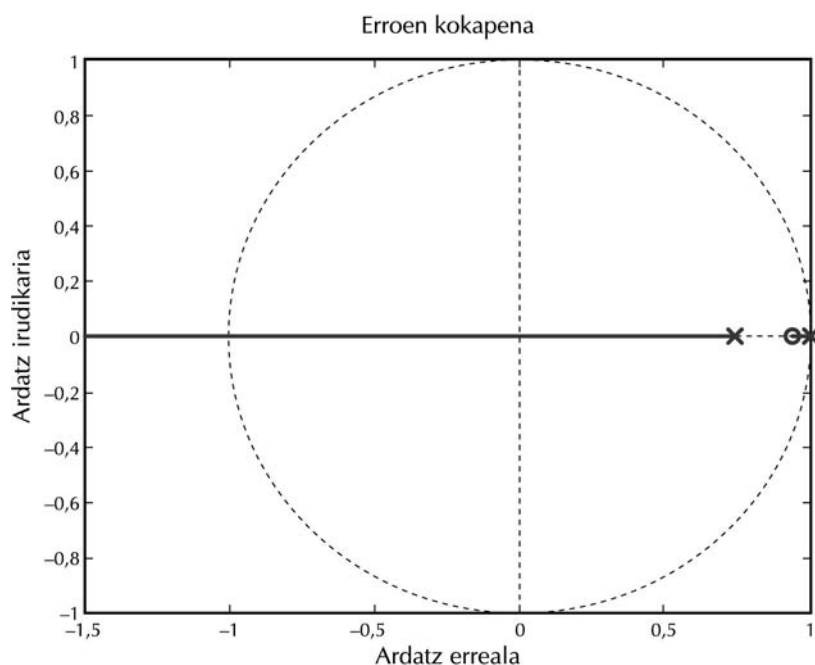
$$H_{Bl}(z) = \frac{K_p}{z - 0,75 + K_p} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{4} - K_p \\ |z| \leq e^{\frac{\ln(a)}{K_a}} = e^{\frac{\ln(20)}{5}} = 0,55 \end{cases} \Rightarrow K_p = 0,2$$

Erroen kokapena



**9.25 irudia.** Erroen tokiak, kontroladore proportzional digital batekin.

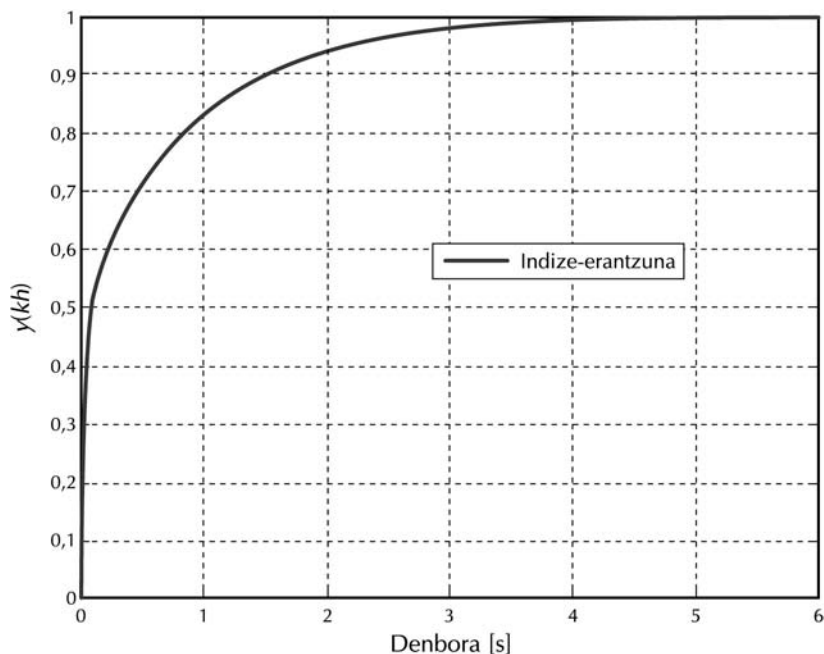
Serbosistemaren motak 1 izan behar du. Horretarako,  $\{1, 1 - 0,025/T_i\}$  dipoloa sartzen da erreguladore proportzionalean. Horren ondorioz, PI kontroladore bihurtzen da, eta,  $T_i = 0,5$  izanik,  $1 - 0,025/T_i = 0,95$  zeroa izango dugu. Zero hori  $z = 1$  polotik behar beste hurbildu dezakegu. Poloen beste toki hori 9.26 irudian marraztuta dago:



**9.26 irudia.** Erroen toki kontroladore proportzional integratzaile batekin.

$[0,95 \ 1]$  besoa gehitu izanagatik izan ezik, toki honek eta 9.25 irudian azaltzen den jatorrizko tokiak ez dute alde handirik. Hala ere,  $[-\infty \ 0,75]$  besoaren gaineko eskala pixka bat aldatzen da. Moteltze-kondizioak bermatzeko, irabazia doitu behar zaio. Horrenbestez,  $K_p = 0,25$  eginez gero,  $[0,95 \ 1]$  adarreko poloa  $z = 0,9736$  da, eta  $(-\infty \ 0,75]$  adarreko poloa  $z = 0,526$  da. Azken polo horrek bakarrik betetzen du moteltze-kondizio absolutua.  $z = 0,9736$  poloak, berriz, ez du moteltze-kondizioa betetzen; hala ere, polo edo modu horren indarra oso motela denez, baztergarria da.

Begizta itxian sistemak duen indize-erantzuna 9.27 irudian marraztu dugu.



**9.27 irudia.** Erreguladore proportzional integratzaile batekin sistemak 1. mailako jauzi baten aurrean duen erantzuna.

### 9.8.4 PID erreguladorea kalkulatzeko erroen tokian oinarritutako sintesia

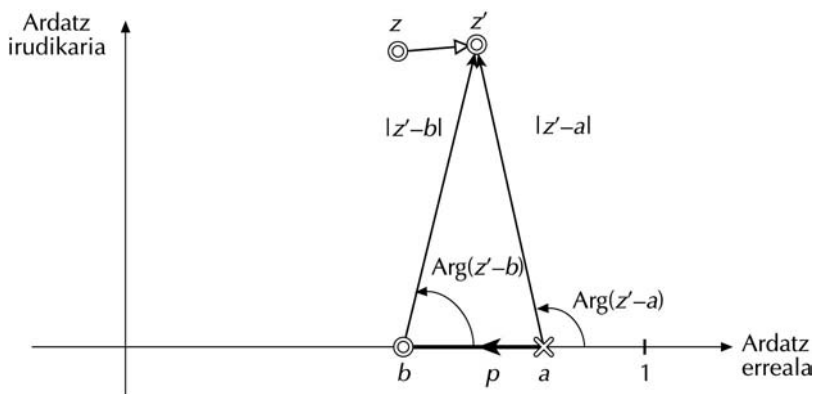
PID erreguladore digitalaren transferentzia-funtzioa honela idazten da:

$$K(z) = K_p \left( 1 + z \frac{h/T_i}{z-1} + \frac{T_d}{h} \frac{z-1}{z} \right) \quad (9.14)$$

Sarritan, kontrola egiten duen kodeari iragazki bat gehitzen zaio,  $T_d/N$  denbora-konstantearen gai deribatzailearen gainean. Hala ere,  $N \in [3, 20]$  balio estandarrekin, posible da, iragazki hori aintzat ez hartzea  $K_p$ ,  $T_i$  eta  $T_d$  parametroak kalkulatzeko ( $h$  laginketa-periodoa aurretik hautatuta dagoela jotzen da). Hainbat transformazio egin eta gero, (9.14) ekuaziotik hau ateratzen da:

$$K(z) = K_p \frac{\left(1 + \frac{T_d}{h}\right) z^2 + \left(\frac{h}{T_i} - 2\frac{T_d}{h} - 1\right) z + \frac{T_d}{h}}{z(z-1)} \quad (9.15)$$

Egiaztatzen dugu  $K(z)$ -k 0 eta 1 polo finkoak dituela (azken horrek efektu integratzailea islatzen du), eta  $T_d$ -ren eta  $T_I$ -ren arabera bi zero. Zero horiek  $z_1$  eta  $z_2$  gisa adierazten dira (9.28 irudia).



**9.28 irudia.** Erreguladore proportzional integratzaile deribatzailearen poloak eta zeroak.

PID erreguladore bat hautatzen da erroen tokiak (adibidez, erreguladore proportzional soil bat erabiltzean) ezkereranzko deformazioa eskatzen duenean moteltze-kondizioak bete ahal izateko, eta gai integratzailea eskatzen denean, doitasun estatikoa, sentikortasuna eta fideltasuna lortuko badira kontsigna transmititzean. Batetik,  $z_1$  zeroa polo nuluren eskuinean jartzen da, erroen tokia ezkerrean desplazatzeko (9.8.2 paragrafoa). Bestetik,  $z_2$  zeroari dagokionez, 1 balio duen polotik gertu egon behar du, puntu horren ezkerrean,  $[1, z_2]$  multzoa dipoloa izan dadin (9.8.3 paragrafoa).

Zehazkiago, PID kontroladorearen sintesia honela egiten da:  $T_d$ -ren eta  $T_I$ -ren balio finkoetarako, erreguladorearen  $K_p$  irabazia 0tik infinitura aldaraztean eraikitzen da erroen tokia; etapa hori errepikatu egiten da beharrezkoa bada,  $T_d$ -ren eta  $T_I$ -ren beste balore batzuekin, harik eta toki-aldaketak espezifikazioak asetzea ahalbidetzen duen arte.  $K_p$  irabazia hautatu behar da  $[z_2, 1]$  adarreko begizta itxiko sistemaren poloa  $z_2$  zerotik gertu egoteko moduan. Soluzioa, baldin badago, ez da bakarra izaten.

## 9.6 adibidea

Demagun kontrolatu beharreko sistemak transferentzia-funtzio hau duela:

$$H(z) = \frac{1}{(z - 0,8)^2}$$

Sistemari ezarri nahi dizkiogun eskakizunak hauek dira:

- 1.- Moteltze-kondizio absolutua: gutxienez  $a = 20$  faktorearekin,  $k_a = 10$  erloju-kolpetan.
- 2.- Ez da errorerik onartzen serbosistemako erregimen iraunkorrean.

Gogoan izan behar dugu  $h$  laginketa-periodoa 0,025 segundo dela.

Begizta itxiko transferentzia-funtzioko polo guztiek jatorrian zentratutako  $e^{\frac{-\ln(20)}{10}}$  = 0,7411 erradioko zirkuluaren barruan egon behar dute. Eskakizun hori ezin da erreguladore proportzionalarekin bete. Begizta itxiko transferentzia-funtzioaren poloen moduluek gutxienez 0,8 balio dutelako.

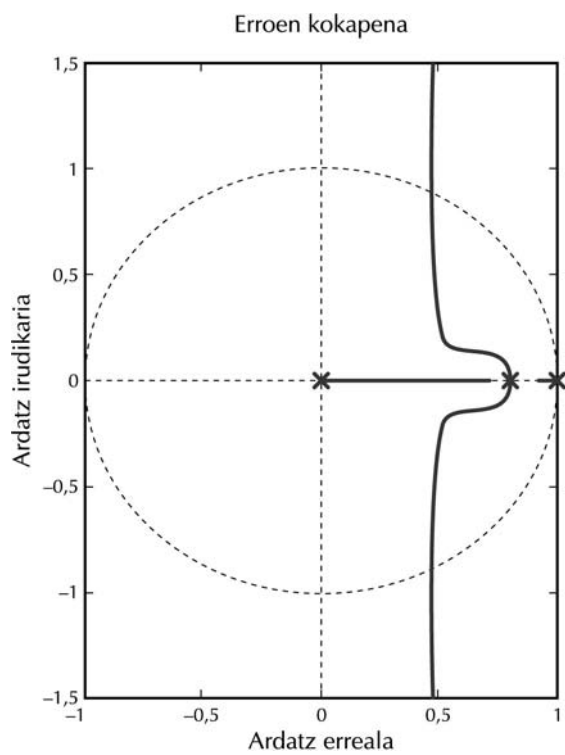
$$(z - 0,8)^2 + K_p = 0 \Rightarrow z^2 - 1,6z + 0,64 + K_p = 0 \Rightarrow$$

$$z_{1,0} = \frac{1,6 \pm \sqrt{1,6^2 - 4(K_p + 0,64)}}{2} \Rightarrow |z_{1,0}| \geq 0,8$$

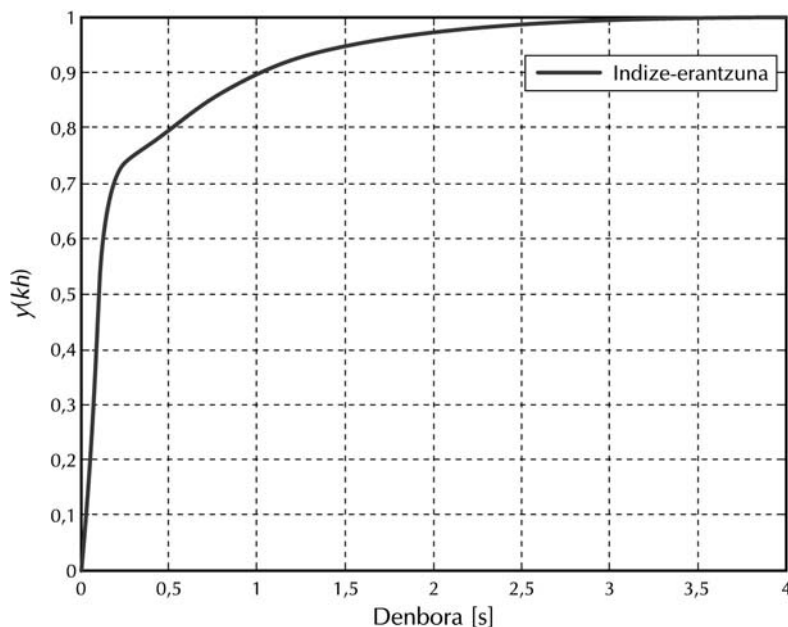
Beraz, erroen tokia ezkerrera eramateko, gai deribatzailea gehitzen da. Bestalde, gai integratzaile bat sartuko diogu, serbosistema mota 1 izan dadin eta, hala, estatismoa desagerraraz dadin. Hortaz, PID egiturako erreguladorea lortzen da. 9.28 irudiko itxura duen erreguladorea hartuko dugu: erreguladorearen transferentzia-funtzioak  $z = 0$  eta  $z = 1$  poloak eta  $z = z_1$  eta  $z = z_2$  zeroak izango ditu.

$$K(z) = K_{pb} \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{z(z - 1)}$$

Hainbat saio egin eta gero,  $z_1 = 0,95$ ,  $z_2 = 0,7$  eta  $K_{pb} = 0,188$  eginez, eskatutako eskakizun guztiak beteko ditugu: serbosistema mota bat da beraz, ez dugu inolako Orik izango, eta begizta itxiko poloen moduluak 0,7411 baino txikiagoak dira, dipoloari lotutako erroa izan ezik. Azken polo hori, moteltze-kondizio absolutua bete ez arren, oso indar gutxioko poloa edo modua da. PID kontroladorearen parametroak  $z_1$ ,  $z_2$  eta  $K_{pb}$  parametroetatik abiatuta kalkula daitezke, (9.15) formulaz baliatuz.



9.29 irudia. Erroen tokia, sistemak PID kontroladore bat duenean.



**9.30 irudia.** Begizta itxian, sistemak duen indize-erantzuna, sistemak PID kontroladorea duenean.

Orain frogatuko dugu posible dela lehen deskribatutako PID erreguladorearen sintesia deskonposatzea hurbilketa txiki bat eginez. Lehenik eta behin, PD erreguladorea dimentsionatuko dugu.

$$K_p \left( 1 + \frac{T_d}{h} \frac{z-1}{z} \right) \quad (9.16)$$

Ondoren,  $\left\{ 1, 1 - \frac{T}{T_i} \right\}$  dipoloa sartzen da (9.16) ekuazioan.  $T_i$  parametroa 9.8.3

paragrafoan adierazi dugun bezala aukeratzen da. Eraitza hau da:

$$K(z) = K_p \left( 1 + \frac{T_d}{h} \frac{z-1}{z} \right) \left( \frac{z - \left( 1 - \frac{T_i}{h} \right)}{z-1} \right)$$

Zenbait kalkulu egin eta gero, emaitza hau lortzen da:

$$K(z) = K_p \frac{\left(1 + \frac{T_d}{h}\right) z^2 + \left(\frac{h}{T_i} - 2 \frac{T_d}{h} - 1 + \frac{T_d}{T_i}\right) z + \frac{T_d}{h} - \frac{T_d}{T_i}}{z(z-1)}$$

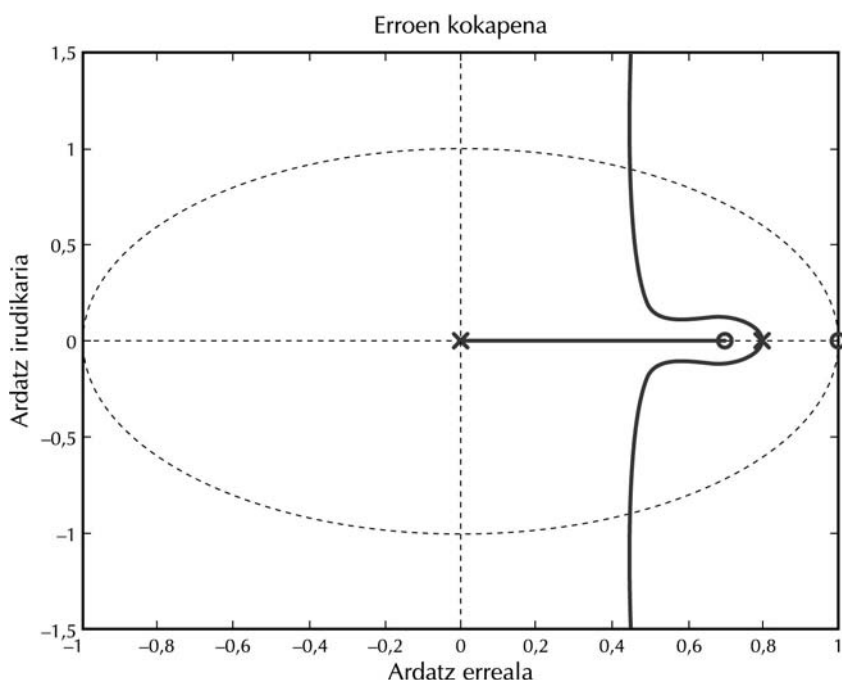
$T_d/T_i$  gaia bi aldiz ageri delako izan ezik, lortzen den transferentzia-funtzioa PID erreguladorearen (9-15) transferentzia-funtzioaren baliokidea da. Oro har,  $T_i$  askoz handiagoa da  $T_d$  baino,  $\left\{1, 1 - \frac{T_d}{T_i}\right\}$  dipoloa izango bada.  $T_d/T_i$  gaia alboratu egin daiteke: sintesi deskonposatuak dimentsionamendu osoko erreguladore bera ematen du ia. Bestalde, hurbilketa deskonposatuak agerian uzten du (9.15) transferentzia-funtzioaren  $z_1$  zeroari eragiten diola  $T_d$ -k, eta  $z_2$  zeroari, berriz,  $T_i$ -k eragiten diola funtsean.

---

### 9.7 adibidea

---

Demagun aurreko adibidean aplikatu behar dugula deskonposizio hori. Lehenik, moteltze-espezifikazioak bermatzeko moduan dimentsionatzen da PD erreguladorea. Honako parametro hauek hartzen dira:  $T_d = 0,05833$  eta  $K_p = 0,0564$  (9.31 irudia).



**9.31 irudia.** Erreguladore proportzional deribatzaile eta integratzaile batekin kontrolatutako sistemaren erroen tokia.

Ondoren,  $\left\{1, 1 - \frac{h}{T_i}\right\}$  dipoloa PD erreguladorean sartzen da estatismoa kendu ahal

izateko.  $T_i = 100$  balioa hartzen bada, irabaziari ez zaio ukiturik egin behar.

## 9.9 ERREGULADORE BATEN SINTESIA BODE DIAGRAMAN

### 9.9.1 Sarrera

Maiztasun txikian, jakina da begizta irekiko transferentzia-funtzio harmonikoaren moduluak hainbat espezifikazio (errore iraunkorrei, sentikortasunari eta banda-zabaleko distortsioari loturik) betetzeko bezain handia izan behar duela.

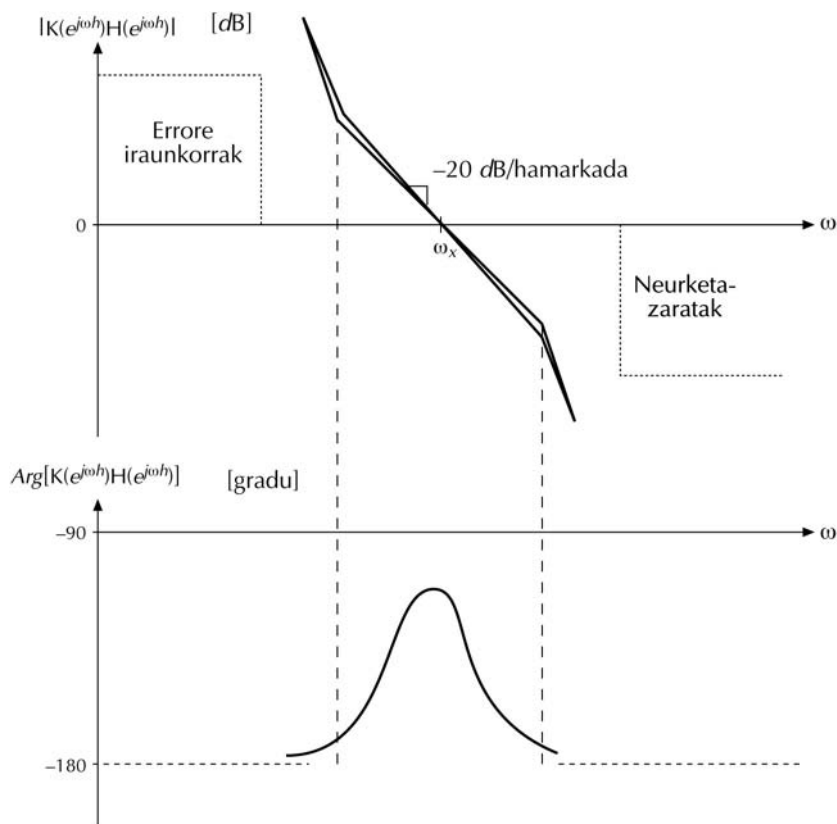
Aitzitik, maiztasun handietan, modulu horrek txikia izan behar du, neurri-zarata saihestuko bada, eta, eredia eratzean, baztertutako modu azkarren aurkako babesa bermatuko bada. Eremu batetik bestera arreta handiz igaro behar da, oraindik konpontzeke dauden arazoak murriztuko badira, hala nola nolabaiteko sendotasuna

izateko marjina egokiak (9.4 atala), erresonantzia saihestea, indize-erantzunaren kalitatea (9.5.6 paragrafoa) eta, azkenik, banda-zabalera (9.7 atala). Ondorengo paragrafoetan hurbiltze-teknika erabilerraz bat eskaintzen da, arazo horiei guztiei aldi berean irtenbidea emateko. Begizta irekiko transferentzia-funtzio harmonikoa ageri da 9.32 irudian.

**Neurri-zaratekiko sentikortasunaren eta neurri-zarata baztertzearen arteko dilema** ikusten da, (9.8) eta (9.6) erlazioei arretaz begiratuz gero. Erregimen harmonikoan honako hau sortzen dute:

$$s_H^{H_{Bltx}} + H_{Bltx}(e^{j\omega h}) = 1$$

Berdintza horrek egiaztatzen du ezinezkoa dela aldi berean sentikortasun ahula izatea eta  $-H_{Bltx}(e^{j\omega h})$  transferentzia-funtzioak transmititzen dituen neurri-zaratak egoki desagerraraztea (9.7 atala). Zorionez, programazio automatikoan, kontsignen pultsazioak txikiagoak dira (banda-zabaleran) neurri-zaratenak baino (banda-zabaleratik kanpo). Hala, banda-zabaleraren barruan,  $|s_H^{H_{Bltx}}|$  ahula izango da, eta  $|H_{Bltx}(e^{j\omega h})| - H_{Bltx}(e^{j\omega h})$  1etik hurbil egongo da. Ez dago eragozpenik sortzen duen ondoriorik; izan ere, ez da neurri-zaratarik iragazi behar.



**9.32 irudia.** Begizta irekiko transferentzia-funtzio harmonikoari dagokion Bode diagrama.

### 9.9.2 Sintesiaren printzipioak

Kontroladore analogikoen sintesia bereziki erraza da segmentu zuzenen bidezko Bode diagrama hurbilduetan. Transferentzia-funtzio analogikoen izaera arrazionalaren ondorioz erabili daitezke hurbilketa horiek. Era diskretuan ez dago izaera arrazional hori; izan ere, erregimen harmonikoan,  $e^{j\omega T}$ -k ordeztzen du  $z$  transformatuaren  $z$  aldagai konplexua. Hala ere, 6 atalean egiaztatu dugunez, forma arrazionalera irits daiteke aldagai-aldaketa egokiaren bitartez.

Zuzenki bidezko Bode diagrama hurbilduak aprobeitza daitezke, arrazionalizaturik.

Bode diagraman erreguladore diskretua sintetizatzen hasteko, kontrolatu behar den sistemako  $H(z)$  transferentzia-funtzio laginduan,  $z$ -ren ordeztu, balio hau jarri behar da:

$$z = \frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w}$$

Hortik, funtzio hau ondorioztatzen da:

$$H'(w) = H\left(\frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w}\right),$$

Ondoren,  $w$  aldagaiaren ordez  $jv$  jartzen da, eta  $H'(jv)$  adierazpen arrazionala sortzen da. Ondoren,  $H'(jv)$ -ren Bode diagrama hurbildua egiten da, segmentu zuzenen bidez, eta  $K'(jv)$  transferentzia-funtzioa lortzen da. Hala,  $K'(jv)$   $H'(jv)$ -k segidan zehazten diren hainbat irizpide betetzen ditu. Sintesia egiteko,  $jv$ -ren ordez,  $w$  jarri behar da  $K'(jv)$ -n:

$$w = \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1}$$

Azkenik,  $K'\left(\frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1}\right) = K(z)$  erreguladorea, 5 ataleko argibideen arabera kodetzen da.

$\left|K(e^{j\omega_x h})H(e^{j\omega_x h})\right| = 1$  deneko  $\omega_x$  gurutzatze-pultsazioaren bidez,  $v_x$  zenbakia lortuko dugu:

$$v_x = \frac{2}{h} \tan\left(\omega_x \frac{h}{2}\right)$$

Definizioz,  $\left|K'(jv_x)H'(jv_x)\right| = 1$ .  $K'(jv)$  transferentzia-funtzioak honako hau betetzeko modukoa izan behar du:  $\left|K'(jv_x)H'(jv_x)\right|$ -ren malda,  $v_x$ -ren inguru aski zabalean,  $-20$  dB/hamarkada izatea. Gainera,  $v$  askoz txikiagoa denean  $v_x$  baino,  $\left|K'(jv_x)H'(jv_x)\right|$ -k altua izan behar du, eta bizkor murriztu behar du  $v$  handiagoa denean  $v_x$  baino. Kondizio hori ezartzeko, funtsezko hainbat arrazoi dago.

Lehenengo arrazoia da, era hurbilduan,  $K'(jv_x)H'(jv_x) = \frac{v_x}{jv}$  dela,  $v_x$ -ren inguruan. Hortaz, fase-marjina era asintotikoan  $90^\circ$  da. Horrek sendotasun paregabea dakar, eta begizta itxiko erresonantzia saihesten du.  $\left|K'(jv_x)H'(jv_x)\right|$ -ren malda  $-20$  dB/hamarkada den  $v_x$ -ren inguruak, horrenbestez, fase-marjina

asintotikora hurbiltzeko bezain zabala izan behar du. Gainera, nahiko irabazi-marjina handia bermatzen da.

Bigarren arrazoia begizta itxiko prozesuaren  $[0, \omega_b]$  banda-zabalerarekin lotuta dago. Demagun  $v_b$  zenbakia  $\omega_b$  ebakidura-pultsazioari dagokiola:

$$v_b = \frac{2}{h} \tan\left(\omega_b \frac{h}{2}\right)$$

Hala, begizta itxiko transferentzia-funtzioaren eredua,  $v = v_b$  denerako,  $-3$  dB da:

$$\left| \frac{K'(jv_b)H'(jv_b)}{1+K'(jv_b)H'(jv_b)} \right| = -3\text{dB}$$

Bestalde,  $|K'(jv_x)H'(jv_x)| = 1$  denez,

$$\left| \frac{K'(jv_x)H'(jv_x)}{1+K'(jv_x)H'(jv_x)} \right| = \frac{1}{|1+K'(jv_x)H'(jv_x)|}$$

9.1. teorema honako hau adieraztea ahalbidetzen du:

$$\frac{1}{|1+K'(jv_x)H'(jv_x)|} = \frac{1}{2 \cos \frac{\arg[K'(jv_x)H'(jv_x)]}{2}}$$

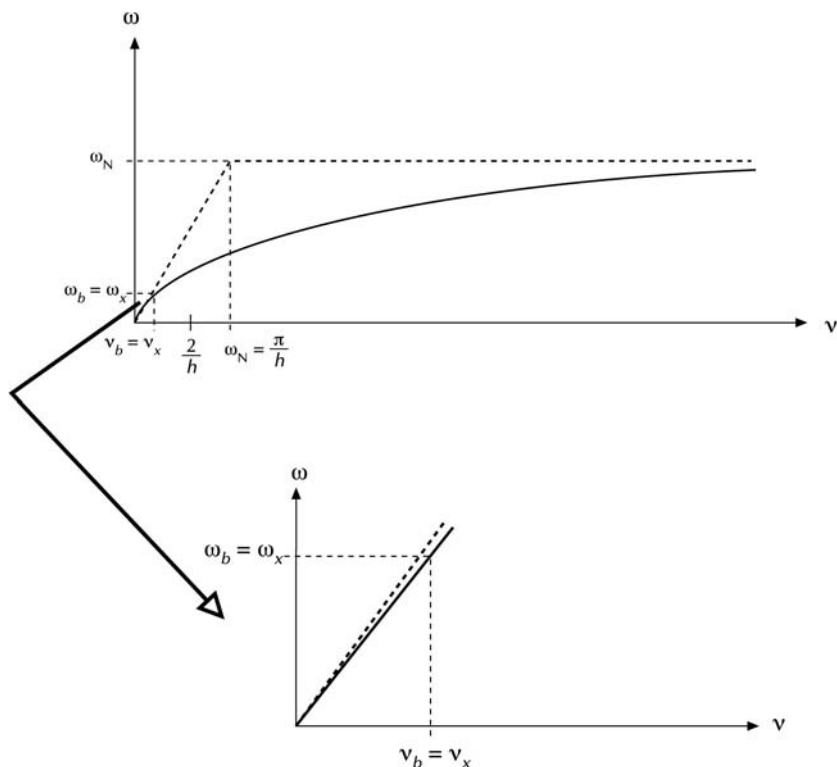
Onartzen badugu  $K'(jv)H'(jv) = \frac{v_x}{jv}$  dela  $v_x$ -ren inguruan,  $K'(jv_x)H'(jv_x) = \frac{1}{j}$

eta zenbaki horren argumentua  $\frac{-\pi}{2}$  izango dira; ondorioz,

$$\frac{1}{2 \cos \frac{\arg[K'(jv_x)H'(jv_x)]}{2}} = \frac{1}{2 \frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow -3\text{dB}$$

Hautatutako konfigurazioak direla medio,  $v_b$  eta  $v_x$  zenbakiak bakarrak dira; izan ere,  $v_b = v_x$  eta  $\omega_b = \omega_x$ ,  $\omega_x$  gurutzatze-pultsazioa espezifikazioen zerrendan dagoen  $\omega_b$  ebakidura-pultsazioa da.

9.7 atalaren amaieran aipatu denez, begizta itxiko ebakidura-pultsazioa halako 10 eta 20 bitarte da laginketa-pultsazioa. 9.33 irudiak  $\omega$  eta  $v$  arteko distortsioa adierazten du. Ikusten dugu alboratu egin daitekeela  $[0, \omega_b]$  bandan, bai eta haratago ere.



**9.33 irudia.**  $\omega$  eta  $v$  arteko erlazioa,  $\omega_e = 10 \omega_b$  den kasuan.

Hortaz, banda-zabaleran, behintzat,  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$ -ren eta  $K'(jv)H'(jv)$ -ren Bode diagramak ia berdinak dira. Beraz,  $|K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})|$ -ren malda  $\omega_x$  gurutzatze-pultsazioaren inguruan  $-20$  dB/hamarkada da. Bestalde,  $|K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})|$  altua da oinarriko pultsazioetarako, eta bizkor jaisten da ebakidura-pultsazioaren ondoren.

Onartutako konfigurazioa justifikatzen duen hirugarren arrazioa begizta itxiko sistemaren indize-erantzunean datza. Begizta itxiko transferentzia-funtzioa,  $v_x$ -ren inguruan, honela adieraz daiteke:

$$\frac{K'(jv)H'(jv)}{1 + K'(jv)H'(jv)} = \frac{\frac{v_x}{jv}}{1 + \frac{v_x}{jv}}$$

Indize-erantzuna aztertzeko,  $jv$  ordezkatzan badugu  $w$ -ren balio honekin:

$$w = \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1}$$

hortaz,

$$\frac{K(z)H(z)}{1+K(z)H(z)} = \frac{\frac{\frac{v_x}{2} \frac{z-1}{z+1}}{h \frac{z+1}{z-1}}}{1 + \frac{\frac{v_x}{2} \frac{z-1}{z+1}}{h \frac{z+1}{z-1}}}$$

Beraz, begitza itxiko prozesuaren  $Y(z)$  indize-erantzuna  $Y(z) = H_{Bltx}(z)Y_c(z)$  da:

$$Y(z) = \frac{v_x h (z+1)}{2(z-1) + v_x h (z+1)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Elementu sinpleen deskonposizioa eginda, hau ateratzen da:

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{1}{1+v_x \frac{h}{2}} \cdot \frac{z}{z - \frac{1-v_x \frac{h}{2}}{1+v_x \frac{h}{2}}}$$

Hortik, denbora-eremuan:

$$y(kh) = 1 - \frac{1}{1+v_x \frac{h}{2}} \left[ \frac{1-v_x \frac{h}{2}}{1+v_x \frac{h}{2}} \right]^k, \quad k \geq 0$$

Laginketa-pultsazio egokiarekin,  $2/h$  baino nabarmen txikiagoa da  $v_x$  (9.33 irudia).

Beraz,  $\frac{1-v_x \frac{h}{2}}{1+v_x \frac{h}{2}}$  adierazpena Paderen  $e^{-v_x h}$ -ren hurbilketatzat jo daiteke. Gainera,

$\frac{1}{1+v_x \frac{h}{2}}$  faktorean  $v_x \frac{h}{2}$  gaia baztertzen bada, 1 balioaren aldean txikia izanik,

indize-erantzuna honako hau izango da:

$$y(kh) = 1 - e^{-v_x kh}, \quad k \geq 0$$

Beraz, ondoriozta daiteke *begizta itxiko indize-erantzunaren denbora-konstantea, oro har,  $1/v_x$  dela.*

Bestalde, banda-zabaleran  $w$ -ren eta  $v$ -ren arteko distortsioa begi-bistakoa ez denez,

$$\omega_x \frac{1}{v_x} = 1$$

eta  $\omega_x = \omega_b$  denez,

$$\omega_b \frac{1}{v_x} = 1 \quad (9.17)$$

Hortaz, *ebakidura-pultsazioaren eta indize-erantzuneko denbora-konstantearen biderkadura konstantea da.* Nabarmentzekoa da ebakidura-pultsazio handiak, teorian, denbora-konstantea ahula izatea dakarrela. Hala ere, agerikoa da kontrol-magnitudeko anplitudeak handiak direla orduan, eta daitekeena dela asetzeak sortzea, hau da, linealak ez diren sartzeak sortzea; sartze horiek aurreikuspenak hausten dituzte.

Lan-eremuan, pultsazio apalek  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  modulua goratu egiten dute, eta bizkor txikitzen da gurutzatze-pultsazioa gainditutakoan. Bi eremu horien arteko trantsizioa neurrizko maldan egiten da. Batzuetan, zaila da trantsizio hori ordena altuko erreguladorea erabili gabe egitea. Gainera,  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$  modulua baino ez da berariaz zehazten. Garrantzitsua da  $K(e^{j\omega h})H(e^{j\omega h})$ -ren fasea egiaztatzea, atzerapen hutsa dagoenean, esaterako, eta, dagokionean, beharrezko aldaketak egitea.

### 9.9.3 Kontroladore proportzional deribatzaile digitalaren sintesia Bode diagraman

PD kontroladore proportzional deribatzailearen transferentzia-funtzioa honela idazten da, iragazi gabeko bertsioan:

$$K(z) = K_p \left( 1 + \frac{T_d}{h} \frac{z-1}{z} \right)$$

$w$  aldagaia sartuz gero:

$$K'(w) = K \left( \frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w} \right) = K_p \left( 1 + T_d \frac{w}{1 + \frac{h}{2}w} \right)$$

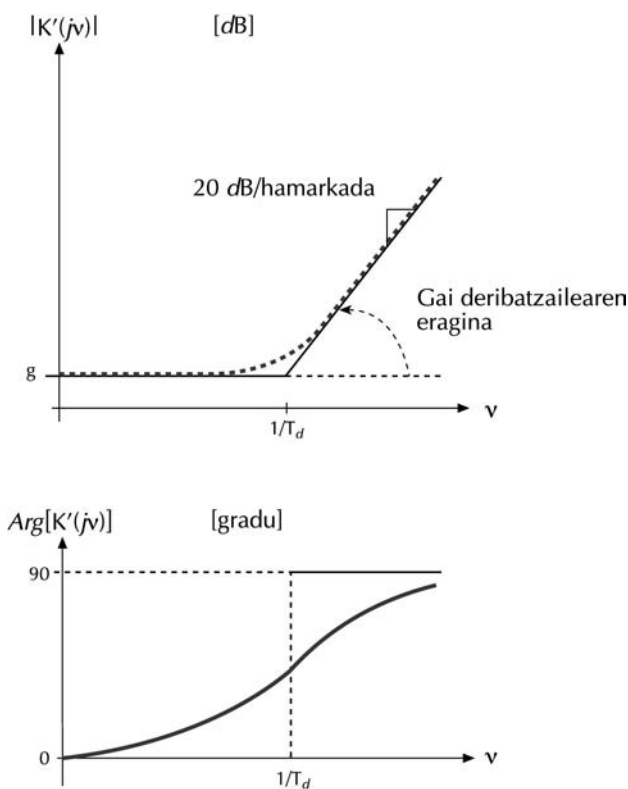
eta  $w$ -ren ordez  $jv$  jartzen badugu,

$$K'(jv) = K_p \left( 1 + T_d \frac{jv}{1 + j \frac{h}{2}v} \right)$$

Banda-zabaleko —edo apur bat haratagoko— pultsazioetara mugatzen denez,  $v$  nabarmen txikiagoa da  $2/h$  baino (9.33 irudia), eta  $j \frac{h}{2}v$  zenbakia baztertu egin daiteke 1 balioaren aldean; hortaz,

$$K'(jv) = K_p (1 + T_d jv)$$

9.34 irudian,  $K'(jv)$ -ren Bode diagramak azaltzen dira.



9.34 irudia. PD erreguladorearen Bode diagramak.

Behar den kasuetan, erreguladore proportzionalen gai deribatzailea sartzeak ahalbidetzen du,  $v > 1/T_d$ -rako, 20 dB/hamarkada gehitzea kontroladorearen transferentzia-funtzioko moduluak duen maldari eta, beraz, begizta irekiko transferentzia-funtzio harmonikoaren maldari. PD erreguladorearen sintesia laburbildu egiten da efektu hori aprobeztatzean  $|K'(jv)H'(jv)|$ -ri,  $v_x$ -ren inguruan, -20 dB/hamarkadako malda ezartzeko.

### 9.8 adibidea

Demagun kontrolatu behar dugun sistemaren transferentzia-funtzioak itxura hau duela:

$$H(z) = \frac{1}{(z-1)(z-0,9)}$$

Gogoan izan behar dugu sistema hori kontrolatzean erabiliko dugun laginketa-periodoa 0,025 segundo dela. Kontrolari eskatzen zaizkion espezifikazioak honako hauek dira:

- 1.- Serbosistema-egituran, errore nulua nahi dugu erregimen iraunkorrean, indize-erantzunean.
- 2.- Fase-marjinak  $60^\circ$  edo gehiago izan behar du.
- 3.- Azkenik, begizta itxian, sistemak duen indize-erantzunean denbora-konstantea  $1/v_x = 0,1$  segundo izango da.

Ondorengo irudian ikus daitezke sistemaren fase- eta irabazi-marjinak. Agerian dago sistema ez dela egonkorra izango zeren eta Fase-marjina negatiboa da. Izan ere, sistemaren begizta itxiko transferentzia-funtzioa inolako kontroladore gabe egonkorra ez den sistema batera garamatza.

$$H_{BI}(z) = \frac{1}{(z^2 - 1,9z + 1,9)}$$

Begizta itxian sistema egonkorra lortu ahal izateko, eta aldi berean espezifikazioak betetzen dituen kontrol bat lortu ahal izateko, PD egitura duen kontroladore bat erabiliko dugu. Gogoan izan behar dugu kontrolatu beharreko sistemak  $z = 1$  poloa duela beraz, sistemak begizta itxian ez du izango inolako errorik izango egoera iraunkorrean, bat mailako maila bat sarreran sartzean. Beraz, kontroladoreak behar dugun Fase-marjina eta nahi dugun denbora-konstantea lortu behar ditu. Horretarako sistemaren transferentzia-funtzioa PD kontroladorearen transferentzia-funtzioagatik bidertuko dugu.

$$KH = K_p \left( 1 + \frac{T_d}{h} \frac{z-1}{z} \right) \frac{1}{(z-1)(z-0,9)}$$

Bode diagramak egiteko,  $z = \frac{1 + j \frac{h}{2} v}{1 - j \frac{h}{2} v}$  aldagai-aldaketa egingo dugu, eta aurreko

berdintzan ordezkatzuko dugu  $z$  aldagaia. Denbora konstante nagusia  $\tau = 0,1 = \frac{1}{v_x}$ ,

$v_x$  ebakidura-pultsazioak 10 rad/s balioa du. Horrenbestez,  $v_x = 10$  rad/s denez,  $h v_x / 2 \ll 1$  kondizioa betetzen da, eta transferentzia-funtzioa  $v = v_x$  denean, honela hurbil daiteke.

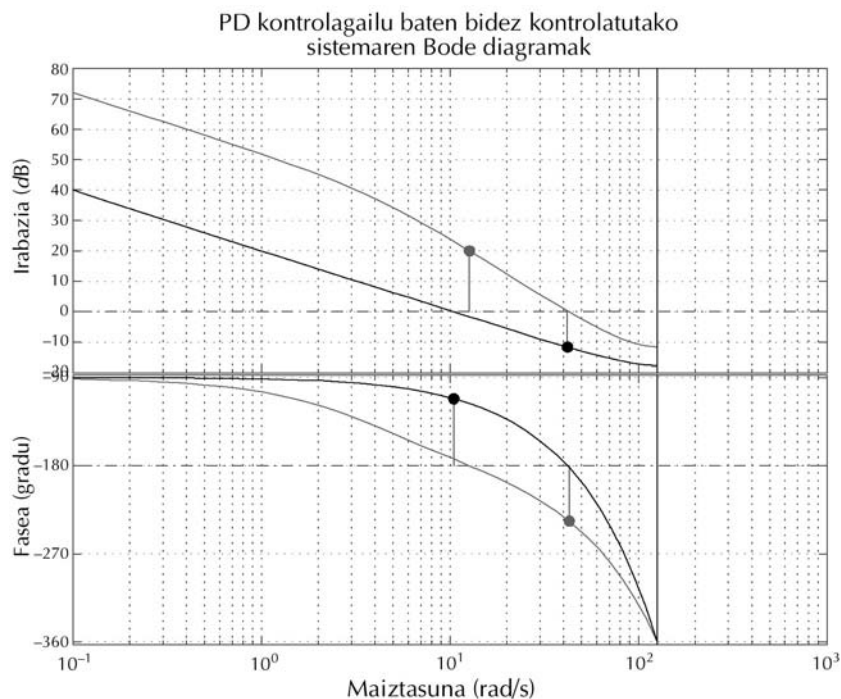
$$K'H' = K_p \left( 1 + \frac{T_d j v_x}{1 + j \frac{h}{2} v_x} \right) \frac{\left( 1 - j \frac{h}{2} v_x \right)^2}{h j v_x \left( 0,1 + j \frac{1,9h}{2} v_x \right)}; v_x = \frac{1}{0,1} = 10 \ll \frac{2}{h} \Rightarrow$$

$$K'H' \approx K_p \frac{(1 + T_d j v_x)}{h j v_x \left( 0,1 + j \frac{1,9h}{2} v_x \right)}$$

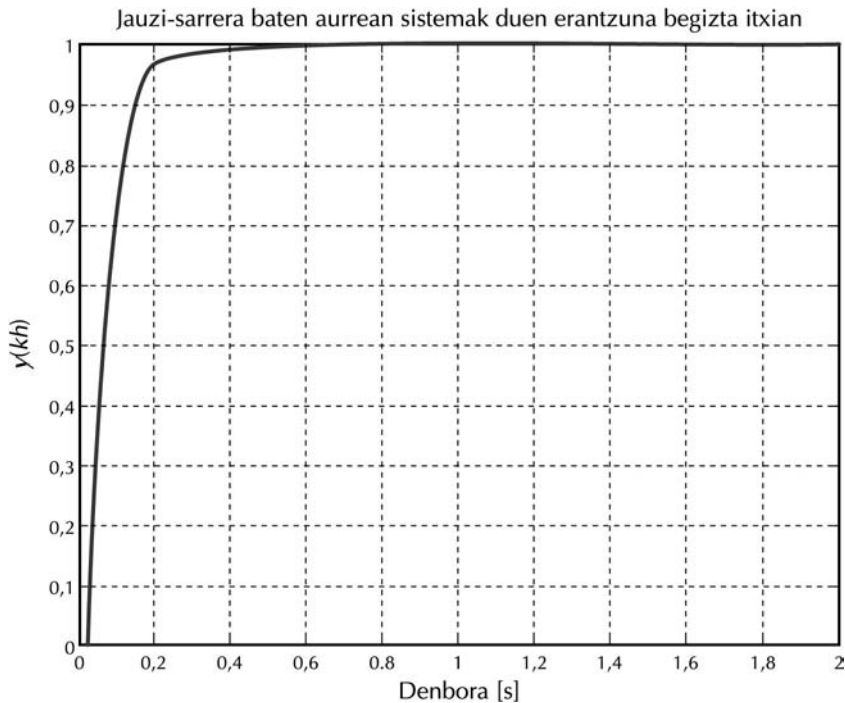
20 dB/hamarkadako malda izan dezagun  $v = v_x$  denean sistemaren eta fasea  $-90$  gradutara gerturatu dadin  $T_d = \frac{19}{2}h$  egingo dugu. Fase-marjina 60 gradu baino handiagoa izan dadin derrigorrez KH begizta irekiko transferentzia-funtzioaren argumentua  $v = v_x = 10$  rad/s denean  $-120$  gradu baino balio handiagoa izan behar du. Gure kasu honetan sistemaren transferentzia-funtzioaren argumentua  $-90$  gradukoa da eta, ondorioz, 60 gradu baino handiagoko fase-marjina izango dugu. Ondorengo irudian ikus dezakegunez, sistemaren fase-marjina 90 eta 60 graduen artean dago. Guk erabilitako hurbilketen arabera, sistemaren fase-marjina 90 gradu da; hala ere, hurbilketa horiek nolabaiteko errore bat sartzen digute, eta hortik dator ondorengo irudiko eta gure kalkuluen arteko aldea.

$$K'H' = K_p \frac{10}{h j v_x} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |K'H'|_{v=v_x} = 1 \\ \text{Arg}(K'H')_{v=v_x} > -120 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$K_p \frac{10}{h v_x} = 1 \Rightarrow K_p = \frac{h v_x}{10} \Big|_{v_x=10} = 0,025$$



**9.35 irudia.** PD kontrolarekin, sistemaren Bode diagramak: gorriz daude sistemak kontroladorerik gabe dituen Bode diagramak; beltzez ageri dira sistemak PD kontroladorearekin dituen Bode diagramak.



**9.36 irudia.** Iragazi gabeko erreguladore proportzional deribatzailearen bidez, sistema kontrolatzen dugu irudian 1. mailako jauzi-itxurako sarrera baten aurrean sistemak duen begizta itxiko erantzuna.

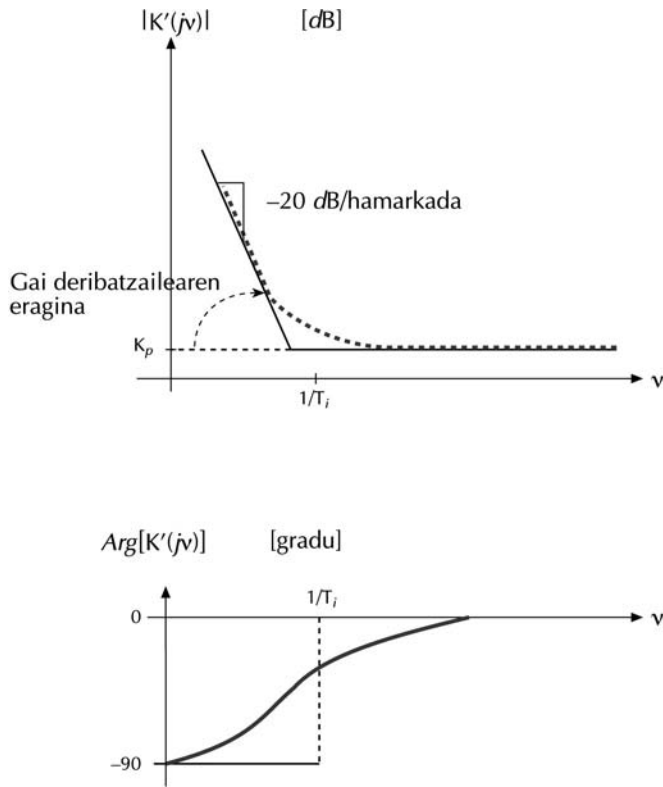
#### 9.9.4 PI kontroladore digitalaren sintesia Bode diagraman

PI erreguladore proportzional integratzailea honako transferentzia-funtzio honen bidez adierazten da:

$$K(z) = K_p \left( 1 + \frac{h/T_i}{z-1} \right)$$

hortaz,

$$K'(w) = K \left( \frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w} \right) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i} \frac{1 - \frac{h}{2}w}{w} \right)$$



9.37 irudia. PI erreguladorearen Bode diagramak.

Handik, hau lortzen da:

$$K'(jv) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i} \times \frac{1 - j \frac{h}{2} v}{jv} \right)$$

Aurreko paragrafoetan bezala,  $j \frac{T}{2} v$  baztertu daiteke 1en aldean:

$$K'(jv) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot jv} \right)$$

9.37 irudiko Bode diagramak dira horren emaitza.

Kontroladore proportzionalean gai integratzailea instalatzeak ekartzen du,  $v < 1/T_i$  denean, kontroladorearen transferentzia-funtzioko modulua  $-eta$ , beraz, begizta

irekiko transferentzia-funtzio harmonikoa– handitzea. PI erreguladorearen sintesia efektu hori aprobetxatzean datza,  $|K'(j\nu)H'(j\nu)|$  -ri behar bezalako balioa bermatzeko maiztasun txikian.

---

### 9.9 adibidea

---

Demagun kontrolatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzioak itxura hau duela:

$$H(z) = \frac{1}{(z - 0,9)}$$

Kontrolaren laginketa-periodoa  $h = 0,025$  segundo da. Begizta itxian, sistemari eskakizun hauek eskatzen dizkiogu:

- 1.- Serbosistemako estatismoa nulua izatea lortu behar dugu.
- 2.- Fase-marjina  $60^\circ$  edo handiagoa izatea lortu behar dugu.
- 3.- Begizta itxiko indize-erantzuna  $1/\nu_x = 0,07[s]$  denbora-konstantearen forma izatea behar du.

Hori guztia kontuan izanik, PI motako kontroladore bat erabiliko dugu, estatismoa nulua izan dadin. Lehenik sistemaren transferentzia-funtzioan  $z$  aldagaia

$$z = \frac{1 + j\frac{h}{2}\nu}{1 - j\frac{h}{2}\nu} \text{ eraldaketa bitartez ordezkatzuko dugu.}$$

$$H'(j\nu) = \frac{10 \left( 1 - j\frac{h}{2}\nu \right)}{1 + j \left( \frac{19h}{2} \right) \nu}$$

PI motako kontroladorearen transferentzia-funtzioa, berriz, horrela idatz dezakegu. Aurreko berdintza lortzeko erabili dugun aldagai-aldaketa eginez gero, kontroladorearen transferentzia-funtzio baliokideak itxura hau hartuko du.

$$K(z) = K_p \left( 1 + \left( \frac{h}{T_i} \right) \frac{1}{z-1} \right) \Rightarrow K'(j\nu) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i} \frac{1 - j\frac{h}{2}\nu}{j\nu} \right)$$


---

$h\nu/2 \ll 1$  dela jakinik, transferentzia-funtzioa honela idatziko dugu,  $\nu = \nu_x$  ebaketa-pultsaziorako.

$$K'(j\nu) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i} \frac{1 - j \frac{h}{2} \nu}{j\nu} \right) \approx K_p \left( \frac{1 + jT_i\nu}{jT_i\nu} \right)$$

Horrenbestez, hau da begizta irekiko  $K'H'$  transferentzia-funtzioa.

$$K'(j\nu)H'(j\nu) = K_p \left( \frac{1 + jT_i\nu}{jT_i\nu} \right) \frac{10 \left( 1 - j \frac{h}{2} \nu \right)}{1 + j \left( \frac{19h}{2} \right) \nu}$$

$\nu_x = 1/0,1 = 10$  rad/s denean, begizta irekiko transferentzia-funtzioaren modulua 1 izatea lortu behar dugu. Bestalde, fase-marjinak 60 gradu baino handiagoa izan behar duenez, lortu behar dugu  $\nu_x$  pultsaziorako sistemaren argumentua  $-120$  gradu baino handiagoa izatea. Hori guztia lortzeko,  $T_i = \frac{19h}{2} = 0,2375$  egingo dugu.

Beraz,  $\nu = \nu_x$  denean, sistemaren transferentzia-funtzioa honela idatziko dugu. Transferentzia-funtzioaren modulua 1 eginez  $\nu_x = 10$  denean,  $K_p$  parametroa kalkulatu dugu. Kasu honetan  $K_p = 0,2375$  izango da.

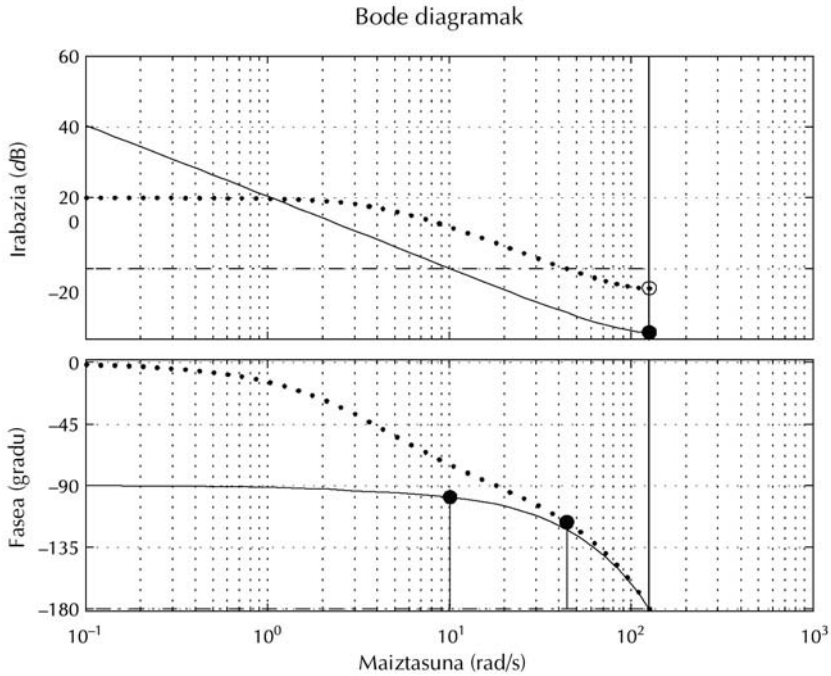
$$K'(j\nu_x)H'(j\nu_x) = K_p \left( \frac{1 + jT_i\nu_x}{jT_i\nu_x} \right) \frac{10}{1 + j \left( \frac{19h}{2} \right) \nu_x}$$

$$K'(j\nu_x)H'(j\nu_x) = K_p \left( \frac{10}{jT_i\nu_x} \right) \Rightarrow \begin{cases} |K'(j\nu_x)H'(j\nu_x)| = 1 \\ \text{Arg}(K'(j\nu_x)H'(j\nu_x)) > -120 \end{cases} \Rightarrow$$

$$K_p = T_i = \frac{19}{2} h = 0,2375$$

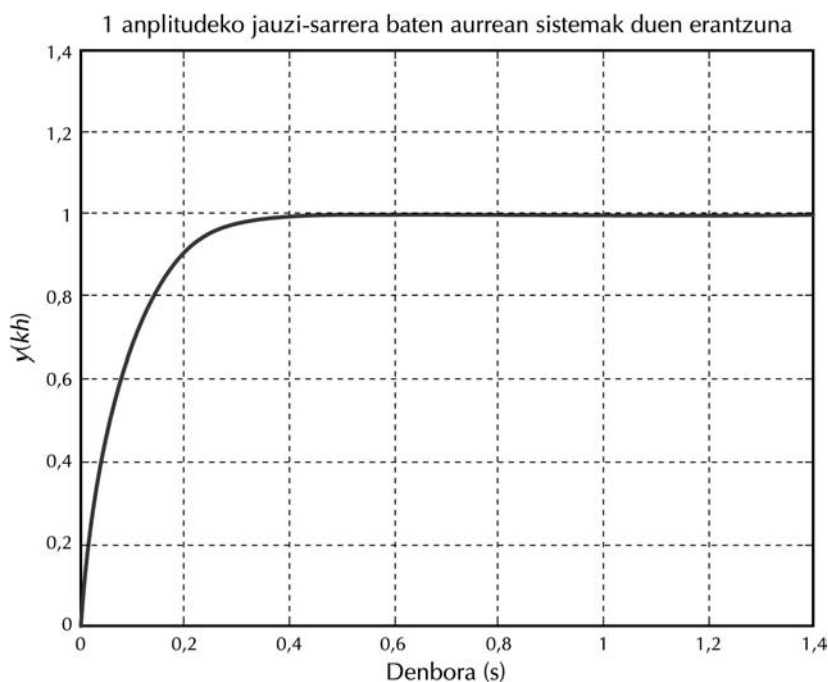
Fase-marjina, berriz, honela kalkulatu dugu. Aurreko berdintzetan ikusi dugu fase-marjina 90 gradu dela. Beraz, fase-marjina 60 gradu dela ziurta dezakegu. Dena den, aurreko adibidean gertatzen zen bezala, erabilitako hurbilketak direla medio fase-marjinak 90 gradu baino balio txikiagoa izango du. Bestalde, kontroladore integratzaile bat sartzean, sistema serbosistema-egiturako mota bat izango da; ondorioz, sistemak ez du errore iraunkorrik izango 1. mailako jauzi-itxurako sarrera baten aurrean.

$$\text{Arg}(K'(j\nu_x)H'(j\nu_x)) = -90 \Rightarrow F - M = 180 - 90 = 90$$



**9.38 irudia.** PI kontroladore batekin dugun Bode diagrama. Puntuen bidez adierazita, sistemak PI kontroladorerik gabe dituen Bode diagramak. Marra jarraituen bidez, sistemak PI kontroladore batekin dituen Bode diagramak. PI gabe, sistemak, berez, fase-marjina hobe du; hala ere, sistemak ez du estatismo-errore nulua izango. Puntu lodiak marjinak kalkulatzeko erabiltzen ditugu.

Hurrengo irudian (9.39), 1. mailako jauzi-itxura duen sarrera baten aurrean sistemak PI kontroladorearekin begizta itxian lortutako erantzuna marraztu dugu.



**9.39 irudia.** Erreguladore proportzional integratzailearekin begizta itxian, 1. mailako jauzi-itxurako sarrera baten aurrean lortzen dugun erantzuna.

### 9.9.5 PID erreguladore digitalaren sintesia Bode diagrametan

Demagun PID kontroladore digital hau dugula:

$$K(z) = K_p \left( 1 + \frac{h/T_i}{z-1} + \frac{T_d}{h} \frac{z-1}{z} \right) \quad (9.18)$$

Eredua eratzean, gai deribatzailean sartzen den iragazkia adierazi gabe uzten da sintesian. 9.8.4 paragrafoan egiaztatu denez, baldin  $T_i$  nabarmen handiagoa bada  $T_d$  baino, (9.18) transferentzia-funtzioak itxura hau izango du:

$$K(z) = K_p \left( 1 + \frac{T_d}{h} \frac{z-1}{z} \right) \left( 1 + \frac{h/T_i}{z-1} \right)$$

$w$  aldagaia sartuz gero:

$$K'(w) = K \left( \frac{1 + \frac{h}{2}w}{1 - \frac{h}{2}w} \right) = K_p \left( 1 + \frac{T_d}{h} \frac{w}{1 + \frac{h}{2}w} \right) \left( 1 + \frac{1}{T_i} \frac{1 - \frac{h}{2}w}{w} \right)$$

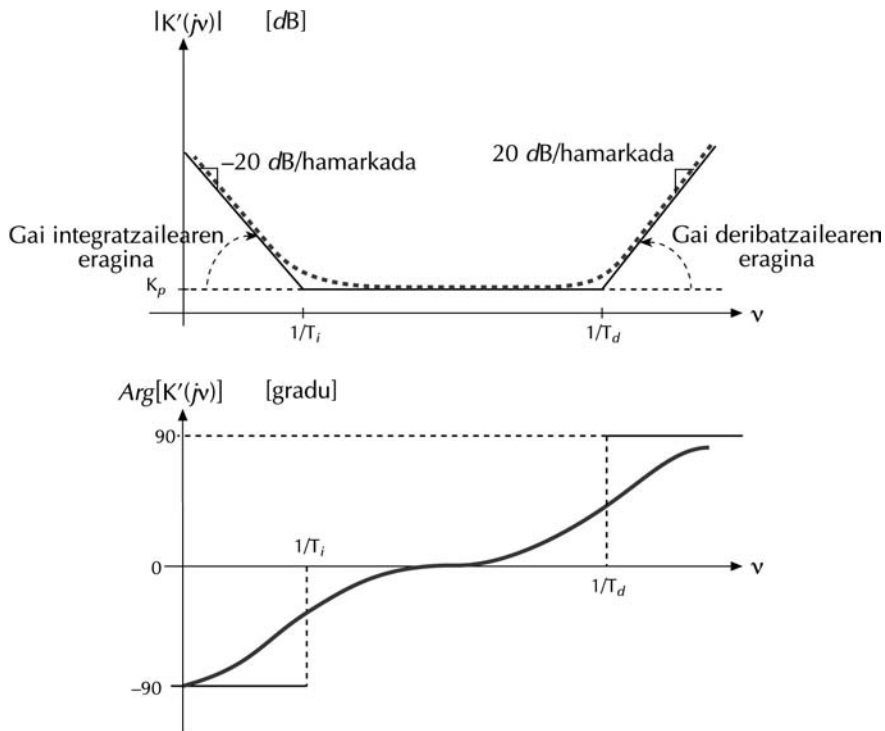
$w$ -ren ordez  $jv$  jarrita:

$$K'(jv) = K_p \left( 1 + \frac{T_d}{h} \frac{jv}{1 + j\frac{h}{2}v} \right) \left( 1 + \frac{1}{T_i} \frac{1 - j\frac{h}{2}v}{jv} \right)$$

Eta  $jh/2v$  baztertuta, 1en aldean:

$$K'(jv) = K_p (1 + T_d jv) \left( 1 + \frac{1}{T_i jv} \right)$$

Transferentzia-funtzio hori 9.40 irudian adierazten da:



**9.40 irudia.** PID kontroladorearen Bode diagrama.

Kontroladore proportzionalean gai deribatzailea eta integratzailea sartuz gero, 9.9.3. eta 9.9.4 paragrafoetan deskribatutako efektuak pilatzen dira, besterik gabe:

$T_d$  parametroa doitu egiten da,  $|K'(j\nu)H'(j\nu)|$ -ri  $-20$  dB/hamarkadako malda ezartzeko moduan  $\nu_x$ -ren inguruan. Maiztasun txikian,  $|K'(j\nu)H'(j\nu)|$ -ri behar bezalako balio handia ziurtatzeko moduko  $T_i$  parametroa hautatzen da.

## 9.10 SMITH IRAGARLEAREN EGITURA

Kontrolatu beharreko sistemek atzerapen-efektua badute, Smith iragarlearen egitura oinarritzen diren kontroladoreak erabili ohi dira. Horrelako egitura oinarritutako kontroladorearen emaitzak interesgarriak dira. Demagun  $T$  segundoko atzerapena duen sistema bat kontrolatu nahi dugula.  $T$  segundoko atzerapen hori  $h$  laginketa-periodoaren multiplo oso dela ere suposatuko dugu.

$$d \in \mathbb{N}$$

$$T = dh$$

Kontrolatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzioa honela definituko dugu:

$$e^{-Ts}G(s)$$

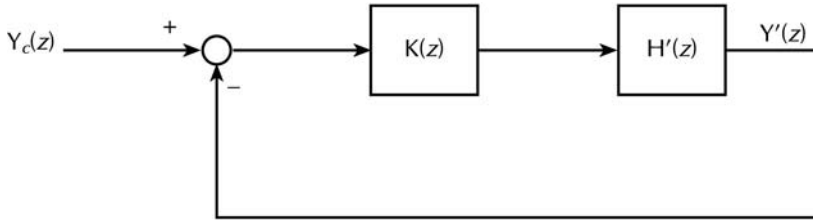
Non  $G(s)$  funtzio arrazionala da  $s$  aldagaiarekiko. Gogoan izan behar dugu denbora jarraituan definitutako transferentzia-funtzioa dela  $e^{-Ts}G(s)$  funtzioa. Horrelako sistemaren transferentzia-funtzio diskretua honela idatz daiteke.

$$H(z) = z^{-d} (1 - z^{-1}) Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] \right\}$$

$H'(z) = (1 - z^{-1}) Z \{ L^{-1} [G(s)/s] \}$  bada, hots, atzerapenik gabeko  $G(s)$  transferentzia-funtzioaren transferentzia-funtzio diskretua, sistemaren transferentzia-funtzioa honela idatz daiteke.

$$H(z) = z^{-d} H'(z)$$

Gogoan har dezagun 8 atalean azaldutako irizpide baten bidez kalkulaturako  $K(z)$  kontroladorea.  $H'(z)$  da  $z^{-d}$  atzerapenik gabeko transferentzia-funtzio diskretua. Ondorengo irudian ageri den egituraren bidez  $K(z)$  kontroladorea kalkula daiteke.

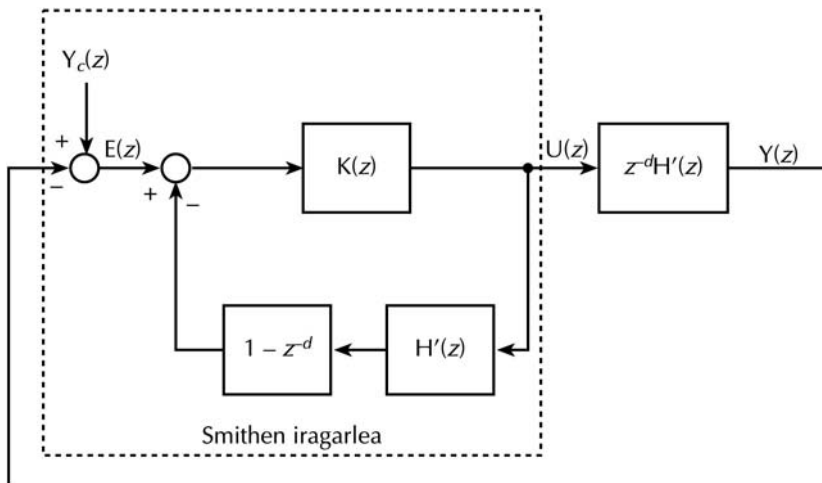


**9.41 irudia.**  $K(z)$  kontroladorea kalkulatzeko erabili beharreko egitura.

Atzerapenik gabeko  $Y'(z)$  irteera honela idatz daiteke:

$$Y'(z) = \frac{K(z)H'(z)}{1 + K(z)H'(z)} Y_c(z)$$

Hurrengo irudian dugu Smith iragarlearen egitura. Oraingoan  $H(z) = z^{-d} H'(z)$  transferentzia-funtzioa erabiliko dugu.



**9.42 irudia.** Smith iragarlearen kontroladorea serbositema-egituran.

Smith iragarlearen atal dinamikoaren transferentzia-funtzioa honela idatz daiteke:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K(z)}{1 + (1 - z^{-d})K(z)H'(z)}$$

Begizta itxiko transferentzia-funtzioa honela kalkulatu dugu:

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{Y_c(z)} &= \frac{\frac{K(z)}{1+(1-z^{-d})K(z)H'(z)} z^{-d}H'(z)}{1+\frac{K(z)}{1+(1-z^{-d})K(z)H'(z)} z^{-d}H'(z)} \\ &= \frac{K(z)z^{-d}H'(z)}{1+(1-z^{-d})K(z)H'(z)+K(z)z^{-d}H'(z)} \\ &= z^{-d} \frac{K(z)H'(z)}{1+K(z)H'(z)}\end{aligned}$$

Beraz,  $Y(z)$  irteerak, serbositema-egituran, berdintza hau betetzen du:

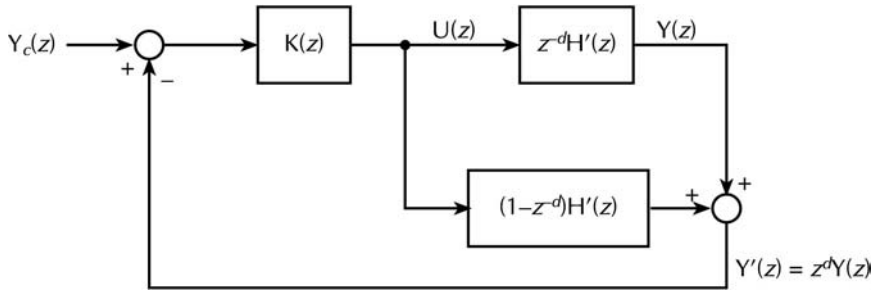
$$Y(z) = z^{-d} \frac{K(z)H'(z)}{1+K(z)H'(z)} Y_c(z)$$

Atzerapenarekin eta atzerapenik gabeko irteerak alderatuz gero, ekuazio hau lortuko dugu:

$$Y(z) = z^{-d} Y'(z)$$

Atzerapenik gabeko  $Y'(z)$  irteera  $d$  laginketa-periodo atzeratuz gero, sistemaren benetako  $Y(z)$  irteera emango digu.  $1 + K(z)H'(z) = 0$  ekuazioaren erroak Smith iragarlean oinarritutako begizta itxiko transferentzia-funtzioaren poloak dira.  $1 + K(z)H'(z) = 0$  ekuazioaren erroez gain,  $z = 0$  ere begizta itxiko transferentzia-funtzioaren polo bat da. Horrelako egituran oinarritutako kontroladore batek ez du egonkortasun-arazorik izango  $T$  segundoko atzerapena izateagatik  $z = 0$  erroak soilik sartzen ditugulako.

Smith iragarlearen egitura hurrengo irudian ageri den modu baliokidean gauzatuz gero, ikus daiteke sistemaren irteera  $dh$  segundoko aurrerapenarekin iragartzen duela.



**9.43 irudia.** Serbosisteman, Smith iragarlearen egitura baliokidea.

Argi dago kontrolatu nahi dugun aldagaia  $Y(z)$  irteera dela.

$$Y(z) = z^{-d} H'(z) U(z)$$

Berrelikadura-adarrean dagoen seinalea honela kalkula daiteke:

$$(1 - z^{-d})H'(z)U(z) + Y(z) = (1 - z^{-d})H'(z)U(z) + z^{-d}H'(z)U(z)$$

$$Y'(z) = H'(z) U(z)$$

$$Y'(z) = z^d Y(z)$$

Beraz, berrelikadurako  $Y'(z)$  seinaleak  $d$  laginketa-periodoko aurrerapenez iragartzen du  $Y(z)$  irteera-aldagaia, eta, hala, nahi dugun iragartze-efektua lortzen da.

Orain arte, serbosistema-egituran oinarritutako dinamika aztertu dugu. Erregulazio-egituran, berriz, Smith iragarlea aztertuz gero  $W(z)$  perturbazio-konstante baterako berdintza hau lortuko dugu:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{W(z)} &= \frac{z^{-d}H'(z)}{1 + \frac{K(z)}{1 + (1 - z^{-d})K(z)H'(z)} z^{-d}H'(z)} \\ &= \frac{[1 + (1 - z^{-d})K(z)H'(z)] z^{-d}H'(z)}{1 + (1 - z^{-d})K(z)H'(z) + K(z) z^{-d}H'(z)} \\ &= [1 + (1 - z^{-d})K(z)H'(z)] z^{-d} \frac{H'(z)}{1 + K(z)H'(z)} \end{aligned}$$

Kontrolatu beharreko aldagaia, hots, sistemaren  $Y(z)$  irteera, honela idatz daiteke.

$$Y(z) = \left[ 1 + (1 - z^{-d})K(z)H'(z) \right] z^{-d} \frac{H'(z)}{1 + K(z)H'(z)} W(z)$$

Beraz, serbosistema-egiturak eta erregulazio-egiturak dinamika ezberdinak dituzte.

Smith iragarlearen ahultasun garrantzitsuena zera da: kontrolatu behar dugun sistemaren ereduari oinarritzen da Smith iragarlea. Beraz, kontrolatu behar dugun  $z^{-d}$   $H'(z)$  sistemaren transferentzia-funtzioa oso ongi ezagutu behar dugu. Batez ere,  $d$  laginketa-periodoko atzerapena oso garrantzitsua da,  $d$  atzerapen hori ezagututa Smith iragarlearen egitura osoa kalkulatu behar dugulako.

Bestalde, gogoan izan behar dugu Smith iragarlea batez ere modu digitalean gauzatzen dela; izan ere, oso zaila da modu analogikoan egitea, Smith iragarlea modu analogikoan gauzatzeko seinale bat atzeratu eta gorde behar dugulako.

### 9.10 adibidea

Demagun kontrolatu beharreko sistemak honelako transferentzia-funtzioa duela, non sistemak  $d$  laginketa-periodoko atzerapena baitu.

$$H'(z) = \frac{b}{z-a} \Rightarrow H(z) = z^{-d} \frac{b}{z-a}$$

Demagun aukeratutako kontroladorea proportzionala dela:  $K(z) = K_p$

$K_p$  parametroan irizpide hauek erabili dira:

- 1.- Estatismo-maila egokia serbosistema-eran lan egitean
- 2.- Fase-marjina egokia  $\omega_b$  banda-zabalera baterako

Kontroladorearen sintesia 8. eta 9. gaitako metodoak erabiliz egin daiteke. Smith iragarlean oinarritutako kontroladore bat kalkulatu nahi izan bagenu, egitura hau izango genuke:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K(z)}{1 + (1 - z^{-d})K(z)H'(z)} = \frac{K_p}{1 + K_p(1 - z^{-d})K_p \left( \frac{b}{z-a} \right)}$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_p(z-a)}{(z-a)+K_p(1-z^{-d})b} = \frac{K_p z^d(z-a)}{z^d(z-a)+K_p(z^d-1)b} = \frac{K_p(z^{d+1}-az^d)}{(z^{d+1}-az^d)+K_p(z^d-1)b}$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_p(z^{d+1}-az^d)}{z^{d+1}+z^d(K_p b-a)-K_p b} = \frac{K_p(1-az^{-1})}{1+z^{-1}(K_p b-a)-K_p bz^{-d-1}} \Rightarrow$$

$$u(kh) = K_p e(kh) - aK_p e(kh-h) - (K_p b-a)u(kh-h) + K_p bu(kh-dh-h)$$

$$e(kh) = y_c(kh) - y(kh)$$


---

### 9.1 ariketa

Demagun begizta irekiko transferentzia-funtzioa hau dugula, non kontroladore proportzional bat erabiliko baitugu:

$$K_p H(z) = K_p \frac{0,0975}{z - 0,95}$$

Kalkula ezazu  $K_p$  proportzionala, begizta itxiko polo bakarrak 0,8; 0,6; 0,4; 0,2 eta 0 balioak izan ditzan. Kalkula ezazu  $K_p$  sistemak balio guztietarako duen  $v_x$  banda-zabalera eta sistemaren fase-marjina.

Sistemaren begizta itxiko transferentzia-funtzioa kalkulatu dugu lehenik:

$$\frac{K_p H(z)}{1 + K_p H(z)} = \frac{0,0975 K_p}{z - 0,95 + 0,0975 K_p}$$

Transferentzia-funtzioaren poloak balio hau izango du:

$$0,95 - 0,0975 K_p :$$

$$0,95 - 0,0975 K_p = 0,8 \Leftrightarrow K_p = 1,54$$

$$0,95 - 0,0975 K_p = 0,6 \Leftrightarrow K_p = 3,59$$

$$0,95 - 0,0975 K_p = 0,4 \Leftrightarrow K_p = 5,64$$

$$0,95 - 0,0975 K_p = 0,2 \Leftrightarrow K_p = 7,69$$

$$0,95 - 0,0975 K_p = 0 \Leftrightarrow K_p = 9,74$$

--- ariketaren emaitza kontuan izanda:

$$K_p H'(j\nu) = K_p \frac{0,05 \cdot (80 - j\nu)}{j\nu + 2,05}$$

Zirkulu-unitatearekin topo egiten du puntu honetan:

$$|K_p H'(j\nu_x)| = K_p \frac{0,05 \cdot \sqrt{6400 + \nu_x^2}}{\sqrt{4,2025 + \nu_x^2}} = 1$$

Non:

$$\nu_x = \sqrt{\frac{16K_p^2 - 4,205}{1 - 0,0025K_p^2}}$$

$$K_p H'(jv_x) \text{ -ren argumentua----: } -\tan \frac{v_x}{80} - \tan \frac{v_x}{2,05}$$

taula honetan:

| $K_p$ | $v_x$ | $\varphi$ narjina |
|-------|-------|-------------------|
| 1,54  | 5,82  | 105,25°           |
| 3,59  | 14,45 | 87,84°            |
| 5,64  | 23,42 | 78,68°            |
| 7,69  | 33,26 | 70,95°            |
| 9,74  | 44,56 | 63,51°            |

## 9.2 ariketa

Perturbazio konstante baten aurrean, erregulazio-egituran lan egiten duen kontroladore batek duen begizta itxiko transferentzia-funtzioa honela idatz daiteke. H da begizta irekiko sistemaren transferentzia-funtzioa.  $H_{\text{Bltxia,erregu}}$  da begizta itxiko erregulazio-egiturako sistemaren transferentzia-funtzioa. K, berriz, kontroladorearen transferentzia-funtzioa da.

$$H(z)_{\text{Bltxia,erregu}} = \frac{H(z)}{1 + K(z)H(z)}$$

$$S_H^H = \frac{\frac{dH}{dH} \text{ (Bltxia,erregu)} (H)}{\frac{H}{H} \text{ (Bltxia,erregu)} (H)} = \frac{\frac{1 + KH - HK}{(1 + KH)^2}}{\frac{1}{H} \cdot \frac{H}{1 + KH}} = \frac{1}{1 + KH}$$

## 9.3 ariketa

Kalkula ezazu kontroladore proportzional batekin kontrolatzen den eta begizta irekian  $\frac{10^{-3}(1,23z + 1,21)}{z^2 - 1,95z + 0,95}$  transferentzia-funtzioa duen sistema baten  $K_p$  kritikoa. Beste hitz batzuetan, zer  $K_p$  baliotarako galtzen duen sistemak BIBO egonkortasuna.

$$(z - e^{j\omega})(z - e^{-j\omega}) = (z - \cos \omega - j \sin \omega) \cdot (z - \cos \omega + j \sin \omega) = z^2 - 2z \cos \omega + 1$$

$$1 + K(z)H(z) = 1 + K_p \frac{10^{-3}(1,23z + 1,21)}{z^2 - 1,95z + 0,95} =$$

$$= \frac{z^2 + (1,23 \cdot 10^{-3}K_p - 1,95)z + 0,95 + 1,21 \cdot 10^{-3}K_p}{z^2 - 1,95z + 0,95}$$

|                                                                                                         |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| $\frac{z^2 + (1,23 \cdot 10^{-3}K_p - 1,95)z + 0,95 + 1,21 \cdot 10^{-3}K_p}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$ | $1$ |
| $(1,23 \cdot 10^{-3}K_p - 1,95 + 2 \cos \omega)z + 0,95 + 1,21 \cdot 10^{-3}K_p - 1 = 0$                |     |

Non,  $K_p = \frac{0,05}{1,21 \cdot 10^{-3}} = 41,3$

#### 9.4 ariketa

Kalkula ezazu kontroladore proportzional batekin kontrolatzen den eta begizta irekian  $H(z) = \frac{0,015}{z(z - 0,985)}$  transferentzia-funtzioa duen sistema baten  $K_p$  kritikoa. Beste hitz batzuetan, zer  $K_p$  baliotarako galtzen duen sistemak BIBO egonkortasuna.

$$K_p H(z) = K_p \frac{0,015}{z(z - 0,985)}$$

$$z^2 - 0,985z + 0,015K_p$$

|                                                            |     |
|------------------------------------------------------------|-----|
| $\frac{z^2 - 0,985z + 0,015K_p}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$ | $1$ |
| $(-0,985 + 2 \cos \omega)z + 0,015K_p - 1$                 |     |

$$0,015K_p - 1 = 0$$

$$K_p = 66,7$$

$$K_p = 33,3$$

$$\gamma = \lim_{z \rightarrow 1} K_p H(z) = \lim_{z \rightarrow 1} 33,3 \frac{0,015}{z(z - 0,985)} = 33,3$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \frac{1}{1 + \gamma} = 0,029$$

### 9.5 ariketa

Kalkula ezazu kontroladore proportzional batekin kontrolatzen den eta begizta irekian  $H(z) = \frac{0,015}{z^2(z - 0,985)}$  transferentzia-funtzioa duen sistema baten  $K_p$  kritikoa. Beste hitz batzuetan esanda, zer  $K_p$  baliotarako galtzen duen sistemak BIBO egonkortasuna. Kalkulatu sistema horren estatismoa.

$$K_p H(z) = K_p \frac{0,015}{z^2(z - 0,985)}$$

$$-(3z^2 - 2 \cdot 0,985z)0,015K_p = 0$$

|                                                                                                          |                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| $z^3 - 0,985z^2 + 0,015K_p$                                                                              | $z^2 - 2z \cos \omega + 1$     |
| $z^3 - 2z^2 \cos \omega + z$                                                                             | $z + (-0,985 + 2 \cos \omega)$ |
| $(-0,985 + 2 \cos \omega)z^2 - z + 0,015K_p$                                                             |                                |
| $(-0,985 + 2 \cos \omega)z^2 - 2(-0,985 + 2 \cos \omega) \cos \omega \cdot z + (-0,985 + 2 \cos \omega)$ |                                |
| $[-1 + 2(-0,985 + 2 \cos \omega) \cos \omega]z + 0,015K_p - (-0,985 + 2 \cos \omega)$                    |                                |

Non:

$$4 \cos^2 \omega - 2 \cdot 0,985 \cos \omega - 1 = 0$$

$$0,015K_p + 0,985 - 2 \cos \omega = 0$$

$$\cos \omega = \frac{0,985 \pm \sqrt{0,985^2 + 4}}{4} = \begin{cases} 0,8 \\ -0,31 \end{cases}$$

$$K_p = \frac{-0,985 + 2 \cos \omega}{0,015}$$

$$K_p = 41$$

$$K_p = 20,5$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \frac{1}{1+20,5} = 0,047$$

## 9.6 ariketa

Demagun hau dela kontrolatu nahi dugun sistemak begizta irekian duen transferentzia-funtzioa:  $G(s) = \frac{1}{s^2}$ . Sistema hori kontrolatzean erabiliko dugun laginketa-periodoa 0,025 segundo da lagin bakoitzeko. Kalkula ezazu kontroladore proportzional bat erabiliz gero izango dugun  $K_p$  kritikoa.

$$H(z) = (1 - z^{-1})Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1}{s^3} \right] \right\} = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{h^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{(0,025)^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2}$$

$$K_p H(z) = K_p \frac{(0,025)^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2}$$

$$1 + K_p H(z) = 1 + K_p \frac{(0,025)^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2} = 0$$

$$(z-1)^2 + K_p \frac{(0,025)^2}{2} \cdot (z+1) = 0$$

$$z^2 - 2z + 1 + K_p \frac{(0,025)^2}{2} z + K_p \frac{(0,025)^2}{2} = 0$$

$$z^2 + z \left( K_p \frac{(0,025)^2}{2} - 2 \right) + 1 + K_p \frac{(0,025)^2}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2 \cos \omega = K_p \frac{(0,025)^2}{2} - 2 \\ 1 = K_p \frac{(0,025)^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \cos \omega = -1 \\ K_p = \frac{2}{(0,025)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \omega = 0,5 \\ K_p = \frac{2}{(0,025)^2} \end{cases}$$

### 9.7 ariketa

Demagun hau dela kontrolatu beharreko sistemaren begizta irekiko transferentzia-funtzioa. Gogoan izan behar dugu kontroladorea proportzionala dela.

$$K_p H(z) = K_p \frac{0,025 \times (z + 0,82)}{(z - 0,95) \times (z - 0,53)}$$

Kalkula ezazu zer  $K_p$  baliotarako utziko dion sistemak egonkorra izateari, hots, zer  $K_p$  baliotarako diren 1 begizta itxiko transferentzia-funtzioaren izendatzailearen erroen moduluak.

Begizta itxiko transferentzia-funtzioaren izendatzailea berdin zero egingo dugu.

$$(z - 0,95) \cdot (z - 0,53) \cdot 0,025 - 0,025(z + 0,82) \cdot (2z - 1,48) = 0$$

|                                                                                     |                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| $\frac{z^2 + (0,025K_p - 1,48)z + 0,0205K_p + 0,5035}{-(z^2 - 2z \cos \omega + 1)}$ | $\frac{z^2 - 2z \cos \omega + 1}{1}$ |
| $(0,025K_p - 1,48 + 2 \cos \omega)z + 0,0205K_p + 0,5035 - 1$                       |                                      |

$$0,0205K_p + 0,5035 - 1 = 0$$

Non:

$$K_p = 24,21$$

# 10

## RST erreguladorea

### 10.1 SARRERA

Liburuko atal hau RST erreguladoreari buruzkoa da. Bertan parte hartzen duten hiru polinomioetatik dator RST izena. Aurreko ataletan aztertu diren erreguladore estandarrak, eta zehazki PID erreguladorea, kontroladore analogikoko funtzio erraz samar batzuen adierazpen diskretutzat har daitezke. Gaur egungo konputagailuen eta mikroprozesadoreen ahalmen itzela ez da erabiltzen.

RST erreguladorea algoritmo konplexuagoa da, eta eskuragarri dauden kalkulu-baliabideak aprobeztatzen ditu. Gainera, RST erreguladorearen sintesia algoritmo gisa jar daiteke. Horri esker, kontrol moldakorreko eskema batean jar daiteke.

## 10.2 RST ERREGULADOREA

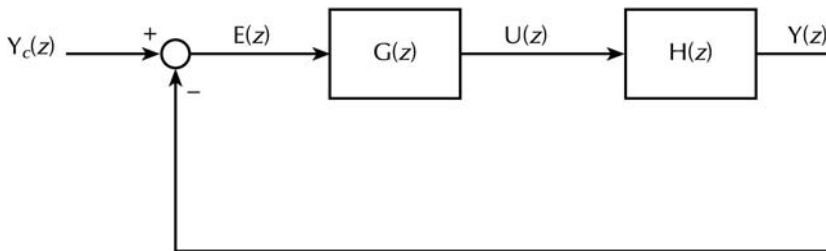
### 10.2.1 Definizioak

#### *Egitura klasikoa*

Azter dezagun, berriz ere, 10.1 irudian adierazten den serbokontrolleko sistema automatikoaren egitura klasikoa.  $H(z)$  da kontrolatu nahi den sistemaren transferentzia-funtzioa.  $G(z)$ , berriz, kontroladorearen transferentzia-funtzioa da.

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Funtzio arrazional hertsiki propioa da  $H(z)$ , hots,  $\text{maila}(A(z)) > \text{maila}(B(z))$ . Gogoan izan behar dugu  $A(z)$  eta  $B(z)$  polinomioak direla. Horrez gain,  $A(z)$  monikoa dela suposa dezakegu.  $A(z)$  polinomioaren potentzia handieneko gaiaren koefizientea 1 bada,  $A(z)$  polinomioa monikoa da.  $A(z)$  polinomioa monikoa izateak ez du inolako orokortasunik kentzen  $B(z)$  polinomioaren maila handieneko gaiaren koefizientearen bitartez adieraz dezakegulako. Bestalde,  $A(z)$ -k eta  $B(z)$ -k ez dute inongo gai komunik, erro komunik izan balute sinplifika genitzakeelako.



**10.1 irudia.** Berrelikadura arrunteko kontrolaren egitura

$Y_c(z)$ -k,  $U(z)$ -k eta  $Y(z)$ -k seinale hauek irudikatzen dituzte, hurrenez hurren: kontsigna-seinaleak, kontrol-seinaleak eta kontrolatu beharreko seinaleak.  $G(z)$ , bestetik, PID kontroladorearen transferentzia-funtzioa dela har dezakegu.

$H(z)$ -k kontrolatu beharreko prozesuaren eredu lagindua adierazten du. Honako hau da eredu hori ematen duen formula:

$$H(z) = (1 - z^{-1}) Z \left( \left[ L^{-1} \left( \frac{K(s)}{s} \right) \right]_{t=kh} \right)$$

$K(s)$  da, hor, erregulatu nahi den sistemaren transferentzia-funtzio analogikoa.  $G(z)$  funtzio arrazional propioa da:

$$G(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$$

$A(z)$  polinomioaren maila  $B(z)$  polinomioaren maila baino hertsiki handiagoa da.

Hertsiki propioa den  $H(z)$  transferentzia-funtzioarekin kontrolatu beharreko instalazioaren hipotesiak ez du zertan orokortasuna galarazi. Izan ere, praktikan, kontrolatu beharreko prozesuaren eredu laginduak gutxienez 1 balio duen gehiegizko polo-kopurua du. Horren arabera, edozein kitzikapen dagoenean, sistemaren erreakzioa laginketa-periodo bat atzeratzen da, gutxienez. Edozein elementu dinamiko dagoenean sortzen diren inertzien eta atzerapenen ondorioz sortzen da gertaera fisiko hori.

Beti bezala,  $A(z)$  monikoa da ( $a_0 = 1$ ). Demagun, azkenik,  $A(z)$ -k eta  $B(z)$ -k ez dutela faktore komunik. Kontrol-algoritmo osoa polinomio-ekuazio honek deskribatzen du:

$$U(z) = \frac{S(z)}{R(z)} (Y_c(z) - Y(z)) \quad (10.1)$$

$$R(z)U(z) = S(z)Y_c(z) - S(z)Y(z)$$

Eta begizta itxiko funtzio honek:

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{G(z)H(z)}{1 + G(z)H(z)} = \frac{B(z)S(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} \quad (10.2)$$

### **RST erreguladorea**

RST erreguladoreak egitura klasiko hori orokortu egiten du. (10.1) berdintzaren eskuineko atalean, bi gaitan faktoretzat azaltzen den  $S(z)$  polinomio bakarra egon beharrean,  $S(z)$  eta  $T(z)$  bi polinomioak sartzen dira.

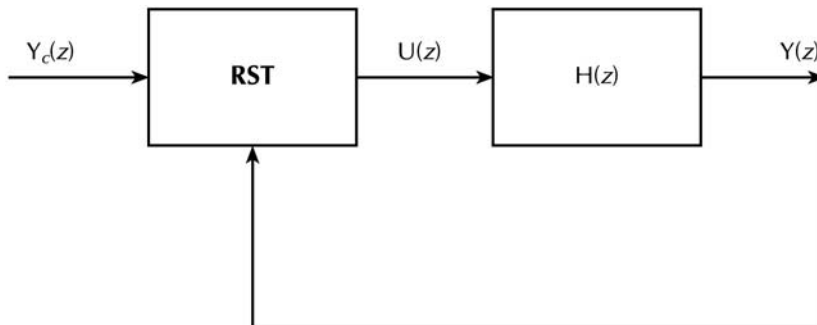
$$R(z)U(z) = T(z)Y_c(z) - S(z)Y(z) \quad (10.3)$$

Jada ez da  $E(z) = Y_c(z) - Y(z)$  kendura sortzen duen  $Y_c(z)$ -ren eta  $Y(z)$ -ren arteko konparazio zuzena egiten. 10.1 irudiko eskema funtzionalaren orde, 10.2 irudiko eskema erabil daiteke.

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} \quad (10.4)$$

*Feedforward*-en (aurrelikadura) dagoen gaia.

*Feedback* (atzeraelikadura, berrelikadura)



**10.2 irudia.** RST erreguladorearen eskema funtzionala.

(10.2) eta (10.4) alderatuta, alde erabakigarria ikusi dugu. (10.2)ren zenbakitzailean  $S(z)$  azaltzen da, bai eta izendatzailean ere. Aitzitik, (10.4)ren zenbakitzailean  $T(z)$  azaltzen da, baina ez da, ordea, izendatzailean ageri.

Horren ondorioz, begizta itxiko transferentzia-funtzioaren zenbakitzailean askatasun-gradu handiago bat sartu da. Ezaugarri hori erabiliko da erreguladorearen sintesian.

PID erreguladorean ez bezala, honetan polinomioak ez dira aldeztu aurretik zehazten.

$$I_r = \text{maila}(R(z))$$

$$R(z) = r_0 z^{I_r} + r_1 z^{I_r-1} + \dots + r_{I_r}$$

$$r_0 = 1$$

$R(z)$  polinomio monikoa dela suposa dezakegu inolako orokortasunik galdu gabe, (10.4) transferentzia-funtzioaren izendatzailea eta zenbakitzaileak  $r_0$  gaiaz zatitu ditzakegulako, eta azkenean  $r_0 = 1$  bihurtuko genukeelako. Honela defini ditzakegu beste bi polinomioak:

$$I_s = \text{maila}(S(z))$$

$$S(z) = s_0 z^{l_s} + s_1 z^{l_s-1} + \dots + s_{l_s}$$

$$l_r = \text{maila}(T(z))$$

$$T(z) = t_0 z^{l_r} + t_1 z^{l_r-1} + \dots + t_{l_r}$$

Bakartu eta gero, emaitza hau lortzen da:

$$U(z) = \frac{T(z)}{R(z)} Y_c(z) - \frac{S(z)}{R(z)} Y(z) \quad (10.5)$$

Beraz, transferentzia-funtzio bi defini ditzakegu,  $H_1$  eta  $H_2$ .  $H_1$  funtzioa aurrelikadurari lotutako transferentzia-funtzioa da.  $H_2$  transferentzia-funtzioa, berriz, berrelikadurari lotutakoa da.

$$H_1(z) = \frac{T(z)}{R(z)}$$

$$H_2(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$$

Bi transferentzia-funtzio horien kausalitateak honako hau eskatzen du:

$$\text{maila}(R(z)) \geq \text{maila}(T(z))$$

$$\text{maila}(R(z)) \geq \text{maila}(S(z))$$

### **RST erreguladorearen gauzatzea edo exekutatzeta**

Horrelako erreguladore batean gauzatu behar dugunean, bi egoera eman daitezke. Lehenengo egoeran, kontroladorearen laginketa-periodoa askoz handiagoa da algoritmoaren eta A/D eta D/A bihurketa-tarteen batuketa baino. Egoera horretan,  $n$  aldiunerako, kontroladoreak atera beharko lukeen  $u(kh)$  irteera-aldagaia  $y(nh)$  eta  $y_c(nh)$  aldagaien arabera kalkula daiteke, non  $n \leq k$  baita. Bigarren egoeran, berriz, A/D eta D/A bihurketak egiteko eta kontrol-algoritmoa exekutatzeko behar den denbora-tartea ez da baztergarria laginketa-periodoarekiko. Egoera horretan, kontroladoreak nolabaiteko atzerapena izango du, eta, ondorioz, kontroladoreak  $z^{-l}$  gaien bitartez erduztatuko ditugu. Suposatuko dugu guk aztertuko dugun kontroladorearen denbora-tartea eta A/D eta D/A bihurketaren denbora-tarteen batuketaren laginketa-periodoa berdinak direla. Orain bi aukera horiek aztertuko ditugu.

**1.- Laginketa-periodoarekin alderatuta, bihurtzeko denboraren eta kalkulatzeko denboraren batura baztergarria izan daiteke**

$$maila(R(z)) = maila(S(z)) = maila(T(z)) \quad (10.6)$$

$$maila(R(z)) = \varphi$$

Beraz, kontroladorearen legearen transferentzia-funtzioa honela idatz daiteke.

$$U(z) = \frac{t_0 z^\varphi + t_1 z^{\varphi-1} + \dots + t_\varphi}{z^\varphi + r_1 z^{\varphi-1} + \dots + r_\varphi} Y_c(z) - \frac{s_0 z^\varphi + s_1 z^{\varphi-1} + \dots + s_\varphi}{z^\varphi + r_1 z^{\varphi-1} + \dots + r_\varphi} Y_c(z)$$

Kontroladorearen legea edo gehikuntza-ekuazioa denbora errealean gauzatu ahal izateko, polinomioak berretura negatiboetan jartzen dira, hots, guztia  $z^\varphi - z$  zatitzen da.

$$(1 + r_1 z^{-1} + \dots + r_\varphi z^{-\varphi}) U(z) = (t_0 + t_1 z^{-1} + \dots + t_\varphi z^{-\varphi}) Y_c(z) - (s_0 + s_1 z^{-1} + \dots + s_\varphi z^{-\varphi}) Y_c(z)$$

Azken berdinketa horri alderantzizko Z transformatua aplikatuz gero, honako hau lortzen da:

$$(u(k) + r_1 u(k-1) + \dots + r_\varphi u(k-\varphi)) =$$

$$(t_0 y_c(k) + t_1 y_c(k-1) + \dots + t_\varphi y_c(k-\varphi)) - (s_0 y(k) + s_1 y(k-1) + \dots + s_\varphi y(k-\varphi))$$

Beraz, gehikuntza-ekuaziotik  $u(k)$  aldagaia bakartzen badugu, ikus daiteke  $k$  aldiunerako  $y(k)$  eta  $y_c(k)$  balioak izan behar ditugula

$$u(k) =$$

$$-(r_1 u(k-1) + \dots + r_\varphi u(k-\varphi)) +$$

$$+(t_0 y_c(k) + t_1 y_c(k-1) + \dots + t_\varphi y_c(k-\varphi))$$

$$-(s_0 y(k) + s_1 y(k-1) + \dots + s_\varphi y(k-\varphi))$$

RST erreguladorea inplementatzen duen kodea aurreko ekuazioan oinarritzen da zuzenean.

1.- Programa nagusian  $h$  segundoko denbora-etena exekutatzeko, mikroprozesadorearen erregistroak hasieratuko ditugu eta programa nagusian itxaroten geratuko gara denbora-etena iritsi arte.

2.-  $h$  segundoko mikroprozesadoreak denbora-etena exekutatzen du:

2.1  $y(k)$  A/D bihurteta

2.2  $u(k)$  kontrol-aldagaiaren kalkulua

$$u(k) = -\left(r_1 u(k-1) + \dots + r_\varphi u(k-\varphi)\right) + \left(t_0 y_c(k) + t_1 y_c(k-1) + \dots + t_\varphi y_c(k-\varphi)\right) - \left(s_0 y(k) + s_1 y(k-1) + \dots + s_\varphi y(k-\varphi)\right)$$

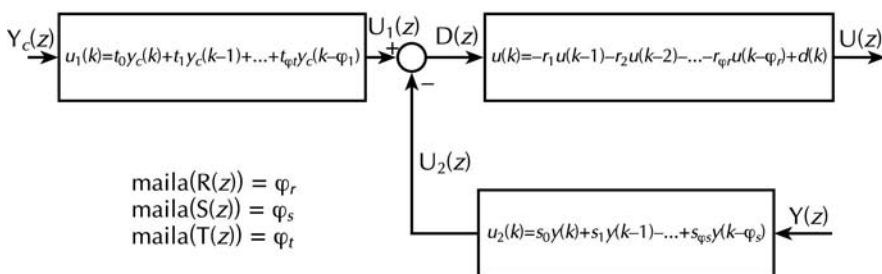
2.3  $u(k)$  D/A bihurteta

2.4 aldagaiak eguneratzea

3.- Hurrengo denbora-etena arte itxarongo dugu programa nagusian.

Bada saihestu behar den akats bat, (10.5) ekuazioaren arabera erreguladorea zuzenean gauzatzea, hain zuzen ere  $\left(\frac{T(z)}{R(z)}\right) Y_c(z)$  eta  $\frac{S(z)}{R(z)} Y(z)$  seinaleak kalkulatz eta gero horiek kenduz, 10.3 irudian ikusten den bezala).

Izan ere,  $T/R$  eta  $S/R$  transferentzia-funtzioek ez dute zertan BIBO egonkortasuna bete. Gogoan izan behar dugu, adibide gisa, BIBO egonkortasuna ez dela integratzaile batekin egiaztatzen, hots,  $z = 1$  polo bat izanda.



**10.3 irudia.** RST kontroladorearen barne-egitura.

## 2.- Kalkulatzeko denbora gehi bihurtzeko denbora berdin laginketa-periodoaren multiplo oso bat

Kontuan har dezagun bihurtzeko denboraren eta kalkulatzeko denboraren batuketa. Laginketa-periodoaren multiploa osoa bada, atzerapen hori  $z$  aldagai konplexuaren berretura negatibo baten bidez ereduza daiteke. Kalkulatzeko

denboraren eta bihurtzeko denboraren batuketa laginketa-periodoaren baliokidea denean aztertuko dugu, horixe baita egoera hau ulertzeko kasurik errazena. Beraz, hori guztia kontuan izanik, R, S eta T polinomioen mailak honela kalkula daitezke.

$$\text{maila}(R) - 1 = \text{maila}(S) = \text{maila}(T)$$

$k$  aldiuneko neurketak edo laginketak  $k + 1$  aldiuneko irteera kalkulatzeko balio du.

$$U(z) = \left( \frac{t_0 z^{\varphi-1} + \dots + t_{\varphi-1}}{z^{\varphi} + r_1 z^{\varphi-1} + \dots + r_{\varphi}} \right) Y_c(z) - \left( \frac{s_0 z^{\varphi-1} + \dots + s_{\varphi-1}}{z^{\varphi} + r_1 z^{\varphi-1} + \dots + r_{\varphi}} \right) Y(z)$$

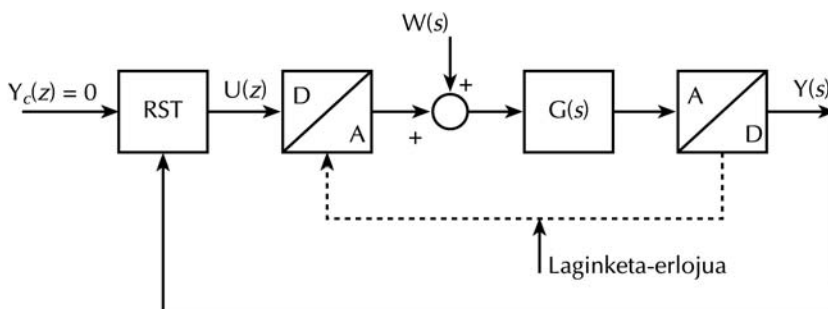
Hori guztia  $z^{\varphi-1}$ -z zatituta:

$$u(k+1) = -r_1 u(k) - \dots - r_{\varphi} u(k - \varphi + 1) + t_0 y_c(k) + \dots + t_{\varphi-1} y_c(k - \varphi + 1) \\ - s_0 y(k) - \dots - s_{\varphi-1} y(k - \varphi + 1)$$

RST erreguladorea gauzatzen duen kodea aurreko ekuazioan oinarritzen da zuzenean.

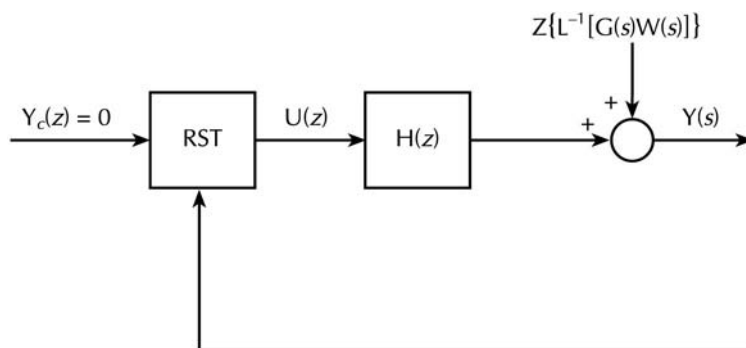
### 10.2.2 Perturbazio-konpentsatzailea. Efektu integratzailea

Har dezagun kontuan 10.4 irudiko erregulazio-egitura. Muntaia horretan,  $Y_c(k)$  kontsigna nulua da. Aldiz,  $w(t)$  perturbazio analogikoa gehigarria da kontrolatu beharreko prozesuaren aurretik.



10.4 irudia. RST erreguladorea duen erregulazio-muntaiaren eskema funtzionala

Bloke-eskema sinplifikatuta, 10.5 irudiko eskemara iritsiko gara.



**10.5 irudia.** RST erreguladorea duen erregulazio-muntaiaren eskema funtzionala,  $H(z)$  kalkulatu eta gero.

Perturbazio analogikoak kontrolatu beharreko magnitudearen gainean duen eragina honela idatz daiteke:

$$Y(z) = Z\{L^{-1}(G(s)W(s))\} - H(z) \frac{S(z)}{R(z)} Y(z)$$

$$Y(z) = \frac{Z\{L^{-1}(G(s)W(s))\}}{1 + H(z) \frac{S(z)}{R(z)}}$$

Perturbazioak maiztasun txikikoak badira, perturbazio horiek baztertzeko,  $R(z)$  txikitu egiten dugu; hots,  $R(z)$  polinomioaren moduluak txikia izan behar du.

Nabarmendu behar da perturbazioak baztertzeko  $q$  integratzaile behar ditugula; eta integratzaileok lortzeko,  $R(z)$ -ren ordean,  $(z-1)^q R(z)$  jarri behar da.

Hortik aurrera,  $P(z)$  edozein polinomioren maila ( $P(z)$ ) eran idatziko dugu.

Bestalde, kausalitate-kondizioek honako hau ezartzen dute:

$$\text{maila}(R(z)) + q - \text{maila}(S(z)) \geq 0$$

$$\text{maila}(R(z)) + q - \text{maila}(T(z)) \geq 0$$

Integratzaile horiei *perturbazio-konpentsatzaile* deritze, eta haien mota  $q$  da.

### 10.0 adibidea

Demagun sistema baten gain perturbazio konstante batek eragiten duela, hots,  $w(t) = 1$ , eta kontroladoreak  $q = 1$  integratzaile dituela. Bestalde, inolako kontsignarik ez dugunean, sistemaren irteera honelakoa da.

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = (1 - z^{-1}) Z \left( L^{-1} \left( \frac{G(s)}{s} \right) \right)$$

$$Y(z) = \frac{Z \left( L^{-1} \left( \frac{G(s)}{s} \right) \right)}{1 + H(z) \left( \frac{S(z)}{(z-1)R(z)} \right)}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{z}{z-1} \left[ (1 - z^{-1}) Z \left( L^{-1} \left( \frac{G(s)}{s} \right) \right) \right]}{1 + H(z) \left( \frac{S(z)}{(z-1)R(z)} \right)}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{z}{z-1} \frac{B(z)}{A(z)}}{1 + \frac{B(z)}{A(z)} \left( \frac{S(z)}{(z-1)R(z)} \right)}$$

Gogoan izan behar dugu,  $y_c = 0$  dela aldiune oro; beraz,  $Y_c(z) = 0$  da. Ondorioz, errorearen Z transformatua honela idatz daiteke:  $E(z) = Y_c(z) - Y(z) = -Y(z)$ . Erregimen iraunkorreko errorerik dugun ikusteko, bukaerako balioaren teorema aplikatu behar dugu:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = -\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z) =$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z(z-1)R(z)B(z)}{(z-1)R(z)A(z) + B(z)S(z)}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z(z-1)R(z)B(z)}{(z-1)R(z)A(z) + B(z)S(z)} = 0$$

Gogoan izan behar dugu  $R(z)$  polinomioak ez duela  $z = 1$  errorik, kontroladoreak  $(z - 1)$  gaiekin batera jarri beharko genituelako. Bestalde,  $S(z)$  polinomioak ez du  $z = 1$  errorik,  $(z-1)^q$  gaiarekin baliogabetuko lirakeelako.

Ikusten dugunez, integratzailerik gabe, eragin ez-nulua izango genuke. Hau da, erroreren bat egongo litzateke.

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1) \left( \frac{z}{(z-1)} \right) \frac{B(z)}{A(z)}}{1 + \frac{S(z)}{R(z)} \frac{B(z)}{A(z)}} \\ \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) Y(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1) \left( \frac{z}{(z-1)} \right) \frac{B(z)}{A(z)}}{1 + \frac{S(z)}{R(z)} \frac{B(z)}{A(z)}} \\ \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) Y(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1) z A(z) B(z) R(z)}{(z-1) A(z) (R(z) A(z) + S(z) B(z))} \neq 0 \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) &\neq 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) \neq 0\end{aligned}$$

## 10.3 RST ERREGULADOREAREN KALKULUA

### 10.3.1 Sintesiaren oinarria

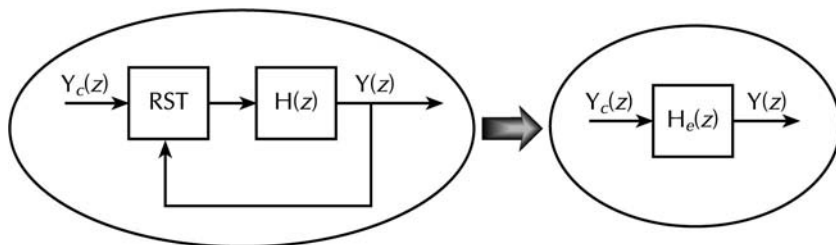
Lehen ikusi dugun perturbazio-konpentsatzailerik gabeko serbokontrolleko (begizta itxia) transferentzia-funtzioa honela adieraz daiteke:

$$\frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)}$$

Begizta itxiko transferentzia-funtzio hori jarraitu beharreko ereduko —edo erabiltzaileak emandako erreferentzia-ereduko—  $H_e(z)$  transferentzia-funtzioaren baliokidea izan dadin, RST erreguladoreko  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioak dimentsionatu egin behar ditugu. Honela idatziko dugu  $H_e(z)$  transferentzia-funtzioa.

$$H_e(z) = \frac{B_e(z)}{A_e(z)}$$

Suposatuko dugu  $H_e(z)$  funtzio arrazional propioa dela; bestalde, joko dugu  $A_e(z)$  polinomioa monikoa dela eta zero guztiak 1 erradioko zirkuluaren barruan daudela (eremu egonkorra). 10.6 irudiak filosofia hori islatzen du.



**10.6 irudia.** RST erreguladorearen sintesiaren printzipioa.

Erroen kokapenaren bitartez erreguladore klasikoa sintetizatzeke, erregimen iragankorreko moteltze-espezifikazioak bete daitezkeen tokietan jarri behar dira begizta itxiko sistemaren poloak. Egitura klasiko batean, kokapen hori plano konplexuko eremu batzuetara mugatuta dago; teknika hori erabiliz gero, baina, espezifikazioak ezin dira beti bete, eta kontroladorearen egitura aldatu beharra dago, gehikuntza-ekuazioa aldatuta.

Bestalde, metodo horrek badu alde enpiriko bat, eta zaila da sortze-algoritmo batean aljebraikoki inplementatzea.

RST kontroladorea dimentsionatzeak nabarmen orokortzen du erroen kokapenaren bidezko sintesia. Erregimen iragankorra kontrolatzeko, begizta itxiko sistemaren poloak kokatu behar ditugu. Gogoan izan behar dugu polo horiek ( $A_e(z)$  polinomioaren erroak) nahi bezala sakabana daitezkeela plano konplexuan.

Horrez gain,  $A_e(z)$  polinomioaren maila eta AR + BS polinomioaren maila ez dute zertan berdinak izan. Izan ere, eskuarki AR + BS polinomioa baino askoz maila txikiagokoa den  $A_e(z)$  polinomio bat hautatzen dugu.

RST erreguladorea bi askatasun-gradukoa denez, begizta itxiko zeroak  $-B_e(z)$  polinomioko erroak, alegia— ere plano konplexuan koka daitezke hala nahi izanez gero, hein batean behintzat.

Azkenik, RST erreguladorearen sintesia modu ezin hobean kodetu daiteke, eta, halaber, kontrol moldatzaileko eskeman ere abian jar daiteke. Hori guztia 12. kapituluaren ikusiko dugu.

RST erreguladorearen sintesitik ondorioztatzen da jarraitu beharreko  $H_e(z)$  ereduaren poloen mende dagoela serbokontrolleko erregimen iragankorren moteltzea.

Moteltze-kondizio absolutua eta erlatiboa betetzearren,  $A_e(z)$  polinomioaren poloak 9. gaian azaldutako plano konplexuko eremura mugatu behar ditugu.

Jarraitu beharreko  $H_e(z)$  ereduak ezaugarri bat hau izan behar du:

$\lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(k) - y(k))$  serbokontrolleko erregimen iragankorreko errorearen gaineko espezifikazioak bete behar ditugu.

Begizta itxiko transferentzia-funtzioa jarraitu beharreko ereduaren transferentzia-funtzioarekin berdinduko dugu:

$$H_e(z) = \frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)}$$

Beraz, errore iraunkorrak kalkulatzeko begizta itxiko sistemaren gain kalkulatu behar ditugunez, eta RST kontroladorearen bitartez jarraitu beharreko eredu eta begizta itxiko transferentzia-funtzioa berdinak direnez, errore iraunkorrak jarraitu beharreko ereduarekiko kalkulatu beharko ditugu.

Aurreko berdintza hori perturbazio-kompentsatzailea dagoenean ere gertatzen da. Baina, egoera horretan,  $R(z)$  polinomioa  $R(z)(z-1)^q$  polinomioaz ordezkatu behar dugu. Dena dela,  $R(z)$  polinomioak  $(z-1)^q$  gai integratzaile edukitzeak, hala ere, ez dizkio errore iraunkorrak kentzen, erregulazio-erroreak besterik ez ditu kentzen.

## 10.1 adibidea

Demagun RST kontroladore bat egin nahi dugula eta ez dugula serbokontrolleko errorerik onartzen 1. mailako jauzi erako sarrera baterako. Sistemaren sarrera  $Y(z) = \frac{z}{z-1}$  da. Beraz, sistemak duen errorea kalkulatu nahi badugu, bukaerako

balioaren teoremaz baliatu behar gara.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(k) - y(k)) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) [Y_c(z) - Y(z)]$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(k) - y(k)) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) [1 - H_e(z)] Y_c(z)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(k) - y(k)) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) [1 - H_e(z)] \frac{z}{(z-1)}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (y_c(k) - y(k)) = \lim_{z \rightarrow 1} z [1 - H_e(z)] = 1 - H_e(1)$$

Ondorioz, erregimen iraunkorrean errorerik ez izateko,  $H_e(1) = 1$  izan behar du. Berdintza hori urratzen bada, estatismoa gertatuko da (erregimen iraunkorreko errorea maila-sarrera baterako), nahiz eta perturbazio-kompentsatzailea egon. Beti gogoan izan behar dugu perturbazio-kompentsatzaileak jauzi erako perturbazioak kentzeko bakarrik balio duela.

Bestalde, Begizta itxiko transferentzia-funtzio harmonikoa  $H_e(e^{j\omega h})$  da. Gogoan izan behar dugu  $H_e(z)$  kontu handiz hautatu behar dugula, espezifikazioak kontuan izanik, banda-zabalerari nahiz erresonantzia-irabaziari dagokienez batik bat.

$K_1(z) = B(z)/A(z)$  eta  $K_2(z) = S(z)/R(z)$  izanda, begizta itxiko transferentzia-funtzioa honela idazten da, perturbazio-kompentsatzailearik gabe:

$$\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)} = \frac{K_1(z)}{1 + K_2(z)K_1(z)} \frac{T(z)}{R(z)}$$

Adierazpen horrek kontrolatu beharreko prozesuaren  $H(z)$  eredu laginduaren aurrean duen sentikortasuna erraz kalkulatu da:

$$S_{H(z)}^{H_e(z)} = \left( \frac{H(z)}{H_e(z)} \right) \frac{\partial H_e(z)}{\partial H(z)} = \frac{1}{1 + K_1(z)K_2(z)}$$

Sistemaren begizta irekiko transferentzia-funtzioaren eragina sistemaren begizta itxiko transferentzia-funtzioaren gain, edo  $H_e(z)$ -ren sentikortasuna, oso aldagai garrantzitsua da. Izan ere, sistemaren begizta irekiko transferentzia-funtzioaren gain inolako aldakuntzarik edo neurketa-errorerik izanez gero, begizta itxiko transferentzia-funtzio baliokidea aldatzen du. Batez ere, maiztasun txikiko sentikortasuna txikiagotu nahiko genuke, maiztasun handietan sistemen irabaziaz oso azkar txikitzen direlako, eta kontsignek maiztasun txikietan dihardutelako batez ere. Beraz, sentikortasuna maiztasun txikietan murrizteko, nahitaezkoa da  $K_1(e^{j\omega h})K_2(e^{j\omega h})$ -ren modulua maiztasun txikietan behar bezain handia izatea.

Perturbazio-kompentsatzaile batekin,  $K_2(z) = S(z)/R(z)$ -ren ordez,

$K_2(z) = \frac{S(z)}{R(z)(z-1)^q}$  jartzen da. Hala ere, kondizio bera izan behar du, hots,

maiztasun txikietan  $K_1(e^{j\omega h})K_2(e^{j\omega h})$  funtzioaren moduluak ahalik eta handiena izan behar du.

### 10.3.2 Kontrolatu beharreko sistemaren zeroak sinplifikatzea

Perturbazio-kompentsatzailerik gabeko RST kontroladorearen sintesia  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioak zehaztean datza. Horretarako, berdintza hau bete behar dugu:

$$\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)} = \frac{B_e(z)}{A_e(z)} \quad (10.7)$$

$R$ ,  $S$  eta  $T$  polinomioen mailak lehenago aztertutako murrizketen mende daude;  $R(z)$  monikoa da; eta, azkenik, baliteke perturbazio-kompentsatzailea behar izatea, eta  $R(z)$  polinomioa  $R(z)(z-1)^q$  polinomioaz ordezkatu behar izatea berdintza guztietan.

### 10.2 adibidea

(10.7) berdintza lortzeko, begizta irekiko kontrola aztertuko dugu adibide honetan. Ikusiko dugunez, horrelako kontrolak arazo praktiko asko ditu. Begizta irekian (10.7) berdintza lortzeko, kontrol hau proposa daiteke, non,  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioak ekuazio hauen bitartez lor baititzakegu.

$$R(z) = \frac{1}{b_0} B(z) A_e(z)$$

$$S(z) = 0$$

$$T(z) = \frac{1}{b_0} A(z) B_e(z)$$

non

$$B(z) = b_0 z^{maila(B)} + \dots + b_{maila(B)}$$

Argitu behar dugu ezen  $R(z)$  monikoa izan dadin nahitaezkoa dela  $b_0$  koefizienteaz zatitzea.

Bestalde, kausalitate-kondizioak egiaztatuko ditugu. Lehenik,  $R(z)$  polinomioaren mailak  $S(z)$  polinomioaren maila baino handiagoa izan behar du.

$$maila(R(z)) - maila(S(z)) = maila(B(z)) + maila(A_e(z)) \geq 0$$

Azken inekuazio hori bete dadin,  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioak adibide honetako metodoaren arabera kalkulatu behar ditugu. Metodo horren arabera polinomioen mailak hauek izanik, azken inekuazioa beteko litzateke.

$$maila(S(z) = 0) = 0$$

$$maila\left(R(z) = \frac{1}{b_0} B(z) A_e(z)\right) = maila(B(z)) + maila(A_e(z))$$

Bestalde,  $R(z)$  polinomioaren mailak  $T(z)$  polinomioaren maila baino handiagoa izan behar du.

$$\begin{aligned} & maila(R(z)) - maila(T(z)) = \\ & = maila(B(z)) + maila(A_e(z)) - maila(A(z)) - maila(B_e(z)) \geq 0 \end{aligned}$$

Beraz,  $A_e(z)$  polinomioaren maila  $B_e(z)$  polinomioaren maila baino handiagoa dela suposatuz, aurreko inekuazioa beteko da. Beraz, inekuazio hau betez gero,  $maila(R(z)) \geq maila(T(z))$  inekuazioa bete daiteke.

$$maila(A_e(z)) - maila(B_e(z)) \geq maila(A(z)) - maila(B(z))$$

Horrenbestez,  $R(z)$ ,  $T(z)$  eta  $S(z)$  polinomioak adibide honetan proposatzen den eran kalkulatz gero, (10.7) berdintza beteko dugu, eta lortu nahi dugun  $H_e(z)$  transferentzia-funtzio baliokidea lortuko dugu.  $S(z) = 0$  denez, kontrolatu beharreko magnitudean ez dago berrelikadurarik. Begizta irekiko irteeran, kontrolatu beharreko sistemaren poloak eta zeroak sinplifikatu egiten dira. Begizta irekiko kontrolaren eragozpenez gain (esate baterako, begizta irekian perturbazioen eraginak txikiagotzerik ez izatea), kontrol mota honek beste arazo bat du.

Izan ere, kontrolatu beharreko prozesuaren  $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$  eredua, fluktuazioen eta

neurketa-erroreen ondorioz, sistema errealaren  $H_e(z) = \frac{B_e(z)}{A_e(z)}$

transferentzia-funtzioa ez bezalakoa da beti.

Beraz,  $H(z)$  ereduan oinarriturik dimentsionatutako RST motako kontroladoreak,  $H_e(z)$  prozesu fisikoari aplikatuta, transferentzia-funtzio errealera garamatza:

$$\frac{B_f(z)T(z)}{A_f(z)R(z)+B_f(z)S(z)} = \frac{B_f(z)A(z)B_e(z)}{A_f(z)B(z)A_e(z)} \quad (10.8)$$

Berehala ikusten da erregimen iragankorra mugatu gabeko poloez osatuta dagoela, kontrolatu beharreko sistema ezegonkorra denean ( $A_f(z)$ -ren erroak 1 erradioko zirkuluaren gainean edo kanpoan), edo txikiena ez den fasekoa denean ( $B_f(z)$ -ren erroak 1 erradioko zirkuluaren gainean edo kanpoan).

### 10.3 adibidea

Azter dezagun berrelikaduran oinarritutako kontrol bat. Horretarako, hautaketa hau egingo dugu:

$$R(z) = \frac{1}{b_0} B(z) [A_e(z) - B_e(z)]$$

$$S(z) = T(z) = \frac{1}{b_0} A(z) B_e(z)$$

$b_0$  zenbakiaz zatituko dugu  $R(z)$  polinomioko maila handieneko gaian ageri den koefizientea bat izan dadin. Kasu horretan, RST erreguladorearen kausalitatea bermatuta dago, jarraitu beharreko  $H_e(z) = \frac{B_e(z)}{A_e(z)}$  ereduaren polo-gehiegitasuna

kontrolatu beharreko prozesuaren  $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$  ereduaren polo-gehiegitasuna

baino handiagoa edo hura bezalakoa denean. Beraz, inekuazio hau betez gero, kontroladorea kausala izango da, hots,  $R(z)$  polinomioaren maila  $T(z)$  eta  $S(z)$  polinomioen maila baino handiagoa izango da.

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) \geq \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B(z))$$

Honako honek ematen du begizta itxiko transferentzia-funtzioa:

$$\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)} = \frac{B_e(z)}{A_e(z)}$$

$S(z) = T(z)$  denez, erreguladorearen konfigurazioa klasikoa da. Kontrolatu beharreko magnitudea berrelikatu behar bada ere, nahi ez ditugun poloak izan ditzake erregimen iragankorrak, kontroladorea benetan kontrolatu beharreko sisteman txertatzen denean.

Gainera,  $R(z)$  hautatuz gero, ezin da perturbazio-konpentsatzailea sartu. Beraz, sistema bat kontrolatzeko, proposatu ditugun egiturek akatsak dituzte.

Adibide bi horiek oso hautaketa sinpleak dira, baina, zoritxarrez, onartezinak dira. Orain, besteak beste, perturbazio-konpentsatzailea erraz sar dezakeen metodo ahaltsu bat landuko dugu.

Lehenago esan dugunez, jarraitu beharreko  $H_e(z) = \frac{B_e(z)}{A_e(z)}$  ereduak, hots, kontrol honen bidez lortu nahi dugun transferentzia-funtzioak,  $\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)} = \frac{B_e(z)}{A_e(z)}$  begizta itxiko sistemak baino ordena txikiagoa izaten du normalean.

Beraz,  $\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)} = \frac{B_e(z)}{A_e(z)}$  berdintza betetzearen, poloak zeroekin sinplifikatu behar ditugu. Horrenbestez,  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioak sinplifikazio horiek eragiteko moduan dimentsionatuko ditugu.  $B(z)$  polinomioa  $B^+(z)B^-(z)$  biderketa gisa idatz daiteke.  $B^+(z)$  polinomioa sinplifikatu behar ditugun  $B(z)$  polinomioaren erroez osaturiko polinomioa da;  $B^-(z)$  polinomioa, berriz, sinplifikatu ez ditugun  $B(z)$  polinomioaren erroez osaturikoa. Beraz,  $B^+(z)$  polinomioa  $A(z)R(z) + B(z)S(z)$  polinomioaren faktore ere izango da,  $\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)} = \frac{B_e(z)}{A_e(z)}$  transferentzia-funtzioan  $B^+(z)$  polinomioa sinplifikatu ahal izateko. Beraz,  $AR + BS$ -ren erroak eta  $B^-(z)$  erroak ezberdinak izango dira, eta

$B^-(z)$  ezingo da sinplifikatu.

$$B(z) = B^+(z) B^-(z) \quad (10.9)$$

$B(z)$ -ren faktORIZAZIO ESPEKTRALA esaten zaio berdintzaren eskuineko atalari.  $B^+$  monikoa hartuz gero, (10.9) faktORIZAZIO bakarra lortuko dugu.

$$\frac{B^+(z)B^-(z)T(z)}{A(z)R(z)+B^+(z)B^-(z)S(z)} = \frac{B_e(z)}{A_e(z)} \quad (10.10)$$

$B^-(z)$  polinomioaren erroak eta  $AR + BS$  polinomioaren erroak ezin dira berdinak izan, berdinak izango balira (10.10) berdintzan sinplifikatu egingo lirakeelako. Horrenbestez,  $B^-$  polinomioa  $B_e$  polinomioaren faktorea izan behar du. Beraz,

$$B_e(z) = B^-(z)B'_e(z) \quad (10.11)$$

Gainera,  $B^+(z)$  sinplifikazioa lortzeko, hau ezinbestekoa da:

$$R(z) = B^+(z)R'(z) \quad (10.12)$$

$R(z)$  eta  $B^+(z)$  monikoak direnez,  $R'(z)$  ere halakoa izango da.

Azkenik, (10.10) erlazioa honela geratzen da:

$$\frac{B^-(z)T(z)}{A(z)R'(z) + B^-(z)S(z)} = \frac{B^-(z)B'_e(z)}{A_e(z)}$$

$B^+(z)$  sinplifikagarria da;  $B^-(z)$ , aldiz, ez da sinplifikagarria (polinomio hauen erroen sinplifikatzeari dagokionez, alegia).

$$\frac{T(z)}{A(z)R'(z) + B^-(z)S(z)} = \frac{B'_e(z)}{A_e(z)}$$

$B'_e(z)$  polinomioa  $T(z)A_0(z)$  dela suposatuko dugu, non  $A_0(z)$  polinomioa behatzailea baita.  $A_0(z)$  polinomio behatzaile hori  $A(z)R'(z) + B^-(z)S(z)$  polinomioaren faktore bat da. Horrenbestez, berdintza hauek beteko dira.

$$T(z) = B'_e(z)A_0(z) \quad (10.13)$$

$$A(z)R'(z) + B^-(z)S(z) = A_e(z)A_0(z) \quad (10.14)$$

Laburbilduz,  $B(z)T(z)$  nahiz  $A(z)R(z) + B(z)S(z)$  polinomioek  $A_0(z)$  eta  $B^+(z)$  polinomioak dituzte faktoretzat.

Begizta itxiko  $\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)}$  transferentzia-funtzioa  $A_0(z)$  eta  $B^+(z)$

polinomioak kenduta sinplifikatzen da matematikoki, eta  $\frac{B_e(z)}{A_e(z)}$  eredua lortzen da.

### ***Perturbazio-konpentsatzailea sartzen denean***

$R(z)$  polinomioaren ordeztu  $R(z)(z-1)^q$  polinomioa jarri behar dugu perturbazio-konpentsatzailea lortzeko. Hala, (10.7) berdintza honela geratzen da:

$$\frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z)(z-1)^q + B(z)S(z)} = \frac{B_e(z)}{A_e(z)}$$

Aurreko garapen guztia onargarria da,  $R(z)$  polinomioaren ordeztu  $R(z)(z-1)^q$  polinomioa jarrita.  $B^-(z)$  polinomioaren erroak ez dira  $R(z)(z-1)^q$  polinomioaren erroak.

Gainera,  $B^+(z)$  polinomioaren erroak  $A(z)(z-1)^q R'(z) + B^-(z)S(z) = A_e(z)A_0(z)$  polinomioaren erroak dira.  $B^+(z)$  polinomioaren erro guztiek  $z=1$  poloa ez bezalakoak izan behar dute. Hona hemen horretarako arrazoiak:  $B^+(z)$  polinomioaren erroak  $R(z)$  polinomioaren erroak dira; beraz,  $B^+(z)$  polinomioaren erroak egonkorak ez badira, sinplifikazio oso bat lortzen ez denez,  $A(z)(z-1)^q R(z) + B(z)S(z)$  polinomioaren erroak lortzen dira, eta, horren ondorioz, sistemaren egonkortasuna gal dezakegu.  $R(z)$  polinomioa  $B^+(z)$  eta  $R'(z)$  polinomioen biderketa gisa idatz dezakegu.

$$R(z) = B^+(z)R'(z)$$

$R'(z)$  monikoa da,  $R(z)$  eta  $B^+(z)$  ere monikoak direlako.

Honela aldatu behar da (10.14) ekuazioa:

$$A(z)(z-1)^q R'(z) + B^-(z)S(z) = A_e(z)A_0(z)$$

$$A(z)(z-1)^q R'(z) + B^-(z)S(z) = A_e(z)A_0(z) \quad (10.15)$$

### ***$A_0(z)$ polinomioaren hautaketari buruzko iruzkin batzuk***

RST erreguladorearen sintesiaren printzipioa bera dela kausa, begizta itxiko sistemaren poloak jarraitu beharreko  $H_e(z) = \frac{B_e(z)}{A_e(z)}$  sistemaren poloak dira ( $A_e(z)$

polinomioaren erroak). Egia esan, kontrolatu beharreko prozesuaz dugun  $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$  eredua eta prozesuaren benetako  $H_f(z) = \frac{B_f(z)}{A_f(z)}$  transferentzia-

funtzioa ezberdinak dira, sistema fisikoaren parametroen fluktuazioen, eredu-erroreen eta neurri-erroreen ondorioz.

Transferentzia-funtzio honek begizta itxiko sistema deskribatzen du:

$$\frac{B_f(z)T(z)}{A_f(z)R(z)+B_f(z)S(z)}$$

Beraz,  $A_f(z)R(z) + B_f(z)S(z)$  polinomioaren erroak dira begizta itxiko transferentzia-funtzioaren poloak. Azken erro horien kopurua  $A_e(z)$  polinomioaren erro kopurua baino handiagoa izan ohi da. Horrez gain, gehienetan ez dago erro komunik bi polinomio horien artean.

Hala ere, eredua egitean behar bezain eredu fina lortuz gero,  $H(z)$  eta  $H_f(z)$  transferentzia-funtzioak antzekoak direnean,  $A(z)R(z) + B(z)S(z)$  eta  $A_f(z)R(z) + B_f(z)S(z)$  polinomioen artean alde gutxi dago.

Polinomio guztien erroak aurreko polinomioaren koefizienteekin batera eten gabe aldatzen direnez, polinomio horren erroetatik hurbil daude.

(10.14) berdintzaren bi atalak  $B^+(z)$  polinomioaz biderkatuz, emaitza hau lortuko dugu:

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_e(z)A_0(z)B^+(z)$$

Horren ondorioz,  $A_f(z)R(z) + B_f(z)S(z)$  polinomioaren zeroak  $A_e(z)$ ,  $A_0(z)$  eta  $B^+(z)$ -ren erroak dira gutxi gorabehera.

- begizta itxiko sistema errealearen poloak  $A_e(z)$ -ren zeroak dira gutxi gorabehera,
- horiei  $A_0(z)$  polinomio behatzailearen zeroak eta  $B^+(z)$ -ren zeroak gehitzen zaizkie.

Poloek moduak sortzen dituzte, eta ezinbestekoa da  $A_0(z)$ -ren eta  $B^+(z)$ -ren zeroetatik datozen modu parasitoen (benetan nahi diren moduei gainjartzen zaizkie) eragina ahalik eta gehiena murriztea. Nahi diren moduak  $A_e(z)$ -ren zeroetatik datoz, hain zuzen.

Bestalde, edozein transferentzia-funtziotako  $p$  polo bat haren  $b$  zero batetik hurbil dagoenean, polo horri lortutako moduak indarra edo garrantzia galtzen du. Gogoan izan behar dugu  $p$  polo bati lotutako  $cp^k$  modu baten indarra  $c$  koefizientea dela, eta  $c$  koefiziente hori  $p - b$  kendurarekiko proportzionala dela. Beraz, zenbat eta hurbilago egon poloa zerotik, orduan eta txikiagoa izango da  $p$  poloari lotutako moduaren garrantzia. Zoritxarrez, praktikan ez dago  $z - p$  eta  $z - b$  faktoreen

sinplifikazio matematikorik  $p$  poloaren eta  $b$  zeroaren balio zehatzik ez dugulako; beraz, ezin dezakegu guztiz suntsitu  $p$  polo baten modu bat.

Hala ere,  $cp^k$  moduko  $p^k$  denbora-osagaia oso garrantzitsu bihur daiteke  $p$ -ren balioaren arabera; esate baterako,  $|p| > 1$  bada.

RST erreguladorearen sintesiaren testuinguruan,  $A_0(z)$  eta  $B^+(z)$  polinomioak sinplifikatu nahi dira.

Beraz, horrelakoetan ezinbestekoa da polinomio horietako zeroen kokapena, modu parasitoen denbora-osagaien txikiagotze onargarria bermatzeko.

### **$A_0$ hautatzea**

Erabiltzaileak zehazten du  $A_0(z)$  polinomio behatzailea.

Aurreko eztabaida ikusita, zeroek 1 erradioko zirkuluaren barruan egon behar dute nahitaez. Hala ere, kondizio hori ez da nahikoa oro har.

$A_0(z)$ -gatik sortzen diren modu parasitoak, praktikan, moteltze-kondizio absolutu eta erlatibo zorrotzen mende daude, denborari dagokionez, nahi den moduetan baino bizkorrago txikiagotu daitezten.

Sarritan,  $A_0(z) = z^{maila(A_0)}$  polinomio behatzaile bat, *atzerapen*-erantzunekoa deritzona, hautatzen da. *maila*( $A_0$ )-k  $A_0(z)$ -ren maila adierazten du.

### **$B^+$ hautatzea**

$B^+(z)$  polinomioaren erroek ere 1 erradioko zirkuluaren barruan egon behar dute.

Murritzeta osagarri bat ere badago: moteltze-kondizio absolutu eta erlatibo gehiago jartzea. Gogora dezagun kontrolatu beharreko prozesuek badituztela, definizioz, zeroak 1 erradioko zirkuluaren gainean edo kanpoan.

Moteltze-kondizio absolutu eta erlatiboak betetzen ez dituzten  $B(z)$  polinomioaren erroak ez ditugu  $B^+(z)$  polinomioan sartuko, ezegonkortasuna sorrarazten baitute. Ondorioz,  $B^+(z)$ -ren erroek jarraitu beharreko ereduaren zeroak izan behar dituzte nahitaez.

Benetan ezarritako  $R'(z)$ ,  $S'(z)$  eta  $T'(z)$  polinomioak eta  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomio kalkulatuak ezberdinak dira, polinomioen koefizienteen kuantifikazioagatik bereziki.

---

Errore horiek askoz ahulagoak dira kontrolatu beharreko sisteman parte hartzen dutenak baino; beraz, baztertu egin daitezke.

RST erreguladorearen sintesia aztertzean, orain arte serbokontrol-muntaian jarri dugu arreta batik bat. Zer gertatzen da erregulazio-muntaian?

Perturbazio konstante bat izanik, erregulazioko transferentzia-funtzioa honako hau da:

$$\frac{H(z)}{1+K(z)H(z)} = \frac{B(z)R(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)}$$

Non  $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$  baita kontrolatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzioa, eta  $K(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$  baita RST kontroladorearen berrelikadura transferentzia-funtzioa.

(10.9) faktORIZAZIOA kontuan hartuta, eta proposatutako sintesiak  $AR + BS = A_e A_0 B^+$  berdintza bermatzen duenez:

$$\frac{B(z)R(z)}{A(z)R(z)+B(z)S(z)} = \frac{B^-(z)B^+(z)R(z)}{A_e(z)A_0(z)B^+(z)} = \frac{B^-(z)R(z)}{A_e(z)A_0(z)}$$

Hala, serbokontrolleko erantzunak dituen modu berak ditu erregulazioko erantzunak,  $A_e(z)$ -ren zeroetatik datozenak. Modu horiei  $A_0(z)$  zeroetatik datozen modu parasitoak gainjartzen zaizkie.

Modu parasito horiek kasu matematiko idealean ere ageri dira,  $A_0$  polinomioa ez baitago sinplifikatua.

Fisikoki, serbokontrol-muntaian gertatzen den bezala, ez dago sinplifikaziorik *zehatz-mehatz* hitz eginez gero. Gainera,  $B^+$  polinomioa dela medio, parasito osagarriak daude.

Perturbazioa denboran zehar aldatzen denean,  $1 + K(z)H(z)$ -ren zeroak erregulazio-muntaiaren erantzunaren poloak dira.

$B^+$  polinomioa ez da sinplifikatzen, eta nahi ditugun  $A_e(z)$ -ren moduak aurkitzen ditugu. Modu horiei  $A_0$ -k eta  $B^+$ -ek sortutako moduak gehitzen zaizkie.

Oro har, modu parasitoak serbokontrollean baino garrantzitsuagoak dira, matematikoki sinplifikatzen ez diren polinomioetatik datozelako.

Iruzkina horietatik ondorioztatzen denez, serbokontrolleko erregimen iragankorra *kontrolatzeko* poloak kokatuz gero, aldi berean konpontzen da erregulazioko erregimen iragankorra moteltzearen arazoa. Aurretik esandakoa perturbazio-kompentsatzailearekin ere gertatzen da,  $R(z)$ -ren ordez  $(z-1)^q R(z)$  jartzen baita.

### 10.3.3 Diofantosen ekuazioa

Demagun  $A(z)$ ,  $B(z)$  eta  $C(z)$  polinomioak ditugula, eta  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomio ezezagunak direla. Ondoren azalduko dugun polinomio-berdintzak izen hauek har ditzake: Diofantosen, Bezouten edo Aryabhataren ekuazioa.

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = C(z) \quad (10.16)$$

(10.14) eta (10.15) erlazioak Diofantosen ekuazioak dira, non  $R'(z)$  eta  $S(z)$  polinomioak zehaztu behar diren polinomioak baitira. Soluzio bat dagoen ala ez jakiteko, ondoren azaltzen den teorema erabiltzen da. Teorema egiaztatuko dugu, baina ez da beharrezkoa atala ongi ulertzeko.

#### 10.1 teorema

Demagun  $A(z)$ ,  $B(z)$  eta  $C(z)$  polinomioen koefizienteak zenbaki errealak direla. (10.16) Diofantosen ekuazioak  $R(z)$  eta  $S(z)$  soluzioak ditu, baldin eta soilik baldin  $A(z)$ -ren eta  $B(z)$ -ren zatitzaile komunetako handiena  $C(z)$ -ren faktorea bada.

*Egiaztatpena:*

Lehenik, frogatuko dugu 10.1 teoremak finkatzen duen kondizioa beharrezkoa dela  $A(z)R(z) + B(z)S(z) = C(z)$  Diofantosen ekuazioak emaitza izan dezan. Gogoan izan behar dugu  $A(z)$ ,  $B(z)$  eta  $C(z)$  polinomioak ezagunak ditugula eta kalkulatu nahi ditugun polinomioak  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioak direla. 10.1. teoremak dioenez, Diofantosen ekuazioak emaitza izan dezan,  $A(z)$  eta  $B(z)$  polinomioek komunean duten  $Q(z)$  zatitzaile handienak  $C(z)$  polinomioa ere zatitu behar duela. Kondizio hori beharrezkoa dela frogatzeko,  $A(z)$  eta  $B(z)$  polinomioak  $Q(z)$  zatitzaile handienaren biderketa gisa ordezkatzeko ditugu Diofantosen ekuazioan.

$$\begin{cases} A(z) = a(z)Q(z) \\ B(z) = b(z)Q(z) \end{cases} \Rightarrow$$

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = C(z) \Rightarrow$$

$$a(z)Q(z)R(z) + b(z)Q(z)S(z) = C(z) \Rightarrow$$

$$Q(z)[a(z)R(z) + b(z)S(z)] = C(z)$$

Agerian dago  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioak egon daitezen nahitaez  $C(z)$  polinomioak  $Q(z)$  polinomioaz zatigarria izan behar duela. Bestela Diofantosen ekuazioak ez du emaitzarik izango:  $Q(z)$  polinomioa  $C(z)$  polinomioaren faktorea ez bada,  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioak edozein izanik ere, ezingo dugu  $C(z)$  lortu, ezin baitugu  $Q(z)$  polinomioa sinplifikatu. Beraz, Diofantosen ekuazioak emaitzak onar ditzan  $A(z)$  eta  $B(z)$  polinomioen  $Q(z)$  polinomio zatitzaile komunetako handienak  $C(z)$  polinomioa zatitu beharko luke. Hortaz, frogatu dugu 10.1. teoremaren kondizio beharrezkoa dela. Horrenbestez,  $A(z)$  eta  $B(z)$  polinomioen zatitzaile komunetako handienak  $C(z)$  polinomioa zatitzen badu, Diofantosen ekuazioa sinplifika dezakegu. Gogoan izan behar dugu  $a(z)$  eta  $b(z)$  polinomioek ez dutela inolako erro komunik, hots,  $a(z)$  eta  $b(z)$  polinomioak ezin dira elkarrekin zatitu.

$$\begin{cases} A(z) = a(z)Q(z) \\ B(z) = b(z)Q(z) \Rightarrow a(z)R(z) + b(z)S(z) = c(z) \\ C(z) = c(z)Q(z) \end{cases}$$

Orain, 10.1 teoremak finkatzen duen kondizioa beharrezkoa izateaz gain nahikoa dela ere frogatuko dugu. Horretarako,  $a(z)R(z) + b(z)S(z) = c(z)$  ekuazioa erabiliko dugu  $a(z)$  eta  $b(z)$  polinomioek ez dutelako erro komunik. 10.1 teoremak finkatzen duen kondizioa nahikoa dela egiaztatzeko, lehenik definizio hauek erabiliko ditugu:

– **Bi polinomio  $a(z)$  polinomioarekiko inkongruenteak izango dira, baldin eta polinomio horiek  $a(z)$  polinomioaz zatitzean lortzen ditugun hondarrak ezberdinak badira.**

$$\left. \begin{array}{l} p_1(z) \text{ eta } p_2(z) \\ \text{inkongruenteak} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} p_1(z) \bmod(a(z)) = r_1(z) \\ p_2(z) \bmod(a(z)) = r_2(z) \Rightarrow \\ r_1(z) \neq r_2(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1(z) = q_1(z)a(z) + r_1(z) : \text{maila}(a(z)) = m, \text{maila}(r_1(z)) = m-1 \\ p_2(z) = q_2(z)a(z) + r_2(z) : \text{maila}(a(z)) = m, \text{maila}(r_2(z)) = m-1 \end{cases}$$

Demagun  $a(z)$  polinomioarekiko inkongruenteak diren polinomioez osaturiko multzo bat definitzen dugula. Multzo horretan dauden polinomioak  $a(z)$  polinomioaz zatitzean sor daitezkeen hondar guztiak ematen badira, multzo horri multzo

inkongruente oso deritzogu. Beraz,  $m - 1$  mailako polinomio guztiak (edo maila txikiagokoak) edozein multzo inkongruente osoko polinomio baten hondarra izango dira. Argi dago multzo inkongruente oso batek infinitu polinomio izango dituela. Izan ere,  $a(z)$  polinomioarekiko infinitu multzo inkongruente oso defini daitezke.  $M_{a(z)}$  multzo inkongruente bat honela defini daiteke.

$$\forall p_1(z), p_2(z) \in M_{a(z)} \Rightarrow \begin{cases} p_1(z) \bmod(a(z)) = r_1(z) \\ p_2(z) \bmod(a(z)) = r_2(z) \\ maila(r_1(z)) = maila(r_2(z)) = m - 1 \\ r_1(z) \neq r_2(z) \end{cases}$$

Adibide gisa,  $m - 1$  mailako eta  $m - 1$  maila baino txikiagoko polinomio guztiek  $a(z)$  polinomioarekiko multzo inkongruente oso bat definitzen dute. Gogoan izan  $a(z)$  polinomioaren maila  $m$  dela. Gogoan izan behar dugu, orobat,  $a(z)$  polinomioarekiko multzo inkongruente oso baten polinomio bakar bat soilik izango dela  $a(z)$  polinomioaz zatigarria; hau da,  $a(z)$  polinomioaz zatitzean hondar nulua duen polinomio bakarra izango dugu.

Demagun  $M_{a(z)}$  multzo inkongruentea osoa dela. Multzo horretako  $p(z)$  polinomio bakoitzari ondorengo eragiketa aplikatuz gero, polinomioz osatutako beste multzo bat definituko dugu. Gogoan izan behar dugu  $b(z)$  eta  $a(z)$  polinomioak ezin direla elkarrekin zatitu.  $M_{a(z)}$  multzoko  $p(z)$  polinomio bakoitzeko  $h(z)$  polinomio bat defini daiteke.  $h(z)$  polinomio horiek guztiek  $H$  multzoa osatzen dute.

$$\forall p(z) \in M_{a(z)} : h(z) = p(z)b(z) + c(z) \Rightarrow h(z) \in H$$

Ondoren ikus daitekeenez,  $H$  multzoko  $h(z)$  polinomio guztiak  $a(z)$  polinomioarekiko inkongruenteak dira. Azter ditzagun  $H$  multzoko  $h_1(z)$  eta  $h_2(z)$  motako edozein polinomio.  $H$  multzoko polinomio bakoitza  $M_{a(z)}$  multzoko polinomio batetik sortzen denez, esan daiteke  $h_1(z)$  eta  $h_2(z)$  polinomioak  $p_1(z)$  eta  $p_2(z)$  polinomioen bidez lor ditzakegula.

$$\forall h_1(z), h_2(z) \in H \Rightarrow \begin{cases} h_1(z) = p_1(z)b(z) + c(z) \\ h_2(z) = p_2(z)b(z) + c(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1(z) \bmod(a(z)) = r_1(z) \\ p_2(z) \bmod(a(z)) = r_2(z) \\ p_1(z), p_2(z) \in M_{a(z)} \\ r_1(z) \neq r_2(z) \end{cases}$$

$h_1(z)$  eta  $h_2(z)$  polinomioak  $a(z)$  polinomioaz zatituz gero,  $r_{h_1}(z)$  eta  $r_{h_2}(z)$  hondarrak lortuko ditugu.

$$\begin{cases} (p_1(z)b(z) + c(z)) \bmod(a(z)) = r_{h_1}(z) \\ (p_2(z)b(z) + c(z)) \bmod(a(z)) = r_{h_2}(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1(z) = d_1(z)a(z) + r_{h_1}(z) \\ h_2(z) = d_2(z)a(z) + r_{h_2}(z) \end{cases}$$

$h_1(z)$  eta  $h_2(z)$  polinomioen kenketa eginez gero, berdintza hau lortuko dugu.

$$h_1(z) - h_2(z) = (p_1(z) - p_2(z))b(z)$$

$p_1(z)$  eta  $p_2(z)$  polinomioak ondoko eran idatz daitezke. Horrenbestez,  $p_1(z)$  eta  $p_2(z)$  polinomioak aurreko berdintzan ordezkatzuz gero,  $h_1(z)$  eta  $h_2(z)$  polinomioen kenketa honela idatz daiteke.

$$\begin{aligned} \begin{cases} p_1(z) \bmod(a(z)) = r_1(z) \\ p_2(z) \bmod(a(z)) = r_2(z) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} p_1(z) = q_1(z)a(z) + r_1(z) \\ p_2(z) = q_2(z)a(z) + r_2(z) \end{cases} \Rightarrow \\ r_1(z) \neq r_2(z) &\quad \text{maila}(q_1(z)) = \text{maila}(q_2(z)) = m-1 \\ h_1(z) - h_2(z) &= ((q_1(z) - q_2(z))a(z) + r_1(z) - r_2(z))b(z) \Rightarrow \\ h_1(z) - h_2(z) &= (q_1(z) - q_2(z))a(z)b(z) + (r_1(z) - r_2(z))b(z) \end{aligned}$$

$h_1(z)$  eta  $h_2(z)$  polinomioen arteko kenketa  $a(z)$  polinomioaz zatituz gero, emaitza hau lortuko dugu:

$$\begin{aligned} \frac{h_1(z) - h_2(z)}{a(z)} &= (d_1(z) - d_2(z)) + \frac{r_{h_1}(z) - r_{h_2}(z)}{a(z)} \Rightarrow \\ (h_1(z) - h_2(z)) \bmod(a(z)) &= r_{h_1}(z) - r_{h_2}(z) \Rightarrow \\ r_{h_1}(z) - r_{h_2}(z) &= ((q_1(z) - q_2(z))a(z)b(z) + (r_1(z) - r_2(z))b(z)) \bmod(a(z)) \Rightarrow \\ r_{h_1}(z) - r_{h_2}(z) &= ((r_1(z) - r_2(z))b(z)) \bmod(a(z)) \end{aligned}$$

Badakigu  $b(z)$  polinomioa ez dela  $a(z)$  polinomioaz zatigarria, faktore edo erro komunik ez dutelako. Gerta daiteke  $r_1(z) - r_2(z)$  polinomioak  $a(z)$  polinomioaren erroren bat izatea. Hala ere,  $r_1(z) - r_2(z)$  polinomioak ezin ditzake  $a(z)$  polinomioaren erro guztiak eduki,  $a(z)$  polinomioaren maila  $m$  delako eta  $r_1(z) - r_2(z)$  polinomioaren maila asko jota  $m-1$  delako. Frogapen hori egitean suposatu dugu  $b(z)$  eta  $a(z)$  polinomioek ez dutela inolako erro komunik. Bestalde, badakigu  $r_1(z) \neq r_2(z)$  ezberdintasuna betetzen dela,  $p_1(z)$  eta  $p_2(z)$  polinomioak inkongruenteak direlako. Horretaz gain,  $r_1(z)$  eta  $r_2(z)$  polinomioak ez dira  $a(z)$  polinomioaz zatigarriak,  $r_1(z)$  eta  $r_2(z)$  polinomioak eta  $p_1(z)$  eta  $p_2(z)$  polinomioak  $a(z)$  polinomioaz zatitzean lortzen ditugun hondarrak direlako, nahiz eta  $r_1(z) - r_2(z)$  polinomioak  $a(z)$  polinomioaren erroren bat izan dezakeen. Beraz,  $r_1(z) - r_2(z)$  polinomioa ez da  $a(z)$  polinomioaz zatigarria. Horrengatik guztiagatik,  $r_{h_1}(z) \neq r_{h_2}(z)$  ezberdintasuna betetzen da. Horrek esan nahi du  $H$  multzoko polinomio guztiak  $a(z)$  polinomioarekiko inkongruenteak

direla. Laburbilduz,  $M_{a(z)}$  multzoko polinomio bakoitzari  $H$  multzoko polinomio bakarra dagokionez eta  $H$  multzoko polinomio guztiak  $a(z)$  polinomioarekiko inkongruenteak direnez,  $H$  multzoa multzo inkongruente oso bat izango da.  $m - 1$  mailako (edo  $m - 1$  maila baino txikiagoko) edozein polinomio, azken batean,  $H$  multzoko polinomio bat  $a(z)$  polinomioaz zatitzean lortuko dugun hondarra izango da. Horrek esan nahi du  $H$  multzoko polinomio bat  $a(z)$  polinomioaz zatigarria izango dela. Beraz, badago kondizio hau betetzen duen  $H$  multzoko polinomio bat.

$$h(z) = p(z)b(z) + c(z)$$

$$(p(z)b(z) + c(z)) \bmod(a(z)) = r(z) = 0$$

Azken kondizio hori Diofantosen ekuazio baten eran idatz dezakegu.

$$p(z)b(z) + c(z) = a(z)q(z) \Rightarrow$$

$$a(z)q(z) + b(z)(-p(z)) = c(z) \Rightarrow$$

Azken ekuazio hori beste era honetara berridatz dezakegu.

$$\begin{cases} a(z)q(z) + b(z)(-p(z)) = c(z) \\ q(z) = R(z) \\ -p(z) = S(z) \end{cases} \Rightarrow a(z)R(z) + b(z)S(z) = c(z)$$

Azken batez,  $a(z)R(z) + b(z)S(z) = c(z)$  ekuazioa betetzen duten  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioak existitzeko, nahikoa da  $a(z)$  eta  $b(z)$  polinomioak elkarrekin zati daitezkeenak ez izatea. Hortaz, Diofantosen ekuazioa  $Q(z)$  polinomioaz biderkatuz gero, honela geratuko da.

$$Q(z)a(z)R(z) + Q(z)b(z)S(z) = Q(z)c(z) \Rightarrow$$

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = C(z)$$

Beraz,  $A(z)R(z) + B(z)S(z) = C(z)$  Diofantosen ekuazioa betetzen duten  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioak egon daitezen, nahikoa da  $A(z)$  eta  $B(z)$  polinomioen zatitzaile komunetako handiena  $C(z)$  polinomioaren faktore bat izatea. Horrek esan nahi du  $A(z)R(z) + B(z)S(z) = C(z)$  itxurako Diofantosen ekuazioa betetzen duten  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioak existi daitezen beharrezkoa eta nahikoa dela 10.1 teorema finkatzen duen kondizioa. Nabarmendu behar dugu  $a(z)$  eta  $b(z)$  polinomioak ezin direla elkarrekin zatitu, hots,  $a(z)$  eta  $b(z)$  polinomioek ez dutela erro komunik. Bestalde, 10.1 teorema finkatzen duen kondizioa nahikoa dela guztiz frogatzeko,

$h(z)$  polinomioak  $a(z)$  polinomioarekiko kalkulatu beharrean  $b(z)$  polinomioarekiko kalkulatu beharko ditugu. aurreko urrats berak eginez.

Bestalde, ondoren ikusiko dugunez, aurreko teorema betetzen bada, soluzio ugari egongo dira.

Demagun  $S_0$  eta  $R_0$  Diofantosen ekuazioaren soluzioak direla:

$$A(z)R_0(z) + B(z)S_0(z) = C(z)$$

$R_0(z)$  eta  $S_0(z)$  existitzen badira, horrek esan nahi du  $A(z)$  eta  $B(z)$  polinomioek komunean duten zatitzaile handiena  $C(z)$  polinomioaren faktorea dela.

$R = R_0 + QB$  jartzen badugu  $-Q$  edozein polinomio da– eta  $S = S_0 - QA$  bada, emaitza hau izango dugu:

$$\begin{aligned} A(z)[R_0(z) - Q(z)B(z)] + B(z)[S_0(z) + A(z)Q(z)] &= \\ &= A(z)R_0(z) + B(z)S_0(z) = C(z) \end{aligned}$$

Beraz,  $R(z)$  eta  $S(z)$  ere soluzioak dira. Beste era batera esanda,  $R_0(z)$  eta  $S_0(z)$  soluzioak dira existitzen badira,  $B(z)$ -ren eta  $A(z)$ -ren multiploak gehituz edo kenduz lor daitezkeen soluzioak infinituak dira. Soluzio horien guztien artean, beti aurki daiteke ( $S(z)$ ) maila ( $A(z)$ ) maila baino txikiagoa duen soluzio bat.

$$maila(S(z)) < maila(A(z)) \quad (10.17)$$

Izan ere,  $maila(S_0(z)) \geq maila(A(z))$  bada, eta  $S_0(z)$  polinomioa  $A(z)$  polinomioaz zatitzen badugu, honako hau lortuko dugu:

$$S_0(z) = S(z) + Q_0(z)A(z) \quad (10.18)$$

Non  $Q_0$  baita zatiketa horren zatidura eta  $S(z)$  hondarra. Beraz,  $maila(S(z)) < maila(A(z))$  betetzen da. (10.18) berdintzatik hau ateratzen da:

$$S(z) = S_0(z) - Q_0(z)A(z)$$

Honako hau zehazten badugu:

$$R(z) = R_0(z) + Q(z)B(z)$$

$R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioek  $maila(S(z)) < maila(A(z))$  egiaztatzen duen Diofantosen ekuazioaren soluzio bat eratzen dute. Ondoren ikusiko dugunez,

$\text{maila}(S(z)) < \text{maila}(A(z))$  betetzen duen soluzioa bakarra da. Hori hobeto ulertzeko, Diofantosen ekuazioa ebazteko era aztertuko dugu. Ia beti, Diofantosen ekuazioa ebazteko erarik arruntena da  $A(z)R(z) + B(z)S(z)$  eta  $C(z)$  polinomioen maila bereko gaien koefizienteak berdintzea. Horren ondorioz, ekuazio aljebraiko linealen sistema lortzen da, eta hortik ateratzen dira  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioen koefiziente ezezagunak. Ekuazio linealez osatutako sistema hori ebaztean konturatuko gara,  $S(z)$  polinomioaren maila  $A(z)$  polinomioarena baino txikiagoa bada, Diofantosen ekuaziotik eratortzen den ekuazio linealez osatutako sistema bateragarria eta determinatua izango dela. Horrenbestez, Diofantosen ekuazioak soluzio bakarra izango du.

#### 10.4 adibidea

Demagun polinomio hauek ditugula:

$$A(z) = z(z+1)(z+2) = z^3 + 3z^2 + 2z$$

$$B(z) = (z+3)$$

$$C(z) = (z-1)$$

Ebatzi nahi dugun Diofantosen ekuazioa honela idatz daiteke.

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = C(z)$$

$A(z)$ ,  $B(z)$  eta  $C(z)$  ezagunak dira, eta  $R(z)$  eta  $S(z)$  Diofantosen ekuazioa ebartziz kalkulatu behar dira. Ikusten dugunez,  $A(z)$  eta  $B(z)$  polinomioek ez dute erro komunik, eta ekuazioak soluzio asko ditu. Beraz, ekuazioak dituen emaitzak lortzeko, lehenik emaitza bat lortu behar dugu. Horretarako, maila bereko gaiak berdindu behar ditugu. Bestalde,  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioen maila finkatu behar dugu, lortuko ditugun ekuazio linealez osatutako sistema bateragarria eta determinatua izan dadin.

$$R(z) = \sum_{j=0}^{j=\text{maila}(R)} r_j z^j$$

$$S(z) = \sum_{k=0}^{k=\text{maila}(S)} s_k z^k$$

$R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioak Diofantosen ekuazioan ordezkatzeko ditugu.

$$\sum_{j=0}^{j=\text{maila}(R)} r_j z^{j+3} + \sum_{j=0}^{j=\text{maila}(R)} 3r_j z^{j+2} + \sum_{j=0}^{j=\text{maila}(R)} 2r_j z^{j+1} + \sum_{k=0}^{k=\text{maila}(S)} s_k z^{k+1} + \sum_{k=0}^{k=\text{maila}(S)} 3s_k z^k = z - 1$$

Batukari errepikatuak kenduz, Diofantosen ekuazioa honela idatz daiteke.

$$\sum_{j=0}^{l_1} [r_j z^{j+3} + 3r_j z^{j+2} 2r_j z^{j+1}] + \sum_{k=0}^{l_2} [s_k z^{k+1} + 3s_k z^k] = z - 1$$

$$maila(R) = l_1$$

$$maila(S) = l_2$$

Ikus daitekeenez,  $R(z)$  polinomioak  $l_1 + 1$  ezezagun sortzen ditu;  $S(z)$  polinomioak, berriz,  $l_2 + 1$  ezezagun. Guztira  $l_1 + l_2 + 2$  ezezagun dira. Beraz, maila bereko gaiak taldekatzen baditugu,  $l_1 + l_2 + 2$  ekuazio lortu behar ditugu ekuazio linealak sortzeko, sistema bateragarria eta determinatua izan dadin. Eskuarki,  $A(z)$  polinomioa denez kontrolatu nahi dugun sistemaren izendatzailea eta  $R(z)$  denez RST kontroladorearen izendatzailearen izendatzailea (kausalitate-arrazoiak direla eta,  $maila(R(z)) > maila(S(z))$  eta  $maila(A(z)) > maila(B(z))$  inekuazioak betetzen dira), AR polinomioaren maila BS polinomioaren maila baino handiagoa da. Horrenbestez, lortuko dugun  $K$  aldagaiaren berretzailerik handiena  $l_1 + 3$  izango da. Beraz, lortuko dugun ekuazioa kopurua  $l_1 + 4$  izango da. 10.1 teorema betetzen duen sistemak gutxienez emaitza bat izango du; beraz, sistema bateragarria izango da beti. Hala ere, ekuazio-sistema determinatua izan dadin ditugun ekuazio eta ezezagun kopuruek berdinak izan behar dute. Dugun ezezagun kopurua  $l_1 + l_2 + 2$  denez, urrats hauei jarraituko diegu  $l_2$  kalkulatzeko, hots,  $S(z)$  polinomioaren itxura zehaztu ahal izateko.

$$l_1 + l_2 + 2 = l_1 + 4 \Rightarrow l_2 = 2 \Rightarrow S(z) = s_0 + s_1 z + s_2 z^2$$

Bestalde, kasu honetan,  $R(z)$  polinomioaren maila guk aukeratu dezakegu, aurreko ekuazioan desagertu egiten delako. Hala ere, gogoan izan behar dugu  $R(z)$  polinomioaren mailak  $S(z)$  polinomioarena baino handiagoa edo berdina izan behar duela. Ariketa erraztearren, joko dugu  $R(z)$  polinomioa bigarren mailakoa dela. Horrenbestez,  $R(z)$  honela idatz daiteke.

$$R(z) = r_0 + r_1 z + r_2 z^2$$

Diofantosen ekuaziotik, ekuazio aljebraikoz osatutako ekuazio-sistema lortuko dugu maila bereko gaien koefizienteak berdinuz.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} z^5 \\ z^4 \\ z^3 \\ z^2 \\ z \\ z^0 \end{matrix}$$

Ekuazio-sistema hori ebatziz gero, emaitza hauek lortuko ditugu.

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 0 \\ -0,3 \\ 0 \\ -0,6 \end{bmatrix}$$

Beraz, nahiko erraza da Diofantosen ekuazio baten emaitza bat lortzea.

### 10.5 adibidea

Aurreko adibidean, Diofantosen ekuazioa ebaztean, emaitza bakarra lortu dugu. Hala ere, horrelako ekuazio batek emaitza bat izanez gero, emaitza gehiago ere izango ditu. Beraz, emaitza bat duen Diofantosen ekuazio batek emaitza ugari baldin baditu, emaitza horiek era orokor batean adieraz daitezke. Hona hemen era orokor horren egiaztapena.

Suposa dezagun  $R_0(z)$  eta  $S_0(z)$  Diofantosen ekuazioaren emaitza bat osatzen dutela.

$$A(z)R_0(z) + B(z)S_0(z) = C(z)$$

Bestalde, jo dezagun  $R_1(z)$  eta  $S_1(z)$  polinomioek Diofantosen ekuazioaren beste emaitza bat osatzen dutela.

$$A(z)R_1(z) + B(z)S_1(z) = C(z)$$

Azkeneko bi ekuazioen kenketa eginez gero, berdintza hau lortuko dugu.

$$\begin{aligned} A(z)[R_0(z) - R_1(z)] + B(z)[S_0(z) - S_1(z)] &= 0 \\ A(z)[R_0(z) - R_1(z)] &= B(z)[S_1(z) - S_0(z)] \end{aligned}$$

$A(z)$  eta  $B(z)$  polinomioek gai komunik ez dutenez,  $S_1(z) - S_0(z)$  polinomioa  $A(z)$  polinomioarekiko proportzionala da. Beraz, honela idatz daiteke  $S_1(z) - S_0(z)$  polinomioa.

$$S_1(z) - S_0(z) = Q_1(z)A(z)$$

Gauza bera esan dezakegu  $R_0(z) - R_1(z)$  polinomioaz.  $R_0(z) - R_1(z)$  polinomioa  $B(z)$  polinomioarekiko proportzionala da. Beraz,  $R_0(z) - R_1(z)$  polinomioa honela idatz daiteke.

$$R_0(z) - R_1(z) = Q_2(z)B(z)$$

$R_0(z) - R_1(z)$  eta  $S_1(z) - S_0(z)$  polinomioak erlazionatzen dituen ekuazioan azken bi berdintzak ordezkatzuz gero, ekuazio hau lortuko dugu. Beraz,  $Q_1(z)$  eta  $Q_2(z)$  polinomioak berdinak dira.

$$A(z)Q_2(z)B(z) = B(z)A(z)Q_1(z)$$

$$Q_2(z) = Q_1(z)$$

Beraz, honela idatz dezakegu Diofantosen ekuazioaren emaitza orokorra.

$$Q(z) = Q_1(z) = Q_2(z)$$

$$S_0(z) = S_1(z) - Q(z)A(z)$$

$$R_0(z) = R_1(z) + Q(z)B(z)$$

Gogoan izan behar dugu  $Q(z)$  polinomioa edozein mailatako polinomio bat dela. Bestalde, Diofantosen ekuazioak emaitzaren bat izanez gero, emaitza ugari izango dituela azaldu dugu. Hala ere, bada emaitza bat zeinetan  $S_0(z)$  polinomioaren maila  $A(z)$  polinomioaren maila baino txikiagoa baita. Izan ere,  $S_0(z)$  polinomioa kalkulatzeko,  $S_1(z)$  polinomioa  $A(z)$  polinomioaz zatitu behar dugu. Zatiketan lortzen dugun hondarra  $S_0(z)$  polinomioa izango da. Gogoan izan behar dugu ezen,  $S_1(z)$  polinomioa edozein mailatakoa izanik ere,  $S_0(z)$  polinomioaren mailak  $A(z)$  polinomioaren maila baino txikiagoa izan behar duela.

$$S_1(z) = S_0(z) + Q(z)A(z) \Rightarrow \frac{S_1(z)}{S_0(z)} = \frac{A(z)}{Q(z)} \Rightarrow$$

$$maila(S_1(z)) < maila(A(z))$$

Izan ere,  $S_0(z)$  polinomioaren maila  $A(z)$  polinomioaren maila baino txikiagoa da, eta zatiketa baten hondarra denez, hondarra bakarra da. Aurreko adibideko Diofantosen ekuazioaren emaitza orokorra proposatuko dugu.

$$(z^3 + 3z^2 + 2z)(r_0 + r_1z + r_2z^2) + (z + 3)(s_0 + s_1z + s_2z^2) = z - 1$$

$$S_0(z) = S_1(z) - Q(z)A(z) = (-0, \hat{3} + 0, \hat{6}z^2) - (z^3 + 3z^2 + 2z)Q(z)$$

$$R_0(z) = R_1(z) + Q(z)B(z) = 0, \hat{6} + (z + 3)Q(z)$$

$S_0(z)$  polinomioa lortzeko,  $S_1(z)$  polinomioa  $A(z)$  polinomioaz zatitu besterik ez dugu egin behar.

$$\begin{array}{r} 0, \hat{3} [2z^2 - 1] \quad | \quad z^3 + 3z^2 + 2z \\ \hline 0, \hat{3} [2z^2 - 1] \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Beraz, aurreko adibidean lortu dugun emaitza da, hain zuzen ere, Diofantosen ekuazioaren emaitza bakarra, zeinetan  $S(z)$  polinomioaren maila  $A(z)$  polinomioaren maila baino txikiagoa baita.

#### 10.3.4 Kausala den RST kontroladore bakarra dagoen egiaztapena

RST erreguladorearen  $T(z)$  polinomioa (10.13)tik dator:

$$T(z) = A_0(z)B_e^+(z)$$

(10.14) ekuazioak  $R'(z)$  eta  $S(z)$  polinomioak finkatzen ditu.

$$A(z)R'(z) + B^-(z)S(z) = A_e(z)A_0(z)$$

Perturbazio-konpentsatzailea sartuz gero, (10.15) Diofantosen ekuazioak finkatuko ditu  $R'(z)$  eta  $S(z)$ .

$$A(z)(z-1)^q R'(z) + B^-(z)S(z) = A_e(z)A_0(z)$$

$R(z)$  polinomioa, berriz, (10.12) berdintzaren bitartez kalkulatu dugu.

$$R(z) = B^+(z)R'(z)$$

Badakigu  $A(z)$  eta  $B(z)$  polinomioek ez dutela faktore komunik, faktore komunak izanez gero elkarrekin sinplifikatuko liratekeelako. Beraz,  $A(z)$  polinomioak eta  $B^-(z)$  polinomioak duten faktore komun handienak maila nulua du. Horrenbestez, 10.1 teorema abiapuntutzat hartuta, ondoriozta dezakegu (10.14) Diofantosen ekuazioak  $R'(z)$  eta  $S(z)$  polinomioentzat emaitza ugari dituela. Perturbazio-konpentsatzailea sartuz gero, (10.15) ekuazioak emango dizkigu  $R'(z)$  eta  $S(z)$  polinomioei dagozkien emaitza posible guztiak. Gogoan izan behar dugu perturbazio-konpentsatzaile bat egonez gero  $B^-(z)$  polinomioak ez duela  $z = 1$  zerorik,  $A(z)$   $(z - 1)^q$  polinomioak eta  $B^-(z)$  polinomioak faktore komunik izan ez dezaten. Hala ere, ia beti betetzen da hipotesi hori; izan ere,  $B^-(z)$  polinomioak  $(z - 1)$  erroa izanez gero, kontrolatu beharreko sistemaren bulkada-erantzunak zerorantz jotzen du denborak infiniturantz jotzen duenean. Hori egiaztatzeko, bukaerako balioaren teorema erabiliko dugu.

$$Z\{\Delta(kh)\} \Rightarrow U(z) = 1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(kh) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z-1) \frac{B(z)}{A(z)} U(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{B(z)}{A(z)} = 0$$

Bestalde, kontrolatu beharreko prozesuaren maila edo jauzi-itxurako sarrera baten aurrean duen erantzuna nulua da erregimen iragankorrean. Azken hori ere bukaerako balioaren teoremaren bidez egiaztatuko dugu.

$$Z\{1\} \Rightarrow U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(kh) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z-1) \frac{B(z)}{A(z)} U(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{B(z)}{A(z)} \frac{z}{z-1} (z-1) = 0$$

Argitu beharra dago  $(z - 1)$  zeroa duen sistema batek jokabide deribatzailea duela, eta hori gutxitan aurkitzen dela sistema fisiko batean. Beraz, perturbazio-konpentsatzailea izanez gero, RST kontroladorean,  $B(z)$  polinomioan ez dugu  $(z - 1)$  faktorea izan behar; hala balitz, Diofantosen ekuazioak ezingo zuelako emaitzarik izan.

Aurreko adibidean azaldu dugunez, Diofantosen ekuazio batek soluzio ugari ditu baldin eta 10.1 teorema betetzen bada, soluzio horien guztien artean bada  $maila(S(z)) < maila(A(z))$  betetzen duen soluzio bat. Gogoan izan behar dugu perturbazio-konpentsatzailearik ez duen RST kontroladore bat kalkulatzeko ebatzi beharreko Diofantosen berdintzak itxura hau duela.

$$A(z)R'(z) + B^-(z)S(z) = A_e(z)A_0(z)$$

Beraz, aurreko adibidean ikusi dugunez,  $A(z)$  polinomioak eta  $B(z)$  polinomioak komunean duten faktorea  $A_e(z)A_0(z)$  polinomioaren faktorea bada, soluzio asko izango ditugu  $R'(z)$  eta  $S(z)$  polinomioentzat. Hori gertatzen da  $A(z)$  eta  $B(z)$  polinomioek ez dutelako, oro har, gai komunik, eta, ondorioz Diofantosen ekuazio horrek beti emaitza ugari izango ditu. Eta aurreko adibidearekin jarraituz, beti izango dugu  $maila(S(z)) < maila(A(z))$  betetzen duen emaitza bat. Horrez gain, aurreko adibidean ikusi dugunez, kondizio hori betetzen duen emaitza bakarra da. Perturbazio-konpentsatzailea badago, izango da  $maila(S(z)) < maila(A(z)) + q$ , betetzen duen emaitza bat. Azken batean,  $R'(z)$  polinomioak  $(z-1)^q$  gaia sartuz gero, azken gai hori  $A(z)$  polinomioaren maila  $q$  mailatan igotzen da. Beraz, 10.5 adibidearekin jarraituz, beti izango dugu  $A(z)(z-1)^q R'(z) + B^-(z)S(z) = A_e(z)A_0(z)$  ekuazioaren soluzio bat, zeinetan  $maila(S(z)) < maila(A(z)) + q$  kondizioa betetzen baita, baldin eta  $A(z)(z-1)^q$  eta  $B^-(z)$  polinomioen artean faktore komunik ez badugu (Ikusi 10.1 teorema).

## 10.2 teorema

Badago  $maila(R(z)) \geq maila(S(z))$  eta  $maila(R(z)) \geq maila(T(z))$  betetzen dituen RST erreguladore bat, inekuazio hauek errespetatzen badira:

$$maila(A_e(z)) - maila(B_e(z)) \geq maila(A(z)) - maila(B(z)) \quad (10.20)$$

$$maila(A_0(z)) \geq 2maila(A(z)) - maila(A_e(z)) - maila(B^+(z)) - 1 \quad (10.21)$$

Perturbazio-konpentsatzailea sartzen denean, azken inekuazioa honela idatziko dugu:

Badago  $maila(R(z)) + q \geq maila(S(z))$  eta  $maila(R(z)) + q \geq maila(T(z))$  betetzen dituen RST erreguladore bat, inekuazio hauek errespetatzen badira:

$$maila(A_e(z)) - maila(B_e(z)) \geq maila(A(z)) - maila(B(z))$$

$$maila(A_0(z)) \geq 2maila(A(z)) - maila(A_e(z)) - maila(B^+(z)) - 1 + q \quad (10.22)$$

non perturbazio-konpentsatzaileak  $q$  integratzaile baititu. Gogoan izan behar dugu RST kontroladore batek bere izendatzailean sartzen duela perturbazio-konpentsatzailea, hots,  $R(z)$  polinomioarekin batera sartzen direla  $q$  integratzaileak. Beraz, kontroladorearen eredua hau izango da, baldin eta  $q$  integratzaileko perturbazio-konpentsatzaile bat sartzen bada.

$$U(z) = \frac{T(z)}{(z-1)^q R(z)} Y_c(z) - \frac{S(z)}{(z-1)^q R(z)} Y(z)$$

Ondorioz,  $q$  integratzaile dituen RST kontroladore batek bi kondizioak hauek bete behar ditu kausala izateko.

$$\text{maila}(R(z)) + q \geq \text{maila}(S(z)) \text{ eta } \text{maila}(R(z)) + q \geq \text{maila}(T(z))$$

*Egiaztapena:*

Har dezagun (10.14) ekuazioa eta biderka dezagun  $B^+(z)$  polinomioaz, bai ezkerreko gaia bai eskuineko gaia. Gogoan izan behar dugu sinplifikatu nahi ditugun sistemaren zeroak  $B^+(z)$  polinomioaren erroak direla.

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_0(z)A_e(z)B^+(z)$$

$A(z)$  polinomioaren maila  $B(z)$  polinomioaren maila baino handiagoa denez eta RST kontroladorea kausala izan dadin  $R(z)$  polinomioaren mailak  $S(z)$  polinomioaren maila baino handiagoa izan behar duenez (edo maila berekoak),  $A(z)$  eta  $R(z)$  polinomioen mailen batuketa da aurreko ekuazioaren ezkerreko gaiaren maila.

$$\text{maila}(A(z)R(z) + B(z)S(z)) = \text{maila}(A_0(z)A_e(z)B^+(z))$$

$$\text{maila}(A(z)) + \text{maila}(R(z)) = \text{maila}(A_0(z)) + \text{maila}(A_e(z)) + \text{maila}(B^+(z))$$

Horrenbestez,  $R(z)$  polinomioaren maila honela kalkula daiteke.

$$\text{maila}(R(z)) = \text{maila}(A_0(z)) + \text{maila}(A_e(z)) + \text{maila}(B^+(z)) - \text{maila}(A(z)) \quad (10.23)$$

$T(z)$  polinomioak ondorengo berdintza betetzen duela jakinda,  $T(z)$  polinomioaren maila honela idatz daiteke.

$$T(z) = A_0(z)B_e^*(z)$$

$$\text{maila}(T(z)) = \text{maila}(A_0(z)) + \text{maila}(B_e^*(z))$$

RST kontroladoreak kausala izateko bete behar dituen kondizioetako bat inekuazio hau da:

$$\text{maila}(R(z)) \geq \text{maila}(T(z))$$

Inekuazio horretan,  $R(z)$  eta  $T(z)$  polinomioen mailen balioen bidez, adierazpen matematiko hau lortuko dugu:

$$\begin{aligned} \text{maila}(A_0(z)) + \text{maila}(A_e(z)) + \text{maila}(B^+(z)) - \text{maila}(A(z)) &\geq \\ &\geq \text{maila}(A_0(z)) + \text{maila}(B'_e(z)) \end{aligned}$$

Azken inekuazio hori apur atonduz, inekuazio hau lortuko dugu:

$$\text{maila}(A_e(z)) + \text{maila}(B^+(z)) - \text{maila}(A(z)) \geq \text{maila}(B'_e(z)) \quad (10.24)$$

$B_e(z) = B^-(z)B'_e(z)$  dela jakinda, jarraitu nahi dugun edo begizta itxian lortu nahi dugun transferentzia-funtzioaren zenbakitzailearen maila honela idatz daiteke:

$$\text{maila}(B_e(z)) = \text{maila}(B^-(z)) + \text{maila}(B'_e(z))$$

(10.24) inekuazioan ordezkatzuz, adierazpen matematiko hau ateratzen da:

$$\begin{aligned} \text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B^-(z)) - \text{maila}(B'_e(z)) &\geq \\ &\geq \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B^+(z)) - \text{maila}(B^-(z)) \end{aligned}$$

Beraz, laburbilduz, inekuazio hau lortuko dugu:

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) \geq \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B(z)) \quad (10.25)$$

Ikus daitekeenez, (10.25) inekuazioa eta (10.20) inekuazioa berdinak dira. Ondorioz, teoremaren lehen inekuazioa egiaztatu dugu. Inekuazio hori, beraz, lagungarria izango zaigu RST kontroladore bat definitzean –zein izan behar duen jarraitu nahi dugun ereduaren maila–. Dena dela, geroago aztertuko dugu begizta itxian lortu nahi dugun transferentzia-funtzioa, hots, jarraitu nahi dugun eredu. Bestalde,  $R(z)$  polinomioak perturbazio-kontentsatzaile bat izanez gero, (10.25) inekuazioa ez da aldatzen, ondoren ikus daitekeenez.

$$\text{maila}(R(z)) + q \geq \text{maila}(T(z))$$

$$\text{maila}(A_0(z)) + \text{maila}(A_e(z)) + \text{maila}(B^+(z)) - \text{maila}(A(z)) \geq \text{maila}(T(z))$$

$$\text{maila}(A_0(z)) + \text{maila}(A_e(z)) + \text{maila}(B^+(z)) - \text{maila}(A(z)) \geq \text{maila}(A_0(z)) + \text{maila}(B'_e(z))$$

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) \geq \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B(z))$$

RST kontroladorea kausala izan dadin, beste kondizio bat bete behar dugu:  $R(z)$  polinomioaren mailak  $S(z)$  polinomioarena baino handiagoa izan behar du.

$$maila(R(z)) \geq maila(S(z))$$

Aurreko inekuazioan  $R(z)$  polinomioaren maila ordezkatzuz gero, inekuazio hau lortuko dugu.

$$maila(A_0(z)) + maila(A_e(z)) + maila(B^+(z)) - maila(A(z)) \geq maila(S(z)) \quad (10.26)$$

Lortutako inekuaziotik,  $A_0(z)$  polinomioaren maila bakartu dezakegu.

$$maila(A_0(z)) \geq maila(S(z)) + maila(A(z)) - maila(A_e(z)) - maila(B^+(z)) \quad (10.27)$$

$R(z)$  polinomioak perturbazio-konpentsatzaile bat izanez gero (10.27) inekuazioa aldatu beharko genuke,  $R(z)$  polinomioaren maila hau delako.

$$maila(R(z)) = maila(A_0(z)) + maila(A_e(z)) + maila(B^+(z)) - maila(A(z)) - q$$

Gogoan izan behar dugu perturbazio-konpentsatzaile batek  $q$  integratzaile dituela. Beraz, (10.27) inekuazioa honela idatziko dugu.

$$maila(R(z)) + q \geq maila(S(z))$$

$$maila(A_0(z)) + maila(A_e(z)) + maila(B^+(z)) - maila(A(z)) \geq maila(S(z))$$

$$maila(A_0(z)) \geq maila(S(z)) + maila(A(z)) - maila(A_e(z)) - maila(B^+(z)) \quad (10.28)$$

RST kontroladoreak kausala izan dadin bete behar dituen kondizioak landu ditugu. Hala ere, RST kontroladoreak egon egin behar du, eta, horrez gain, RST kontroladorea kalkulatzeko, bakarra izan behar du. Jakin badakigu ondorengo ekuazioek soluzioa badutela, hots, ekuazio horiek betetzen dituzten  $R(z)$ ,  $T(z)$ , eta  $S(z)$  polinomio ugari daudela. Soluzio horietako batzuk RST kontroladore kausalak dira. Izan ere,  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomio askok (10.25) eta (10.27) inekuazioak betetzen dituzte (perturbazio-konpentsatzailea izanez gero, (10.27) inekuazioa bete beharrean (10.28) inekuazioa bete beharko dugu).

$$A(z)(z-1)^q R'(z) + B^-(z)S(z) = A_e(z)A_0(z) \quad (10.29)$$

$$T(z) = A_0(z)B_e'(z)$$

Hala ere, kausala den RST kontroladore bat besterik ez dugu nahi guk. Beraz, RST kontroladore kausal guztietatik,  $S(z)$  polinomioaren maila txikiena duen soluzioa hartuko dugu, RST kontroladorearen polinomioek ahalik eta maila txikiena izan dezaten. Izan ere, 10.5 adibidean ikusi dugunez, (10.29) bezalako Diofantosen ekuazio batek 10.1 teorema betetzen badu, soluzio edo emaitza ugari izango ditu. Baina ekuazio horrek dituen emaitza guztietatik soluzio batek baino ez du  $S(z)$  polinomioaren maila  $A(z)$  polinomioaren maila baino txikiagoa.

$$\text{maila}(S(z)) \leq \text{maila}(A(z)) + q$$

Kondizio hori betetzen duen soluzioa bakarra denez, suposa dezakegu  $S(z)$  polinomioaren maila  $A(z)$  polinomioaren maila ken bat dela. Izan ere,  $S(z)$  polinomioaren maila  $A(z)$  polinomioaren maila ken bat baino txikiagoa bada, ez da ezer gertatzen,  $S(z)$  polinomioaren maila  $A(z)$ -ren maila ken bat mailako polinomio baten bidez adieraz dezakegulako.

$$\left. \begin{array}{l} \text{maila}(S(z)) \leq \text{maila}(A(z)) + q \\ \text{non } S(z) \text{ bakarra da} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{maila}(S(z)) = \text{maila}(A(z)) + q - 1$$

Beraz, (10.28) inekuazioan ordezkatzuz gero, honako hau lortuko dugu. Ondorioz, (10.22) inekuazioa egiaztaturik geratuko litzateke.

$$\text{maila}(A_0(z)) \geq 2\text{maila}(A(z)) - \text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B^+(z)) + q - 1$$

Perturbazio-konpentsatzailerik ez badugu,  $q = 0$  eginez, ondorengo inekuazioa lortuko dugu. Beraz, egiaztatu dugu (10.21) inekuazioa.

$$\text{maila}(A_0(z)) \geq 2\text{maila}(A(z)) - \text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B^+(z)) - 1$$

Laburbilduz,  $q$  integratzaile dituen perturbazio-konpentsatzaile bat duen RST kontroladore kausala eta bakarra existituko da, baldin eta kondizio hauek betetzen baditugu.

$$\text{maila}(A_0(z)) \geq 2\text{maila}(A(z)) - \text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B^+(z)) + q - 1$$

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) \geq \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B(z))$$

non

$$\text{maila}(S(z)) = \text{maila}(A(z)) + q - 1$$

$$maila(R(z)) = maila(A_0(z)) + maila(A_e(z)) + maila(B^+(z)) - maila(A(z)) - q$$

$$T(z) = A_0(z)B_e^*(z)$$

$$maila(T(z)) = maila(A_0(z)) + maila(B_e^*(z))$$

$$A(z)(z-1)^q R'(z) + B^-(z)S(z) = A_e(z)A_0(z)$$

$$T(z) = A_0(z)B_e^*(z)$$

$$R(z) = R'(z)B^+(z)$$

$$B_e(z) = B^-(z)B_e^*(z)$$

Gogoan izan behar dugu perturbazio-konpentsatzaile bat erabiliz gero kontrolatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzioaren zenbakitzaileak ezin duela  $z-1$  moduko faktorerik izan (10.29) Diofantosen ekuazioak emaitzaren bat izan dezan.

Perturbazio-konpentsatzailerik izango ez bagenu, kausala den RST kontroladore bakarra egongo da, baldin eta kondizio hauek betetzen baditugu.

$$maila(A_0(z)) \geq 2maila(A(z)) - maila(A_e(z)) - maila(B^+(z)) - 1$$

$$maila(A_e(z)) - maila(B_e(z)) \geq maila(A(z)) - maila(B(z))$$

non

$$maila(S(z)) = maila(A(z)) - 1$$

$$maila(R(z)) = maila(A_0(z)) + maila(A_e(z)) + maila(B^+(z)) - maila(A(z))$$

$$T(z) = A_0(z)B_e^*(z)$$

$$maila(T(z)) = maila(A_0(z)) + maila(B_e^*(z))$$

$$A(z)R'(z) + B^-(z)S(z) = A_e(z)A_0(z)$$

$$T(z) = A_0(z)B_e^*(z)$$

$$R(z) = R'(z)B^+(z)$$

$$B_e(z) = B^-(z)B_e^+(z)$$

10.2.1. atalean ikusi dugunez, bi teknika nagusi daude RST erreguladorea egiteko. Lehengoa aukeratuko dugu gure mikroprozesadoreak RST kontroladorearen algoritmoa exekutatzeko behar duen denbora, laginketa-denbora eta D/A bihurtzeko egiteko denbora-tarteak mikroprozesadorearen laginketa-periodoarekiko txikiak badira. Bigarren aukera hartuko dugu baldin eta RST kontroladorearen algoritmoa exekutatzeko behar dugun denboraren, laginketa-denboraren eta D/A bihurtzeko egiteko denbora-tartearen arteko batuketa baztergarria ez bada laginketa-periodoarekiko.

**1.- Laginketa-periodoarekin alderatuta, kalkulatzeko denbora eta bihurtzeko denbora baztertu ahal bada**

10.2.1 atalean ikusi dugunez, horrelako kasu batean RST kontroladore baten polinomioen mailak guztiz finkaturik egongo dira.

$$maila(R(z)) = maila(A(z)) - 1$$

$$maila(S(z)) = maila(T(z)) = \begin{cases} maila(A(z)) - 1: \text{Perturbazio-kompentsatzailerik gabe} \\ maila(A(z)) + q - 1: \text{Perturbazio-kompentsatzailearekin} \end{cases}$$

Horrenbestez, 10.2. teoremako (10.21) eta (10.22) inekuazioak ekuazio bilakatzen dira  $R(z)$ ,  $T(z)$  eta  $S(z)$  polinomioen mailak berdinak badira.

$$maila(A_0(z)) = \begin{cases} 2maila(A(z)) - maila(A_e(z)) - maila(B^+(z)) - 1: q = 0 \\ 2maila(A(z)) - maila(A_e(z)) - maila(B^+(z)) + q - 1: q > 0 \end{cases}$$

(10.20) inekuazioa, berriz, honelako ekuazio bilakatzen da.

$$maila(A_e(z)) - maila(B_e(z)) = maila(A(z)) - maila(B(z))$$

**2.- Laginketa-periodoarekin alderatuta, kalkulatzeko denbora eta bihurtzeko denbora baztertu ezin bada**

Kalkulatzeko eta bihurtzeko denbora-tarteen batuketa eta laginketa-periodoa berdinak badira, ezin ditugu  $R(z)$  polinomioaren maila eta  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioak berdindu. Egoera horretan, 10.2 teoremako inekuazioak ekuazio bilakatzean berdintza hauek lortuko ditugu.

$$maila(R(z)) = maila(A(z))$$

$$maila(S(z)) = maila(T(z)) = \begin{cases} maila(A(z)) - 1: \text{Perturbazio-konpentsatzaile gabe} \\ maila(A(z)) + q - 1: \text{Perturbazio-konpentsatzailearekin} \end{cases}$$

$$maila(A_e(z)) - maila(B_e(z)) = maila(A(z)) - maila(B(z)) + 1$$

$$maila(A_0(z)) = \begin{cases} 2maila(A(z)) - maila(A_e(z)) - maila(B^+(z)): q = 0 \\ 2maila(A(z)) - maila(A_e(z)) - maila(B^+(z)) + q: q > 0 \end{cases}$$

Oharra: Kalkulatzeko eta bihurtzeko denbora-tarteen batuketa laginketa-periodoa baino  $n$  aldiz handiagoa bada, laginketa-periodoa handitu behar dugu edo mikroprozesadore azkarrago bat erabili behar dugu; izan ere, laginketa-periodo bakoitzeko lagin bat izan behar dugu, eta kalkulatzeko eta bihurtzeko denbora-tarteen batuketa laginketa-periodoa baino handiagoa bada, ezingo dugu laginketa-periodo bakoitzari dagokion lagina lortu eta dagokion  $u(kh)$  kontrol-aldagaiaren balioa eman kontrolatu beharreko sistemari.

### 10.3.5 Jarraitu beharreko eredua hautatzea

Eskuarki, jarraitu beharreko eredua oso sinplea izaten da, eta ez da oso maila handiko transferentzia-funtzio bat izaten. Jarraitu edo lortu nahi den ereduak, oro har, begizta itxirako nahi diren ezaugarriak bermatzen ditu. Eredua zehatz-mehatz hautatzeko, aplikazioa izan behar dugu kontuan. Hori dela eta, besteak beste, adibide bat ikusiko dugu. Jarraitu beharreko ereduaren  $B_e(z)$  zenbakitzaileak honako hau betetzen du:

$$B_e(z) = B^-(z)B_e^+(z)$$

Gogoan izan behar dugu  $B^-(z)$  polinomioa dela kontrolatu beharreko sisteman sinplifika ezin daitezkeen zeroek osatzen duten polinomioa. Polinomio hori ez da monikoa. Bestetik, jarraitu beharreko ereduak dituen eta kontrolatu beharreko sistemak ez dituen zeroez osatutako polinomioa da  $B_e^+(z)$  polinomioa. Polinomio horrek ez du zertan monikoa izan, jarraitu beharreko ereduaren irabazi estatikoa finkatu ahal izateko. Gogoan izan behar dugu  $B^-(z)$ -ren erroak moteltze-kondizio absolutuak eta erlatiboak betetzen ez duten  $B^-(z)$  polinomioaren erroez osatutako polinomioa dela. Gogoan izan 1 erradioko zirkuluaren gainean edo kanpoaldean dauden  $B(z)$ -ren zero edo erro guztiek  $B^-(z)$ -ren zeroak izan behar dutela, ezeagonkortasuna saihesteko.

Hona hemen egin daitekeen hautaketa bat:

$$H_e(z) = \frac{L(1)}{B^-(1)} \frac{B^-(z)}{z^d L(z)}$$

Horrenbestez, jarraitu beharreko sistemaren zenbakitzailea honela idatz daiteke:

$$B_e(z) = \frac{L(1)}{B^-(1)} B^-(z)$$

Jarraitu nahi den ereduaren izendatzaile gisa, beraz, itxura honetako polinomioa proposatzen da.

$$A_e(z) = z^d L(z)$$

Izendatzaile horrek  $z^d$  faktorea du, jarraitu edo lortu nahi den ereduak izan behar duen maila lortzeko. Bestalde,  $L(z)$  polinomioak begizta itxian zer dinamika izatea nahi dugun finkatzeko erabiliko dugu. Sistemaren irabazi estatikoa 1 izan dadin,  $P(l)/B^-(l)$  zenbakiaz biderkatzen dugu.

$$\lim_{z \rightarrow 1} H_e(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{L(1)}{B^-(1)} \frac{B^-(z)}{z^d L(z)} = 1$$

Jarraitu edo lortu nahi den ereduaren irabazi estatikoa 1 bada ( $H_e(1) = 1$ ), sistemak begizta itxian duen estatismoa desagerrarazten da.  $L(z)$  monikotzat hartuko dugu da, eta ia beti lehen mailako edo bigarren mailako polinomotzat hartu ohi da. Beraz,  $L(z)$  polinomioaren mailaren eta jarraitu beharreko ereduaren  $d$  atzerapen kopuruaren mende egongo da  $A_e(z)$  polinomioaren maila. Proposatutako ereduaren dinamikak, bestalde, kontrolatu beharreko sistemaren eta sinplifika ezin daitezkeen zeroak izango ditu.  $L(z)$  polinomioaren maila eta jarraitu beharreko ereduak izan behar dituen  $d$  atzerapen kopurua finkatuko ditugu, RST kontroladore kausal bat lortzeko bete behar den inekuazioaren arabera.

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) \geq \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B(z))$$

Jarraitu beharreko eredu, atal honetan proposatutako eran finkatuz gero jarraitu beharreko ereduaren transferentzia-funtzioaren izendatzailearen maila, eta zenbakitzailearen maila honela idatz daitezke.

$$\text{maila}(A_e(z)) = d + \text{maila}(L(z))$$

$$\text{maila}(B_e(z)) = \text{maila}(B^-(z))$$

Beraz, aurreko inekuazioa honela idatziko dugu.

$$d + \text{maila}(L(z)) - \text{maila}(B^-(z)) \geq \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B(z))$$

$L(z)$  polinomioa bigarren mailakoa dela joz gero, hiru ezezagun sartzen dizkigu. Ezezagun horiek  $c_0$ ,  $c_1$  eta  $c_2$   $L(z)$  polinomioaren koefizienteak dira.

$$L(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2$$

$c$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  koefizienteak hautatzeko, kontuan hartzen da moteltze-kondizio absolutuak eta erlatiboak betetzen direla zehaztutako banda-zabalera eta erresonantzia-irabazia lortzearren.

### 10.3.6 RST erreguladorearen sintesirako algoritmoak

Atal hau eratu dugu aurreko emaitzak laburbiltzeko. Emaitzak tauletan adierazi ditugu, eta haiek aplikatuzetik lortutako zenbait adibide ere sartu ditugu. Berez, hiru egoera aztertuko ditugu.

#### 1.- RST erreguladorearen sintesia, perturbazio-kompentsatzailerik gabe eta zeroen sinplifikaziorik gabe.

Ez ditugu sinplifikatu sistema baten zeroak baldin eta kontrolatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzioaren zeroek moteltze-kondizio absolutuak eta erlatiboak betetzen ez badituzte, edota 1 erradioko zirkulutik kanpo baldin badaude. Egoera horretan, ez ditugu sinplifikatzen kontrolatu beharreko sistemaren zeroak. Beraz, RST kontroladore bat lortzeko egin beharreko urratsak haiek dira.

- 1.- Lehenik, kontrolatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzioaren identifikazioa egin behar dugu. Hori egin eta gero, sistemaren transferentzia-funtzioa izango dugu, hots,  $A(z)$  eta  $B(z)$  polinomioak ezagutuko ditugu.  $A(z)$ -k eta  $B(z)$ -k ez dute faktore komunik, erro komunik izanez gero sinplifikatu egingo zirelako.
- 2.- Begizta itxian lortu nahi dugun eredua finkatu behar dugu, hots, begizta itxiko espezifikazioak finkatu behar ditugu. Moteltze absolutuaren eta erlatiboaren arabera eta dugun nahi dugun estatismoaren arabera lortu nahi dugun edo jarraitu beharreko eredua kalkulatu behar dugu, aurreko atalean azaldu dugun bezala. Beraz,  $A_e(z)$  eta  $B_e(z)$  polinomioak finkatuko ditugu. Aintzat hartu behar dugu ezen zerorik sinplifikatzen ez badugu ereduaren zenbakitzailea honela idatzi ahal izango dugula.

$$B(z) = B^-(z) \Rightarrow B^+(z) = 1 \Rightarrow B_e(z) = B^-(z)B_e^+(z)$$

- 3.-  $S(z)$ ,  $R(z)$  eta  $T(z)$  polinomioen mailak finkatuko ditugu. Kontuan izan behar dugu ez dugula zerorik sinplifikatuko eta ez dugula perturbazio-kompentsatzailerik. Bestalde, eskuarki, kontrol-algoritmoa exekutatzeko denbora-tartea eta bihurtzeko denbora-tartea baztergarriak dira periodoaren tartearekiko; beraz, 10.2 teoremako inekuazioak zuzenenean ekuazio egin daitezke.

$$maila(A_e(z)) - maila(B_e(z)) = maila(A(z)) - maila(B(z))$$

Integratzailerik ez dugunez,  $q = 0$  izango da.

$$maila(A_0(z)) = 2maila(A(z)) - maila(A_e(z)) - maila(B^+(z)) - 1$$

Bestalde,  $R(z)$ ,  $T(z)$  eta  $S(z)$  polinomioen mailak berdinak dira.

$$maila(R(z)) = maila(S(z)) = maila(T(z)) = maila(A(z)) - 1$$

- 4.- RST kontroladorearen polinomio guztien mailak definitu eta gero,  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioen ebazpena ekuazio hauen bitartez ebatziko ditugu, maila bereko gaia berdinduz.

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_e(z)A_0(z)$$

$$T(z) = A_0(z)B_e^+(z)$$

Laburbiltzeko, ondorengo taula izango dugu perturbazio-kompentsatzailerik gabe eta kontrolatu beharreko sistemaren zeroak sinplifikatu gabe:

|                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Egin beharreko urratsak:                                                                                                                                                        |
| 1.- Identifikatu sistemaren transferentzia-funtzioa:<br>$A(z)$ eta $B(z)$                                                                                                       |
| 2.- Begizta itxian lortu nahi den eredua:<br>$A_e(z)$ eta $B_e(z)$<br>$B^+(z) = 1$<br>$B_e(z) = B(z)B_e^+(z)$<br>$maila(A_e(z)) - maila(B_e(z)) \geq maila(A(z)) - maila(B(z))$ |

3.-  $A_0(z)$  polinomio behatzailearen hautaketa:

$$\text{maila}(A_0(z)) \geq 2\text{maila}(A(z)) - \text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B^+(z)) - 1$$

$A_0(z) = z^{\text{maila}(A_0(z))}$  itxurako polinomia hautatzea

4.- RST kontroladorearen  $R(z)$ ,  $S(z)$ ,  $T(z)$  mailak finkatzea:

$$\text{maila}(R(z)) = \text{maila}(A_0(z)) + \text{maila}(A_e(z)) + \text{maila}(B^+(z)) - \text{maila}(A(z))$$

$$\text{maila}(T(z)) = \text{maila}(A_0(z)) + \text{maila}(B_e'(z))$$

$$\text{maila}(S(z)) = \text{maila}(A(z)) - 1$$

$$\text{maila}(B^+(z)) = 0$$

5.-  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta polinomioen kalkulua:

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_e(z)A_0(z)$$

$$T(z) = A_0(z)B_e'(z)$$

$$\text{non } R(z) = B^+(z)R'(z)$$

**10.1 taula.** RST erreguladorearen sintesia, perturbazio-kompentsatzailerik gabe eta kontrolatu beharreko sistemaren zeroak sinplifikatu gabe. Gogoan izan behar dugu taula honetan RST kontroladorearen exekutatzeko eta A/D eta D/A bihurtzeko denbora-tarteen batuketak laginketa-periodoa baino txikiagoa bada inekuazioak berdintza bilakatzen direla. Oharra:  $A(z)$ ,  $R(z)$ ,  $R'(z)$ ,  $B^+(z)$ ,  $A_0(z)$  eta  $A_e(z)$  polinomio monikoak dira.

## 10.6 adibidea

Suposa dezagun kontrolatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzio hau. Sistemaren laginketa-periodoa da  $h$  [s/lagin], eta  $a_0$  eta  $b_0$  parametro errealak dira. Horrelako sistema bat, RST kontroladore baten bidez, begizta itxiko egin nahi dugu.

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0}{z + a_0}$$

5 erloju-kolpetan  $a = 20$  moteltze-kondizio absolutua betetzen duen begizta itxiko sistema lortu behar dugu. Ez dugu perturbazio-kompentsatzailerik sartuko. Bihurtzeko

denbora-tartearen eta RST algoritmoaren exekutatzeko denbora-tartearen batuketa baztergarria denez  $h$  laginketa-periodoarekiko,  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioen mailak berdinak dira, eta 10.1 taulako inekuazioak berdintza bilakatzen dira. Bestalde, kontrolatu beharreko sistemaren izendatzailea 1. mailako polinomioa denez eta zerorik sartuko ez dugunez, ereduaren izendatzaileak ere 1. mailako polinomio bilakatuko da.

$$\text{maila}(B_e(z)) = 0 \Rightarrow B_e(z) = B(z)B'_e(z) = b_0 \Rightarrow B'_e(z) = 1$$

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) = \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B(z))$$

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) = 1 \Rightarrow \text{maila}(A_e(z)) = 1$$

Beraz, begizta itxian lortu nahi dugun ereduaren izendatzailea honela idatziko dugu.

$$\text{maila}(A_e(z)) = 1 \Rightarrow A_e(z) = z + a_{0,e}$$

Eredu horren moteltze absolutu eta erlatibo hauek betetzen dituen erro bat aukeratuko dugu:  $z = 0$  erroa; beraz,  $a_{0,e} = 0$  izango da.

Hortaz, jarraitu beharreko eredua, hots, begizta itxian lortu nahi dugun eredua, honelakoa da:

$$H_e(z) = \frac{b_0}{z}$$

$A_0(z)$  polinomioa aukeratuko dugu orain. Polinomio behatzaile hori  $z^1$  itxurako polinomio bat da.

$$\text{maila}(A_0(z)) = 2\text{maila}(A(z)) - \text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B^+(z)) - 1 = 2 - 1 - 0 - 1 = 0$$

$$A_0(z) = 1$$

$R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioen mailak kalkulatu ditugu orain. Gogoan izan behar dugu hiru polinomio horiek maila bera dutela, exekutatzeko eta bihurtzeko denbora-tarteak laginketa-periodoarekiko baztergarriak direlako.

$$\text{maila}(R(z)) = \text{maila}(A_0(z)) + \text{maila}(A_e(z)) + \text{maila}(B^+(z)) - \text{maila}(A(z)) \Rightarrow$$

$$\text{maila}(R(z)) = 0 + 1 + 0 - 1 = 0$$

$$\text{maila}(T(z)) = \text{maila}(A_0(z)) + \text{maila}(B'_e(z)) \Rightarrow \text{maila}(T(z)) = 0$$

$$\text{maila}(S(z)) = \text{maila}(A(z)) - 1 \Rightarrow \text{maila}(S(z)) = 1 - 1 = 0$$

$R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioak, horrenbestez, konstanteak besterik ez dira.

$$R(z) = r_0$$

$$T(z) = t_0$$

$$S(z) = s_0$$

Orain,  $R(z)$ ,  $S(z)$  polinomioak kalkulatu ditugu:

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_e(z)A_0(z)$$

$$(z + a_0)r_0 + b_0s_0 = z$$

Berretzaile bera duten gaiak berdinuz ebatziko dugu ekuazio hau.

$$r_0z + a_0r_0 + b_0s_0 = z \Rightarrow \begin{cases} r_0 = 1 \\ a_0r_0 + b_0s_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_0 = 1 \\ s_0 = -\frac{a_0}{b_0} \end{cases}$$

$S(z)$ , eta  $R(z)$  polinomioak kalkulatu eta gero,  $T(z)$  polinomioa kalkulatu dugu.

$$T(z) = A_0(z)B_e'(z) \Rightarrow T(z) = 1$$

RST kontroladorearen eredua kontuan hartuta, lortu ditugun emaitzak ordezkatzeko ditugu.

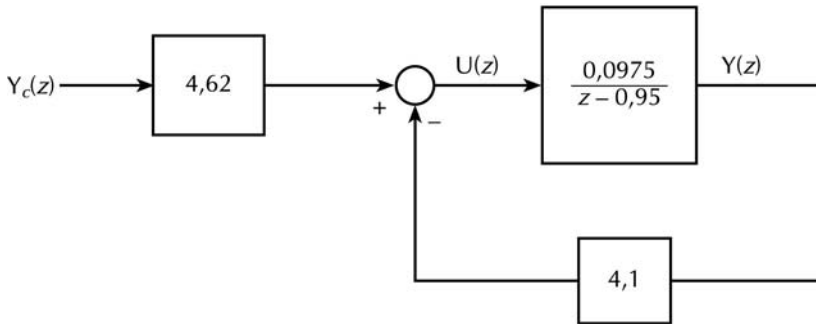
$$U(z) = \frac{T(z)}{R(z)}Y_c(z) - \frac{S(z)}{R(z)}Y(z) \Rightarrow U(z) = Y_c(z) + \frac{a_0}{b_0}Y(z)$$

Beraz, ikus daitekeenez, begizta itxiko sistemaren transferentzia-funtzioa honela idatz daiteke.

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U(z) = \frac{b_0}{z + a_0} \left[ Y_c(z) + \frac{a_0}{b_0}Y(z) \right]$$

$$Y(z)[z + a_0] = b_0Y_c(z) + a_0Y(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{Y_c(z)} = \frac{b_0}{z}$$

Bloke-eskema hau izango du:



**10.7 irudia.** Sistema honen RST kontrola.

### 10.7 adibidea

Jo dezagun kontrolatu beharreko sistema aurreko adibideko sistema bera dela. Oraingoan, ordea, exekutatzeko eta bihurtzeko denbora-tarteen batuketa laginketa-periodoa bezalakoa da. Egoera horretan,  $R(z)$  polinomioak  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioak baino maila bat handiagoa izan behar du. Polinomioen arteko maila-alderik txikiena 1 izan behar duenez, honela adieraziko ditugu  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioen mailak.

$$\text{maila}(R(z)) - 1 = \text{maila}(T(z)) = \text{maila}(S(z)) = \text{maila}(A(z)) - 1 = 0$$

Beraz,  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioek itxura hau izango dute:

$$R(z) = r_1 z + r_0$$

$$T(z) = t_0$$

$$S(z) = s_0$$

Begizta itxian lortu nahi dugun ereduaren izendatzailearen eta zenbakitzailearen mailak 10.1 taularen arabera kalkulatu ditugu. Gogoan izan behar dugu  $R(z)$  polinomioaren maila  $T(z)$  polinomioaren maila gehi 1 dela. Bestetik,  $B(z) = b_0$  polinomioak errorik ez duenez eta begizta itxian zerorik sartukoez dugunez,  $B_e(z) = 1$  egingo dugu.

$$\text{maila}(R(z)) - 1 = \text{maila}(T(z)) \Rightarrow$$

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) - 1 = \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B(z))$$

$$maila(A_e(z)) - maila(B_e(z)) - 1 = 1 - 0 = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} maila(A_e(z)) - maila(B_e(z)) = 2 \\ B_e(z) = B^-(z)B_e^+(z) = 1 \end{cases} \Rightarrow maila(A_e(z)) = 2$$

Bigarren mailako polinomio bat izango da  $A_e(z)$ , eta polinomio horren koefizienteak aukeratzean, moteltze-kondizio absolutuak eta erlatiboak kontuan hartu beharko ditugu. Aurreko kasuan bezala, begizta itxiko poloak  $z = 0$  izatera behartuko ditugu.

$$A_e(z) = z^2$$

$A_0(z)$  polinomio behatzailea kalkulatu dugu orain. Horretarako, gogoan izan behar dugu  $R(z)$  polinomioaren maila  $S(z)$  polinomioaren maila gehi 1 dela.

$$maila(A_0(z)) = 2maila(A(z)) - maila(A_e(z)) - maila(B^+(z))$$

$$maila(A_0(z)) = 2, 1 - 2 - 0 = 0 \Rightarrow A_0(z) = 1$$

Kontuan harturik begizta itxian lortu nahi den transferentzia-funtzioa dugula eta jakinik  $A_0(z) = 1$  dela,  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioak lor daitezke.  $R(z)$  eta  $S(z)$  Diofantosen ekuazio baten bidez kalkulatu ditugu.

$$(z + a_0)(r_1 z + r_0) + b_0 s_0 = z^2 \Rightarrow r_1 z^2 + z(r_0 + r_1 a_0) + (b_0 s_0 + r_0 a_0) = z^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_0 + r_1 a_0 = 0 \\ b_0 s_0 + r_0 a_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_0 = -a_0 \\ s_0 = \frac{a_0^2}{b_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R(z) = z - a_0 \\ S(z) = \frac{a_0^2}{b_0} \end{cases}$$

$T(z)$  polinomioaren maila zero denez, eta bete behar duen ekuazioa honela idatz daitekeenez,  $T(z)$  polinomioa guztiz definiturik dago.

$$B_e(z) = B^-(z)B_e^+(z) = 1 \Rightarrow B_e^+(z) = \frac{1}{b_0}$$

$$T(z) = A_0(z)B_e^+(z) = \frac{1}{b_0}$$

Beraz, sistemaren RST kontroladorearen legea honela idatz dezakegu.

$$U(z) = \frac{T(z)}{R(z)} Y_c(z) - \frac{S(z)}{R(z)} Y(z)$$

$$U(z) = \frac{1/b_0}{(z+a_0)} Y_c(z) - \frac{a_0^2/b_0}{(z+a_0)} Y(z)$$

$$U(z)(1+a_0z^{-1}) = z^{-1} \frac{Y_c(z)}{b_0} - z^{-1} \frac{a_0^2 Y(z)}{b_0} \Rightarrow$$

$$u(kh) = -a_0 u(kh-h) + \frac{y_c(kh-h)}{b_0} - \frac{a_0^2 y(kh-h)}{b_0}$$

## 2.- RST erreguladorearen sintesia, perturbazio-kompentsatzailerik gabe eta zeroen sinplifikazioarekin.

Azter dezagun orain kontrolatu beharreko sistemaren zeroak sinplifikatzen diren kasua. Gogoan izan behar dugu kasu honetan ez dugula perturbazio-kompentsatzailerik, eta sinplifikatzen diren zeroek moteltze-kondizio absolutuak eta erlatiboak bete behar dituzte. Ondorengo taulan laburbiltzen dugu kasu honen RST kontroladore bat kalkulatzeko egin beharreko urratsak. Kasu honetan ere bi egoera ezberdin ditugu. Batetik, kontrol-algoritmoaren exekutatze denbora-tartearen eta bihurtzeko denbora-tartearen batuketa laginketa-periodoa baino askoz txikiagoa bada,  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioek maila bera dute. Bestetik, kontrol-algoritmoaren exekutatze denbora-tartearen eta bihurtzeko denbora-tartearen batuketa eta laginketa-periodoa berdina badira,  $R(z)$  polinomioa  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioak baino maila bat handiagoa da.

Egin beharreko urratsak

1.- Identifikatu sistemaren transferentzia-funtzioa:

$A(z)$  eta  $B(z)$

2.- Begizta itxian lortu nahi den eredua:

$A_e(z)$  eta  $B_e(z)$

$B(z) = B^+(z)B^-(z)$

$B_e(z) = B^-(z)B_e^+(z)$

$$maila(A_e(z)) - maila(B_e(z)) \geq maila(A(z)) - maila(B(z))$$

3.-  $A_0(z)$  polinomio behatzailearen hautaketa:

$$maila(A_0(z)) \geq 2maila(A(z)) - maila(A_e(z)) - maila(B^+(z)) - 1$$

$A_0(z) = z^{maila(A_0(z))}$  itxurako polinomia hautatzea

4.- RST kontroladorearen  $R(z)$ ,  $S(z)$ ,  $T(z)$  mailak finkatzea:

$$maila(R(z)) = maila(A_0(z)) + maila(A_e(z)) + maila(B^+(z)) - maila(A(z))$$

$$maila(T(z)) = maila(A_0(z)) + maila(B_e^-(z))$$

$$maila(S(z)) = maila(A(z)) - 1$$

5.-  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta polinomioen kalkulua:

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_e(z)A_0(z)B^+(z)$$

$$T(z) = A_0(z)B_e^-(z)$$

$$\text{non } R(z) = B^+(z)R'(z)$$

**10.2 taula.** RST erreguladorearen sintesia, perturbazio-kompentsatzailerik gabe eta kontrolatu beharreko sistemaren zeroak sinplifikaturik. Oharra:  $B^+(z)$  polinomioaren erroek moteltze-kondizio absolutuak eta erlatiboak bete behar dituztenez, erroen moduluek bat baino txikiagoak izan behar dute.  $A(z)$ ,  $R(z)$ ,  $R'(z)$ ,  $B^+(z)$ ,  $A_0(z)$  eta  $A_e(z)$  polinomio monikoak dira.

### 10.8 adibidea

Jo dezagun kontrolatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzioa honako hau dela. Sistema honek bi polo ditu eta zero bakarra. Sistemak dituen  $a$  eta  $b$  parametroak errealak dira, eta sistemaren zero bakarra  $z = 0$  da.

$$H(z) = \frac{z}{(z+a)(z+b)} = \frac{z}{z^2 + (a+b)z + ab} \Rightarrow \begin{cases} B(z) = z \\ A(z) = z^2 + (a+b)z + ab \end{cases}$$

$B(z)$  polinomia faktore gisa adieraziko dugu. Kontuan izan behar dugu  $B(z)$  polinomioaren erro bakarra  $z = 0$  dela, eta, beraz, moteltze-kondizio absolutu eta erlatibo guztiak beten dituzenez, sinplifikatu egin daitekeela.

$$B^+(z) = z$$

$$B^-(z) = 1$$

Exekutatzeko eta bihurtzeko denbora-tarteen batuketa laginketa-periodoarekiko baztergarria denez,  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioen mailak berdinak izango dira.  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioen mailak berdinak badira, inekuazioa berdintza bilakatzen da.

$$maila(A_e(z)) - maila(B_e(z)) = maila(A(z)) - maila(B(z)) = 2 - 1 = 1$$

Begizta itxiko ereduaren zenbakitzailea definituko dugu lehenik.

$$B_e(z) = B^-(z)B_e^+(z) \Rightarrow \begin{cases} B^-(z) = 1 \\ B_e^+(z) = 1 \end{cases} \Rightarrow B_e(z) = 1 \Rightarrow maila(B_e(z)) = 0$$

Ondoren, begizta itxiko ereduaren izendatzailea definituko dugu.  $z = 0$  poloa finkatu dugunez, ez dugu estatismorik izango.

$$maila(A_e(z)) = 1 \Rightarrow A_e(z) = z$$

RST kontroladorea kalkulatzeko, polinomio behatzailea definituko dugu orain.

$$maila(A_0(z)) = 2maila(A(z)) - maila(A_e(z)) - maila(B^+(z)) - 1$$

$$maila(A_0(z)) = 2, 2 - 1 - 1 - 1 = 1 \Rightarrow A_0(z) = z$$

Azkenik,  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioak lortu ahal izateko, polinomio hauen mailak definitu behar ditugu.

$$maila(R(z)) = maila(A_0(z)) + maila(A_e(z)) + maila(B^+(z)) - maila(A(z))$$

$$maila(R(z)) = 1 + 1 + 1 - 2 = 1$$

$$maila(T(z)) = maila(A_0(z)) + maila(B_e^+(z))$$

$$maila(T(z)) = 1 + 0 = 1$$

$$maila(S(z)) = maila(A(z)) - 1$$

$$maila(S(z)) = 2 - 1 = 1$$

$R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioek definitzen dituzten ekuazioak idatziko ditugu.

$$[z^2 + (a+b)z + ab](r_1 z + r_0) + [z](s_1 z + s_0) = z^3$$

$$T(z) = A_0(z)B_e'(z) = z \cdot 1 = z$$

Berretzaile bera duten gaiak berdinduz,  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioak bakartu daitezke.

$$R(z) = z$$

$$S(z) = -(a+b)z - ab$$

### 3.- RST erreguladorearen sintesia, perturbazio-kompentsatzailearekin eta zeroen sinplifikazioarekin

Amaitzeko, RST erreguladorean sartutako perturbazio-kompentsatzailea aztertuko dugu. Kontrolatu beharreko prozesuaren zeroak sinplifikatzea onartzen da. Hala ere, ezin dugu  $(z-1)$  faktorerik izan sistemaren transferentzia-funtzioaren zenbakitzailean –hots,  $B(z)$  polinomioak ezin ditu  $z=1$  zero izan–, Diofantosen ekuazioak ezingo zuelako emaitzarik izan, zeren eta  $A_0(z)A_e(z)B^+(z)$  polinomioak ezin baitu modulua 1 baino handiagoa duten errorik izan. Ondorengo taulan laburbildu ditugu perturbazio-kompentsatzailea duen RST kontroladorea kalkulatzeko urratsak. Integratzaile kopurua  $q$  dela jo dugu.

Egin beharreko urratsak

1.- Identifikatu sistemaren transferentzia-funtzioa:

$$A(z) \text{ eta } B(z)$$

2.- Begizta itxian lortu nahi den eredua:

$$A_e(z) \text{ eta } B_e(z)$$

$$B(z) = B^-(z)B^+(z)$$

$$B_e(z) = B^-(z)B_e'(z)$$

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) \geq \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B(z))$$

3.-  $A_0(z)$  polinomio behatzailearen hautaketa:

$$maila(A_0(z)) \geq 2maila(A(z)) - maila(A_e(z)) - maila(B^+(z)) + q - 1$$

$$A_0(z) = z^{maila(A_0(z))} \text{ itxurako polinomia hautatzea}$$

4.- RST kontroladorearen  $R(z)$ ,  $S(z)$ ,  $T(z)$  mailak finkatzea:

$$maila(R(z)) = maila(A_0(z)) + maila(A_e(z)) + maila(B^+(z)) - maila(A(z)) - q$$

$$maila(T(z)) = maila(A_0(z)) + maila(B_e^-(z))$$

$$maila(S(z)) = maila(A(z)) + q - 1$$

5.-  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta polinomioen kalkulua:

$$A(z)(z-1)^q R(z) + B(z)S(z) = A_e(z)A_0(z)B^+(z)$$

$$T(z) = A_0(z)B_e^-(z)$$

$$\text{non } R(z) = B^+(z)R'(z)$$

**10.3 taula.** Oharra:  $A(z)$ ,  $B^+(z)$ ,  $A_0(z)$  eta  $A_e(z)$  polinomio monikoak dira.  $R(z)$  eta  $R'(z)$  polinomioak ere monikoak izango dira, baldin eta  $A(z)$  polinomioaren maila  $B(z)$  polinomioaren maila baino handiagoa bada.

### 10.9 adibidea

Jo dezagun kontrolatu beharreko sistemak transferentzia-funtzio hau duela. Sistema horrek  $K_p$  irabazia du, bi polo ditu  $\{-p_0, -p_1\}$  eta zero bakarra du  $\{-q_0\}$ .

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{K(z+q_0)}{(z+p_0)(z+p_1)}$$

Jo dezagun kontrolatu beharreko sistemaren parametroek balio hauek dituztela.

$$K = 1$$

$$q_0 = 0$$

$$p_0 = 2$$

$$p_1 = -1$$

Kontrolatu nahi dugun sistemaren begizta itxia RST kontroladore baten bidez egin nahi dugu. Perturbazioak saihesteko, integratzaile bakarreko perturbazio-

konpentsatzaile bat sartu nahi diogu. Exekutatzeko eta bihurtzeko denbora-tarteak laginketa-periodoarekiko baztergarriak direla joko dugu. Moteltze-kondizio absolutu bat finkatuko dugu:

- Begizta itxian, polo guztiak  $2h$  segundo igaro eta gero hasierako balioaren laurdenera txikitzea nahi dugu. Gogoan izan behar dugu  $h$  dela kontroladorearen laginketa-periodoa.

Bestalde, begizta itxian estatismorik ez duen sistema bat nahi dugu. Hori guztia kontuan izanik, RST kontroladore bat lortzeko urratsak egingo ditugu.

- 1.- Lehenik, parametroen balioak sistemaren transferentzia-funtzioran ordezkatzuz sistemaren eredua lortuko dugu.

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{z}{(z+2)(z-1)}$$

- 2.- Begizta itxian lortu nahi dugun eredua aukeratuko dugu orain. Gogoan izan behar dugu eredua finkatzean sinplifika daitezkeen zeroak aukeratu behar ditugula. Bestalde, begizta itxian lortu nahi dugun ereduen poloak finkatzean, moteltze-kondizio absolutua izan behar dugu kontuan. Horrez gain, begizta itxiko ereduak ez du estatismorik izan behar. Kontrolatu beharreko sistemaren zenbakitzailea sinplifika daitezkeen eta sinplifika ezin daitezkeen polinomioen biderketa gisa idatziko dugu.  $B^-(z)$  polinomioak 1 balioa hartuko du.  $z$  faktoreak, berriz, moteltze-kondizio absolutuak betetzen dituenez, sinplifika daitezkeen zeroen  $B^+(z)$  polinomioen barruan utz dezakegu.

$$B(z) = B^+(z)B^-(z) \Rightarrow \begin{cases} B^+(z) = z \\ B^-(z) = 1 \end{cases}$$

Bestalde, exekutatzeko eta bihurtzeko denbora-tarteak baztergarriak direnez  $h$  laginketa-periodoarekiko,  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioek berdintza hau betetzen dute. Ondorioz, berdinak izango dira begizta itxian izango ditugun polo eta zero kopuruen arteko aldea eta kontrolatu beharreko sistemak dituen polo eta zero kopuruen arteko aldea.

$$\text{maila}(R(z)) + q = \text{maila}(S(z)) = \text{maila}(T(z)) = \text{maila}(A(z)) + q - 1 \Rightarrow$$

$$\text{maila}(R(z)) = 1, \text{maila}(S(z)) = \text{maila}(T(z)) = 2 + 1 - 1 = 2 \Rightarrow$$

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) = \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B(z)) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow$$

$$maila(A_e(z)) = maila(B_e(z)) + 1$$

Zero berri bat sartu nahi ez badugu (ia beti betetzen den kondizioa da hori), eta aurreko berdintzak kontuan hartuz, begizta itxian lortu nahi dugun ereduaren zenbakitzailea eta izendatzailea 1. mailako polinomioak izango dira.

$$\left. \begin{array}{l} B_e(z) = B^-(z)B'_e(z) = B'_e(z) \\ B'_e(z) = b'_e \end{array} \right\} \Rightarrow maila(B_e(z)) = 0 \Rightarrow maila(A_e(z)) = 1$$

Ereduaren polo guztiek moteltze-kondizio absolutua bete behar dute. Guk lortu nahi dugun ereduari,  $z = -a_{0,e}$  polo bakarra dugu. Bestetik, badakigu begizta itxiko ereduako polo guztiek laurden batera jaitsi behar dutela  $2h$ -ko denbora-tarte batean; horrenbestez,  $z = -a_{0,e}$  berdintza lortuko dugu poloa kalkulatu ahal izateko. Eragiketa horretan, bi emaitza dira posible, eta ez dio axolarik bata edo bestea hartzen den. Hortaz, guk positiboa hartuko dugu.

$$|p_e^{k+2}| \leq \frac{|p_e^k|}{4} \Rightarrow |p_e^2| = \frac{1}{4} \Rightarrow |-a_{0,e}| = \frac{1}{2} \Rightarrow a_{0,e} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow a_{0,e} = \frac{1}{2}$$

Begizta itxiko ereduak ezin duenez estatismorik izan, zenbakitzailearen  $b'_e$  konstantea guztiz finkaturik egongo da. Hori azaltzeko, bukaerako balioaren teoremaz baliatuko gara. Azken batean, 1. mailako jauzi baten aurrean begizta itxiko ereduak estatismorik ez duenez,  $k$ -k infinitura jotzen duenean 1 baliora jo behar du.

$$Y(z) = H_e(z) \cdot Y_c(z) = \frac{b'_e}{(z + a_{0,e})} \frac{z}{z-1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(kh) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{b'_e}{(z + a_{0,e})} z$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(kh) = \frac{b'_e}{(1 + a_{0,e})} = 1 \Rightarrow b'_e = (1 + a_{0,e}) = \frac{3}{2}$$

Beraz, begizta itxian lortu nahi dugun ereduaren honela idatz daiteke.

$$H_e(z) = \frac{3}{2} \frac{1}{z + 1/2} = \frac{3}{2z + 1}$$

Lortu nahi dugun ereduaren kalkulatu eta gero, polinomio behatzailea finkatuko dugu.

$$maila(A_0(z)) = 2maila(A(z)) + q - 1 - maila(A_e(z)) - maila(B^+(z))$$

$$maila(A_0(z)) = 2, 2+1-1-1-1 = 2 \Rightarrow A_0(z) = z^2$$

Ditugun datuekin,  $T(z)$  polinomioa kalkulatuko dugu.

$$T(z) = A_0(z)B_e'(z) = \frac{3}{2}z^2$$

$R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioak lortuko ditugu azkenik.

$$A(z)(z-1)^q R(z) + B(z)S(z) = A_0(z)A_e(z)B^+(z)$$

$$(z+2)(z-1)^2(r_0 + r_1 z) + z(s_0 + s_1 z + s_2 z^2) = z^2 \left( z + \frac{1}{2} \right) z$$

$$R(z) = (r_0 + r_1 z) = B^+(z)R'(z) = z r_0'$$

$$(z+2)(z-1)^2 z r_0' + s_0 z + s_1 z^2 + s_2 z^3 = z^4 + \frac{z^3}{2}$$

$$(z^4 - 3z^2 + 2z) r_0' + s_0 z + s_1 z^2 + s_2 z^3 = z^4 + \frac{z^3}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r_0' = 1 \\ s_2 = 1/2 \\ s_1 = 3 \\ s_0 = -2 \end{cases}$$

$R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioak ondorengo formula honetan ordezkatzuz gero, egiaztatuko dugu begizta itxian lortu nahi dugun eredua dugula.

$$\frac{B(z)T(z)}{A(z)(z-1)^q R(z) + B(z)S(z)} = \frac{z \left( \frac{3}{2} z^2 \right)}{(z+2)(z-1)^2 z + z \left( -2 + 3z + \frac{z^2}{2} \right)} \Rightarrow$$

$$\frac{\left( \frac{3}{2} z^2 \right)}{(z+2)(z-1)^2 + \left( -2 + 3z + \frac{z^2}{2} \right)} = \frac{\left( \frac{3}{2} z^2 \right)}{(z+2)(z^2 - 2z + 1) - 2 + 3z + \frac{z^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{3}{2}z^2\right)}{z^3 + \frac{z^2}{2}} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{z + \frac{1}{2}} = \frac{3}{2z+1}$$

Beraz, kontrol-aldagaia kalkulatzean, hau idatziko dugu.

$$U(z) = \frac{T(z)}{(z-1)^q R(z)} Y_c(z) - \frac{S(z)}{(z-1)^q R(z)} Y(z)$$

$$(z^2 - z)U(z) = \frac{3}{2}z^2 Y_c(z) - \left(-2 + 3z + \frac{z^2}{2}\right) Y(z)$$

$$(1 - z^{-1})U(z) = \frac{3}{2} Y_c(z) - \left(-2z^{-2} + 3z^{-1} + \frac{1}{2}\right) Y(z)$$

$$u(kh) = u(kh-h) + \frac{3}{2} y_c(kh) + 2y(kh-2h) - 3y(kh-h) - \frac{y(kh)}{2}$$

## 10.4 RST ERREGULADOREAREN IRAGARTZE-EGITURA

Aurreko atalean, ikusi dugu RST kontroladorea modu arrunt batean egituratu dezakegula. Dena dela, RST kontroladoreak izan dezake beste egitura bat. Egitura hori iragartze-egitura da, eta, ikusiko dugunez, begizta itxiko ereduak izan beharko lituzkeen aldagaietan oinarritzen da.

### 10.3 teorema

Jo dezagun  $Y_e(z) = \frac{B_e(z)}{A_e(z)} Y_c(z)$  dela begizta itxian lortu nahi dugun irteera.

Perturbazio-kompentsatzailerik gabeko RST kontroladore baten kontrol-aldagaia honela idatz daiteke.

$$U(z) = \frac{A(z)}{B(z)} Y_e(z) + \frac{S(z)}{R(z)} [Y_c(z) - Y(z)]$$

$q$  integratzaile dituen perturbazio-kompentsatzaile bat izanez gero,  $R(z)$  polinomioa

$(z-1)^q R(z)$  polinomioaz ordezkatu beharko dugu.

Egiaztapena:

Azter dezagun  $T(z)$  eta  $R(z)$  polinomioen zatiketa, hots, aurrelikaduraren transferentzia-funtzioa.

$$\frac{T(z)}{R(z)} = \frac{A_0(z)B_e'(z)}{B^+(z)R'(z)} = \frac{A_e(z)A_0(z)B_e'(z)}{A_e(z)B^+(z)R'(z)}$$

$$\frac{T(z)}{R(z)} = \frac{(A(z)R'(z) + B^-(z)S(z))B_e'(z)}{A_e(z)B^+(z)R'(z)}$$

$$\frac{T(z)}{R(z)} = \frac{A(z)B_e'(z)}{A_e(z)B^+(z)} + \frac{B^-(z)S(z)B_e'(z)}{A_e(z)B^+(z)R'(z)}$$

$$\frac{T(z)}{R(z)} = \frac{A(z)B^-(z)B_e'(z)}{A_e(z)B^-(z)B^+(z)} + \frac{B^-(z)S(z)B_e'(z)}{A_e(z)B^+(z)R'(z)}$$

$$\frac{T(z)}{R(z)} = \frac{A(z)B_e(z)}{A_e(z)B(z)} + \frac{S(z)B_e(z)}{A_e(z)R(z)}$$

$T(z)$  eta  $R(z)$  polinomioen zatiketa RST kontroladorearen  $U(z)$  kontrol-aldagaian ordezkatzeko badugu, honako hau lortuko dugu.

$$U(z) = \frac{T(z)}{R(z)} Y_c(z) - \frac{S(z)}{R(z)} Y(z)$$

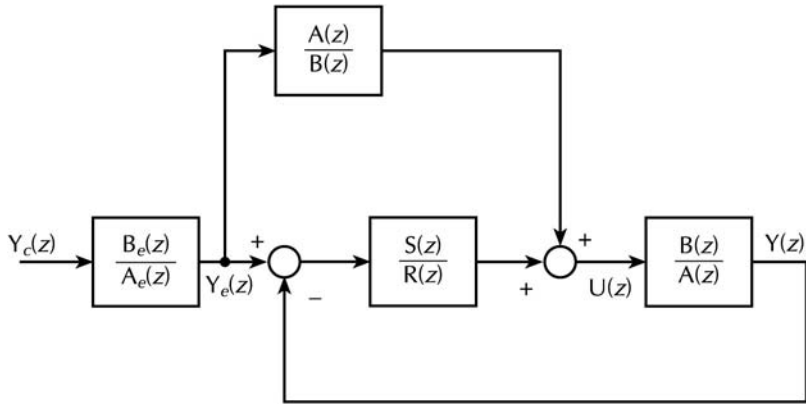
$$U(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \frac{B_e(z)}{A_e(z)} Y_c(z) + \frac{S(z)}{R(z)} \left[ \frac{B_e(z)}{A_e(z)} Y_c(z) - Y(z) \right]$$

Beraz, 10.3 teorema frogatu dugu. Dena dela,  $q$  integratzaile dituen perturbazio-kompentsatzaile bat izanez gero, era berean frogatu daiteke 10.3 teorema,  $R(z)$  polinomioa  $(z-1)^q R(z)$  polinomioaz ordezkatzeko gero.

Dena dela, RST kontroladorearen iragartze-egitura egitean, kontu handiz ibili behar da, modu kausal batean garatu behar delako. Iragartze-egitura hori horrela gauzatuko bagenu (ikus 10.8 irudia), kausala izateko modu bakarra da  $A(z)$  polinomioaren maila eta  $B(z)$  polinomioaren maila berdinak izatea.  $\frac{A(z)}{B(z)}$

transferentzia-funtzioari dagokion adarrari iragartze-kontrolari lotutako adar deritzogu. Ohartu zaitetz sistemak begizta itxian izan beharko lukeen  $Y_e(z)$  balioa sartzen zaiola berrelikadura duen adarrari. Iragartze-adarrak, berriz, sistemak izan

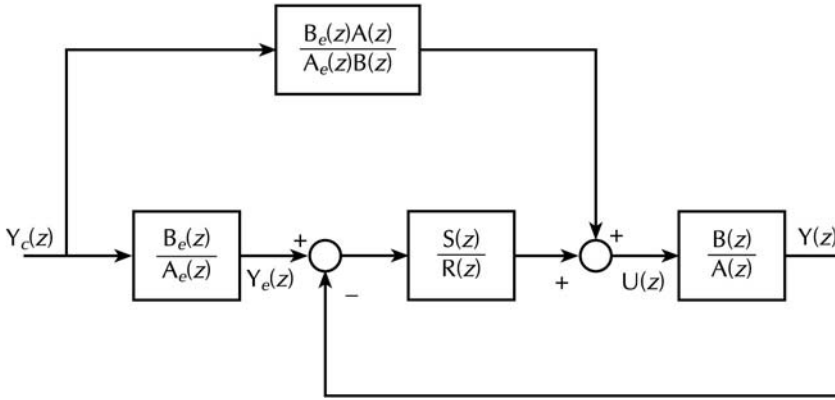
beharko lukeen  $Y_c(z)$  irteera izan dezan,  $U(z)$  kontrol-aldagaiari sartu behar zaion gehikuntza sartzen dio.



**10.8 irudia.** RST kontrolaren iragartze-egitura kausalitate-arazoekin.

Kausalitate-arazoak konpontzeko, 10.9 irudian agertzen den bezala gauzatu daiteke, iragartze-adarrari  $\frac{B_e(z)A(z)}{A_e(z)B(z)}$  forma emanda. Gogoan izan behar dugu

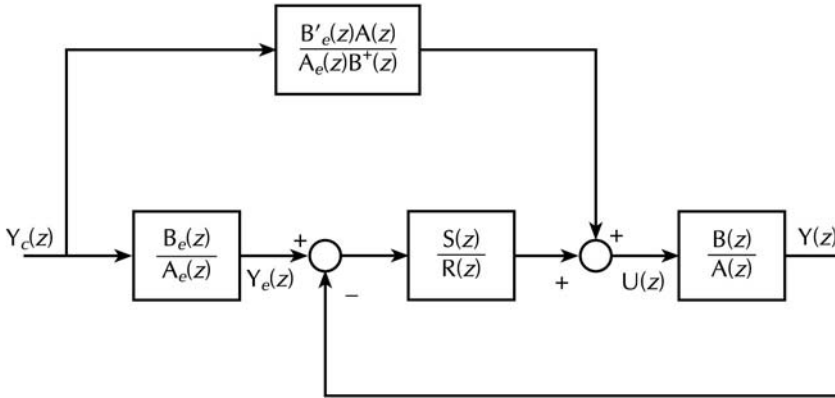
$maila(A_e(z)) - maila(B_e(z)) \geq maila(A(z)) - maila(B(z))$  betetzen dela. Beraz,  $maila(A_e(z)) + maila(B(z)) \geq maila(A(z)) + maila(B_e(z))$  betetzen da. Hortaz, iragartze-adarrak zuen kausalitate-arazoa kendu dugu egitura horren bidez. Hala ere, egitura horrek badu alde ahul bat: fase minimoa ez duten sistemak kontrolatzean, hots,  $B(z)$  polinomioaren erroen moduluak 1 baino handiagoak direnean, iragartze-adarra ez da egonkorra izaten. Beraz, horrelako RST kontrolaren egitura batek egonkortasun-arazoak izango ditu, baldin eta kontrolatu beharreko sistema fase minimoa ez duen sistema bat bada.



**10.9 irudia.** Kausalitate-arazorik gabeko RST kontrolaren iragartze-egitura

Ondoren, kausalitate- eta egonkortasun-arazorik ez duen egitura proposatuko dugu. Iragartze-egitura hori  $\frac{B'_e(z)A(z)}{A_e(z)B^+(z)}$  forman idatziko dugu,  $B(z)$  polinomioaren erro ezegonkorak  $B^-(z)$  polinomioaren erroak direlako. Erro horiek sinplifikatuz gero, egonkortasun-arazoak desagertu egiten dira.

$$\left. \begin{array}{l} B(z) = B^-(z)B^+(z) \\ B_e(z) = B^-(z)B'_e(z) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{B_e(z)A(z)}{A_e(z)B(z)} = \frac{B'_e(z)A(z)}{A_e(z)B^+(z)}$$



**10.10 irudia.** Kausalitate- eta egonkortasun-arazorik gabeko iragartze-egitura

Beraz,  $U(z)$  kontrol-aldagaia honela utz daiteke.

$$U(z) = \frac{A(z)}{B^+(z)} \frac{B'_e(z)}{A_e(z)} Y_c(z) + \frac{S(z)}{R(z)} \left[ \frac{B_e(z)}{A_e(z)} Y_c(z) - Y(z) \right]$$

### 10.1 ariketa

Lor ezazu ondorengo sistema kontrolatzeko RST erreguladorea. Begizta itxian lortuko dugun ereduak  $z = 0$  poloak izan behar ditu soilik. Lehen mailako perturbazioen aurrean kontroladoreak errorerik izan ez dezan, integratzaile bakarra duen perturbazio-konpentsatzailea izan behar du kontroladoreak. Kontrol-algoritmoaren exekutatzeko eta bihurtzeko denbora-tarteak  $h$  laginketa-periodoarekiko baztergarriak direla joko dugu. Begizta itxian ez dugu estatismorik izan nahi.

Kontrolatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzioa hau da.

$$H(z) = \frac{10(z+1)}{(z-1)}$$

Sistema hori kontrolatzean, lehenik begizta itxian lortu nahi dugun transferentzia-funtzioa definitu behar dugu. Kontrolatu beharreko sistemaren zeroa  $-1$  (hots,  $(z+1)$  faktorea) ezin dugu sinplifikatu, egonkortasunaren mugan dagoelako. Beraz,  $(z+1)$  faktoreak begizta itxiko ereduaren zenbakitzailean egon behar du. Sinplifika ezin daitekeen zeroaz gain, ez dugu beste zerorik sartuko.

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) \geq \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B(z))$$

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) \geq 1 - 1$$

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) = 0$$

$$\text{maila}(A_e(z)) = \text{maila}(B_e(z))$$

$$B(z) = B^+(z)B^-(z) \Rightarrow \begin{cases} B^+(z) = 1 \\ B^-(z) = 10(z+1) \end{cases} \Rightarrow B_e(z) = B^-(z)B_e^+(z) = b_e^+ 10(z+1)$$

$$\text{maila}(B_e(z)) = 1 \Rightarrow \text{maila}(A_e(z)) = 1 \Rightarrow A_e(z) = z$$

$$H_e(z) = \frac{10b_e^+(z+1)}{z}$$

Begizta itxian estatismorik izan ez dezagun,  $H_e(1) = 1$  izan behar du. Kondizio horrek  $b_e^+ = \frac{1}{20}$  izatea eskatzen du. Beraz, begizta itxiko eredua honelakoa izango da:

$$H_e(z) = \frac{(z+1)}{2z}$$

Eredua finkatu eta gero,  $A_0(z)$  polinomio behatzailea kalkulatu dugu. Horretarako, lehenik bere maila kalkulatu dugu. Gogoan izan behar dugu ezen exekutatzeko eta bihurtzeko denbora-tarteak baztergarriak direnez  $h$  laginketa-periodoarekiko 10.3 taulako inekuazioak ekuazio bilakatzen direla. Horrek laguntzen digu polinomio behatzailearen maila kalkulatu. Kontuan izan behar dugu integratzaile bakarra dugula polinomio behatzailearen maila kalkulatzeko.

$$\text{maila}(A_0(z)) = 2\text{maila}(A(z)) + q - 1 - \text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B^+(z))$$

$$\text{maila}(A_0(z)) = 2 \cdot 1 + 1 - 1 - 1 - 0 = 1 \Rightarrow A_0(z) = z$$

Polinomio behatzailea kalkulatu eta gero,  $T(z)$  polinomioa kalkulatu behar dugu.

$$T(z) = A_0(z)B_e^*(z) = zb_e^* = \frac{z}{20}$$

Polinomio behatzailea eta  $T(z)$  polinomioa lortu eta gero,  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioak kalkulatu behar ditugu.

$$A(z)(z-1)^q R(z) + B(z)S(z) = A_0(z)A_e(z)B^+(z)$$

$$(z-1)(z-1)r_0 + 10(z+1)(s_1z + s_0) = z^2$$

$$(z^2 - 2z + 1)r_0 + (10s_1z^2 + 10s_1z + 10s_0z + 10s_0) = z^2$$

$$z^2(r_0 + 10s_1) + z(-2r_0 + 10s_1 + 10s_0) + r_0 + 10s_0 = z^2$$

Berretzaile bereko gaiak berdinduz, ekuazio-sistema hau lortuko dugu.

$$r_0 + 10s_0 = 0$$

$$r_0 + 10s_1 = 1$$

$$-2r_0 + 10s_1 + 10s_0 = 0$$

Ekuazio-sistema hori ebatzita, emaitza hauek lortuko ditugu.

$$r_0 = \frac{1}{4}$$

$$s_1 = \frac{3}{40}$$

$$s_0 = \frac{-1}{40}$$

Ohartu zaitez  $A(z)$  polinomioak eta  $B(z)$  polinomioak maila bera dutela, eta, beraz,  $R(z)$  polinomioa kasu honetan ez dela monikoa. Dena dela, ia sistema fisiko guztietan  $A(z)$  polinomioaren maila  $B(z)$  polinomioaren maila baino handiagoa da, hots,  $\text{maila}(A(z)) > \text{maila}(B(z))$ . Beraz, oso egoera berezietan  $A(z)$  polinomioaren maila eta  $B(z)$  polinomioaren maila berdinak izango dira. Gogoan izan behar dugu sistema fisiko guztiak kausalak direnez berdintza hau betetzen dutela:  $\text{maila}(A(z)) \geq \text{maila}(B(z))$ .

Ematza egiaztatzeko, egin dezagun kalkulu hau:

$$\frac{T(z)B(z)}{A(z)(z-1)R(z)+B(z)S(s)} = \frac{10z(z+1)b'_e}{(z-1)^2 r_0 + 10(z+1)(s_1 z + s_0)}$$

$$\frac{T(z)B(z)}{A(z)(z-1)R(z)+B(z)S(s)} = \frac{10z(z+1)\left(\frac{1}{20}\right)}{(z-1)^2 \frac{1}{4} + 10(z+1)\left(\frac{3}{40}z - \frac{1}{40}\right)}$$

$$\frac{T(z)B(z)}{A(z)(z-1)R(z)+B(z)S(s)} = \frac{2z(z+1)}{(z-1)^2 + (z+1)(3z-1)}$$

$$\frac{T(z)B(z)}{A(z)(z-1)R(z)+B(z)S(s)} = \frac{2z(z+1)}{(z^2 - 2z + 1) + (3z^2 + 2z - 1)}$$

$$\frac{T(z)B(z)}{A(z)(z-1)R(z)+B(z)S(s)} = \frac{(z+1)}{2z} = H_e(z)$$

RST kontroladorearen kontrol-legea lortu nahi badugu, prozesu hau egin behar dugu. Gogoan izan kontroladorearen transferentzia-funtzioari dagokion gehikuntza-ekuazioa lortzeko alderantzizko  $Z$  transformatua egin behar dugula. Bestalde,  $h$  laginketa-periodoa dela suposatuko dugu.

$$U(z) = \frac{T(z)}{(z-1)^q R(z)} Y_c(z) - \frac{S(z)}{(z-1)^q R(z)} Y(z)$$

$$(z-1)^q R(z)U(z) = T(z)Y_c(z) - S(z)Y(z)$$

$$(z-1)\frac{1}{4}U(z) = \frac{z}{20}Y_c(z) - \left(\frac{3z}{40} - \frac{1}{40}\right)Y(z)$$

$$(z-1)U(z) = 0,2zY_c(z) - (0,3z - 0,1)Y(z)$$

$$(1-z^{-1})U(z) = 0,2Y_c(z) - (0,3 - 0,1z^{-1})Y(z) \Rightarrow$$

$$u(kh) - u(kh-h) = 0,2y_c(kh) - 0,3y(kh) + 0,1y(kh-h) \Rightarrow$$

$$u(kh) = 0,2y_c(kh) - 0,3y(kh) + 0,1y(kh-h) + u(kh-h) \Rightarrow$$

Beraz, mikroprozesadorearen programak urrats horiek egin behar ditu. Bestalde, gogoan izan behar dugu  $y_c(kh)$  dela begizta itxian sistemak jarraitu beharko lukeen aldagaia, hots, kanpotik datorren kontsigna.

$u(-h)$ ,  $y(-h)$ ,  $y_c(0)$  hasieratuko ditugu eta  $y(0)$ :  $y(0)$  eta  $y_c(0)$  neurtuko ditugu. Ondoren,  $h$  segundotik behin, mikroprozesadoreak denbora-etenak exekutatzeko behar diren erregistroak hasieratuko ditu eta begizta amaigabe baten zain geratuko da, denborarekiko etenak iritsi arte.

- Denborarekiko etenak:  $h$  segundoko denborarekiko eten bat gertatuko da, eta kalkulu hauek egin behar ditugu.

- 1.- Kontsigna irakurri (beste mikroprozesadore batek emandako kontsigna edota mikroprozesadore berak beste programa baten bidez sortutakoa).  $y_c(kh)$ .
- 2.- Kontrolatu behar den  $y(kh)$  aldagaiaren laginketa A/D bihurgailu baten bidez. Gogoan izanik aurreko etenean  $y(kh-h)$  aldagaia lagindu eta gorde dugula.
- 3.- Aurreko etenean atera dugun  $u(kh-h)$  kontrol-aldagaiaren balioa kalkulatu eta gorde dugunez,  $u(kh) = 0,2y_c(kh) - 0,3y(kh) + 0,1y(kh-h) + u(kh-h)$  gehikuntza-ekuazioa aplikatuz,  $u(kh)$  kontrol-aldagaiaren balioa aterako dugu.  $u(kh)$  aldagaia kalkulatu eta berehala D/A bihurgailutik atera behar dugu,  $kh$  aldiunearen hasieran baikaude.
- 4.-  $u(kh-h) = u(kh)$  eta  $y(kh-h) = y(kh)$  eginez, ondorengo denborarekiko izango dugun etenean beharko ditugun aldagaiak eguneratuko ditugu. Azken urrats horiek egin eta gero, programa nagusira itzuliko gara.

1, 2, 3 eta 4 urratsak exekutatzeko, mikroprozesadoreak behar duen denbora tarte  $h$  laginketa-periodoarekiko baztergarria izan behar duenez (kondizio hori erabili dugu kontroladorea kalkulatzeko), betetzen ez badugu, etenaren programa

sinplifikatu beharko dugu, azkarrago exekuta dezan. Hori ezin badugu egin, bi aukera ditugu: mikroprozesadore azkarrago bat erabili kontrola egiteko edota  $h$  laginketa-periodoa handitu.

## 10.2 ariketa

Lor ezazu sistema hau kontrolatzeko RST erreguladorea. Begizta itxian lortuko dugun ereduak  $z = 0$  poloak izan behar ditu soilik. RST kontroladoreak ez du perturbazio-konpentsatzailerik. Kontrol-algoritmoaren exekutatze eta bihurtzeko denbora-tarteak  $h$  laginketa-periodoarekiko baztergarriak direla joko dugu. Begizta itxian ez dugu estatismorik izan nahi. Iragartze-egituran gauzatuko dugu RST kontroladorea.

Kontrolatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzioa hau da.

$$H(z) = \frac{10(z+2)}{(z+1)^2}$$

Perturbazio-konpentsatzailerik ez dugunez eta exekutatze eta bihurtzeko denbora-tarteak  $h$  laginketa-periodoarekiko baztergarriak direnez,  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioek maila bera dute.

$$\text{maila}(R(z)) = \text{maila}(T(z)) = \text{maila}(S(z)) = \text{maila}(A(z)) - 1 = 2 - 1 = 1$$

Arrazoi horiengatik eta kontrolatu beharreko sistemaren zenbakitzailearen erroaren modulua 1 baino handiagoa denez, ezin dezakegu sinplifikatu. Ondorioz, 10.1 taulako berdintzak erabiliko ditugu.

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) \geq \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B(z)) \Rightarrow$$

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow$$

$$\text{maila}(A_e(z)) = \text{maila}(B_e(z)) + 1 \Rightarrow$$

$$B(z) = B^+(z)B^-(z) \Rightarrow \begin{cases} B^-(z) = 10(z+2) \\ B^+(z) = 1 \end{cases} \Rightarrow B_e(z) = 10(z+2)B'_e(z)$$

Begizta itxiko ereduaren zenbakitzaileari ez diogu erro gehiago sartuko, beraz,  $B'_e(z)$  zero mailako polinomotzat definituko dugu.

$$B'_e(z) = b'_e$$

Beraz, begizta itxiko ereduaren zenbakitzailea eta izendatzailea honela idatz daitezke.

$$maila(B_e(z)) = 1$$

$$maila(A_e(z)) = 2$$

$$H_e(z) = \frac{B_e(z)}{A_e(z)} = \frac{10(z+2)b'_e}{z^2 + a_{0,e}z + a_{0,e}} = \frac{10(z+2)b'_e}{z^2}$$

$$H_e(1) = 30b'_e = 1 \Rightarrow b'_e = \frac{1}{30}$$

$$H_e(z) = \frac{(z+2)}{3z^2}$$

Honela definituko dugu  $A_0(z)$  polinomio behatzailearen maila.

$$maila(A_0(z)) \geq 2maila(A(z)) - maila(A_e(z)) - maila(B^+(z)) - 1$$

$$maila(A_0(z)) = 2, 2 - 2 - 0 - 1 = 1 \Rightarrow A_0(z) = z$$

Kalkula dezagun  $T(z)$  polinomioa.

$$T(z) = A_0(z)B'_e(z) = \frac{z}{30}$$

Lor ditzagun orain,  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioak.

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = A_e(z)A_0(z)B^+(z)$$

$$(z+1)^2(r_0 + r_1z) + 10(z+2)(s_0 + s_1z) = z^3$$

$$(z^2 + 2z + 1)(r_0 + r_1z) + 10(2s_0 + 2s_1z + s_0z + s_1z^2) = z^3$$

$$(z^2 + 2z + 1)r_0 + (z^3 + 2z^2 + z)r_1 + 20s_0 + 20s_1z + 10s_0z + 10s_1z^2 = z^3$$

$$(r_0 + 20s_0) + z(2r_0 + r_1 + 20s_1 + 10s_0) + z^2(10s_1 + 2r_1 + r_0) + z^3r_1 = z^3 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ 10s_1 + 2r_1 + r_0 = 0 \\ 2r_0 + r_1 + 20s_1 + 10s_0 = 0 \\ r_0 + 20s_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_0 = -6 \\ s_1 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \\ s_0 = \frac{3}{10} \end{cases}$$

Beraz,  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioak honela idatz ditzakegu.

$$R(z) = z - 6$$

$$S(z) = \frac{2z}{5} + \frac{3}{10}$$

$$T(z) = \frac{z}{30}$$

Iragartze-egituran idatziz gero, kontrol-lege hau izango dugu.

$$U(z) = \frac{A(z)}{B^+(z)} \frac{B_e^+(z)}{A_e(z)} Y_c(z) + \frac{S(z)}{R(z)} \left[ \frac{B_e(z)}{A_e(z)} Y_c(z) - Y(z) \right] \Rightarrow$$

$$U(z) = \frac{(z+1)^2}{1} \frac{1}{30z^2} Y_c(z) + \frac{0,4z+0,3}{z-6} \left[ \frac{(z+2)}{3z^2} Y_c(z) - Y(z) \right] \Rightarrow$$

$$U(z) = \frac{(z+1)^2}{30z^2} Y_c(z) + \frac{4z+3}{10(z-6)} \left[ \frac{(z+2)}{3z^2} Y_c(z) - Y(z) \right] \Rightarrow$$

$$U_1(z) = \frac{(z+1)^2}{30z^2} Y_c(z)$$

$$U_2(z) = \frac{4z+3}{10(z-6)} U_3(z)$$

$$U_3(z) = \frac{(z+2)}{3z^2} Y_c(z) - Y(z)$$

$$U(z) = U_1(z) + U_2(z) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u_1(kh) = \frac{y_c(kh) + 2y_c(kh-h) + y_c(kh-2h)}{30} \\ u_3(kh) = \frac{y_c(kh-h)}{3} + \frac{2y_c(kh-2h)}{3} - y(kh) \\ u_2(kh) = 0,6u_2(kh-h) + 0,4u_3(kh) + 0,3u_3(kh-h) \\ u(kh) = u_1(kh) + u_2(kh) \end{cases}$$

# 11

## Identifikazioa

### 11.1 SARRERA

Prozesu baten eredu matematikoa izatea nahitaezkoa da diziplina zientifikoetan.

Eskuragarri dagoen informazioa laburbiltzeko metodo trinkoa da; esate baterako, aurreko kapituluetan, transferentzia-funtzioak deskribatu du kontrolatu beharreko sistema.

Eredu bakar batekin oso noizean behin baino ezin dira arazo guztiak ebatzi. Arazo horiek, besteak beste, prozesua eraikitzea eta prozesua kontrolatzea dira, baita simulazioa egitea ere. Izan ere, ereduen hierarkia ezarri behar da.

Sistema dinamikoa simulatzeko, nahitaezkoa da eredu zehatz ez-lineal bat, ordena handikoa, barruko egoera-aldagaiak parte hartzera bultzatzen dituen. Horren helburua da doitasunak ateratzea eta errealitatetik hurbil dagoen jokabidea kopiazea.

Adierazpide mota horri *simulazio-eredu* esaten zaio. Askotan, begizta itxiko prozesuaren ezaugarriak aztertzeke erabiltzen da.

Erreguladorearen sintesirako, askoz eredu zehaztugabeagoa da nagusi. Eredu hori puntu baten inguruan edo funtzionamendu-ibilbide baten inguruan linealizatuta egon ohi da; ordena txikikoa izaten da, eta kanpoko, askotan. Deskribapen mota horri *kontrol-eredu* deritzo.

Prozesuak arautzen dituzten lege fisikoetatik datoz ereduak. Tamalez, lege horiek konplexuegiak, edo guztiz ezezagunak, dira osorik aprobetxatzeko.

Beraz, lege fisikoez baliatuz zirriborratutako eredua hobetu behar da, edo, bestela, eredu oso bat egin. Horretarako, beharrezkoa da sistema errealean *in situ* egindako emaitzetan oinarritzea. Horrela jokatzeko erari identifikazio esaten zaio.

Identifikatzeko bi metodo bereiziko ditugu:

- Metodo ez-parametrikok. Kurba-formako ereduak ematen dizkigute (bulkada-erantzuna edo Bode diagrametako transferentzia-funtzio harmonikoa), eta eredu horiek ezin dira zenbaki multzo finitu batekin adierazi.
- Metodo parametrikok. Zenbaki multzo finitua duten ereduak sortzen dituzte (transferentzia-funtzioaren zenbakitzaileko eta izendatzaileko polinomioen koefizienteak, esate baterako).

Kapitulu hau identifikazio-metodoen sarrera da. Eremu aberatsa eta zabala da; liburu askotan osorik lantzen dute.

Ikasgai honetan hartu dugun oinarritzko mailari eutsi nahirik, teknika determinista baino ez da landuko; alde batera utziko ditugu estatistika-teknikekin bakarrik landu daitezkeen gai garrantzitsu batzuk. Bestalde, karratu txikien arloa mugatuko gara; horien bidez, kontrol moldatzaileko sistemetan bereziki erraz sar daitezkeen algoritmoak lortzen dira.

## 11.2 ERREGRESIO LINEALA

Identifikazio-arazo asko honelako ekuazioetan jar daitezke; ekuazioari erregresio lineala deritzo, hain zuzen:

$$[y(k)] = [\Phi(k)][v(k)] + [e(k)] \quad (11.1)$$

$N$  neurketa eta  $P$  parametro baditugu, (11.1) formularen ageri diren bektoreek dimentsio hauek dituzte.

$[y(k)]_{N \times 1}$  neurketa-bektorea da:  $N$  errenkada eta zutabe bakarra ditu.

$[v(k)]_{P \times 1}$  parametro-bektorea da:  $P$  errenkada eta zutabe bakarra ditu.

$[e(k)]_{N \times 1}$  auresate-errorea edo ekuazio-errorea da:  $N$  errenkada eta zutabe bakarra ditu.

$[\Phi(k)]_{N \times P}$  behaketa-matrizea da:  $N$  errenkada eta  $P$  zutabe ditu.

Eredu horretan:

Hitzarmenez,  $[\Phi(k)]_{N \times P}$ -n,  $[v(k)]_{P \times 1}$ -n,  $[y(k)]_{N \times 1}$ -n eta  $[e(k)]_{N \times 1}$ -n  $k$  aldiunea ageri da,  $t_k = kh$  aldiunerrainoko laginak eta informazioa erabili baititugu matrize eta bektore horiek definitzean.

$[y(k)]_{N \times 1}$  bektoreak eta, batzuetan,  $[\Phi(k)]_{N \times P}$  matrizeak neurriak hartzen dituzte. Beraz, lortu nahi duguna zera da:  $[v(k)]_{P \times 1}$  bektore ezezaguna zehaztea,  $[e(k)]_{N \times 1}$  aurresate-errorea minimizatuz, hots,  $[e(k)]_{N \times 1}$  bektorearen modulua ahalik eta txikiena eginez.

Horretarako, baliagarria izaten da  $[\Phi(k)]_{N \times P}$  behaketa-matrizeko errenkadak eta zutabeak zehaztea.

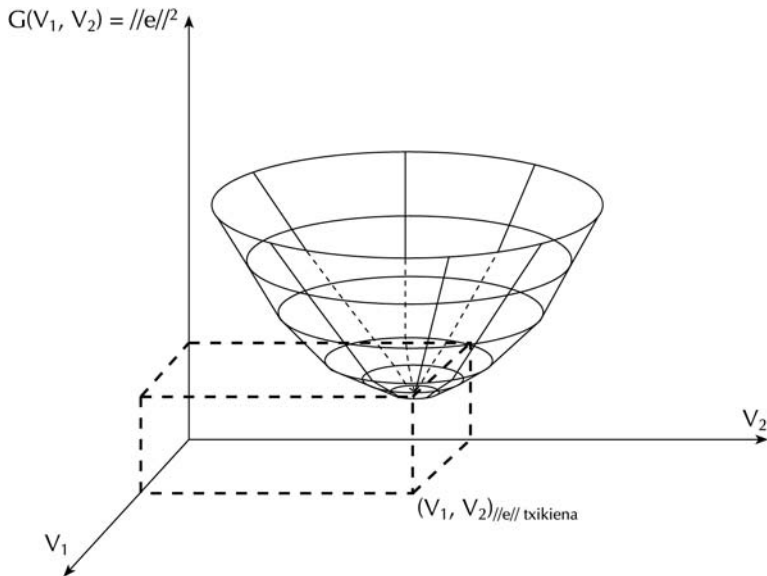
$$[\Phi(k)]_{N \times P} = \begin{bmatrix} [\phi_1^T(k)] \\ \dots \\ [\phi_N^T(k)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\phi_1(k)]_{N \times 1} & [\phi_2(k)]_{N \times 1} & \dots & [\phi_N(k)]_{N \times 1} \end{bmatrix}$$

$$[\phi_j(k)]_{N \times 1} : j \in \{1, 2, \dots, P\}$$

Behaketa-matrizeko zutabeak  $[\phi_j(k)]_{N \times 1} : j \in \{1, 2, \dots, P\}$  itxurako bektoreak dira. Zutabe bakarreko bektore horiek  $N$  errenkada dituzte. Horrenbestez, (11.1) erregresio lineala honela idatz daiteke:

$$[y(k)] = v_1[\phi_1(k)] + v_2[\phi_2(k)] + \dots + v_p[\phi_p(k)] + [e(k)]$$

$[e(k)]_{N \times 1}$  aurresate-errorea kontuan hartzen ez badugu,  $[y(k)]_{N \times 1}$  bektorea  $[\Phi(k)]_{N \times P}$  matrizearen zutabeen konbinazio lineal bat da, eta konbinazio lineal horretako koefizienteak parametro-bektorearen osagaiak dira. 11.1 irudiak erakusten du egoera  $P = 2$  denean, erregresio lineal batekin lortu nahi duguna.



**11.1 irudia.** Erregresio lineala  $P = 2$  denean.

### 11.1 adibidea

Demagun  $y$  aldagai batek denborarekiko duen erlazioak zuzen baten itxura duela. Beraz,  $y$  aldagaia eta  $t$  aldagaia lotzen dituen berdintza honela idatz dezakegu:

$$y(t) = at + b$$

Erlazio horretan bi parametro ditugu:

- 1.- zuzenaren malda da  $a$  parametroa.
- 2.-  $y$  aldagaiak  $t = 0$  denean duen balioa da  $b$  parametroa.

$y(t)$  aldagaiaren neurketak  $t = 0, h, \dots, kh$  uneetan eginez, lagin multzo hau lortuko dugu:  $y(0), y(h), \dots, y(kh)$ . Gogoan izan behar dugu  $h$  laginketa-periodoa dela. Beraz, gure helburua da  $a$  eta  $b$  parametroak identifikatzea,  $y(kh)$  laginak erabiliz.

Berez, parametro horiek kalkulatzeko, nahikoa litzateke bi unetako ( $0$  eta  $h$ , esaterako) laginak izatea:

$$y(0) = b$$

$$y(h) = ah + b$$

Matrize eran jarritz gero:

$$y(1) = \phi_1 a + \phi_2 b$$

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} b \quad (11.2)$$

$$[y(1)] = [\Phi(1)][v(1)]$$

Egora horretan,  $N = P = 2$   $e(1) = 0$  berdintzak betetzen dira. Geometrikoki,  $[\Phi(k)]_{N \times P}$  matrizearen zutabe linealki independenteek sortutako bektore-azpiespaziokoa da  $[y(1)]$  neurri-bektorea.

$$b = y(0)$$

$$a = \frac{y(h) - y(0)}{h}$$

Erregresio linealaren interpretazio geometrikoa,  $N = P = 2$  denean. Soluzioa argi dago: nahikoa da (11.2) ekuazio linealen sistema ebaztea. Metodo hori ez da asko erabiltzen; ez da oso fidagarria, neurketa-erroreak  $y(0)$  eta  $y(k)$  laginak hondatzen dituzte eta. Errore horiek iragazteko, erredundantzia sartzen da,  $a$  eta  $b$  parametroen kalkulua  $P = 2$  parametro kopurua baino handiagoa den  $N$  lagin kopuruan oinarrituz.

$N$  laginketa egitean,  $N > P$  laginak ez dira  $at + b$  zuzenean lerrokatuta egongo, neurketa-erroreak eta ereduak eratzean sortutako erroreak baitaude. (11.1) formulak agintzen duen eran idatziz gero,  $N$  laginak berdintza hauek izango ditu:

$$y(0) = b + e(0)$$

$$y(1) = b + ah + e(1)$$

$$y(2) = b + 2ha + e(2)$$

...

$$y(N-1) = b + 2Nha + e(N-1)$$

Matrize eran idatziz gero, honako hau lortuko dugu:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h & 1 \\ \dots & \dots \\ (N-1)h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(0) \\ e(1) \\ \dots \\ e(N-1) \end{bmatrix}$$

$$[y(N-1)] = [\Phi(N-1)][v(N-1)] + [e(N-1)]$$

Oro har, geometrikoki  $[y(N-1)]$  neurri-bektorea ez da  $[\Phi(N-1)]_{N \times P}$  matrizearen zutabe linealki independenteek sortutako bektore-azpiespaziokoa.  $N > P$  egoerak ekarriko du erroreak iragaztea, eta hori orain aztertuko dugu.

Erregresio linealak identifikazio-arazo ugari ebatz ditzake. Hona hemen adibide batzuk: sistema dinamikoen erantzunak identifikatzea; egoerak kalkulatzeko; sistema baten dekonboluzioa egitea sistema bati dagokion sarrerak lortzeko; eta sistema baten transferentzia-funtzioa identifikatzea.

Azken arazo hori kontrol moldatzailean da garrantzitsua batik bat. Hori dela eta, hurrengo atalean ikusiko dugu.

Erregresio linealaren ebazpena frogatu baino lehen sistema dinamikoen identifikazioan aplikatuko dugu.

## 11.3 SISTEMA DINAMIKOEN IDENTIFIKAZIOAN APLIKATZEA

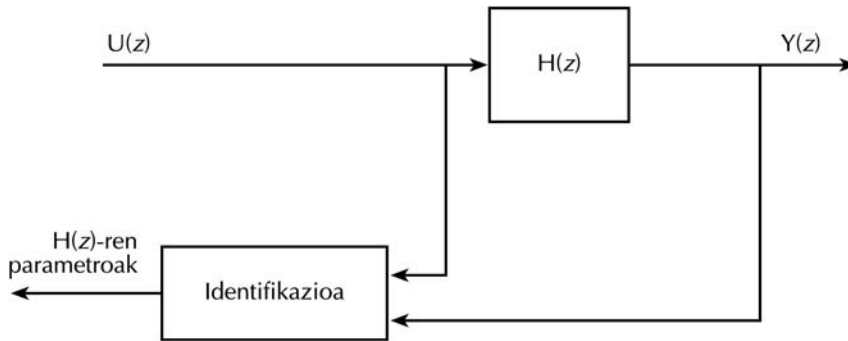
### 11.3.1 Erregresio lineala

Prozesua gobernatzen duten lege fisikoetan oinarritzen da prozesua bera deskribatzeko lehen era. Horixe da orain arte erabili duguna, eta oso ezaguna da. Lege horien artean sartzen dira, esate baterako, mekanikako, termodinamikako, hidraulikako, elektrizitateko edo balantzeetako ekuazioak.

Metodo honek ezagutza-eredu bat ematen du. Erabiltzen diren lege fisikoak diferentzialak dira askotan. Lortzen den eredua  $G(s)$  transferentzia-funtzio analogikoa da, funtzionamendu-puntu edo funtzionamendu-ibilbide baten inguruko linealizazioaren bidez eta aldagai gehigarriak sartuz lortzen dena.

$G(s)$  transferentzia-funtziotik  $H(z)$  transferentzia-funtzio diskretua lortzeko,  
 $H(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ L^{-1} \left( \frac{G(s)}{s} \right) \right\}_{t=kh}$  formula erabiliko dugu.

$$H(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] \right\}$$



**11.2 irudia.** Ezagutzaren eta adierazpidearen eredua eratzea.

Ezagutza-eredua eratzea ahalbidetzen duten lege fisikoak konplexuegiak dira sarritan, edo guztiz ezezagunak. Sistemako parametro batzuk garatu egin daitezke denboran zehar; horregatik, eguneratu egin behar dira. Egoera horretan, hobe da esperimentu bidez prozesu-eredu bat eratzea ezagutza-eredu bat eratzea baino.

Lan hori ongi egiteko, bada  $\{u(kh)\}$  sarrera-aldagaia eta  $\{y(kh)\}$  irteera-aldagaia aztertzen dituen identifikazio-algoritmo bat. Azterketa horren helburua da  $H(z)$ -ren parametroei zenbaki bat egokitzea, eta, hala behar izanez gero, parametro horiek eguneratzea.  $H(z)$  adierazpen arrazionalaren zenbakitzaileko eta izendatzaileko polinomioen koefizienteak dira parametro horiek. Horrenbestez, identifikazioak adierazpide-eredu bat eratzen du. Nabarmendu behar da identifikazioak sistema laginduaren  $H(z)$  transferentzia-funtzioa ematen digula zuzenean.

Beste aukera bat badago:  $G(s)$  prozesu analogikoaren adierazpide-eredu bat eratzea, eta eredu horren sarrera eta irteera analogikoak aztertzea.

Metodo horrek badu abantaila bat: identifikatu beharreko parametroen esanahi fisikoa gordetzen du eta parametro horiek ez daude laginketa-periodoaren mende. Metodo hori ez dugu atal honetan landuko, konputagailu bidez kontrolatzeko eredu diskretuak erabili behar ditugulako.

$H(z)$  transferentzia-funtzioa hertsiki propioa dela jotzen da, ez baitugu orokortasunik galtzen:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^{maila(B)} + b_1 z^{maila(B)-1} + \dots + b_{maila(B)}}{z^{maila(A)} + a_1 z^{maila(A)-1} + \dots + a_{maila(A)}} \\ maila(A(z)) > maila(B(z))$$

$A(z)$  polinomioaren maila  $B(z)$  polinomioaren maila baino handiagoa da ia beti sistema fisikoak kontrolatzen ditugunean. Ez da orokortasunik galtzen, orobat,  $d = maila(A(z)) - maila(B(z)) = 1$  transferentzia-funtzioaren poloen eta zeroen arteko aldea 1 dela jotzen badugu.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^{maila(A)-1} + b_1 z^{maila(A)-2} + \dots + b_{maila(A)-1}}{z^{maila(A)} + a_1 z^{maila(A)-1} + \dots + a_{maila(A)}} \quad (11.3)$$

Jakina denez,  $H(z)$  transferentzia-funtzioak dituen poloen eta zeroen arteko  $d$  aldea 1 baino hertsiki handiagoa bada, hau esan nahi du:  $b_i = 0$ ;  $i = 0, 1, \dots, d-2$  izendatzailearen lehen  $d-2$  koefizienteak nuluak dira. (11.3) berdintza jartzen badugu,  $z$  aldagaiaren berretura negatiboetan transferentzia-funtzio hau lortuko dugu:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2} + \dots + b_{maila(A)-1} z^{-maila(A)}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{maila(A)} z^{-maila(A)}} \quad (11.4)$$

eta denbora-eremuan, (11.4) honela idazten da:

$$\left[ 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{maila(A)} z^{-maila(A)} \right] Y(z) = \left[ b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2} + \dots + b_{maila(A)-1} z^{-maila(A)} \right] U(z) \Rightarrow$$

Azkenean, ekuazio hau lortzen da:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k-1) + b_1 u(k-2) + \dots + b_{n-1} u(k-n) \\ n = maila(A(z)) \quad (11.5)$$

Sistemaren  $n$  ordena dela onartuta, eta ordena hori ezagutzen dugula, identifikazio-prozedurak  $a_i$ ,  $i = \{1, 2, \dots, n\}$  eta  $b_k$ ,  $k = \{1, 2, \dots, n-1\}$  koefizienteen zenbatespena eman behar digu. Zenbatespen hori  $0, h, 2h, \dots, kh$  laginketa-periodoetan jasotako  $u(0), u(1), u(2), \dots, u(k-1)$  eta  $y(0), y(1), y(2), \dots, y(k)$  laginetan oinarritu behar da.

Nola jar dezakegu arazo hori erregresio lineal gisa? Idatz dezagun (11.5) gehikuntza-ekuazioa honela:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n) + b_0 u(k-1) + b_1 u(k-2) + \dots + b_{n-1} u(k-n)$$

$$n = \text{maila}(A(z))$$

Honela idatz dezakegu berdintza hori matrize eran:

$$y(k) = \begin{bmatrix} -y(k-1), -y(k-2), \dots, -y(k-n), u(k-1), \dots, u(k-n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_0 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad (11.6)$$

$u(-1), u(-2), \dots, u(-n)$  eta  $y(-1), y(-2), \dots, y(-n)$  hastapen-kondizioak, guztiak nuluak direla jotzen badugu, honela geratuko da ekuazio hori matrize eran:

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(0) & 0 & \dots & 0 & u(0) & 0 & \dots & 0 \\ -y(1) & -y(0) & \dots & 0 & u(1) & u(0) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(N-1) & -y(N-2) & \dots & -y(N-n) & u(N-1) & u(N-2) & \dots & u(N-n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_0 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

Matrize eran idaztean  $N$  lagin hartu ditugu. Gogoan izan behar dugu  $2n$  parametro identifikatu edo zenbatetsi behar ditugula. Beraz, ekuazio-sistema hori bateragarria eta determinatua izateko,  $2n$  parametroen kopurua eta  $N$  ekuazioen kopurua berdinak izan behar dute nahitaez.

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(2n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(0) & 0 & \dots & 0 & u(0) & 0 & \dots & 0 \\ -y(1) & -y(0) & \dots & 0 & u(1) & u(0) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(2n-1) & -y(2n-2) & \dots & -y(n) & u(2n-1) & u(2n-2) & \dots & u(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_0 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

Geometrikoki, azken ekuazio horretan dugun matrizearen zutabe linealki independenteek sortutako bektore-azpiespaziokoa da  $[y(2n)]^T = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(2n)]$  neurri-bektorea. Hala ere, metodo horren fidagarritasunik eza oso handia da,  $u(n), u(n+1), \dots, u(2n-1)$  eta

$y(n), y(n+1), \dots, y(2n)$  laginek neurketa-erroreak baitituzte. Horrez gain, ereduak eratzean sortutako erroreak daude, hala nola sistemaren ordena  $n$  baino handiagoa denean eta ereduaztapenean  $n$  mailako eredu bat hartu dugunean, edo kontuan hartu ez diren linealtasunik ezak ditugunean. Errore horiek iragazteko,  $N$  laginketa kopuru handiagoa erabiltzen da.

$N > P$  gertatzen den uneaz geroztik, laginek ezin dute (11.6) berdintza bete; izan ere, ekuazio-sistema hori ezin da bateragarria izan, laginketa-periodo bakoitzak ekuazio-sistemari beste ekuazio bat ematen diolako. Horrenbestez,  $k$  aldiune bakoitzeko errore guztiak kontuan izan ditzakegu erregresio lineal honen bidez:

$$[y(N)] = [\Phi(N)][v(N)] + [e(N)]$$

Non:

$$[y(N)]^T = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(N)]^T$$

$$[v(N)]^T = [a_1 \ \dots \ a_n \ b_0 \ \dots \ b_{n-1}]^T$$

$$[\Phi(N)] = \begin{bmatrix} -y(0) & 0 & \dots & 0 & u(0) & 0 & \dots & 0 \\ -y(1) & -y(0) & \dots & 0 & u(1) & u(0) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(N-1) & -y(N-2) & \dots & -y(N-n) & u(N-1) & u(N-2) & \dots & u(N-n) \end{bmatrix}$$

Orain,  $N = k > 2n$  dugu. Geometrikoki,  $[y(2n)]^T = [y(1) \ y(2) \ \dots \ y(2n)]^T$  neurri-bektorea ez da eskuarki  $[\Phi(N)]$  matrizeko zutabeek sortutako bektore-azpiespaziokoa. Aipatzekoa da  $[\Phi(N)]$  behaketa-matrizeak neurriak dituela.

## 11.2 adibidea

Demagun ezagutza-eredu bat dugula, eta  $h$  laginketa-periodoa ezaguna dela:

$$H(z) = \frac{b}{z-a}$$

Adierazpide-eredua eratuko dugu ondoren. Horretarako,  $0, h, \dots, kh$  laginketa-periodoetan lortutako  $u(n), u(n+1), \dots, u(2n-1)$  eta  $y(n), y(n+1), \dots, y(2n)$  laginetatik abiatuta, adierazpen honen  $a$  eta  $b$  parametroak zenbatetsi behar ditugu.

Horretarako,  $z$ -ren berretura negatiboetan jarriko dugu aurreko eredua:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{bz^{-1}}{1-az^{-1}}$$

Hortik, gehikuntza-ekuazio hau lortzen da:

$$y(k) + ay(k) = bu(k-1)$$

Erregresio lineal bat lortzeko, berdintza hau idatziko dugu:

$$y(k) = [-y(k-1), u(k-1)] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + e(k)$$

Gogoan izan behar dugu  $k$  aldiunean dugun errorea dela  $e(k)$ .  $k$  lagin erabiliz gero, erregresio lineal hau lortzen da:

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(0) & u(0) \\ -y(1) & u(1) \\ \dots & \dots \\ -y(k-1) & u(k-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(0) \\ e(1) \\ \dots \\ e(k) \end{bmatrix}$$

Erregresio lineala hurrengo atalean ebatziko dugu.

### 11.3.2 Aldez aurreko ezagutzak

Oso erabilgarria da, prozesu dinamiko bat identifikatu baino lehen, aldez aurreko ezagutzak aprobetxatzea. Horrek zenbatetsi beharreko parametro kopurua murrizteko aukera ematen du, eta, beraz, nahikoa kalkulu-denbora irabazten da. Gainera, gerta daitezkeen zenbakizko arazoak saihestu daitezke. Ezagutza- eta adierazpide-ereduak eratzea nahasten dituen metodoa oso konplexua da, tamalez; izan ere, metodo horrek berezko arazo ez-lineal batera garamatza.

Orain egoera simple batzuk erakutsiko ditugu.

- 1.- (11.3) transferentzia-funtzioak 1 balio duen polo-gehiegitasuna erakusten du.  $d$  polo-gehiegitasuna ezaguna eta 1 baino hertsiki handiagoa izanez gero, aldez aurreko ezagutza hori erraz sar daiteke sistemaren ereduan  $b_i = 0$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, d-2$  eginez.
- 2.- Kasu orokorrako bat aztertzeko aukera ematen du azken metodo horrek: kasu honetan, (11.3)ren zenbakitzaileko eta izendatzaileko koefiziente batzuk

ezagunak dira. Izendatzaileko koefiziente ezagunek  $A'(z)$  polinomioa osatzen dute. Zenbakitzaileko koefiziente ezagunek  $B'(z)$  polinomioa osatzen dute. Identifikatu behar dugun  $H(z)$  transferentzia-funtzioa honela geratzen da orduan:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B'(z)B(z)}{A'(z)A(z)} \quad (11.7)$$

$A'(z)$  eta  $B'(z)$  polinomioak ezagunak dira,  $A(z)$  eta  $B(z)$  polinomioak ez bezala.

Polinomio horiek guztiak  $z$ -ren berretura negatiboekin daude adierazita. (11.7) erlazioak honako hau ematen du:

$$\frac{A'(z)Y(z)}{B'(z)U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Fikziozko sarrera eta irteera batzuk definitzen baditugu:

$$Y'(z) = A'(z)Y(z)$$

$$U'(z) = B'(z)U(z)$$

Ondorioz, fikziozko sarreraren eta irteeraren arteko transferentzia-funtzioa honela idatz daiteke:

$$\frac{Y'(z)}{U'(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Beraz, hasierako metodoa erabiliko dugu  $\frac{B(z)}{A(z)}$  transferentzia-funtzioa identifikatzeko, hots, transferentzia-funtzioaren atal ezezaguna identifikatzeko. Sarritan ematen den mota honetako egoera bat dira integratzaile bat duten transferentzia-funtzioak.

$$H(z) = \frac{z^q B(z)}{(z-1)^q A(z)} \Rightarrow \begin{cases} B'(z) = z^q \\ A'(z) = (z-1)^q \end{cases}$$

Berretzaile negatiboetan idatziz gero identifikatu beharreko transferentzia-funtzioa, ezagutzen ditugun polinomioak itxura hau hartuko dute:  $A'(z^{-1}) = (1 - z^{-q})$  eta  $B'(z^{-1}) = 1$ .

Horrenbestez, identifikazioa fikziozko sarreraren eta irteeraren transferentzia-funtzioaren arabera egingo dugu.

$$\frac{Y'(z)}{U'(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

non  $Y'(z) = (1 - z^{-q})Y(z)$  eta  $U'(z) = U(z)$  baitira.

### 11.3 adibidea

Demagun identifikatu nahi dugun sistemaren transferentzia-funtzioak itxura hau duela.

$$H(z) = \frac{(b_0 z + b_1)}{(z-1)(z-a)}$$

Identifikatu beharreko transferentzia-funtzioaren parametroak hauek dira:  $a$ ,  $b_0$  eta  $b_1$ .

Transferentzia-funtzioa  $z$ -ren berretura negatiboetan jarrita, hauxe lortzen da:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})}$$

Fikziozko irteera definituko dugu orain:

$$Y'(z) = (1 - z^{-1})Y(z)$$

Horrenbestez, identifikatu beharreko transferentzia-funtzio hau geratzen da:

$$\frac{Y'(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2}}{(1 - az^{-1})}$$

Azken bi ekuazio horiek hauxe ematen dute denbora-eremuan:

$$\begin{cases} (1 - az^{-1})Y'(z) = (b_0 z^{-1} + b_1 z^{-2})U(z) \\ Y'(z) = (1 - z^{-1})Y(z) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y'(k) = b_0 u(k-1) + b_1 u(k-2) + ay'(k-1) \\ y'(k) = y(k) - y(k-1) \end{cases}$$

Erregresio linealaren eran idatziz gero, berdintza hau lortuko dugu. Gogoan izan behar dugu  $e(k)$  errorea kontuan hartu behar dugula erregresio eran jartzean.

$$y'(k) = [-y'(k-1), u(k-1), u(k-2)] \begin{bmatrix} a \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} + e(k)$$

Aurreko adierazpenetik erregresio lineal hau ondorioztatzen da:

$$\begin{bmatrix} y'(1) \\ y'(2) \\ \dots \\ y'(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y'(0) & u(0) & 0 \\ -y'(1) & u(1) & u(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ -y'(k-1) & u(k-1) & u(k-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(0) \\ e(1) \\ \dots \\ e(k) \end{bmatrix}$$

$y'(0)$ ,  $y'(1)$ , ...,  $y'(k)$  zenbakiak  $y(0)$ ,  $y(1)$ , ...,  $y(k)$ -ren laginen bidez zehazten dira. Hurrengo atalean ebatziko dugu erregresio lineal hori.

Aurreko sistema aztertu eta gero, beste egoera bati jarraituko diogu orain. Sistemak  $d$  laginketa-periodoko atzerapen ezagun bat duenean, lehen erabili dugun metodoari jarraituko diogu. Demagun identifikatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzioak itxura hau duela. Gogoan izan behar dugu transferentzia-funtzioak duen  $d$  laginketa-periodoko atzerapena ezaguna dela.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = z^{-d} \frac{B(z)}{A(z)}$$

Aldez aurreko ezagutza hori polinomio hauetan laburbil daiteke:

$$A'(z) = 1$$

$$B'(z) = z^{-d}$$

$$U'(z) = z^{-d}U(z)$$

Transferentzia-funtzio hau aurkitu behar da:

$$\frac{Y(z)}{U'(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

### 11.4 adibidea

Demagun identifikatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzioaren itxura honelakoa dela.

$$H(z) = \frac{(b_0 z + b_1)}{z^2(z - a)}$$

Transferentzia-funtzioa  $z$  aldagaiaren berretzaile negatibotan adieraziz gero, berdintza hau lortuko dugu.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-2}(b_0 + b_1 z^{-1})}{(1 - az^{-1})}$$

Fikziozko  $U'(z)$  sarrera definituko dugu, eta transferentzia-funtzio berri bat lortuko dugu.

$$\begin{cases} \frac{Y(z)}{U'(z)} = \frac{(b_0 + b_1 z^{-1})}{(1 - az^{-1})} \\ U'(z) = z^{-2}U(z) \end{cases}$$

Transferentzia-funtzio berri horri dagokion gehikuntza-ekuazioa kalkulatu dugu.

$$\begin{cases} (1 - az^{-1})Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1})U'(z) \\ U'(z) = z^{-2}U(z) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y(k) = b_0 u'(k) + b_1 u'(k-1) + ay(k-1) \\ u'(k) = u(k-2) \end{cases}$$

Erregresio linealaren eran idatziz gero, berdintza hau lortuko dugu. Gogoan izan behar dugu  $e(k)$  errorea kontuan hartu behar dugula erregresio eran jartzean.

$$y(k) = \begin{bmatrix} -y(k-1), u'(k), u'(k-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} + e(k)$$

Aurreko adierazpenetik erregresio lineal hau ondorioztatzen da:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u'(0) & u'(-1) \\ -y(0) & u'(1) & u'(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ -y(k-1) & u'(k) & u'(k-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(0) \\ e(1) \\ \dots \\ e(k) \end{bmatrix} \quad (11.8)$$

$$u'(k) = u(k-2)$$

$u'(0)$ ,  $u'(1)$ , ...,  $u'(k)$  laginak  $u(-2)$ ,  $u(-1)$ , ...,  $u(k-2)$ -ren laginen bidez zehazten dira. Erregresio lineala ondoren ebartziko dugu.

Azkenik, kasu konplexuago bat aztertuko dugu,  $d$  laginketa-periodoko atzerapen hutsa ezezaguna den kasua. Hala ere, badakigu atzerapen hori  $[d_{\text{txiki}}, d_{\text{handi}}]$  tartean dagoela. Sinplifikazioaren bidez, polo-gehiegitasuna 1 dela jotzen da atzerapen hori ez duen sistemaren zatian:

$$H(z) = \frac{1}{z^d} \frac{b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-1}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

$z$ -ren berretura negatiboetan jarrita, hauxe lortzen da:

$$H(z) = \frac{b_0 z^{-1-d} + b_1 z^{-2-d} + \dots + b_{n-1} z^{-n-d}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Identifikatu beharreko zenbakitzailearen koefiziente bakarrak  $b_i$  parametroak dira, non  $i$  aldagaiak  $0, 1, 2, \dots, n + d_{\text{handi}} - d_{\text{txiki}} - 1$  balioak hartzen baititu. Erregresio linealaren algoritmoak zenbait  $b_i$  parametrori zero balioa egokitu die. Beste parametroei, berriz, dagozkien balioak emango dizkie.

### 11.5 adibidea

Demagun identifikatu beharreko sistemak duen atzerapena 1 eta 3 laginketa-periodokoa dela; hots,  $d$  parametroa  $[1,3]$  tartean egongo da. Baina erregresio lineala egitean,  $d = 3$  egingo dugu. Beraz, behar baino parametro gehiago erabiliko ditugu, eta horrek esan nahiko du erregresio linealak zenbait koefizienteri zero balioa egokituko diela.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(b_0 z + b_1)}{z^d (z - a)} \Rightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(b'_0 + b'_1 z^{-1} + b'_2 z^{-2} + b'_3 z^{-3} + b'_4 z^{-4})}{(1 - a z^{-1})}$$

Gehikuntza-ekuazioa honela idatziko dugu.

$$y(k) = ay(k-1) + b_0' u(k) + b_1' u(k-1) + b_2' u(k-2) + b_3' u(k-3) + b_4' u(k-4)$$

Gehikuntza-ekuazio hori erregresio eran idatziz gero, honako hau lortuko dugu.

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y(0) & u(1) & u(0) & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(k-1) & u(k) & u(k-1) & u(k-2) & u(k-3) & u(k-4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b_0' \\ b_1' \\ b_2' \\ b_3' \\ b_4' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(0) \\ e(1) \\ \dots \\ e(k) \end{bmatrix}$$

Hurrengo atalean ebatziko dugu erregresio lineal hori.

## 11.4 KARRATU TXIKIENEN METODOA

(11.1) erregresio lineala hartuko dugu berri:

$$[y(N)] = [\Phi(N)][v(N)] + [e(N)]$$

$[v(N)]$  parametro-bektorea  $[e(N)]$  auresate-errorea minimizatzen moduan zehaztuko da.

Minimizazio hori egiteko, karratu txikiaren irizpidean oinarritu behar da. Auresate-errorearen norma euklidestarra minimizatzean datza metodo hori.

Minimizatu beharreko funtzioa hau da:

$$G([v(N)]) = \|e(N)\|^2 = ([y(N)] - [\Phi(N)][v(N)])^T ([y(N)] - [\Phi(N)][v(N)]) \quad (11.9)$$

$G([v(N)])$  irizpidea minimizatzen duten parametro-bektoreari  $-\hat{v}(N)$  idatzirik—, parametro zenbatetsien bektore deritzo; kontuan hartu den azkeneko laginketa-periodoa adierazten du  $k$  zenbaki osoak.

Soluzioa hurrengo teoreman dago laburbilduta.

### 11.1 teorema

$[\Phi(N)]$  behaketa-matrizea  $P$  heinekoa dela jotzen badugu, parametro zenbatetsien bektorea bakarra da, eta bektore hori honela kalkula daiteke. Gogoan izan behar dugu ditugun parametroen kopurua  $P$  dela.

$$[\hat{v}(N)] = ([\Phi^T(N)][\Phi(N)])^{-1} [\Phi(N)]^T [y(N)] \quad (11.10)$$

*Egiaztapena:*

Lehenik, ahalik eta txikiena egin nahi den funtzioa idatziko dugu.

$$G([v]) = \sum_{i=1}^{i=N} \left( y(i) - \sum_{j=1}^{j=P} \phi_{i,j} v_j \right)^2 \quad (11.11)$$

$k = 1$  aldiunetik  $k = N$  aldiunera egindako laginak izango ditugu kontuan. Bestalde,  $P$  parametro ditugu, hots,  $v_1, v_2, \dots, v_P$  parametroak.  $y(i)$  da  $i$  aldiunean egindako lagina.  $\phi_{i,j}$  koefizientea, berriz,  $[\Phi(N)]_{N \times P}$  matrizeko  $i$ -garren errenkadakoa eta  $j$ -garren zutabekoa da.

$G$  funtzioa eskalarra da.  $G$  funtzio hori  $v_q$  parametroarekiko deribatuko dugu.

$$\frac{\partial G}{\partial v_q} = -2 \sum_{i=1}^{i=N} \left[ \left( y(i) - \sum_{j=1}^{j=P} \phi_{i,j} v_j \right) \phi_{i,q} \right]$$

Deribatu hori berdin zero egingo dugu,  $[\hat{v}(k)]$  parametro zenbatetsien bektorea kalkulatu ahal izateko. Gogoan izan behar dugu  $v_i$  parametroari dagokion balio zenbatetsia  $\hat{v}_i$  eran adieraziko dugula. Beraz, aurreko ekuazioa berdin zero egitean,  $v_i$  parametroa  $\hat{v}_i$  balioaz ordezkatzuko dugu.

$$\sum_{i=1}^{i=N} \left[ \left( y(i) - \sum_{j=1}^{j=P} \phi_{i,j} \hat{v}_j \right) \phi_{i,q} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{i=N} \phi_{i,q} y(i) = \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{j=1}^{j=P} \phi_{i,j} \phi_{i,q} \hat{v}_j \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{i=N} \phi_{i,q} y(i) = \sum_{i=1}^{i=N} \phi_{i,q} \left( \sum_{j=1}^{j=P} \phi_{i,j} \hat{v}_j \right) \Rightarrow$$

$\hat{v}_i$  parametro bakoitzeko ekuazio bat lortuko dugu. Ekuazio horiek matrize eran idatziko bagenitu, berdintza hauek lortuko genituzke.

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{i=N} \phi_{i,1} y(i) \\ \sum_{i=1}^{i=N} \phi_{i,2} y(i) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{i=N} \phi_{i,p} y(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{2,1} & \dots & \phi_{N,1} \\ \phi_{1,2} & \phi_{2,2} & \dots & \phi_{N,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{1,p} & \phi_{2,p} & \dots & \phi_{N,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{j=p} \phi_{1,j} \hat{v}_j \\ \sum_{j=1}^{j=p} \phi_{2,j} \hat{v}_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{j=p} \phi_{N,j} \hat{v}_j \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{2,1} & \dots & \phi_{N,1} \\ \phi_{1,2} & \phi_{2,2} & \dots & \phi_{N,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{1,p} & \phi_{2,p} & \dots & \phi_{N,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{2,1} & \dots & \phi_{N,1} \\ \phi_{1,2} & \phi_{2,2} & \dots & \phi_{N,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{1,p} & \phi_{2,p} & \dots & \phi_{N,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \dots & \phi_{1,p} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \dots & \phi_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{N,1} & \phi_{N,2} & \dots & \phi_{N,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \dots \\ \hat{v}_p \end{bmatrix}$$

$$[\Phi(N)] = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \dots & \phi_{1,p} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \dots & \phi_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{N,1} & \phi_{N,2} & \dots & \phi_{N,p} \end{bmatrix}$$

$$[\Phi(N)]^T = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \dots & \phi_{1,p} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \dots & \phi_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{1,p} & \phi_{2,p} & \dots & \phi_{N,p} \end{bmatrix}$$

$$[y(N)]^T = [y(1), y(2), \dots, y(N)]$$

$$[v(N)]^T = [v_1, v_2, \dots, v_p]$$

Aurreko matrize-ekuazioak laburbilduz, berdintza hau lortuko dugu.

$$[\Phi(N)]^T [y(N)] = [\Phi(N)]^T [\Phi(N)] [\hat{v}(N)]$$

$[\hat{v}(k)]$  parametro zenbatetsien bektorea aurreko ekuaziotik bakartu dezakegu. Suposatu behar dugu  $[\Phi(N)]_{N \times p}$  behaketa-matrizearen heina  $p$  dela  $[\Phi(N)]^T [\Phi(N)]$  matrizearen alderantzizkoa lortu ahal izateko

$$[\hat{v}(N)] = \left( [\Phi(N)]^T [\Phi(N)] \right)^{-1} [\Phi(N)]^T [y(N)]$$

$[\Phi(N)]_{N \times P}$  matrizearen heina  $P$  bada, aljebra linealak erakusten duenez,  $[\Phi(N)]^T [\Phi(N)]$  matrize karratuaren heina  $P \times P$  ordenakoa da.

Prozesu dinamikoen identifikazioaren testuinguruan, sistemaren polo edo modu guztiei kitzikatzeko behar bezain oparoa edo etengabea izan behar du kitzikapenak.

### 11.8 adibidea

Demagun sistema bat kontrolatu nahi dugula. Sistema horren transferentzia-funtzioa itxura honetako transferentzia-funtzio batekin ereduatzu nahi dugu.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{bz}{(z-a)}$$

Tamalez, ez ditugu ezagutzen  $a$  eta  $b$  parametroak. Beraz, kontrola egin baino lehen,  $a$  eta  $b$  parametroak zenbatetsi behar ditugu. Horrenbestez, karratu txikien bitartez kalkulatuko ditugu  $a$  eta  $b$  parametroak. Lehenik, transferentzia-funtzioa  $z$  aldagaiaren berreketa negatiboen bitartez adieraziko dugu, eta, ondoren, erregresio lineal baten eran idatziko dugu. Gogoan izan behar dugu laginketa-periodoa  $h$  dela.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b}{(1-az^{-1})} \Rightarrow Y(z) = az^{-1}Y(z) + bU(z) \Rightarrow$$

$$y(kh) = ay(kh) + bu(kh) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(h) \\ \dots \\ y(Nh) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u(0) \\ y(0) & u(h) \\ \dots & \dots \\ y((N-1)h) & u(Nh) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Adibide honetan behaketa-matrizea irteerako eta sarrerako laginek osatzen dute. Kontuan izan behar dugu sistemaren hasierako kondizioa zero dela, hots,  $y(-h) = 0$  dela.

$$[\Phi(N)] = \begin{bmatrix} 0 & u(0) \\ y(0) & u(h) \\ \dots & \dots \\ y((N-1)h) & u(Nh) \end{bmatrix}$$

$[y(N)]$  Irteerako bektorea, berriz, honela idatziko dugu.

$$[y(N)]^T = [y(0) \quad y(h) \quad \dots \quad y(Nh)]$$

Zenbatetsi nahi ditugun parametroak kalkulatzeko, berdintza hau kalkulatu besterik ez dugu egin behar.

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \left( [\Phi(N)]^T [\Phi(N)] \right)^{-1} [\Phi(N)]^T [y(N)]$$

1. mailako jauzi-itxura duen sarrera baten aurrean sistemak duen erantzunean oinarritu gara. Erregresioak behar dituen laginak kalkulatzeko, hots, sistemaren irteera kalkulatzeko, parametroen balio hauek hartuko ditugu:  $a = 0,5$  eta  $b = 7,5$ . Sistemaren simulazioa eta identifikazioa edo zenbatespena programa honen bitartez egin dugu.

```
clear all
close all
h=0,025; % Laginketa-periodoa segundotan
t=[0:h:1]; % Denbora-aldiuneak
z = zpk('z',h);
a=0,5;
b=7,5;
%Sistemaren simulazioa
y=zeros(length(t),1);
u=ones(length(t),1);
y(1)=b*u(1);
for i=2:length(t)
    y(i)=a*y(i-1)+b*u(i);
end
plot(t,y,'r')
grid on
title('Sistemaren erantzuna 1. mailako jauzi baten aurrean')
xlabel('Denbora (s) a=0,5 eta b=7,5 ')
ylabel('y(kh)')
grid on
```

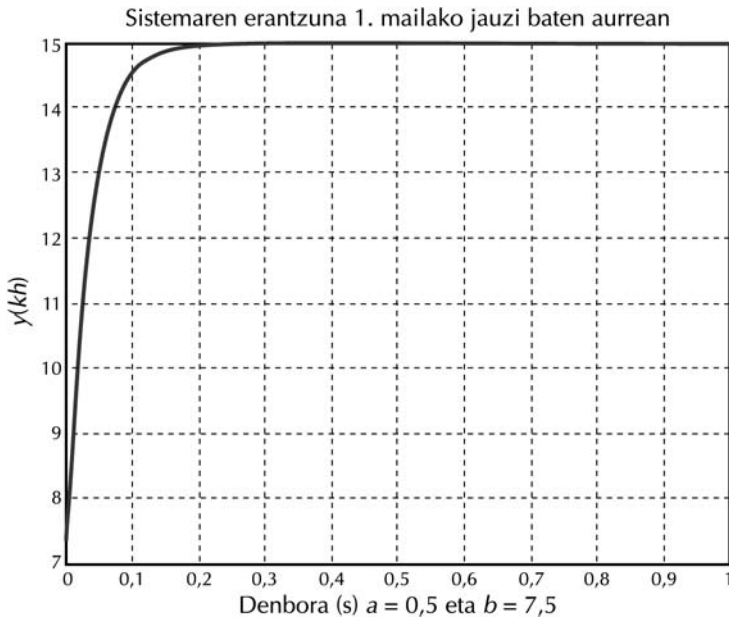
**% identifikazioa**

**PHI=zeros(length(t),2);**

**PHI(2:length(t),1)=y(1:length(t)-1);**

**PHI(:,2)=u;**

**P=inv(PHI\*PHI)\*PHI\*y;**



**11.3 irudia.** Identifikatu nahi dugun sistemaren erantzuna, 1. mailako jauzi-itxura duen sarrera baten aurrean.

Aurreko programaren bitartez,  $a$  eta  $b$  parametroen zenbatespen bana eta 11.3 irudia lortu ditugu.

$$[v(N)]^T = [\hat{a}, \hat{b}] = [0,5; 7,5]$$

Beraz, laginean inolako perturbaziorik izango ez bagenu eta erabilitako ereduak sistema osorik deskribatuko balu, erregresio linealaren bitartez, parametroak modu egokian zenbatetsi ahal izango genuke. Ariketa honetan hala izan da. Dena den, errealitatean oso zaila da sistema bat osorik azaltzen duen eredu bat proposatzea. Bestalde, laginean beti neurketa-azaroak izaten ditugu; ondorioz, ezin izaten da sistemaren parametroak zehaztasunez kalkulatu. Azkenik, proposatutako erregresio linealaren behaketa-matrizearen heina zenbatetsi beharreko parametro kopuruaren baliokidea da. Kasu honetan, bi parametro baino ez ditugu; beraz, suposatu dugu

behaketa-matrizearen heina 2 dela. Baina hori ez da sarrera mota guztietarako betetzen. Har dezagun adibide bat: sarrerako lagin guztiak nuluak direla joko dugu. Sarrerak sistema kitzikatzen ez duenez, irteera ere nulua izango da edozein  $k$  aldiunetarako. Horrenbestez, behaketa-matrizea zeroz osatutako matrize bat izango da eta ezingo dugu inolako zenbatespenik egin laginekin. Beraz, beti kitzikatu behar dugu sistema behaketa-matrizearen heina ahalik eta handiena izan dadin, hots, behaketa-matrizearen heina  $P$  izan dadin. Beraz, gutxienez  $P$  laginketa egin behar ditugu, behaketa-matrizearen heina gutxienez  $P$  izan dadin.

## 11.5 KARRATU TXIKIEN HAZTATUEN METODOA

11.4 atalean karratu txikiaren metodoa azaldu dugu. Metodo horrek indar edo garrantzi bera ematen dio aldiune bakoitzean dugun  $e(k)$  erroreari. Dena den, identifikatu beharreko sistemaren parametroak denborarekin aldatzen badira, edo lan-puntua aldatzen bada, komeni da aspaldi igarotako laginei lagin berriei baino garrantzi gutxiago ematea. Horretarako, karratu txikiaren haztatuen metodoa definituko dugu. Defini dezagun, horrenbestez, teorema hau.

### 11.2 teorema

Karratu txikiaren haztatuen metodoan oinarrituz,  $[\hat{v}(N)]$  zenbatetsi beharreko parametroen bektoreak berdintza hau betetzen du.

$$[\hat{v}(N)] = \left( [\Phi(N)]^T [Q(N)] [\Phi(N)] \right)^{-1} [\Phi(N)]^T [Q(N)] [y(N)] \quad (11.12)$$

Non:

1.-  $[\Phi(N)]$  behaketa-matrizea da, eta  $P$  da horren heina.

$$[\Phi(N)] = \begin{bmatrix} \phi_{0,1} & \phi_{0,2} & \dots & \phi_{0,p} \\ \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \dots & \phi_{1,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{N,1} & \phi_{N,2} & \dots & \phi_{N,p} \end{bmatrix}$$

2.- Ereduen irteera-laginekin osatutako bektorea da.

$$[y(N)]^T = [y(0), y(1), \dots, y(N)]$$

3.- Ereduaren parametroekin osatutako bektorea da.

$$[\hat{\mathbf{v}}(N)]^T = [\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_p]$$

4.-  $[Q(N)]$  oroitzapen-matrizea da,  $\lambda$  oroitzapen-parametro baten mendekoa, eta matrize diagonal bat da. Oroitzapen-parametro hori 0 eta 1 artean dago. Matrize horren bitartez, aspaldiko erroreek errore berriagoek baino indar edo garrantzi txikiagoa izango dute.

$$0 < \lambda < 1$$

$$[Q(N)] = \begin{bmatrix} \lambda^N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{N-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{N-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (11.13)$$

*Egiaztapena:*

Azken teorema hori frogatzeko, lehenik ahal eta txikiena egin nahi dugun funtzioa definituko dugu. Gogoan izan behar dugu txikitu beharreko funtzioa errore karratuen mende egon behar duela errore positiboek eta negatiboek konpentsa ez daitezten. Bestalde, ahalik eta txikiena egin behar dugun funtzioak garrantzi handiagoa ematen die errore berrienei aspaldiko erroreei baino. Hori guztia kontuan hartzen duen funtziotako bat proposatuko dugu.

$$G([\mathbf{v}(N)]) = \|\mathbf{e}(N)\|_2^2 = \sum_{i=0}^{i=N} \lambda^{N-i} \mathbf{e}^2(i) = \sum_{i=0}^{i=N} \lambda^{N-i} \left( y(i) - \sum_{j=1}^{j=p} \phi_{i,j} v_j \right)^2$$

Aurreko funtzioan agertzen diren aldagaiak hauek dira:

- 1.-  $[v(N)]$  parametro-bektorea.  $P$  parametro ditugunez, bektore honek  $P$  errenkada ditu eta zutabe bakarra. Bektore honetako  $v_j$  osagai bakoitza ere duaren parametro bat da.
- 2.-  $[e(N)]$  auresate-errorea. Bektore honek  $N + 1$  errenkada ditu eta zutabe bakarra,  $i = 0$  aldiunetik  $i = N$  aldiunera ditugun laginak kontuan hartzen ditugulako. Bektore honen  $e(i)$  osagai bakoitza  $i$  aldiunean sortutako  $i$ -garren errorea da.
- 3.-  $\lambda$ , oroitzapen-parametroa. Parametro honek 0 eta 1 arteko balioak hartzen ditu. Parametro honen bitartez,  $i = N$  aldiunetik gero eta urrunago dauden laginak gero eta indar gutxiago izango dute:  $e(0)$  erroreak  $\lambda^N$  gaiaz biderkatuta dago,

$\mathbf{e}(1) \lambda^{N-1}$ , eta  $\mathbf{e}(N-1)$  errorea, berriz,  $\lambda$  parametroaz soilik. Teknika honen bitartez, errore berrienak eragin handiagoa dute  $G$  funtzioan.

- 4.-  $[y(N)]$  irteera-bektorea. Bektore honek  $N+1$  errenkada ditu eta zutabe bakarra. Bektore honen  $y(i)$  osagai bakoitza ereduaren  $i$  aldiuneko irteera da.
- 5.-  $G: \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}$ . Minimizatu beharreko funtzioa da. Minimizazio hori egiteko, karratu txikien irizpidean oinarritzen gara. Metodo hau aurretate-errorearen norma euklidestarra minimizatzean datza.
- 6.-  $[\Phi(N)]_{(N+1) \times P}$ . Behaketa-matrizeak  $N+1$  errenkada eta  $P$  zutabe ditu. Gogoan izan behar dugu  $\phi_{i,j}$  koefizientea, berriz,  $[\Phi(N)]_{(N+1) \times P}$  matrizeko  $i$ -garren errenkadakoa eta  $j$ -garren zutabeko elementua dela. Ereduen  $y(i)$  irteera honela kalkula daiteke  $[\Phi(N)]_{(N+1) \times P}$  behaketa-matrizearen elementuen arabera.

$$y(i) = \sum_{j=0}^{j=N} \phi_{i,j} v_j + \mathbf{e}(i)$$

$G$  funtzioa ahalik eta txikiena egiten duen  $[\hat{v}(N)]$  parametro-bektorea kalkulatzeko,  $\hat{v}_i$  deribatuko dugu zenbatetsi behar dugun parametro bakoitzeko, eta zerora berdinduko dugu.

$$\frac{\partial G}{\partial v_q} = -2 \sum_{i=0}^{i=N} \left[ \lambda^{N-i} \left( y(i) - \sum_{j=1}^{j=P} \phi_{i,j} \hat{v}_j \right) \phi_{i,q} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{i=N} \left[ \lambda^{N-i} \phi_{i,q} y(i) \right] = \sum_{i=0}^{i=N} \left[ \lambda^{N-i} \phi_{i,q} \left( \sum_{j=1}^{j=P} \phi_{i,j} \hat{v}_j \right) \right]$$

$\hat{v}_i$  parametro bakoitzeko ekuazio bat lortuko dugu. Ekuazio horiek matrize eran idatziko ditugu. Horretarako, aurreko ekuazioaren eskuineko atalak matrize eran adieraziko ditugu.

$$\sum_{i=0}^{i=N} \left[ \lambda^{N-i} \phi_{i,q} y(i) \right] \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{i=N} \phi_{i,1} \lambda^{N-i} y(i) \\ \sum_{i=0}^{i=N} \phi_{i,2} \lambda^{N-i} y(i) \\ \dots \\ \sum_{i=0}^{i=N} \phi_{i,p} \lambda^{N-i} y(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{0,1} & \phi_{1,1} & \dots & \phi_{N,1} \\ \phi_{0,2} & \phi_{1,2} & \dots & \phi_{N,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{0,p} & \phi_{1,p} & \dots & \phi_{N,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{N-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{N-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(N) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{i=N} \phi_{i,1} \lambda^{N-i} y(i) \\ \sum_{i=0}^{i=N} \phi_{i,2} \lambda^{N-i} y(i) \\ \dots \\ \sum_{i=0}^{i=N} \phi_{i,p} \lambda^{N-i} y(i) \end{bmatrix} = [\Phi(N)]^T [Q(N)] [y(N)]$$

Non  $[\Phi(N)]^T$  behaketa-matrize iraulia baita, eta  $[Q(N)]$  oroitzapen-matrizea. Bestalde, aurreko ekuazioaren ezkerreko atalak matrize eran adierazita, hau lortuko dugu.

$$\sum_{i=0}^{i=N} \left[ \lambda^{N-i} \phi_{i,q} \left( \sum_{j=1}^{j=p} \phi_{i,j} \hat{v}_j \right) \right] \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{i=N} \left[ \lambda^{N-i} \phi_{i,q} \left( \sum_{j=1}^{j=p} \phi_{i,j} \hat{v}_j \right) \right] \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{0,1} & \phi_{1,1} & \dots & \phi_{N,1} \\ \phi_{0,2} & \phi_{1,2} & \dots & \phi_{N,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{0,p} & \phi_{1,p} & \dots & \phi_{N,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{N-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{N-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{j=p} \phi_{0,j} \hat{v}_j \\ \sum_{j=1}^{j=p} \phi_{1,j} \hat{v}_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{j=p} \phi_{N,j} \hat{v}_j \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{0,1} & \phi_{1,1} & \dots & \phi_{N,1} \\ \phi_{0,2} & \phi_{1,2} & \dots & \phi_{N,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{0,p} & \phi_{1,p} & \dots & \phi_{N,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{N-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{N-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{0,1} & \phi_{0,2} & \dots & \phi_{0,p} \\ \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \dots & \phi_{1,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{N,1} & \phi_{N,2} & \dots & \phi_{N,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \dots \\ \hat{v}_p \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{i=N} \left[ \lambda^{N-i} \phi_{i,1} \left( \sum_{j=1}^{j=p} \phi_{i,j} \hat{v}_j \right) \right] \\ \sum_{i=0}^{i=N} \left[ \lambda^{N-i} \phi_{i,2} \left( \sum_{j=1}^{j=p} \phi_{i,j} \hat{v}_j \right) \right] \\ \dots \\ \sum_{i=0}^{i=N} \left[ \lambda^{N-i} \phi_{i,p} \left( \sum_{j=1}^{j=p} \phi_{i,j} \hat{v}_j \right) \right] \end{bmatrix} = [\Phi(N)]^T [Q(N)] [\Phi(N)] [\hat{v}(N)]$$

Non  $[\Phi(N)]$  behaketa-matrizea baita,  $[v(N)]^T$  zenbatetsi beharreko parametroen bektore iraulia eta  $[y(N)]^T$  ereduaren irteera-laginen bektore iraulia.

$$[\Phi(N)] = \begin{bmatrix} \phi_{0,1} & \phi_{0,2} & \dots & \phi_{0,p} \\ \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \dots & \phi_{1,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{N,1} & \phi_{N,2} & \dots & \phi_{N,p} \end{bmatrix}$$

$$[y(N)]^T = [y(0), y(1), \dots, y(N)]$$

$$[v(N)]^T = [v_1, v_2, \dots, v_p]$$

Eskuineko eta ezkerreko atalak berdinduta, berdintza hori lortuko dugu. Ekuazio horretan, zenbatetsi behar ditugun parametroez osatutako  $[\hat{v}(N)]$  bektorea bakartu behar dugu. Berdintzak matrize-izaera du. Horrenbestez, 11.2 teorema frogatuta geratuko da.

$$[\Phi(N)]^T [Q(N)] [y(N)] = [\Phi(N)]^T [Q(N)] [\Phi(N)] [\hat{v}(N)] \Rightarrow$$

$$[\hat{v}(N)] = \left( [\Phi(N)]^T [Q(N)] [\Phi(N)] \right)^{-1} [\Phi(N)]^T [Q(N)] [y(N)]$$

## 11.6 KARRATU TXIKIEN METODO ERREPIKARIA

Erregresio lineal arrunt baten  $y(k)$  neurri-bektoreak  $N$  laginak biltzen ditu. Erregresio lineal baten bitartez, parametro zenbatetsiak lortzen dira (11.10) formularen bidez. Beraz, erregresio linealak lagin guztiak blokean maneiatzen ditu. Praktikan, neurriak sekuentzian iristen dira denbora errealean; hots, erloju-kolpetik erloju-kolpera iristen dira. Beraz, beste neurri bat baldin badago erabilgarri, beste laginketa bat egin

dugulako, (11.10) formularen kalkulu guztiak egin beharko ditugu berriz ere, neurri berri hori aprobeixatu nahi badugu bederen.

Hori eginez gero, ordea, denbora asko galduko dugu alferrik, aurretik egindako kalkulu guztiak ez baitigute ezertarako balio. Bestetik, laginak pilatu ahala, handitu egiten dira kalkulu kopurua eta behar dugun memoriaren tamaina, behaketa-matrizeak dituen errenkada kopurua laginekin batera handitzen delako. Beraz, galdera hau datorkigu burura: antola al daiteke algoritmo bat zeinaren bidez,  $N$  aldiunean lortutako parametroen zenbatespenak erabiliz,  $N + 1$  aldiuneko parametroen zenbatespenak lortzea ahalbidetuko digun, behaketa-matrizea handitu ez dadin?

Beraz, laginketa-periodo bakoitzean, neurri guztiak blokean landu beharrean, aldiune bakoitzean lortutako lagin batetik atera daitekeen informazioa erabiliko dugu eguneratze-algoritmo baten bitartez. Algoritmo horrek aurreko aldiunean lortutako zenbatespenak erabili beharko ditu, aurretik emandako laginak kontuan hartu ahal izateko. Algoritmo horrek hasieratze egokia izan beharko du lana ongi egiteko.

Lehen aipatutako algoritmoa garatzeko, erregresio linealetik abiatuko gara. Demagun erregresio lineal bat lortu nahi dugula  $k + 1$  aldiunearekiko. Zenbatetsi nahi ditugun parametroen  $[\hat{v}(k+1)]$  bektorea honela kalkula dezakegu.

$$\begin{aligned} [y(k+1)] &= [\Phi(k+1)][\hat{v}(k+1)] + [e(k+1)] \Big|_{\|e(k+1)\|^2 \text{ txikinenarekin}} \Rightarrow \\ [\hat{v}(k+1)] &= \left( [\Phi(k+1)]^T [\Phi(k+1)] \right)^{-1} [\Phi(k+1)]^T [y(k+1)] \end{aligned} \quad (11.14)$$

Sinplifikatzearren, onartuko dugu beste behaketa bat dagoela erabilgarri laginketa-periodo bakoitzean. Erregresio horrek lagin guztiak blokean erabiltzen ditu. Erregresio lineal errepikari bat definitzeko, honela idatziko ditugu erregresio linealean ageri diren bektoreak: alde batetik,  $k$  aldiunera arte lortutako laginak kontuan hartzen dituzten matrizeak definituko ditugu; beste aldetik,  $k$  aldiunean lortutako laginetan oinarritutako matrizeak definituko ditugu. Orain definitutako matrizeak erabiliko ditugu ondoren.

$$\begin{aligned} [y(k+1)] &= \begin{bmatrix} [y(k)]_{k \times 1} \\ y(k+1) \end{bmatrix}_{(k+1) \times 1} \\ [\Phi(k+1)] &= \begin{bmatrix} [\Phi(k)]_{k \times P} \\ [\phi(k+1)]_{1 \times P}^T \end{bmatrix}_{(k+1) \times P} \end{aligned}$$

$$[\mathbf{e}(k+1)] = \begin{bmatrix} [\mathbf{e}(k)]_{k \times 1} \\ \mathbf{e}(k+1) \end{bmatrix}_{(k+1) \times 1}$$

Gogoan izan behar dugu  $k+1$  aldiuneko  $y(k+1)$  irteera honela idatz daitekeela

$$y(k+1) = \sum_{j=1}^{j=p} \phi_{k+1,j} v_j + e(k+1) \quad (11.15)$$

Non  $\phi_{k+1,j}$  aldagaia baita  $[\Phi(k+1)]$  behaketa-matrizeko  $k+1$  errenkadako eta  $j$  zutabeko elementua. Beraz,  $\phi_{k+1,j}$  elementuak  $k+1$  aldiuneko irteerak  $v_j$  parametroarekiko duen mendekotasuna finkatzen du.  $k+1$  aldiuneko  $\phi_{k+1,j}$   $P$  aldagaiekin  $[\phi(k+1)]_{1 \times P}^T = [\phi_{k+1,1} \quad \phi_{k+1,2} \quad \dots \quad \phi_{k+1,P}]$  bektorea defini dezakegu.

Algoritmo errepikaria prestatzearen oinarria da lehen aipatutako bereizketa erabiltzea kalkulu guztietan. Beraz,  $k+1$  aldiunea baino lehenagoko laginak  $k$  aldiuneko zenbatespenarekin laburbilduko dira, eta  $k+1$  aldiuneko lagina  $k+1$  aldiuneko zenbatespenak eguneratzeko erabiliko dugu.

Erregresio lineal errepikaria frogatzen hasi aurretik, ondoren datorren teorema frogatuko dugu. Teoremari *matrize-inbertsioaren lema* esaten zaio, eta benetan garrantzitsua da zenbatespen-teorian.

### 11.3 teorema

$[A]$ ,  $[C]$  eta  $[C]^{-1} + [D][A]^{-1}[B]$  matrizeak alderantzikagarriak badira, matrize-berdintza hau betetzen da.

$$([A] + [B][C][D])^{-1} = [A]^{-1} - [A]^{-1}[B]([C]^{-1} + [D][A]^{-1}[B])^{-1}[D][A]^{-1} \quad (11.16)$$

*Egiaztapena:*

Teorema hau ere erraz froga daiteke. Lehenik, biderka dezagun aurreko berdintzako eskuineko aldea  $[A] + [B][C][D]$  matrizeaz. Ondoren, berdintzan elkarrekin jarriko ditugu  $([C]^{-1} + [D][A]^{-1}[B])^{-1}[D][A]^{-1}$  gaia duten atalak. Azkenik atal horietatik  $[B][C]$  matrizeak faktore komun gisa aterako ditugu. Ikus daitekeenez, atal guztiak desagertzen dira  $[I]$  matrizea izan ezik. Gogoan izan behar dugu  $[I]$  matrizea unitarioa dela, hots, diagonal nagusiko elementu guztiak 1 dituen eta beste

elementu guztiak 0 dituen matrize bat dela  $[I]$  matrizea. Horrenbestez, esan dezakegu 11.3 teorema frogatuta dagoela.

$$\begin{aligned}
 & ([A] + [B][C][D]) \left( [A]^{-1} - [A]^{-1}[B]([C]^{-1} + [D][A]^{-1}[B])^{-1}[D][A]^{-1} \right) = \\
 & [I] - [B]([C]^{-1} + [D][A]^{-1}[B])^{-1}[D][A]^{-1} + [B][C][D][A]^{-1} \\
 & - [B][C][D][A]^{-1}[B]([C]^{-1} + [D][A]^{-1}[B])^{-1}[D][A]^{-1} = \\
 & [I] + [B][C][D][A]^{-1} - ([B] + [B][C][D][A]^{-1}[B])([C]^{-1} + [D][A]^{-1}[B])^{-1}[D][A]^{-1} = \\
 & [I] + [B][C][D][A]^{-1} - [B][C]([C]^{-1} + [D][A]^{-1}[B])([C]^{-1} + [D][A]^{-1}[B])^{-1}[D][A]^{-1} = \\
 & [I] + [B][C][D][A]^{-1} - [B][C][D][A]^{-1} = [I] \Rightarrow \\
 & ([A] + [B][C][D])^{-1} = \left( [A]^{-1} - [A]^{-1}[B]([C]^{-1} + [D][A]^{-1}[B])^{-1}[D][A]^{-1} \right)
 \end{aligned}$$

#### 11.4 teorema

Demagun  $[\Phi(k)]$  behaketa-matrizea  $P$  heinekoa dela. Parametro zenbatetsien bektoreak ekuazio errepikari hau egiaztatzen du:

$$[\hat{v}(k+1)] = [\hat{v}(k)] + [G(k+1)](y(k+1) - [\phi(k+1)]^T [\hat{v}(k)]) \quad (11.17)$$

Non:

$$[G(k+1)] = \frac{1}{(1 + [\phi(k+1)]^T [P(k)] [\phi(k+1)])} ([P(k)] [\phi(k+1)]) \quad (11.18)$$

$$[P(k+1)] = ([I] - [G(k+1)][\phi(k+1)]^T) [P(k)] \quad (11.19)$$

11.4 teoremaren arabera, karratu txikien metodo errepikariaren algoritmoa ezin da aplikatu,  $[\Phi(k)]$  behaketa-matrizearen heina  $p$  ez bada. Hasieran,  $[\Phi(k)]$ -k ez du  $P$  errenkadarik; hala, bada, algoritmoak hasieran hipotesi hori urratzen du. Hala ere, algoritmoa abiatzeko, demagun  $k_0$  aldiunean  $[\Phi(k_0)]$ -ren heina  $P$  dela. Orduan:

$$\underline{P}(k_0) = [\Phi^T(k_0) \Phi(k_0)]^{-1} \quad (11.20)$$

$k_0$  aldiune horretatik aurrera, algoritmo errepikaria aplikatu ahal izango dugu,  $[\Phi(k)]$  behaketa-matrizearen heina  $P$  delako.

$$[\hat{v}(k_0)] = [P(k_0)][\Phi(k_0)]^T [y(k_0)] \quad (11.21)$$

Hastapen-kondizio horiekin,  $k = k_0, k_0 + 1 \dots$  delarik, hurrenez hurren, erabil daiteke (11.17), (11.18) eta (11.19) algoritmo errepikaria. Ikusi dugunez, *Bach* prozesua erabiltzen da hasieratze gisa.

*Egiaztapena:*

$k + 1$  aldiunean  $[\hat{v}(k + 1)]$  zenbatetsi behar ditugun parametroez osatutako bektorea kalkulatzeko, berdintza hau aplikatu behar dugu. Gogoan izan behar dugu  $[\Phi(k)]$  behaketa-matrizea  $p$  heinekoa dela jo dugula.

$$[\hat{v}(k + 1)] = \left( [\Phi(k + 1)]^T [\Phi(k + 1)] \right)^{-1} [\Phi(k + 1)]^T [y(k + 1)]$$

$[\Phi(k)]$  behaketa-matrizea  $p$  heinekoa bada,  $[\Phi(k + 1)]$  behaketa-matrizea ere  $P$  heinekoa izango da.  $[\Phi(k + 1)]$  behaketa-matrizea  $[\Phi(k)]$  matrizearen eta  $[\phi(k + 1)]_{1 \times P}^T = [\phi_{k+1,1} \quad \phi_{k+1,2} \quad \dots \quad \phi_{k+1,P}]$  bektorearen bidez osatuta dago.

$$[\Phi(k + 1)] = \begin{bmatrix} [\Phi(k)]_{k \times P} \\ [\phi(k + 1)]_{1 \times P}^T \end{bmatrix}_{(k+1) \times P}$$

Bestalde, ereduaren irteera-laginez osatutako  $[y(k + 1)]$  bektorea  $[y(k)]$  bektorearen eta  $y(k + 1)$  laginearen arabera idatz daiteke.

$$[y(k + 1)] = \begin{bmatrix} [y(k)]_{k \times 1} \\ y(k + 1) \end{bmatrix}_{(k+1) \times 1}$$

$[y(k + 1)]$  bektorea eta  $[\Phi(k + 1)]$  matrizea  $k + 1$  aldiuneko erregresio linealean ordezkatzuz gero, emaitza hau lortuko dugu.

$$[\hat{v}(k + 1)] = \left( \begin{bmatrix} [\Phi(k)] \\ [\phi(k + 1)]^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [\Phi(k)] \\ [\phi(k + 1)]^T \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} [\Phi(k)]_{k \times P} \\ [\phi(k + 1)]_{1 \times P}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [y(k)]_{k \times 1} \\ y(k + 1) \end{bmatrix}$$

Azken berdintza landuko dugu, matrize iraulia bere baliokideaz ordezkatzuz.

$$\begin{aligned}
[\hat{v}(k+1)] &= \left( \left[ [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] + [\phi(k+1)][\phi(k+1)]^T \right] \right)^{-1} \begin{bmatrix} [\Phi(k)]_{k \times P}^T \\ [\phi(k+1)]_{1 \times P}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} [y(k)]_{k \times 1} \\ [y(k+1)] \end{bmatrix} \Rightarrow \\
[\hat{v}(k+1)] &= \left( \left[ [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] + [\phi(k+1)][\phi(k+1)]^T \right] \right)^{-1} \left[ [\Phi(k)]^T [\phi(k+1)] \right] \begin{bmatrix} [y(k)] \\ [y(k+1)] \end{bmatrix} \Rightarrow \\
[\hat{v}(k+1)] &= \left( \left[ [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] + [\phi(k+1)][\phi(k+1)]^T \right] \right)^{-1} \left[ [\Phi(k)]^T [y(k)] + [\phi(k+1)]y(k+1) \right] \Rightarrow \\
[\hat{v}(k+1)] &= \left( [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] \right)^{-1} [\Phi(k)]^T [y(k)] + \\
&\quad \left( \left( \left[ [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] + [\phi(k+1)][\phi(k+1)]^T \right] \right)^{-1} - \left( [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] \right)^{-1} \right) [\Phi(k)]^T [y(k)] + \\
&\quad \left( \left[ [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] + [\phi(k+1)][\phi(k+1)]^T \right] \right)^{-1} [\phi(k+1)]y(k+1) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$k$  aldiuneko erregresio lineala honela idatz daiteke:

$$[\hat{v}(k)] = \left( [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] \right)^{-1} [\Phi(k)]^T [y(k)]$$

Erregresio hori aurreko berdintzan ordezkatzuz gero, emaitza hau lortuko dugu.

$$\begin{aligned}
[\hat{v}(k+1)] &= [\hat{v}(k)] + \left( \left( \left[ [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] + [\phi(k+1)][\phi(k+1)]^T \right] \right)^{-1} - \left( [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] \right)^{-1} \right) \\
&\quad \left[ [\Phi(k)]^T [y(k)] \right] + \left( \left[ [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] + [\phi(k+1)][\phi(k+1)]^T \right] \right)^{-1} [\phi(k+1)]y(k+1) \Rightarrow
\end{aligned}$$

Azter dezagun aurreko berdintzaren eskuineko ataleko bigarren gaia, ordezeko hobea lortu ahal izateko.

$$\begin{aligned}
&\left( \left( \left[ [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] + [\phi(k+1)][\phi(k+1)]^T \right] \right)^{-1} - \left( [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] \right)^{-1} \right) [\Phi(k)]^T [y(k)] = \\
&\quad \left( \left[ [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] + [\phi(k+1)][\phi(k+1)]^T \right] \right)^{-1} \\
&\quad \left( [I] - \left( \left[ [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] + [\phi(k+1)][\phi(k+1)]^T \right] \right) \left( [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] \right)^{-1} \right) [\Phi(k)]^T [y(k)] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \left[ \Phi(k) \right]^T \left[ \Phi(k) \right] + \left[ \phi(k+1) \right] \left[ \phi(k+1) \right]^T \right)^{-1} \\
& \left( \left[ I \right] - \left[ I \right] - \left( \left[ \phi(k+1) \right] \left[ \phi(k+1) \right]^T \right) \left( \left[ \Phi(k) \right]^T \left[ \Phi(k) \right] \right)^{-1} \right) \left[ \Phi(k) \right]^T \left[ y(k) \right] = \\
& - \left( \left[ \Phi(k) \right]^T \left[ \Phi(k) \right] + \left[ \phi(k+1) \right] \left[ \phi(k+1) \right]^T \right)^{-1} \left( \left( \left[ \phi(k+1) \right] \left[ \phi(k+1) \right]^T \right) \left( \left[ \Phi(k) \right]^T \left[ \Phi(k) \right] \right)^{-1} \right) \\
& \left[ \Phi(k) \right]^T \left[ y(k) \right] = - \left( \left[ \Phi(k) \right]^T \left[ \Phi(k) \right] + \left[ \phi(k+1) \right] \left[ \phi(k+1) \right]^T \right)^{-1} \left[ \phi(k+1) \right] \left[ \phi(k+1) \right]^T \left[ \hat{v}(k) \right]
\end{aligned}$$

Ekuazio hori aurreko berdintza multzoan ordezkaturata, honako hau lortuko dugu.

$$\begin{aligned}
\left[ \hat{v}(k+1) \right] &= \left[ \hat{v}(k) \right] - \left[ G(k+1) \right] \left[ \phi(k+1) \right]^T \left[ \hat{v}(k) \right] + \left[ G(k+1) \right] y(k+1) \Rightarrow \\
\left[ \hat{v}(k+1) \right] &= \left[ \hat{v}(k) \right] + \left[ G(k+1) \right] \left( y(k+1) - \left[ \phi(k+1) \right]^T \left[ \hat{v}(k) \right] \right)
\end{aligned}$$

Non  $\left[ G(k+1) \right]$  irabazi-matrizeak definizio hau baitu.

$$\left[ G(k+1) \right] = \left( \left[ \Phi(k) \right]^T \left[ \Phi(k) \right] + \left[ \phi(k+1) \right] \left[ \phi(k+1) \right]^T \right)^{-1} \left[ \phi(k+1) \right]$$

Irabazi-matrizea  $k+1$  aldiunean kalkulatu ahal izateko,  $k$  aldiuneko matrizeen mende idazteko  $\left[ P(k+1) \right]$  matrizea definituko dugu.

$$\begin{aligned}
\left[ P(k+1) \right] &= \left( \left[ \Phi(k) \right]^T \left[ \Phi(k) \right] + \left[ \phi(k+1) \right] \left[ \phi(k+1) \right]^T \right)^{-1} = \left( \left[ \begin{array}{c} \left[ \Phi(k) \right]^T \\ \left[ \phi(k+1) \right]^T \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \left[ \Phi(k) \right] \\ \left[ \phi(k+1) \right] \end{array} \right] \right)^{-1} \Rightarrow \\
\left[ P(k+1) \right] &= \left( \left[ \begin{array}{c} \left[ \Phi(k) \right]^T \left[ \phi(k+1) \right] \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \left[ \Phi(k) \right] \\ \left[ \phi(k+1) \right]^T \end{array} \right] \right)^{-1} = \\
&= \left( \left[ \Phi(k) \right]^T \left[ \Phi(k) \right] + \left[ \phi(k+1) \right] \left[ \phi(k+1) \right]^T \right)^{-1} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$\left[ P(k+1) \right]$  matrizea kalkulatzeko, 11.3 teorema aplikatuko diogu aurreko berdintzari, ordezkapen hauek eginez:  $\left[ A \right] = \left[ \Phi(k) \right]^T \left[ \Phi(k) \right]$ ,  $\left[ B \right] = \left[ \phi(k+1) \right]$ ,  $\left[ C \right] = 1$  eta  $\left[ D \right] = \left[ \phi(k+1) \right]^T$ .

$$[P(k+1)] = [P(k)] - \frac{1}{1 + [\phi(k+1)]^T [P(k)] [\phi(k+1)]} ([P(k)] [\phi(k+1)] [\phi(k+1)]^T [P(k)])$$

$$\text{Non } [P(k)] = ([\Phi(k)]^T [\Phi(k)])^{-1} \text{ baita.}$$

Gogoan izan behar dugu  $[\phi(k)]^T [P(k)] [\phi(k)]$  konstante bat besterik ez dela. Horrenbestez,  $[G(k+1)]$  irabazi-matrizea honela idatz dezakegu,  $[P(k+1)]$  matrizea ordezkatzuz.

$$[G(k+1)] = [P(k)] [\phi(k+1)] - \frac{([P(k)] [\phi(k+1)] [\phi(k+1)]^T [P(k)]) [\phi(k+1)]}{1 + [\phi(k+1)]^T [P(k)] [\phi(k+1)]} \Rightarrow$$

$$[G(k+1)] = \frac{[P(k)] [\phi(k+1)]}{1 + [\phi(k+1)]^T [P(k)] [\phi(k+1)]}$$

$[P(k+1)]$  matrizea irabazi-matrizearen mende utziz gero, emaitza hau lortuko dugu.

$$[P(k+1)] = [P(k)] - [G(k+1)] [\phi(k+1)]^T [P(k)] \Rightarrow$$

$$[P(k+1)] = ([I] - [G(k+1)] [\phi(k+1)]^T) [P(k)]$$

Horrenbestez, (11.17), (11.18) eta (11.19) formulak frogatu ditugu azkenik. Hala ere, arazo bat dugu konpontzeko oraindik: algoritmoa abiatzean ez dugu behar adina datu,  $k = 0$  aldiunean laginketa bakarra dugulako. Beraz, behaketa-matrizeak ez du izango behar duen heina. Arazo hori konpontzeko, bi bide ditugu. Batetik, behar adinbat lagin izan arte itxaron dezakegu, eta  $k_0$  aldiunean parametroen zenbatespena egin behaketa-matrizearekin eta iteera-bektorearekin. Aukera horrek ez digu parametroen zenbatespenik emango  $k_0$  aldiunera arte. Beraz, behaketa-matrizearen heina  $P$  izan arte ez dugu zenbatespen egoki bat izango. Lehen zenbatespen hori (11.20) eta (11.21) formulen bitartez lortu behar dugu. Bigarren aukera da  $[P(0)]$  matrizea eta  $[\hat{v}(0)]$  bektorea balio jakin batzuekin hasieratzea.  $[P(0)]$  matrizeak eta  $[\hat{v}(0)]$  bektoreak balio egokiak badituzte, ez dute eragin handirik izango algoritmo errepikarian denbora bat igaro eta gero  $[\hat{v}(k)]$  bektorea modu egokian lortuko da. Azken aukera hori aztertuko dugu ondoren.

Lehenik, algoritmoa abiatzeko, hasierako balio hauek hartuko ditugu.  $[P(0)]$  matrizearen elementu guztiak nuluak dira, eta diagonal nagusiko elementuak  $\beta$  balioa dute.  $\beta$  balio hori oso zenbaki handia da, zenbatetsi beharreko parametroen gain eragin ahalik eta txikiena izan dadin. Bestalde, itxura hori duen matrize baten heina  $P$  da, bere determinantea  $\beta^P$  delako. Gogoan izan behar dugu  $\beta$  oso zenbaki positibo handia dela eta determinantea ez dela inoiz negatiboa izango.

$$[P(0)] = \beta [I]$$

$$\beta \gg 0$$

Bestalde,  $[\hat{v}(0)]$  parametroen bektoreari hasierako balio bat eman behar zaio. Bi aukera ditugu bektore hori hasieratzeko. Batetik, zeroz osatutako bektore batekin hasieratu dezakegu eta bukaerako balioan ez dute hainbesteko eraginik izango. Bestetik, sarritan ezagutzen ditugu parametroek har ditzaketen balio posible batzuk (balio horiek ingeniariak duen eskarmentuaren arabera da). Balio horiek parametroen benetako balioetatik gertu egongo direnez,  $[\hat{v}(0)]$  parametroaren osagaien hasierako balio egoki batzuk izan daitezke, algoritmoaren parametroak lortzen laguntzen ari garelako. Beraz, algoritmoa, kasu honetan, azkarrago helduko da benetako balioetara (edo karratu txikiaren irizpidearen arabera balio egokienetara).

Algoritmo errepikari horretan hasierako balioen eragina ikusi ahal izateko,  $k = 0$  aldiunetik hasiko gara. Zenbatetsi beharreko parametroen bektorea honela idatziko da:

$$[\hat{v}(0)]$$

$[P(0)]$  matrizea, berriz, beste era honetara:

$$[P(0)] = \beta [I]$$

Definizioz badakigu  $[P(k+1)] = \left( [\Phi(k+1)]^T [\Phi(k+1)] \right)^{-1}$  dela, eta, ondorioz, honako hau beteko dela:

$$[P(k+1)]^{-1} = \left( [\Phi(k+1)]^T [\Phi(k+1)] \right) = \left( [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] \right) + [\phi(k+1)][\phi(k+1)]^T \Rightarrow$$

$$[P(k+1)]^{-1} = [P(k)]^{-1} + [\phi(k+1)][\phi(k+1)]^T \Rightarrow$$

$$[P(1)]^{-1} = [P(0)]^{-1} + [\phi(1)][\phi(1)]^T \Rightarrow$$

$$[P(2)]^{-1} = [P(1)]^{-1} + [\phi(2)][\phi(2)]^T = [P(0)]^{-1} + [\phi(1)][\phi(1)]^T + [\phi(2)][\phi(2)]^T \Rightarrow$$

...

$$[P(2)]^{-1} = [P(0)]^{-1} + \begin{bmatrix} [\phi(1)][\phi(1)]^T \\ [\phi(2)][\phi(2)]^T \end{bmatrix} = [P(0)]^{-1} + [\Phi(2)]^T [\Phi(2)] \Rightarrow$$

$$[P(k+1)]^{-1} = [P(0)]^{-1} + [\Phi(k+1)]^T [\Phi(k+1)] \Rightarrow$$

$$[P(k+1)] = \left( [P(0)]^{-1} + [\Phi(k+1)]^T [\Phi(k+1)] \right)^{-1}$$

Algoritmoaren (11.17) ekuazioan,  $[G(k+1)] = [P(k+1)][\phi(k+1)]$  matrizea ordezkatzuz gero, honako hau lortuko dugu:

$$[\hat{v}(k+1)] = [\hat{v}(k)] + [P(k+1)][\phi(k+1)](y(k+1) - [\phi(k+1)]^T [\hat{v}(k)]) \Rightarrow$$

$$[P(k+1)]^{-1} [\hat{v}(k+1)] = [P(k+1)]^{-1} [\hat{v}(k)] + [\phi(k+1)](y(k+1) - [\phi(k+1)]^T [\hat{v}(k)])$$

Bestalde,  $[P(k+1)]^{-1} [\hat{v}(k)]$  bektorea honela idatz dezakegu:

$$[P(k+1)]^{-1} [\hat{v}(k)] = \left( [P(0)]^{-1} + [\Phi(k+1)]^T [\Phi(k+1)] \right) [\hat{v}(k)] \Rightarrow$$

$$[P(k+1)]^{-1} [\hat{v}(k)] = \left( [P(0)]^{-1} + [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] + [\phi(k+1)][\phi(k+1)]^T \right) [\hat{v}(k)] \Rightarrow$$

Azken ekuazio hori  $[P(k+1)]^{-1} [\hat{v}(k+1)]$  bektorearen ekuazioan sartuz gero, emaitza hau lortuko dugu:

$$[P(k+1)]^{-1} [\hat{v}(k+1)] = \left( [P(0)]^{-1} + [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] + [\phi(k+1)][\phi(k+1)]^T \right) [\hat{v}(k)]$$

$$+ [\phi(k+1)](y(k+1) - [\phi(k+1)]^T [\hat{v}(k)]) \Rightarrow$$

$$[P(k+1)]^{-1} [\hat{v}(k+1)] = \left( [P(0)]^{-1} + [\Phi(k)]^T [\Phi(k)] \right) [\hat{v}(k)] + [\phi(k+1)] y(k+1)$$

Aurreko ekuazioan  $k$  aldagaiari balio ezberdinak emanez gero, emaitza hau lortuko dugu:

$$\begin{aligned}
 h(k+1) &= [P(k+1)]^{-1} [\hat{v}(k+1)] \\
 k=0: [h(1)] &= [h(0)] + [\phi(1)] y(1) \\
 k=1: [h(2)] &= [h(1)] + [\phi(2)] y(2) \\
 k=2: [h(3)] &= [h(2)] + [\phi(3)] y(3) \\
 &\dots \\
 k=k: [h(k+1)] &= [h(k)] + [\phi(k+1)] y(k+1) \Rightarrow \\
 [h(k+1)] &= [h(0)] + [\phi(1)] y(1) + [\phi(2)] y(2) + \dots + [\phi(k+1)] y(k+1) \Rightarrow \\
 [h(k+1)] &= [h(0)] + \begin{bmatrix} [\phi(1)] & [\phi(2)] & \dots & [\phi(k+1)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(k+1) \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 [h(k+1)] &= [h(0)] + [\Phi(k+1)]^T [y(k+1)]
 \end{aligned}$$

$[h(k+1)]$  bektore laguntzailea bere balioaz ordezkatzuz gero, honako hau lortuko dugu:

$$\begin{aligned}
 [P(k+1)]^{-1} [\hat{v}(k+1)] &= [P(0)]^{-1} [\hat{v}(0)] + [\Phi(k+1)]^T [y(k+1)] \Rightarrow \\
 \left( [P(0)]^{-1} + [\Phi(k+1)]^T [\Phi(k+1)] \right) [\hat{v}(k+1)] &= \\
 [P(0)]^{-1} [\hat{v}(0)] + [\Phi(k+1)]^T [y(k+1)] &\Rightarrow [\hat{v}(k+1)] = \\
 \left( [P(0)]^{-1} + [\Phi(k+1)]^T [\Phi(k+1)] \right)^{-1} \left( [P(0)]^{-1} [\hat{v}(0)] + [\Phi(k+1)]^T [y(k+1)] \right)
 \end{aligned}$$

Beraz, honela idatz daiteke erregresio errepikaria hasierako kondizioen arabera:

$$[\hat{v}(k+1)] = \left( [P(0)]^{-1} + [\Phi(k+1)]^T [\Phi(k+1)] \right)^{-1} \left( [P(0)]^{-1} [\hat{v}(0)] + [\Phi(k+1)]^T [y(k+1)] \right)$$

non  $[\hat{v}(0)]$  baita zenbatetsi behar ditugun parametroen hasierako balioez osatutako bektorea, eta  $[P(0)]$ , berriz  $\beta[I]$  itxurako matrizea. Gogoan izan behar dugu  $\beta$  parametroak oso balio handiak dituela. Beraz,  $[P(0)]^{-1} = \beta^{-1}[I]$  matrizeak oso balio txikiak hartuko ditu eta ia ez du matrizeen gain eraginik izango behaketa-matrizeak

behar adina datu edo errenkada dituenean. Horrenbestez, behar adina denbora igaro eta gero, honela hasieratutako erregresio linealarekin lortzen dugun emaitzak eta erregresio arruntarekin lortutako emaitzak berdintzat jo ditzakegu.

$$\begin{aligned} [\hat{v}(k+1)] &= \left( \beta^{-1}[I] + [\Phi(k+1)]^T [\Phi(k+1)] \right)^{-1} \left( \beta^{-1}[I] [\hat{v}(0)] + [\Phi(k+1)]^T [y(k+1)] \right) \Rightarrow \\ [\hat{v}(k+1)] &= \left( [\Phi(k+1)]^T [\Phi(k+1)] \right)^{-1} \left( [\Phi(k+1)]^T [y(k+1)] \right) \end{aligned}$$

### 11.9 adibidea

Demagun 11.8 adibideko sistema kontrolatu nahi dugula; sistema horren transferentzia-funtzioak itxura hau du:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{bz}{(z-a)}$$

Aurreko adibidean bezala, tamalez, ez ditugu ezagutzen  $a$  eta  $b$  parametroak. Beraz, kontrola egin baino lehen  $a$  eta  $b$  parametroak zenbatetsi behar ditugu. Horrenbestez, karratu txikien bitartez lortuko ditugu  $a$  eta  $b$  parametroen zenbatespena. Baina, adibide honetan, erregresio errepikariaren bitartez zenbatetsi nahi ditugu  $a$  eta  $b$  parametroak.

Lehenik, transferentzia-funtzioa  $z$  aldagaiaren berreketa negatiboen bitartez adieraziko dugu, eta, ondoren, erregresio lineal baten eran idatziko dugu. Gogoan izan behar dugu laginketa-periodoa dela  $h$ .

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b}{(1-az^{-1})} \Rightarrow Y(z) = az^{-1}Y(z) + bU(z) \Rightarrow$$

$$y(kh) = ay(kh) + bu(kh) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(h) \\ \dots \\ y(Nh) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u(0) \\ y(0) & u(h) \\ \dots & \dots \\ y((N-1)h) & u(Nh) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Adibide honetan behaketa-matrizea irteera- eta sarrera-laginek osatzen dute. Kontuan izan behar dugu sistemaren hasierako kondizioa 0 dela, hots,  $y(-h) = 0$  dela.

$$[\Phi(N)] = \begin{bmatrix} 0 & u(0) \\ y(0) & u(h) \\ \dots & \dots \\ y((N-1)h) & u(Nh) \end{bmatrix}$$

$[y(N)]$  irteera-bektorea, berriz, honela idatziko dugu:

$$[y(N)]^T = [y(0) \ y(h) \ \dots \ y(Nh)]$$

Dena dela, erregresio errepikari baten bidez zenbatetsi nahi baditugu parametroak, (11.17), (11.18) eta (11.19) formulez baliatuko gara. Ekuazio horiek laginketa-periodo bakoitzean exekutatu behar ditugu mikroprozesadorean. Lehenik, aldiune horretako irabazi-matrizea lortu behar dugu. Ondoren, aldiune horretako parametroak zenbatetsi behar ditugu. Azkenik,  $[P(k+1)]$  matrizea kalkulatu behar dugu, laginketa-periodo honetan irabazi-matrizea kalkulatu ahal izateko.

1.- Irabazi-matrizea:

$$[G(k+1)] = \frac{1}{(1 + [\phi(k+1)]^T [P(k)] [\phi(k+1)])} ([P(k)] [\phi(k+1)]) \Rightarrow$$

$$[G(k+1)] = \frac{\begin{bmatrix} p_{1,1}(k) & p_{1,2}(k) \\ p_{2,1}(k) & p_{2,2}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ u(k+1) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 + [y(k) \ u(k+1)] \begin{bmatrix} p_{1,1}(k) & p_{1,2}(k) \\ p_{2,1}(k) & p_{2,2}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ u(k+1) \end{bmatrix} \end{bmatrix}}$$

2.- Parametroen zenbatespena:

$$\begin{bmatrix} \hat{a}(k+1) \\ \hat{b}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}(k) \\ \hat{b}(k) \end{bmatrix} + [G(k+1)] \left( y(k+1) - [y(k) \ u(k+1)] \begin{bmatrix} \hat{a}(k) \\ \hat{b}(k) \end{bmatrix} \right)$$

3.-  $[P(k+1)]$  matrizea eguneratzea:

$$[P(k+1)] = ([I] - [G(k+1)] [\phi(k+1)]^T) [P(k)] \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} p_{1,1}(k+1) & p_{1,2}(k+1) \\ p_{2,1}(k+1) & p_{2,2}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - [G(k+1)] [y(k) \ u(k+1)] \begin{bmatrix} p_{1,1}(k+1) & p_{1,2}(k+1) \\ p_{2,1}(k+1) & p_{2,2}(k+1) \end{bmatrix}$$

Dena dela, algoritmo hori abiatzeko,  $[P(0)]$  matrizea abiatu behar dugu eta parametroei hasierako balio bat eman behar zaie.  $[P(k)]$  matrizea matrize diagonal batekin hasieratuko dugu  $[P(0)] = \beta [I]$ .  $\beta$  parametroak 1.000 balioa du. Bestalde, zenbatetsi beharreko parametroez osatutako bektorea hasieratzean, balio hauek hartu ditu:

$$\hat{a}(0) = 0,6$$

$$\hat{b}(0) = 2$$

1. mailako jauzi-itxura duen sarrera baten aurrean sistemak duen erantzunean oinarritu gara. Erregresioak behar dituen laginak kalkulatzeko, hots, sistemaren irteera kalkulatzeko, parametroei emandako balioak hauek dira:  $a = 0,5$  eta  $b = 7,5$ . Sistemaren simulazioa eta identifikazioa edo zenbatespena programa honen bitartez egin da:

```
clear all
close all
h=0,025; % Laginketa-periodoaren balioa segundotan
t=[0:h:0,5]; % Denbora-aldiuneak
z = zpk('z',h);
a=0,5;
b=7,5;
%Sistemaren simulazioa
y=zeros(length(t),1);
u=ones(length(t),1);
y(1)=b*u(1);
for i=2:length(t)
    y(i)=a*y(i-1)+b*u(i);
end
%plot(t,y,'r')
%grid on
%title('Sistemaren erantzuna 1. mailako jauzi baten aurrean')
%xlabel('Denbora (s) a=0,5 eta b=7,5 ')
%ylabel('y(kh)')
%grid on

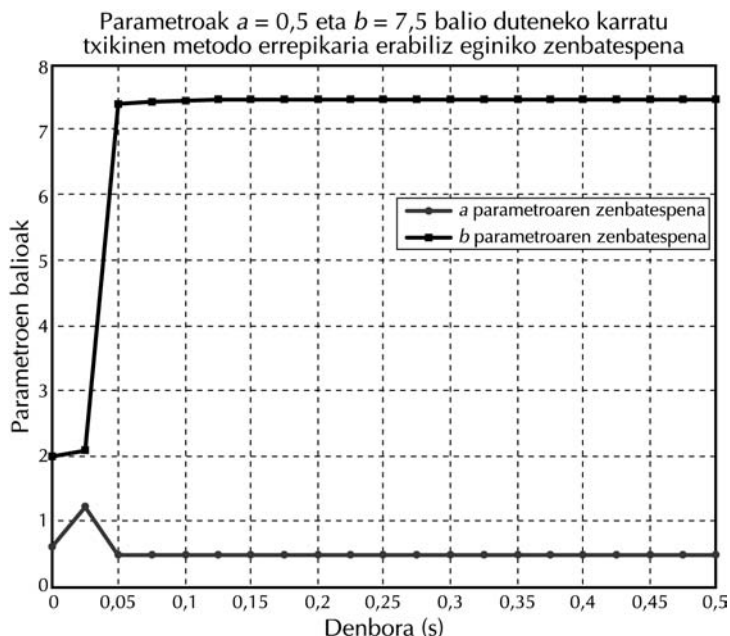
%Identifikazio errepikaria
beta=1000;
P0=beta*eye(2);
v0=[0.6;2]; % Hasierako parametroen balioak
v=v0;
P=P0;
Parametros=[v0];
```

```

for i=2:length(t)
    phi=[y(i-1);u(i)];
    errorea=y(i)-(phi*v);
    G=P*phi/(1+(phi'*P*phi));
    v=v+(G*(errorea));
    Parametros=[Parametros,v];
    P=(eye(2)-G*phi')*P;
end
plot(t,Parametros(1,:),'-r')
hold on
plot(t,Parametros(2,:),'-k')
title('Parametroak a=0,5 eta b=7,5 balio duteneko karratu txikien metodo
errepikaria erabiliz egindako zenbatespena')
legend('a parametroaren zenbatespena','b parametroaren zenbatespena')
xlabel('Denbora [s]')
ylabel('Parametroen balioak')
grid on

```

Irudi honetan ditugu erregresio lineal errepikariaren algoritmoak denboran zehar ematen dituen parametroen zenbatespenak. Hasierako laginekin,  $a$  eta  $b$  parametroek dituzten zenbatespenak  $\hat{a}(0) = 0,6$  eta  $\hat{b}(0) = 2$  hasierako balioetatik gertu daude. Baina denbora igaro ahala gero eta informazio gehiago dugunez, parametroen  $\hat{a}(k)$  eta  $\hat{b}(k)$  zenbatespenak sistemaren parametroen benetako balioetatik gero eta gertuago daude, hots,  $\hat{a}(k) \approx a = 0,5$  eta  $\hat{b}(k) \approx b = 7,5$  balioetara joko dute.



**11.4 irudia.** Karratu txikien metodo errepikarian oinarritutako parametroen zenbatespena.

## 11.7 KARRATU TXIKIEN HAZTATUEN METODO ERREPIKARIA

Azkenik, aurreko metodoaren bertsio haztatu bat aztertuko dugu. Azken batean, algoritmo honen bidez, sistemak dituen parametro-aldaketei oso ongi moldatzen da, aspaldi emandako laginei garrantzia kentzen dielako. Bestalde, bertsio honek arazo bat du. Sistema egoera egonkor batera helduz gero, laginak errepikatu egiten dira eta behaketa-matrizeak ez du behar adina lagin ezberdin izango. Beraz, behaketa-matrizearen heina ez da  $P$  izango, eta horrek zenbaki-arazoak sorrarazten ditu

Metodo honen bidez, funtzio hau ahalik eta txikiena egitea lortu nahi da.

$$G(\mathbf{v}(N)) = \|\mathbf{e}(N)\|_2^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^{N-i} \mathbf{e}^2(i) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^{N-i} \left( y(i) - \sum_{j=1}^P \phi_{i,j} v_j \right)^2$$

- 1.-  $\lambda$  oroitzapen-parametro bat da eta 0 eta 1 artean dago. Balorerik arruntena 0,95 izan ohi da.
- 2.-  $y(i)$  da  $i$  aldiuneko irteera-lagina.

3.-  $v_j$  da ereduaren  $j$ -garren parametroa.

4.-  $\phi_{i,j}$  da ereduaren  $v_j$  parametroaren eragina  $y(i)$  laginaren gain.

G funtzioa matrize eran idatz daiteke.

$$G([v(N)]) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^{N-i} \left( y(i) - [\phi(i)]^T [v(N)] \right)^2 =$$

$$G([v(N)]) = ([y(N)] - [\Phi(N)][v(N)])^T [Q(N)] ([y(N)] - [\Phi(N)][v(N)])$$

1.-  $[\phi(i)]^T = [\phi_{i,1} \ \phi_{i,2} \ \dots \ \phi_{i,p}]$  da behaketa-matrizearen  $i$ -garren errenkada.

Errenkada horrek  $i$ -garren aldiuneko laginak ditu.

2.-  $[Q(N)]$  da oroitzapen-parametroez osatutako matrizea. Matrize hori diagonal da, hots, diagonal nagusiko elementuak ez beste guztiak nuluak dira.

$$[Q(N)] = \begin{bmatrix} \lambda^N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{N-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$3.- [\Phi(N)] = \begin{bmatrix} [\phi(0)]^T \\ [\phi(1)]^T \\ \dots \\ [\phi(N)]^T \end{bmatrix}_{(N+1) \times p} \quad \text{matrizeak behaketa-matrizeak 0 aldiunetik N aldiunera}$$

dituen lagin guztiak kontuan hartzen ditu.

11.6 atalean bezala frogatu dezakegu erregresio lineal errepikari haztatua. Beraz, ez dugu berriz frogatuko. Ondoren idatzi ditugu erregresio lineal errepikariaren eta haztatuaren ekuazioak. Ekuazio horiek (11.17), (11.18) eta (11.19) ekuazioen baliokideak dira. Algoritmo hori abiatzeko,  $[P(0)]$  matrizea eta  $[v(0)]$  zenbatetsi beharreko parametroen bektorea finkatu behar ditugu.  $[P(0)]$  eta  $[v(0)]$  aurreko erregresio lineal errepikariaren antzera hasieratu behar ditugu.  $\beta$  parametroak beti balio handiak hartu behar ditu.  $[v(0)]$  bektorea, berriz, benetako balioetatik ahalik eta gertuen dauden balioekin hasieratu behar dugu, algoritmoak azkar zenbatets ditzan parametroak.

$$[\hat{v}(k+1)] = [\hat{v}(k)] + [G(k+1)] \left( y(k+1) - [\phi(k+1)]^T [\hat{v}(k)] \right) \quad (11.22)$$

$$[G(k+1)] = \frac{1}{(\lambda + [\phi(k+1)]^T [P(k)] [\phi(k+1)])} ([P(k)] [\phi(k+1)]) \quad (11.23)$$

$$[P(k+1)] = ([I] - [G(k+1)] [\phi(k+1)]^T) \frac{[P(k)]}{\lambda} \quad (11.24)$$

$$\begin{aligned} [P(0)] &= \beta [I] \\ [v(0)] & \end{aligned} \quad (11.25)$$

### 11.10 adibidea

Demagun 11.8 adibideko sistema kontrolatu nahi dugula. Sistema horren transferentzia-funtzioak itxura hau du.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{bz}{(z-a)}$$

Aurreko adibidean bezala, tamalez, ez ditugu ezagutzen  $a$  eta  $b$  parametroak. Beraz, kontrola egin baino lehen  $a$  eta  $b$  parametroak zenbatetsi behar ditugu. Horrenbestez, karratu txikien bitartez lortuko dugu  $a$  eta  $b$  parametroen zenbatespena. Baina, adibide honetan, erregresio errepikari haztatuaren bitartez zenbatetsi nahi ditugu  $a$  eta  $b$  parametroak.

Lehenik, transferentzia-funtzioa  $z$  aldagaiaren berreketa negatiboen bitartez adieraziko dugu, eta, ondoren, erregresio lineal baten eran idatziko dugu. Gogoan izan behar dugu laginketa-periodoa dela  $h$ .

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b}{(1-az^{-1})} \Rightarrow Y(z) = az^{-1}Y(z) + bU(z) \Rightarrow$$

$$y(kh) = ay(kh) + bu(kh) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(h) \\ \dots \\ y(Nh) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u(0) \\ y(0) & u(h) \\ \dots & \dots \\ y((N-1)h) & u(Nh) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Adibide honetan, behaketa-matrizea iteera- eta sarrera-laginek osatzen dute. Kontuan izan behar dugu sistemaren hasierako kondizioa zero dela, hots,  $y(-h) = 0$  dela.

$$[\Phi(N)] = \begin{bmatrix} 0 & u(0) \\ y(0) & u(h) \\ \dots & \dots \\ y((N-1)h) & u(Nh) \end{bmatrix}$$

$[y(N)]$  irteera-bektorea, berriz, honela idatziko dugu.

$$[y(N)]^T = [y(0) \quad y(h) \quad \dots \quad y(Nh)]$$

Dena dela, erregresio errepikari haztatu baten bidez zenbatetsi nahi baditugu parametroak, (11.22), (11.23) eta (11.24) formulez baliatuko gara. Ekuazio horiek laginketa-periodo bakoitzean exekutatu behar ditugu mikroprozesadorean. Lehenik, aldiune horretako irabazi-matrizea lortu behar dugu. Ondoren, aldiune horretako parametroak zenbatetsi behar ditugu. Azkenik,  $[P(k+1)]$  matrizea kalkulatu behar dugu, laginketa-periodo honetan irabazi-matrizea kalkulatu ahal izateko. Gogoan izan behar dugu  $\lambda$  oroitzapen-parametroari 0,95 balioa emango diogula.

1.- Irabazi-matrizea:

$$[G(k+1)] = \frac{1}{(\lambda + [\phi(k+1)]^T [P(k)] [\phi(k+1)])} ([P(k)] [\phi(k+1)]) \Rightarrow$$

$$[G(k+1)] = \frac{\begin{bmatrix} p_{1,1}(k) & p_{1,2}(k) \\ p_{2,1}(k) & p_{2,2}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ u(k+1) \end{bmatrix}}{\left( \lambda + [y(k) \quad u(k+1)] \begin{bmatrix} p_{1,1}(k) & p_{1,2}(k) \\ p_{2,1}(k) & p_{2,2}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ u(k+1) \end{bmatrix} \right)}$$

2.- Parametroen zenbatespena:

$$\begin{bmatrix} \hat{a}(k+1) \\ \hat{b}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}(k) \\ \hat{b}(k) \end{bmatrix} + [G(k+1)] \left( y(k+1) - [y(k) \quad u(k+1)] \begin{bmatrix} \hat{a}(k) \\ \hat{b}(k) \end{bmatrix} \right)$$

3.-  $[P(k+1)]$  matrizea eguneratzea:

$$[P(k+1)] = ([I] - [G(k+1)] [\phi(k+1)]^T) \frac{[P(k)]}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} p_{1,1}(k+1) & p_{1,2}(k+1) \\ p_{2,1}(k+1) & p_{2,2}(k+1) \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\lambda} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - [G(k+1)] \begin{bmatrix} y(k) & u(k+1) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} p_{1,1}(k+1) & p_{1,2}(k+1) \\ p_{2,1}(k+1) & p_{2,2}(k+1) \end{bmatrix}$$

Dena dela, algoritmo hori abiatzeko,  $[P(0)]$  matrizea abiatu behar dugu eta parametroei hasierako balio bat eman behar zaie.  $[P(k)]$  matrizea matrize diagonal batekin hasieratuko dugu  $[P(0)] = \beta [I]$ .  $\beta$  parametroak 1.000 balioa du. Bestalde, zenbatetsi beharreko parametroez osatutako bektorea hasieratzean, balio hauek hartu ditu.

$$\hat{a}(0) = 0,6$$

$$\hat{b}(0) = 2$$

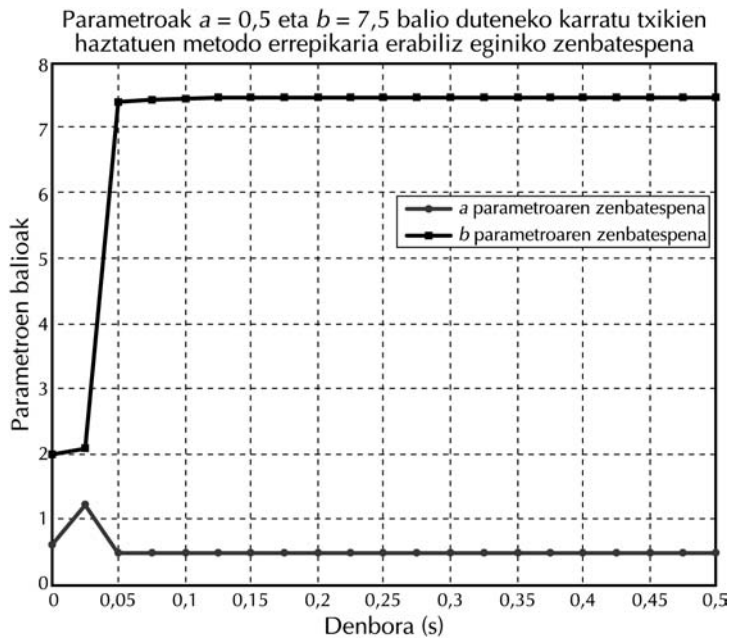
1. mailako jauzi-itxura duen sarrera baten aurrean sistemak duen erantzunean oinarritu gara. Erregresioak behar dituen laginak kalkulatzeko, hots, sistemaren irteera kalkulatzeko, parametroei emandako balioak hauek dira:  $a = 0,5$  eta  $b = 7,5$ . Sistemaren simulazioa eta identifikazioa edo zenbatespena programa honen bitartez egin da.

```
clear all
close all
h=0.025; % Laginketa-periodoaren balioa segundotan
t=[0:h:0.5]; % Denbora-aldiuneak
z = zpkm('z',h);
a=0.5;
b=7.5;
Lambda=0.95;
%Sistemaren simulazioa
y=zeros(length(t),1);
u=ones(length(t),1);
y(1)=b*u(1);
for i=2:length(t)
    y(i)=a*y(i-1)+b*u(i);
end
%plot(t,y,'r')
%grid on
%title('Sistemaren erantzuna 1. mailako jauzi baten aurrean')
%xlabel('Denbora (s) a=0,5 eta b=7,5 ')
%ylabel('y(kh)')
%grid on
```

```

%Identifikazio errepikaria
beta=1000;
P0=beta*eye(2);
v0=[0.6;2]; % Hasierako parametroen balioak
v=v0;
P=P0;
Parametros=[v0];
for i=2:length(t)
    phi=[y(i-1);u(i)];
    errorea=y(i)-(phi*v);
    G=P*phi/(Lambda+(phi'*P*phi));
    v=v+(G*(errorea));
    Parametros=[Parametros,v];
    P=(eye(2)-G*phi'*P/Lambda);
end
plot(t,Parametros(1,:), '-r')
hold on
plot(t,Parametros(2,:), '-k')
title('Parametroak a=0,5 eta b=7,5 balio duteneko karratu txikien errepikari
haztatuen metodoa erabiliz egindako zenbatespena')
legend('a parametroaren zenbatespena','b parametroaren zenbatespena')
xlabel('Denbora [s]')
ylabel('Parametroen balioak')
grid on

```



**11.5 irudia.** Karratu txikien haztatuen metodo errepikarian oinarritutako parametroen zenbatespena.

# 12

## Kontrol moldakorra

### 12.1 SARRERA

Sarritan, sistema bat kontrolatzean, parametroak aldatuz doaz sistema ez delako lineala, edota sistemaren parametroak denborarekin aldatuz doazelako. Sistema lineala ez bada, lan-puntua aldatzen doan heinean, kontrolaren parametroak ere aldatu egin behar ditugu, algoritmo-sintesia aplikatuz laginketa-periodo bakoitzeko. Liburu honetan, bi kontroladore mota aztertu ditugu, batez ere: PID kontroladoreak eta RST kontroladoreak. Atal honetan, bi erreguladore horien bertsio moldakor bana aztertuko dugu. Lehenik, PID erreguladore baten parametroak kalkulatzeko erabiltzen ditugun metodoak azalduko ditugu. Ondoren, RST kontroladorearen bertsio moldakorra aztertuko dugu. Gogoan izan behar dugu kontrol moldakorrak bi motatakoak direla:

- 1.- Kontrola exekutatzean erreguladorearen parametroak aldatzen ez dituzten kontrol moldakorrak. Honelako kontrol-algoritmoek sistema kontrolatzen hasi baino lehen sistemaren gain saiakuntza batzuk eginez kalkulaten dituzte kontroladorearen parametro guztiak. Gero ez dira kontroladorearen parametroak aldatuko, sistemaren ezaugarrietara egokitu garelako. Egoera horretan, suposatzen da sistema lineala dela (edo gutxienez lan-puntu finko baten inguruan egongo garela sistema kontrolatzean) eta sistemaren parametroak ez direla gehiegi aldatzen denborarekiko; *auto-tuning* motako kontrol moldakorrak

dira. Honelako algoritmoak oso baliagarriak dira industrian, kontroladore-egitura bera erabil daitekeelako sistema ezberdinak kontrolatzeko. Azken batean, mota honetako kontroladoreek exekuzioa abiarazi baino lehen saiakuntza batzuk egiten dituzte, eta parametroak kalkulatzeko ditugu kontroladorea sistemaren ezaugarrietara moldatuz. Beraz, kontroladore bera baliagarria da oso sistema ezberdinak kontrolatzeko, abiarazte prozesu hori kontroladoreak berak bakarrik egiten duelako; horrenbestez, erabiltzaileak kontroladorea sistemari konektatu eta kontrola abiarazi baino ez du egin behar. Eskuarki, PID motako kontroladoreek erabiltzen dituzte honelako algoritmo moldakorrak.

- 2.- Kontrola exekutatzean erreguladorearen parametroak aldatzen dituen kontrol moldakorrak. Honelako kontrol-algoritmoak sistemaren ezaugarri dinamikoetara moldatzen dira laginketa-periodo bakoitzean. Beraz, laginketa-periodo bakoitzean, sistemari ondoen egokitzen zaion eredu lineal batean oinarrituz, kontroladorearen parametroak kalkulatzeko ditugu. Kontroladorearen parametroez baliatuz eta laginketa-periodo bakoitzeko laginak erabiliz, kontroladorearen artea kalkulatzeko kontroladore moldakor hauek. Mota honetako kontrol-algoritmo moldakorrak bi azpimotatan sailkatu daitezke. Algoritmo moldakor batzuek sistemaren eredu linealaren zenbatespena egiten dute lehenik, eta, ondoren, eredu horri dagokion kontroladorearen sintesia egiten dute. Horrelako algoritmoei zeharkako kontrol moldakor deritze. Bigarren motako algoritmo moldakorrek, berriz, ez dute bereizten sintesiaren eta sistemaren parametroen zenbatespenaren artean, eta urrats berean egiten dituzte sintesia eta zenbatespena. Beraz, zuzenean kalkulatzeko dira kontroladorearen parametroak. Horrelako algoritmo moldakorrei kontrol moldakor zuzen deritze. Kontrola exekutatzean, erreguladorearen parametroak etengabe aldatzeak kontrolaren egonkortasuna deusezta dezake. Bestalde, algoritmo hauek exekuzio-programa korapilatsuak izan ohi dituzte, ekuazio aljebraikoak ebatzi behar izaten direlako. Horrez gain, ekuazio horiek askotan ez dira linealak izaten eta zenbaki-algoritmoak erabili behar izaten dira. Kontroladore hauek ez ziren oso ohikoak orain arte, kontrol-algoritmoa laginketa-periodo bakoitzean exekutatzeke baliabide ugari mikroprozesadore azkarrak behar zirelako. Gaur egun, ordea, gero eta ugariagoak dira mota honetako kontroladoreak. Kontrol moldakorrak industriako prozesu kimikoak kontrolatzeko erabili ohi dira batez ere. Exekutatzean parametroak aldatzen dituzten algoritmoak RST erreguladoreetan aplikatzen dira batez ere, RST erreguladorearen sintesia algoritmo gisa jar daitekeelako. Atal honetan, PID kontroladoreetan erabili ohi diren algoritmoak aztertuko ditugu lehenik.

Eta atal hau bukatzeko, RST kontroladorea erabiliz proposa daitezkeen egiturak aztertuko ditugu.

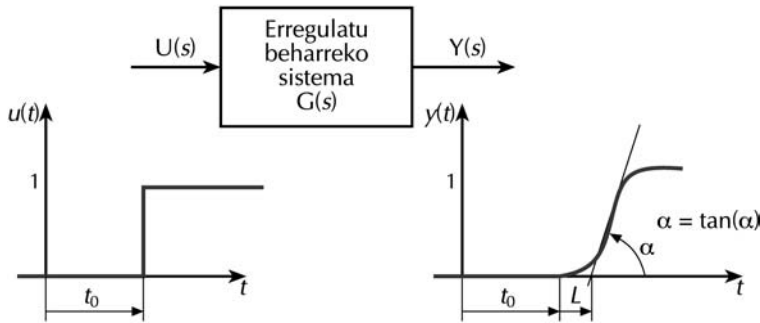
## 12.2 PID KONTROLADOREAREN GAINEKO ALGORITMO MOLDAKORRAK

### 12.2.1 Ziegler-Nicholsen lehen irizpidea

Atal honetako sarreran aipatu dugun bezala, bi algoritmo moldakor mota ditugu: exekuzioan parametroak aldatzen dituztenak eta aldatzen ez dituztenak. Ziegler-Nicholsen bi irizpideak bigarren motako algoritmo moldakorrak dira, hots, hasierako saiakuntzetako parametroak eta kalkuluak egin ondorengoak berak dira. Ziegler-Nicholsen lehen irizpideak P, PI, edota PID motako erreguladoreen parametroak kalkulatzeko laguntzen digu. Batek baino gehiagok galdetuko dio bere buruari zertarako landu ditugun 8. eta 9. ataletako sintesirako metodoak baldin eta Ziegler-Nicholsen irizpideak baditugu. Erantzuna oso erraza da: azken batean, Ziegler-Nicholsen metodoak gutxi gorabeherako irizpideak dira, eta ez dute ziurtatzen inolako kondiziorik beteko denik, ezta sistema egonkorra izango denik ere. Beraz, irizpide horiek erabiltzean, eskuarki, emaitza egokiak emango dizkigu, baina ez beti, eta ez du zertan emaitza onena izan behar. Dena dela, irizpide horrek erreguladorearen parametroak kalkulatzeko laguntzen digu baldin eta kontrolatu behar dugun sistema beste sistema batez aldatzen badugu. Sarritan, sistema ezberdinak kontrolatzeko erabiltzen ditugu kontroladore komertzialak, eta, sistema haien eredurik ez dugunez, erreguladorearen parametroak kalkulatzeko irizpide bat behar dugu. Beraz, neurketa edo saiakuntza batzuk eginez kalkulatzeko ditugu parametroak. Lehen irizpide hori 1. mailako jauzi baten aurrean sistemak duen erantzunean oinarritzen da. Jauzi-itxurako sarrera baten aurrean sistemak duen erantzunetik bi aldagai neurtuko ditugu:  $a$  eta  $L$ .

- 1.-  $a$ : sistemaren erantzunaren malda, sistema igotzen ari denean.
- 2.-  $L$ : sistemaren erantzunaren atzerapen-denbora da. Sistemari jauzi-itxurako sarrera sartu zaion aldiunetik, sistemaren erantzuna handitzen hasten den aldiunera igarotako denbora da.

Eskuarki, karratu txikiaren algoritmo baten bitartez kalkulatzeko ditugu  $a$  eta  $L$  parametroak. Horretarako, sistemaren erantzunaren bukaerako balioaren % 10 eta % 90 bitartean dauden laginak erabiltzen ditugu.



**12.1 irudia.** Kontrolatu nahi dugun sistemak 1. mailako jauzi baten aurrean duen erantzuna.

Sistemaren erantzunaren gaineko  $a$  eta  $L$  parametroak lortu eta gero, erreguladoreen parametroak kalkulatu ditugu, erreguladore motaren arabera. Taula honetan ditugu kalkulu horiek:

|       | P kontroladorea<br>$R(s) = K_p$    | PI kontroladorea<br>$R(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$ | PID kontroladorea<br>$R(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$ |
|-------|------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $K_p$ | $\frac{1}{aL}$                     | $\frac{9}{10} \left( \frac{1}{aL} \right)$                          | $\frac{6}{5} \left( \frac{1}{aL} \right)$                                    |
| $T_i$ | Kontroladoreak ez du parametro hau | $\frac{33}{10} L$                                                   | $2L$                                                                         |
| $T_d$ | Kontroladoreak ez du parametro hau | Kontroladoreak ez du parametro hau                                  | $\frac{L}{2}$                                                                |

**12.1 taula.** Z-N-en irizpideak erreguladore bakoitzerako ematen dituen parametroak.

Parametroak kalkulatu eta gero, erreguladoreak sistema kontrolatzen has daitezke. Kontrolatu behar dugun sistema aldatu eta beste bat jartzen badugu, berriz kalkulatu beharko ditugu erreguladorearen parametroak, jauzi-itxurako beste sarrera bat sartuz eta erreguladorearen parametroak eguneratzeko  $a$  eta  $L$  parametroak kalkulatu. Algoritmo moldakorrak ez ditu parametroak aldatzen exekuzioan. Dena dela, algoritmo horrek nolabaiteko moldakortasuna du sistema ezberdinak kontrolatzeko. Laburbilduz, hauek dira algoritmoak egiten dituen urratsak:

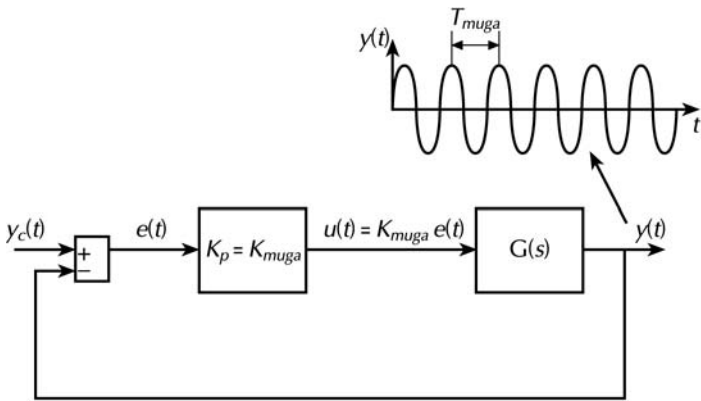
- 1.- Lehenik, saiakuntza bat egingo dugu sistemaren gain: sarreran 1. mailako jauzi bat sartuko dugu. Sarritan, urrats hori errepikatu egiten da, lagin gehiago izateko eta  $a$  eta  $L$  parametroak era egokian zenbatesteko.
- 2.- Ondoren,  $a$  eta  $L$  parametroak kalkulatu ditugu sistemaren erantzunaren gain, eskuarki, karratu txikiaren algoritmoa erabiliz (bukaerako balioaren % 10 eta % 90 bitarteko laginak hartuz).
- 3.- Erreguladore motaren arabera (P, PI edota PID), eta 12.1 taula erabiliz, erreguladorearen parametroak lortuko ditugu.
- 4.- Azkenik, 8. ataleko metodoak erabiliz, kontroladorea digitalizatuko dugu. Hala, mikroprozesadoreak exekutatu behar duen kontrol-algoritmoa izango du.
- 5.- Kontrol-algoritmoa finkatu eta gero, algoritmoa exekutatu dugu. Exekutatzean ez ditugu erreguladorearen parametroak aldatuko, baldin eta erabiltzaileak horretara behartzen ez badu.

### 12.2.2 Ziegler-Nicholsen bigarren irizpidea

Ziegler-Nicholsen bigarren irizpidea beste saiakuntza mota batean oinarritzen da, baina egin beharreko urratsak oso antzekoak dira; saiakuntza mota da alde bakarra. Bigarren irizpide honen arabera, kontrol proportzional baten bitartez itxi behar dugu sistema. Irizpide honen saiakuntzan, erreguladore proportzionalaren  $K_p$  parametroa handituz joango gara; sistemaren irteera oszilatzen hasten denean,  $K_p$  parametroa handitzeari utziko diogu. Egoera horretan bi aldagai gorde behar ditugu erreguladore bakoitza kalkulatzeko: batetik, oszilatzen hasten deneko kontroladorearen  $K_p = K_{muga}$  parametroaren balioa; eta, bestetik, oszilazioaren  $T_{muga}$  periodoaren balioa. Bi muga horiekin eta erreguladore mota aukeratu ondoren, taula honen bidez, erreguladorearen parametro guztiak lortuko ditugu:

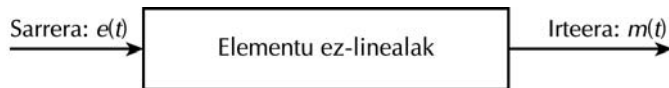
|       | P kontroladorea<br>$R(s) = K_p$    | PI kontroladorea<br>$R(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$ | PID kontroladorea<br>$R(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$ |
|-------|------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $K_p$ | $\frac{1}{2} K_{muga}$             | $\frac{9}{20} K_{muga}$                                             | $\frac{3}{5} K_{muga}$                                                       |
| $T_i$ | Kontroladoreak ez du parametro hau | $\frac{83}{100} T_{muga}$                                           | $\frac{1}{2} T_{muga}$                                                       |
| $T_d$ | Kontroladoreak ez du parametro hau | Kontroladoreak ez du parametro hau                                  | $\frac{1}{8} T_{muga}$                                                       |

12.2 taula. Z-N-en bigarren irizpideak erreguladore bakoitzerako ematen dituen parametroak.



12.2 irudia. Kontrol proportzional bat erabiliz begizta itxtean datza saiakuntzaren Z-N-en bigarren irizpidea.

Dena dela, Ziegler-Nicholsen bigarren irizpidea proposatzean arazo handi bat izan ohi dugu: Z-N-en bigarren irizpideari jarraitzeko egin beharreko saiakuntza oso arriskutsua gerta daiteke, sistemak egonkortasuna galdu eta puskatzen bada. Beraz,  $K_p = K_{muga}$  eta  $T_{muga}$  balioak kalkulatzeko, saiakuntza beste era batera egin behar dugu. Balio horiek kalkulatzeko, Kochenburger-ek 1950. urtean proposatutako kontzeptu berri bat erabili behar dugu: linealak ez diren elementuen funtzio deskribatzaileak. Elementu ez-lineal baten funtzio deskribatzailea da, elementu horretan  $w$  [rad/s] maiztasuneko sinu-funtzio bat sarreran sartzean, iteerrako funtzio periodikoaren lehen harmonikoaren eta sarreraren arteko erlazioa.



**12.3 irudia.** Elementu ez-lineal bati sinu-itxurako sarrera bat sartzean, eskuarki, irteerak maiztasun bereko beste funtzio periodiko bat sortzen du. Sarrerako sinuaren eta irteerako lehen harmonikoaren arteko erlazioa da funtzio deskribatzailea. Beraz, sarrerako sinuaren eta irteerako lehen harmonikoaren anplitudeen arteko zatiketa da funtzio deskribatzailea. Gogoan izan behar dugu zatiketa horretan fasea ere kontuan hartu behar dugula.

### 12.1 adibidea

Demagun elementu ez-lineal hau dugula:

$$m(t) = \begin{cases} M : e(t) \geq 0 \\ -M : e(t) < 0 \end{cases} \quad (12.1)$$

Lor dezagun elementu ez-lineal horri dagokion funtzio deskribatzailea.

Parametro positibo bat da  $M$ . Horrelako sistema baten sarreran  $w$  [rad/s] maiztasuneko sinu-itxurako funtzio bat badugu, irteeran maiztasun bereko beste funtzio periodiko bat izango dugu.

$$e(t) = E \sin(wt) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{w} \Rightarrow m(t) = \begin{cases} M : \left[ \frac{\pi}{w} 2k, \frac{\pi}{w} (2k+1) \right], k \in \mathbb{N} \\ -M : \left( \frac{\pi}{w} (2k+1), \frac{\pi}{w} (2k+2) \right), k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$m(t)$  irteeraren Fourierren garapena eginez gero, honako hau lortuko dugu:

$$m(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(wnt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(wnt) \Rightarrow a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T m(t) dt = 0$$

$$m(t) = -m(t) \Rightarrow a_n = \frac{2}{T} \int_0^T m(t) \cos(wnt) dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T m(t) \sin(wnt) dt = \frac{2}{T} \int_0^T m(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} M \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt - \frac{2}{T} \int_{T/2}^T M \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt \Rightarrow \\
 b_n &= \frac{2M}{T} \left( \int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt - \int_{T/2}^T \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt \right) \Rightarrow \\
 b_n &= \frac{2M}{T} \left( \frac{T}{2\pi n} (1 - \cos(\pi n)) + \frac{T}{2\pi n} (\cos(2\pi n) - \cos(\pi n)) \right) b_n = \\
 \frac{2M}{T} \left( -\frac{T}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \Big|_0^{T/2} + \frac{T}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \Big|_{T/2}^T \right) \Rightarrow \\
 b_n &= \frac{2M}{\pi n} (1 - \cos(\pi n)) = \frac{2M}{\pi n} (1 - (-1)^n)
 \end{aligned}$$

Beraz,  $m(t)$  irteera sinuz osatutako serie baten bidez adieraz daiteke.

$$m(t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ \frac{2M}{\pi n} (1 - (-1)^n) \right] \sin(wnt)$$

Irteeraren lehen harmonikoa honela idatz daiteke:

$$m_1(t) = \frac{4M}{\pi} \sin(wt)$$

Horrenbestez, sarrera  $w$  maiztasuneko eta  $E$  anplitudeko sinu-itxurako funtzio bat bada, horrelako funtzioa deskribatzailea defini dezakegu. Gogoan izan behar dugu funtzio deskribatzailea kalkulatzeko lehen harmonikoaren eta sarreraren Laplace transformatuen arteko zatiketa egin behar dugula nahitaez.

$$e(t) = E \sin(wt) \Rightarrow E(s) = \frac{Ew}{s^2 + w^2}$$

$$m_1(t) = \frac{4M}{\pi} \sin(wt) \Rightarrow M_1(s) = \frac{4M}{\pi} \frac{w}{s^2 + w^2} \quad (12.2)$$

$$N(E, M, w) = \frac{M_1(s)}{E(s)} = \frac{4M}{\pi E}$$

12.1 adibideko elementu ez-lineala erreguladore gisa erabiliz gero, eta begizta itxian lan eginez gero, sistema oszilatzen arituko da. Berrelikadura horren ekuazioa

honela defini genezake. Gogoan izan behar dugu sistemaren begizta irekiko transferentzia-funtzioa  $G(s)$  dela.

$$\begin{aligned} e(t) &= y_c(t) - y(t) \Rightarrow E(s) = Y_c(s) - Y(s) \Rightarrow \\ E(j\omega) &= Y_c(j\omega) - Y(j\omega) \end{aligned} \quad (12.3)$$

Sistemaren irteerak oszilatzen duela jotzen badugu, hots, irteera periodikoa dela suposatzen badugu, lehen harmonikoa kalkulatu dugu irteeraren Fourierren garapena eginda.

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= G(j\omega)M(j\omega) \Rightarrow \\ \begin{cases} Y_1(j\omega) = G(j\omega)M_1(j\omega) \\ M_1(j\omega) = \frac{4M}{\pi|E_1|}E_1(j\omega) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} Y_1(j\omega) = G(j\omega)\frac{4M}{\pi|E_1|}E_1(j\omega) \\ E_1(j\omega) = Y_c(j\omega) - Y_1(j\omega) \end{cases} \Rightarrow \\ Y_1(j\omega) &= G(j\omega)\frac{4M}{\pi|E_1|}[Y_c(j\omega) - Y_1(j\omega)] \Rightarrow \\ Y_1(j\omega) \left[ 1 + G(j\omega)\frac{4M}{\pi|E_1|} \right] &= G(j\omega)\frac{4M}{\pi|E_1|}Y_c(j\omega) \end{aligned} \quad (12.4)$$

Irteeraren lehen harmonikoaren eta kontsignaren Fourierren transformatuaren arteko transferentzia-funtzio harmonikoa honela idatz daiteke:

$$Y_1(j\omega) = \frac{G(j\omega)\frac{4M}{\pi|E_1|}}{\left[ 1 + G(j\omega)\frac{4M}{\pi|E_1|} \right]} Y_c(j\omega) \quad (12.5)$$

Sistema oszilatzen ari denez, begizta itxiko sistema hau egonkortasunaren muga dago, hots, sistemaren begizta irekiko transferentzia-funtzioak  $-1$  balioa hartzen du.

$$G(j\omega)\frac{4M}{\pi|E_1|} = -1 \quad (12.6)$$

Beraz, Ziegler-Nicholsen 2. irizpidean behar ditugun  $T_{muga}$  eta  $K_{muga}$  parametroak kalkula ditzakegu. Azken batean, sistemaren  $w$  oszilazio-pultsazioari dagokion periodoa  $T_{muga}$  da. Horrenbestez, sistemaren oszilazio-periodoa da  $T_{muga}$ , eta parametro hori erraz neur daiteke honelako kontroladore batekin, begizta itxiz gero.

$$T_{muga} = \frac{2\pi}{w} \quad (12.7)$$

Bestalde, sistemaren  $K_{muga}$  parametroa aise kalkula daiteke  $G(j\omega) \frac{4M}{\pi|E_1|} = -1$  ekuazioa betetzen delako, eta, azken batean,  $K_{muga}$  parametroa egonkortasunaren mugan dugun irabazia delako.

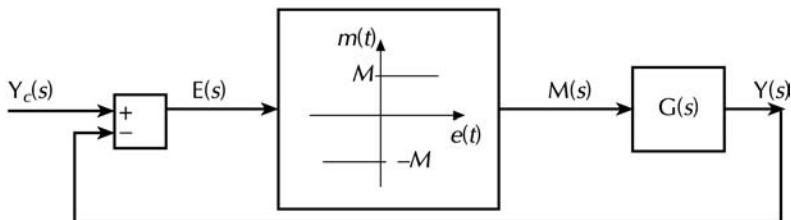
$$\begin{cases} G(j\omega) \frac{4M}{\pi|E_1|} = -1 \\ G(j\omega) K_{muga} = -1 \end{cases} \Rightarrow K_{muga} = \frac{4M}{\pi|E_1|}$$

Hortaz, honela kalkula daiteke  $K_{muga}$ :

$$K_{muga} = \frac{4M}{\pi|E_1|} \quad (12.8)$$

Non:

- 1.-  $M$  da kontroladorearen irteera handiena. Gogoan izan behar dugu kontroladoreak  $\pm M$  balioak bakarrik har ditzakeela.
- 2.-  $|E_1|$  da errorearen lehen harmonikoaren anplitudea. Anplitude hori saiakuntza egitean kalkulatzen da.



**12.4 irudia.** Funtzio deskribatzailearen teknika erabiliz  $G(s)$  sistemari dagokion irabazi-mugaren kalkulua egiteko behar dugun begizta itxiko kontroladorea.

Adibide honetako kontroladorea erabiliz gero,  $K_{muga}$  eta  $T_{muga}$  kalkulatu ahal izango ditugu (12.8) eta (12.7) formulak erabiliz. Gogoan izan behar dugu  $T_{muga}$  sistemaren oszilazio-periodoa dela, eta, beraz, aise kalkula daitekeela. Bestalde,  $K_{muga}$  parametroa ere oso erraz kalkula daiteke, errorearen lehen harmonikoaren anplitudea lortuta. Horrenbestez, Ziegler-Nicholsen bigarren metodoa erabiltzeko, lehenik saiakuntza bat egin behar dugu, eta  $K_{muga}$  eta  $T_{muga}$  parametroak lortu eta gero, P, PI edota PID kontroladorearen parametroak kalkulatu ditugu. Kontroladorea finkatu eta gero, sistema kontrolatzeko gai izango ginateke. Lehen esan dugun bezala, metodo honek ez ditu parametroak aldatzen exekutatzeko

garaietan. Kontroladorearen parametroak aldatu nahi baditugu, exekuzioa gelditu behar dugu eta beste saiakuntza bat egin, sistemari berriz egokitu ahal izateko.

### 12.2.3 Fase-marjina oinarritutako irizpidea

Demagun PID kontroladore baten bidez fase-marjina jakin bat lortu nahi dugula, algoritmo moldakorra bat erabiliz. Horretarako, 12.1 adibideko kontroladorea erabiliko dugu. Kontroladore horren bidez, sistemaren  $T_{muga}$  eta  $K_{muga}$  parametroak lor ditzakegu. Parametro horiek kondizio hauek betetzen dituzte:

$$G(j\omega)K_{muga} = -1 \Rightarrow G(j\omega) = -\frac{1}{K_{muga}} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{1}{K_{muga}} \\ \text{Arg}(G(j\omega)) = -\pi \\ T_{muga} = \frac{2\pi}{\omega} \end{cases} \quad (12.9)$$

PID kontroladorearen transferentzia-funtzio harmonikoa honela idatziko dugu:

$$K(j\omega) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i j\omega} + T_d j\omega \right) \quad (12.10)$$

Sistemaren fase-marjina ziurtatu nahi badugu, sistemaren eta kontroladorearen arteko begizta irekiko transferentzia-funtzioa kalkulatuko ditugu lehenik.

$$K(j\omega)G(j\omega) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i j\omega} + T_d j\omega \right) G(j\omega) \quad (12.11)$$

Gogoan izan behar dugu  $\omega = \frac{2\pi}{T_{muga}}$  maiztasunerako  $G(j\omega)$  transferentzia-funtzio harmonikoaren balioa  $-1/K_{muga}$  dela. Beraz,  $\Phi$  graduko fase-marjina lortzeko, honako hau egingo dugu:

$$\begin{cases} K(j\omega)G(j\omega) = e^{j(\Phi-\pi)} \\ G(j\omega) = -\frac{1}{K_{muga}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Arg}(K(j\omega)) + \text{Arg}(G(j\omega)) = \Phi - \pi \Rightarrow$$

$$\text{Arg}(K(j\omega)) - \pi = \Phi - \pi \Rightarrow$$

$$\text{Arg}(K(j\omega)) = \Phi \quad (12.13)$$

Kontroladorearen argumentua kalkulatzeko, urrats hauek egingo ditugu:

$$\begin{aligned}
 \text{Arg}(K(jw)) &= \text{Arg}\left(K_p\left(1 + \frac{1}{T_i jw} + T_d jw\right)\right) \Rightarrow \\
 \text{Arg}(K(jw)) &= \text{Arg}\left(1 + j\left(T_d w - \frac{1}{T_i w}\right)\right) = \arctan\left(T_d w - \frac{1}{T_i w}\right) \Rightarrow \\
 \arctan\left(T_d w - \frac{1}{T_i w}\right) &= \Phi \Rightarrow \\
 \tan(\Phi) &= T_d w - \frac{1}{T_i w}
 \end{aligned} \tag{12.14}$$

Eskuarki,  $T_i$  eta  $T_d$  parametroen arteko erlazio bat finkatzen dugu, PID kontroladorearen parametro guztiak kalkulatzeko. Ia beti  $T_i$  parametroa  $T_d$  parametroa baino handiagoa izaten da; horrenbestez, emaitza onak ematen dituen ez, erlazio hau lortuko dugu:

$$T_i = 4T_d \tag{12.15}$$

Azken erlazio hori (12.14) ekuazioan ordezkatzeko badugu, bigarren mailako polinomio bat askatu besterik ez dugu egin behar  $T_i$  parametroa kalkulatzeko.  $T_d$  parametroa (12.15) erlazioaren bidez ere utz daiteke fase-marjinaren mende.

$$\begin{aligned}
 \tan(\Phi) &= \frac{T_i}{4} w - \frac{1}{T_i w} \Rightarrow \\
 T_i^2 - \left(\frac{4 \tan(\Phi)}{w}\right) T_i - \frac{4}{w^2} &= 0 \Rightarrow \\
 T_i &= \frac{\left(\frac{4 \tan(\Phi)}{w}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{4 \tan(\Phi)}{w}\right)^2 + \frac{16}{w^2}}}{2} = \frac{4 \tan(\Phi) \pm \sqrt{16(1 + \tan(\Phi))}}{2w} \Rightarrow \\
 \begin{cases} T_i = 2 \frac{\tan(\Phi) \pm \sqrt{1 + \tan(\Phi)}}{w} \\ T_i > 0 \end{cases} &\Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$T_i = 2 \frac{\tan(\Phi) + \sqrt{1 + \tan(\Phi)}}{w}$$

$$T_d = \frac{\tan(\Phi) + \sqrt{1 + \tan(\Phi)}}{2w}$$
(12.16)

PID kontroladorearen  $T_i$  eta  $T_d$  parametroak kalkulatu ondoren,  $K_p$  parametroa kalkulatu beharko dugu.  $w$  maiztasunerako begizta irekiko transferentzia-funtzioaren modulua 1 izatera behartu dugunez,  $K_p$  parametroa kalkulatu dezakegu.

$$K(jw)G(jw) = e^{j(\Phi - \pi)} \Rightarrow |K(jw)G(jw)| = 1 \Rightarrow$$

$$|K(jw)| |G(jw)| = 1 \Rightarrow |K(jw)| \frac{1}{K_{muga}} = 1 \Rightarrow$$

$$|K(jw)| = K_{muga} \Rightarrow K_p \sqrt{1 + \left( T_d w - \frac{1}{T_i w} \right)^2} = K_{muga}$$

(12.14) ekuazioa azken berdintzan ordezkatzuz gero,  $K_p$  parametroa lortuko dugu.

$$K_p = \frac{K_{muga}}{\sqrt{1 + (\tan(\Phi))^2}} = K_{muga} \cos(\Phi)$$
(12.17)

#### 12.2.4 Irabazi-marjina oinarritutako irizpidea

Demagun PID kontroladore baten bidez irabazi-marjina jakin bat lortu nahi dugula algoritmo moldakor bat erabiliz. Horretarako, 12.1 adibideko kontroladorea erabiliko dugu. Kontroladore horren bidez, sistemaren  $T_{muga}$  eta  $K_{muga}$  parametroak lor ditzakegu. Parametro horiek kondizio hauek bete behar dituzte:

$$G(jw)K_{muga} = -1 \Rightarrow G(jw) = -\frac{1}{K_{muga}} \Rightarrow \begin{cases} |G(jw)| = \frac{1}{K_{muga}} \\ \text{Arg}(G(jw)) = -\pi \\ T_{muga} = \frac{2\pi}{w} \end{cases}$$

PID kontroladorearen transferentzia-funtzio harmonikoa honela idatziko dugu:

$$K(jw) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i jw} + T_d jw \right)$$

Sistemaren irabazi-marjina ziurtatu nahi badugu, sistemaren eta kontroladorearen arteko begizta irekiko transferentzia-funtzioa kalkulatu behar dugu lehenik.

$$K(j\omega)G(j\omega) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i j\omega} + T_d j\omega \right) G(j\omega)$$

Gogoan izan behar dugu  $w = \frac{2\pi}{T_{muga}}$  maiztasunerako  $G(j\omega)$  transferentzia-funtzio harmonikoak  $-1/K_{muga}$  balio duela. Beraz, irabazi-marjina lortzeko, bide hau egingo dugu:  $w$  maiztasunerako dugun transferentzia-funtzio harmonikoaren argumentua  $-\pi$  radianekoa dela badakigunez,  $T_i$  eta  $T_d$  parametroen arteko erlazioa lor dezakegu. Azken batean, irabazi-marjina finkatu ahal izateko,  $K(j\omega)G(j\omega)$  transferentzia-funtzioaren argumentua  $-\pi$  radianekoa izan dadila egingo dugu eta,  $K(j\omega)G(j\omega)$  transferentzia-funtzioaren modulua 1 baino txikiagoa.

$$\text{Arg}(K(j\omega)G(j\omega)) = \text{Arg}\left(K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i j\omega} + T_d j\omega \right)\right) - \pi \Rightarrow$$

$$\text{Arg}(K(j\omega)G(j\omega)) = \text{Arg}\left( 1 + \frac{1}{T_i j\omega} + T_d j\omega \right) - \pi \Rightarrow$$

$$\text{Arg}(K(j\omega)G(j\omega)) = \text{Arg}\left( 1 + j \left( T_d \omega - \frac{1}{T_i \omega} \right) \right) - \pi \Rightarrow$$

$$\text{Arg}(K(j\omega)G(j\omega)) = \arctan\left( T_d \omega - \frac{1}{T_i \omega} \right) - \pi = -\pi \Rightarrow$$

$$T_d \omega - \frac{1}{T_i \omega} = 0 \Rightarrow$$

$$T_d = \frac{1}{T_i \omega^2} \quad (12.18)$$

Eraitza onak ematen dituen  $T_d$  eta  $T_i$  parametroen arteko erlazioa finkatu behar dugu. Aurreko kasuan egin dugun bezala,  $T_i = 4T_d$  erlazioa erabiliko dugu.

$$T_d = \frac{1}{T_i \omega^2} \Rightarrow T_d T_i = \frac{1}{\omega^2} \Rightarrow 4T_d^2 = \frac{1}{\omega^2} \Rightarrow$$

$$2T_d = \frac{1}{\omega} \Rightarrow$$

$$T_d = \frac{1}{2w} \quad (12.19)$$

$$T_i = \frac{2}{w} \quad (12.20)$$

$K_p$  parametroa kalkulatzeko, lortu nahi dugun irabazi-marjina finkatu behar dugu. Horretarako,  $K(jw)G(jw)$  transferentzia-funtzioaren moduluaren eta  $IM$  irabazi-marjinaren arteko erlazioa aztertzen hasi behar dugu. Gogoan izan behar dugu  $IM$  irabazi-marjina dezibelekin neurtzen dela; beraz,  $IM$  irabazi-marjina honela idatz dezakegu:

$$\begin{aligned} IM &= 20 \log \left( \frac{1}{|K(jw)G(jw)|} \right) = -20 \log(|K(jw)G(jw)|) \Rightarrow \\ IM &= -20 \log(|K(jw)|) - 20 \log(|G(jw)|) \Rightarrow \\ IM &= -20 \log(|K(jw)|) - 20 \log \left( \frac{1}{K_{muga}} \right) \Rightarrow \\ IM &= -20 \log(|K(jw)|) + 20 \log(K_{muga}) \Rightarrow \\ IM &= -20 \log(K_p) - 20 \log \left( \sqrt{1 + \left( T_d w - \frac{1}{T_i w} \right)^2} \right) + 20 \log(K_{muga}) \Rightarrow \\ IM &= -20 \log \left( \sqrt{1 + \left( T_d w - \frac{1}{T_i w} \right)^2} \right) + 20 \log \left( \frac{K_{muga}}{K_p} \right) \Rightarrow \\ IM &= 20 \log \left( \frac{K_{muga}}{K_p} \right) \end{aligned}$$

Horrenbestez, PID kontroladorearen  $K_p$  parametroa  $IM$  irabazi-marjinaren mende utz daiteke.

$$IM = 20 \log \left( \frac{K_{muga}}{K_p} \right) \Rightarrow$$

$$K_{muga} = 10^{\frac{IM}{20}} K_p \quad (12.21)$$

Aurreko algoritmoak bezala, algoritmo honek ezin ditu PID kontroladorearen parametroak exekuzio-garaian aldatu. 12.1 adibideko kontroladore batekin egindako saiakuntza batekin bakarrik kalkula daitezke PID kontroladorearen parametroak. Beraz, algoritmo hori sistema ezberdinak kontrolatzeko baliagarria da. Sistema

kontrolatzen hasi baino lehen, saiakuntza bat egiten da eta PID kontroladorearen  $K_p$ ,  $T_i$  eta  $T_d$  parametroak kalkulatu eta gero, kontroladorearen exekuzioa abiarazten da. Exekuzio-garaian ezin ditugu parametro horiek aldatu. Parametro berriak izan nahi baditugu, kontroladorearen exekuzioa geratu eta, 12.1 adibideko kontroladorearen bitartez, saiakuntza berri bat egin behar dugu. Hala kalkulatuko ditugu PID kontroladore berriaren parametroak.

### 12.3 RST KONTROLADOREAREN GAINEKO ALGORITMO MOLDAKORRAK

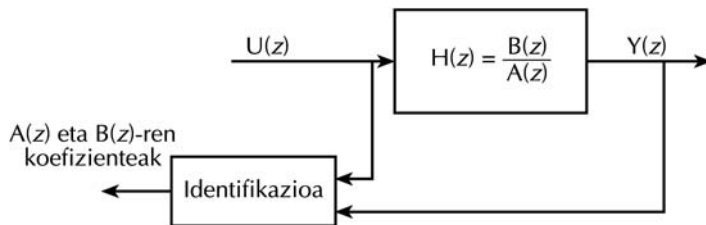
Aurreko kasuetan proposatutako algoritmo moldakorrek kontroladorearen parametroak lortzen dituzte saiakuntza erraz baten bidez, eta, ondoren, parametro horiek konstante mantentzen dituzte. Beraz, exekuzio-garaian kontrol-algoritmoaren moldakortasuna galtzen da. Horrenbestez, sistemaren jarrera dinamikoa aldatzen bada, hots, ekuazio diferentzialak edo gehikuntza-ekuazioak aldatzen badira, algoritmo horiek ez dira egoera berri horretarako egokiak izango. Beraz, exekuzio-garaian moldakorrak diren algoritmoak nahi baditugu, kontrolaren legea –hots, erreguladorearen gehikuntza-ekuazioa– erraz gauzatu edo inplementatu behar dugu. Horretarako, gehikuntza-ekuazio multzo baten bidez adierazi behar dugu erreguladorea. Horrelako algoritmo moldakorrak RST kontroladoreei dagozkie eta ez PID kontroladoreei, errazagoa baita erreguladorearen gehikuntza-ekuazioetako koefizienteen kalkulua era errepikakorrean egitea. PID kontroladore baten sintesia, azken batean, erroen kokapenean edo transferentzia-funtzio harmonikoetan oinarritutako tekniken bitartez egiten da, eta hori algoritmo errepikakor baten bidez egitea zaila da. Ondoren azaltzen ditugun teknikak RST erreguladoreetan oinarrituta daude. Gogoan izan behar dugu algoritmo moldakor horiek bi motatakoak izan daitezkeela: zeharkakoak edo zuzenak.

Zeharkako egituran egindako algoritmoek, lehenik, sistema identifikatzen dute. Horretarako, 11. ataleko teknikak erabili beharko genituzke. Ia gehienetan karratu txikiaren teknika errepikakorra erabiltzen da. Sistemari dagokion eredua kalkulatuakoa, sistema horretan eta lortu nahi dugun ereduan oinarrituta, RST kontroladore baten parametro guztiak kalkulatuko ditugu. Azkenik, RST kontroladore horri dagokion irteera kalkulatu dugu, aurretik lortutako laginen eta  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioen bitartez. Kontroladorearen  $u(kh)$  irteera kalkulatuakoa, mikroprozesadoreak balio hori D/A bihurgailura bidaltzen du, eta hurrengo laginketa-periodoa hasi arte ez dugu  $u(kh)$  aldagaia aldatuko. Gogoan izan behar dugu beti oso zaila dela begizta itxiko sistema baliokidearen egonkortasuna ziurtatzea hain aldakorrak diren kontrol-algoritmoak erabiliz gero. Beraz, teknika horiek denborarekiko oso aldakorrak ez diren sistemei bakarrik aplikatuko zaizkie. Sistema

denborarekiko aldakorra ez bada, hobe da aurreko teknikak erabiltzea –hots, exekuzioan kontroladorearen parametroak aldatu ezin dituzten teknikak erabiltzea–, sistemaren egonkortasuna ziurtatzeko. Sistema denborarekiko aldakorra bada, baina nahiko motel aldatzen bada, exekuzioan parametroak alda ditzaketen teknikak erabiliko ditugu. Has gaitezen, bada, zeharkako teknikan oinarritutako algoritmoak aztertzen.

### 12.3.1 Zeharkako egitura moldakorrak

10. atalean ikusi den bezala, RST erreguladore baten sintesiak kodifika daitekeen algoritmo-itxura du baldin eta  $H(z) = B(z)/A(z)$  kontrolatu beharreko lagindutako sistemaren transferentzia-funtzioaren  $A(z)$  eta  $B(z)$  polinomioak baditugu. Hau da,  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioen koefizienteak eragiketa batzuen bidez lotu daitezke,  $A(z)$  eta  $B(z)$  polinomioen koefizientetatik abiatuta. Koefiziente horiek Diofantos ekuazioen bidez lortzen dira. Metodo hori 12.6 irudiko eskemaren bidez azaldu dezakegu.



**12.5 irudia.** Kontrolatu beharreko sistemaren irudikapena.

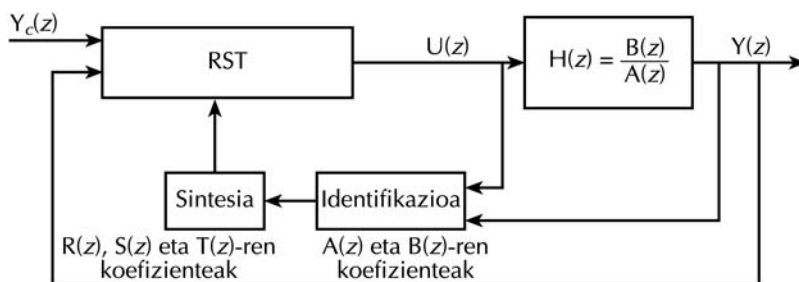
Metodo hau exekutatzekoan egiten diren urratsak hauek dira.

- 1.- Laginketa-periodo bakoitzean lehenik sistema identifikatzen dugu. Horretarako, sistemak une horretara arte dituen laginak erabiliko ditugu. Identifikazioa algoritmo errepikakor bat izan ohi da. 11. atalean aztertu genituen horrelako algoritmoak. Identifikatze-algoritmo errepikakorrak era honetako denbora errealeko arazoak ebazteko erabiltzen dira. Bestalde, kontrolatu beharreko instalazioaren parametroak denboran zehar astiro aldatzen direnean, ezinbestekoa da oroitzapen-faktore bat sartzea, hots, identifikatze-metodo haztatu bat erabili behar dugu.
- 2.- Kontrolatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzioa identifikatutakoan, erabiliko dugun kontroladorea lortu behar dugu. Horretarako, algoritmo eran adieraziko ditugu 10. atalean aztertu genituen teknikak. Gogoan izan behar dugu jarraitu edo lortu beharreko eredua ez dela aldatzen denbora igaro ahala.

Horrenbestez, RST kontroladorea algoritmo eran jartzea nahiko erraza izaten da. Argi izan behar dugu algoritmo hori oso azkar exekutatu behar dugula, kontrol-algoritmoaren exekuzio-denbora laginketa-periodoarekiko baztergarria izan dadin. Oro har, sistemaren eredua identifikatutakoan, eta lortu nahi den eredua izan gero, nahiko azkar kodifika daiteke RST kontroladore baten polinomioen kalkulua.

- 3.- RST kontroladorearen polinomioen koefizienteak lortutakoan, kontroladorearen gehikuntza-ekuazioa lortuko dugu. RST kontroladorearen gehikuntza-ekuazioan ditugun  $y_c(kh)$  kontsignaren,  $y(kh)$  irteeraren eta  $u(kh)$  kontrol-aldagaiaren laginak ordezkatzuz gero, laginketa-periodo horri dagokion  $u(kh)$  kontrol-aldagaiaren balioa kalkulatu dugu.
- 4.- Ondoren,  $y_c(kh)$  kontsignaren,  $y(kh)$  irteeraren eta  $u(kh)$  kontrol-aldagaiaren laginak eguneratuko ditugu, hurrengo laginketa-periodoan  $u(kh)$  kontrol-aldagaiaren laginak egoki kalkulatu ahal izateko.  $u(kh)$  kalkulatu eta gero, balio hori D/A bihurgailura bidaltzen dugu, sistemari dagokion kontrol-aldagaia aplikatua izan dadin. Ondoren, mikroprozesadoreak ez du  $u(kh)$  balioa aldatuko hurrengo laginketa-periodoa hasi arte. Hurrengo laginketa-periodoan, berriz, 1, 2, 3 eta 4 urratsak exekutatu dugu. Urrats horiek mikroprozesadorearen denbora-eten baten bitartez egiten dira. Denbora-eten horien periodoa eta laginketa-periodoa berdinak dira.

Horrela egindako algoritmo bati moldakor deritzo, kontrolatu beharreko sistemaren eredua eta erreguladorearen sintesia denbora errealean automatizatu direlako. Kontu handiz ibili behar dugu honelako kontrol-algoritmoekin, begizta itxian lortzen dugun egitura egonkorra izan dadin. Ikasteko gaitasuna duen algoritmo hau, beraz, kontrol adimenduna dela esan ohi da.



**12.6 irudia.** Zeharka egokitutako kontrolaren eskema.

Gogoan izan behar dugu erreguladorearen sintesia ez dela oinarritzen kontrolatu beharreko prozesuaren eredu zehatz eta konplexu batean; izatez, laginketa-periodo

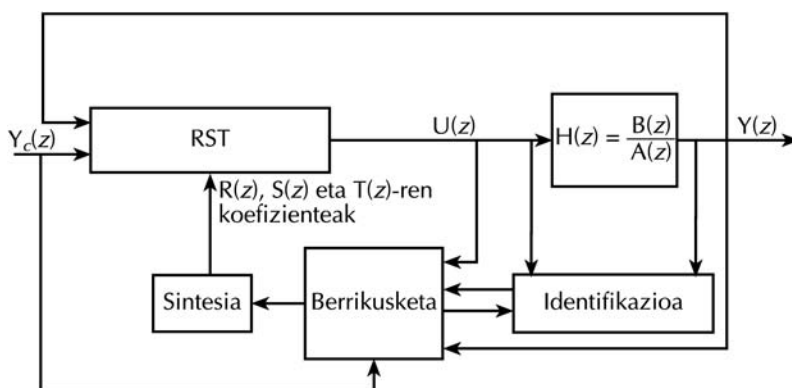
bakoitzean, identifikazio-algoritmo batek zenbatetsitako (zenbait errorerekin) kontrol-eredu laburtu, lineal eta egonkorra erabiltzen du eredu zehatza balitz bezala. Ingelesezt, eredu hori erabiltzeari “*certainly equivalence principle*” deritzogu.

Zeharkako teknika baten barnekoak diren identifikazio- eta sintesi-lanen arteko banaketak baditu zenbait abantaila. Lehenik, kontrolatu beharreko sistemari buruzko alde aurretiko datuak kontuan har daitezke identifikaziorako. Gainera, erreguladorearen sintesia edozein delarik, identifikazio-metodo bat aukeratu daiteke multzo handi batetik modu independentean. Adibidez, RST polinomio-teknika baten ordez, PD erreguladore bat erabil daiteke, horren sintesia algoritmo baten bidez idazteko zailtasunak izan arren. Hala, esan daiteke 12.6 irudiko eskema oso malgu dela.

Bestalde, honelako kontrol moldakorretan bi begizta mota ditugu: batetik, kontrolatu beharreko seinalearen begizta; bestetik, erreguladorearen parametroen mekanismoaren doiketa. Doitze-mekanismo hori dela eta, begizta itxiko sistema guztiz ez-lineala da; horren azterketa sakon batek eta zehazki egonkortasunarenak lan handia du. Arazorik gabeko egoeretan emaitza partzial batzuk besterik ez dira ezagutzen. Gaur egun, horrelako egituren egonkortasunaren azterketa ikertzen dihardute ingeniari eta zientzialariek. Teknika hori darabilten algoritmoen alde txarra da egitura horien kontrol-algoritmoak ez-linealak izatea; horrenbestez, haien egonkortasuna aztertzea oso zaila denez, oso egoera berezietan erabiltzen dira.

Zeharkako eskeman, identifikazioaren eta kontrolaren arteko beste arazo larri bat agertzen zaigu. Gertaera hori kualitatiboki azalduko dugu, kontsigna konstante bat hartuz. Erabilitako kontrolaren algoritmoa abiatzean, erreguladoreak ez du iteera egokiriuk ematen, gaizki doituta baitago, sistemari buruzko behar adina datu ez dugulako. Kontroladorea gaizki doituta badago, kontrolaren seinalea kitzikagarria izango da. Beste era batera esanda, kontroladorea gaizki doituta dagoenean, kontroladoreak oso seinale aldakorra edo oszilakorra aterako du. Egoera hori ona da identifikazio-prozedurarentzat; hala, kontrolatu beharreko prozeduraren berrikuntza egokia lortuko dugulako. Beraz, sistema modu egokian identifikatuko genuke, eta sintesiak erreguladorea egoki doituko du. Horrek eragingo du kontroladoreak ateratzen duen seinalea hasierakoa baino lasaiagoa izatea, kontroladorea sistema egoki kontrolatzen ari delako. Hala ere, horrek badu alde txar bat ere: kontroladoreak ematen duen seinalea oso aldakorra ez bada, sistemari buruz dugun informazioa gutxituz joango da (Gogoan izan identifikazio-algoritmoak oroitzapen-faktore bat duela eta hasierako informazioa galduz joango dela denbora igaro ahala). Identifikazio-algoritmoan arazoak sorraraziko ditu horrek, zenbaki-arazoak hain zuzen ere. Izan ere, kontroladoreak ateratzen duen seinalea kontsignaren balio konstantera hurbiltzen denean, kontroladoreak sistema gaizki kitzikatzen du, eta, horren ondorioz, datu asko berdinak izaten dira. Horrek matematikoki esan nahi du hein nahikoa ez duen matrize behatzaile bat izango dugula identifikazio-algoritmoan. Beraz, lortuko dugun sistemaren eredua

gaizki identifikatuta egongo da eta ez du behar bezala doituko kontroladorea. Orduan, kontroladoreak seinale oszilakor bat ematen du. Egoera horretan, identifikazio-algoritmoak behar adina datu izango ditu berriz sistema egoki identifikatzeko, eta kontroladoreak egoki doituko ditugu berriz. Prozesuak horrela jarraituko du hurrengo eztanda numerikoa izan arte. Arazo horri aurre egiteko, berrikuste-algoritmo bat ezartzen da identifikazioaren gain. Berrikuste-algoritmo horrek erabakitzen du, kontsigna, irteera eta kontroladoreak emandako datuetan oinarrituta, noiz abiarazi eta noiz geldiarazi identifikazioa eta sintesia. Ez da teknika berezirik baliatzen berrikuste-algoritmoa egiteko. Eskuarki, lege heuristikoak erabili ohi dira. Beraz, kontrolatu beharreko sistema dinamikoaren izaeraren arabera egingo ditugu lege horiek. Oro har, sistemaren identifikazioa abiaraziko dugu, baldin eta dugun ereduaren emaitzak txarrak badira, hots, ereduak zenbatesten duen irteera eta lagindutako irteera oso ezberdinak badira. Bestalde, identifikazioa geldituko dugu, baldin eta ereduak zenbatesten duen irteera eta lagintzen dugun irteera hurbilekoak badira. Horrez gain, eskuarki aldi berean abiarazten eta gelditzen ditugu sintesia eta identifikazioa, sintesia egin ahal izateko sistemaren eredu egokia behar baitugu.



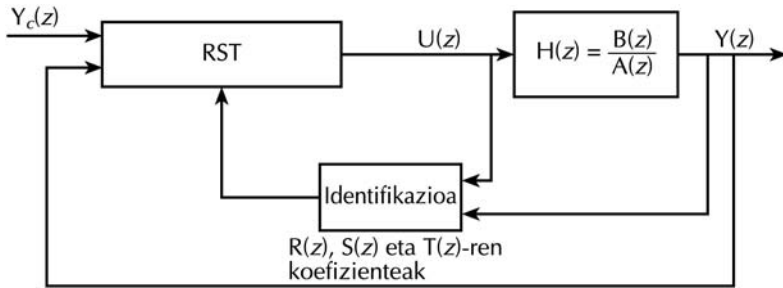
**12.7 irudia.** Zeharka egokitutako kontrolaren eskema berrikustearerako.

Beraz, berrikuste-algoritmo bat erabiliz gero, ez dugu zertan laginketa-periodo guztietan identifikazioa eta sintesia exekutatu behar. Berrikuste-algoritmoak kontu handiz abiarazi behar du identifikazio-algoritmoa, ondoren lortuko dugun erreguladorea egoki doitua izan dadin. Horretarako, hasierako datu egokiak eman behar dizkio berrikuste-algoritmoak identifikazio-algoritmoari, edota ereduaren parametroen balio egoki batzuekin hasieratu. Balio horiek ematea ez da batere erraza; beraz, berrikuste-algoritmoa egitea gai konplexua da.

### 12.3.2 Egitura moldakor zuzena

Honelako algoritmo moldakorrek identifikazioa eta sintesia aldi berean egiten dituzte, egin beharreko kalkuluak eta urratsak sinpleagoak direlako. Bestalde, algoritmo hauek arazoak izaten dituzte  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioen koefizienteak kalkulatzean, sortzen diren ekuazioak ez direlako linealak izaten. Ekuazio horien koefizienteak  $u(kh)$  eta  $y(kh)$  aldagaien laginetan oinarritzen dira. Laburbilduz, honela lan egiten dute algoritmo hauek:

- 1.- Laginketa-periodo bakoitzeko, denbora-eten bat exekutatzen da. Eten horretan, urrats hauek egingo ditu mikroprozesadoreak:
  - A/D bihurgailuetako  $y(kh)$  irteerako aldagaia neurtuko du.
  - Ondoren, sistemaren identifikazioa + sintesia kalkulatu du. Urrats honen irteera  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioen koefizienteak dira. Koefizienteak  $u(kh)$  eta  $y(kh)$  aldagaien laginetan oinarritzen dira. Eskuarki, horrelako ekuazioak ez-linealak dira, eta modu egokian ebatzi behar ditugu.
  - $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioak, kontsignaren  $y_c(kh)$  sarrera-laginak eta sistemaren  $y(kh)$  sarrera-laginak erabiliz,  $k$  aldiune horretako kontroladorearen  $u(kh)$  irteera-lagina kalkulatu dugu.
  - Ondoren, mikroprozesadoreak  $u(kh)$  aldagaia aterako du D/A bihurgailuaren bitartez. Balio hori ez da aldatuko hurrengo laginketa-periodora arte.
  - Azkenik,  $u(kh)$  eta  $y(kh)$  aldagaiak eguneratuko ditugu, hurrengo laginketa-periodoko denbora-etena exekutatzean datu egokiak izan ditzagun.
- 2.- Denbora-etena bukatutakoan, programa nagusira itzuliko gara hurrengo laginketa-periodora arte. Laginketa-periodoa igaro eta gero, berriz exekutatuko dugu denbora-etena 1. urratsetik hasita.



**12.8 irudia.** Algoritmo moldakor zuzenaren bloke-egitura.

Ekuazio hauen bidez aztertuko dugu algoritmo honek sintesia eta identifikazioa aldi berean egiteko teknika. RST kontroladorea kalkulatzeko, 10. atalean aztertu ditugun ekuazio hauek ebatzi behar ditugu. Erabiliko dugun RST kontroladoreak perturbazio konpentsatzailerik ez duela joko dugu.

$$T(z) = A_0(z)B_e^+(z) \quad (12.22)$$

$$A(z)R^+(z) + B^-(z)S(z) = A_e(z)A_0(z) \quad (12.23)$$

Non:

$$B_e(z) = B^-(z)B_e^+(z) \quad (12.24)$$

$$R(z) = R^+(z)B^+(z) \quad (12.25)$$

$$B(z) = B^-(z)B^+(z) \quad (12.26)$$

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) \geq \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B(z)) \quad (12.27)$$

Gogoan izan behar dugu  $R(z)$ ,  $S(z)$ ,  $T(z)$  eta  $A_0(z)$  polinomioen maila hauek aukeratuko ditugula:

$$\text{maila}(A_0(z)) \geq 2\text{maila}(A(z)) - \text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B^+(z)) - 1 \quad (12.28)$$

$$\text{maila}(R^+(z)) = \text{maila}(A_e(z)) + \text{maila}(A_0(z)) - \text{maila}(A(z)) \quad (12.29)$$

$$\text{maila}(T(z)) = \text{maila}(A_0(z)) + \text{maila}(B_e^+(z)) \quad (12.30)$$

$$\text{maila}(S(z)) = \text{maila}(A(z)) - 1 \quad (12.31)$$

Sintesia eta identifikazioa urrats bakar batean laburtzeko, (12.23) ekuazioa irteeraren Z transformatuaz biderkatuko dugu.

$$A_e(z)R'(z)Y(z) + B^-(z)S(z)Y(z) = A_e(z)A_0(z)Y(z) \quad (12.32)$$

Bestalde, badakigu sistemaren transferentzia-funtzioa erabiliz berdintza hau lor dezakegula:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \Rightarrow A(z)Y(z) = B(z)U(z) \quad (12.33)$$

(12.32) ekuazioko ezkerreko lehen gaia (12.33) berdintzaz ordezkatzuz gero, honako hau lortuko dugu.

$$A_e(z)A_0(z)Y(z) = B(z)R'(z)U(z) + B^-(z)S(z)Y(z) \quad (12.34)$$

Landu dezagun azken ekuazio hori,  $Y(z)$  eta  $U(z)$  arteko transferentzia-funtzioa  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioen mende uzteko:

$$\begin{aligned} A_e(z)A_0(z)Y(z) &= B^+(z)B^-(z)R'(z)U(z) + B^-(z)S(z)Y(z) \\ A_e(z)A_0(z)Y(z) &= B^-(z)R(z)U(z) + B^-(z)S(z)Y(z) \end{aligned} \quad (12.35)$$

$Y(z)$  eta  $U(z)$  transformatuen arteko transferentzia-funtzioa honela berridatz daiteke.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B^-(z)R(z)}{A_e(z)A_0(z) - B^-(z)S(z)} \quad (12.36)$$

$Y(z)$  eta  $U(z)$  transformatuen arteko zatiketa,  $B(z)$  eta  $A(z)$  polinomioen arteko zatiketa gisa adierazi beharrean,  $S(z)$  eta  $R(z)$  polinomioen mende utziko dugu. Irteerako  $y(kh)$  laginen eta sarrerako  $u(kh)$  laginen bidez,  $B^-(z)$ ,  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioen koefizienteak zenbatets ditzakegu. Gogoan izan behar dugu  $A_0(z)$  eta  $A_e(z)$  polinomioak ezagunak direla. Hala ere, batetik,  $B^-(z)$  eta  $R(z)$  polinomioak eta, bestetik,  $B^-(z)$  eta  $S(z)$  polinomioak biderketa gisa daudenez, polinomio horien arteko koefizienteen arteko erlazioak ez-linealak izango dira, eta, horren ondorioz, erregresioa ez da lineala izango. Erregresio bat lineal izateko,  $B^-(z)$ -k ezaguna izan behar du nahitaez. Egoerarik arruntena da  $maila(B^-(z)) = 0$  izatea, hots, sistemaren 0 guztiak sinplifikatzea. Kontu handiz proposatu behar dira honelako RST kontroladoreak,

sistemaren 0 guztiek egonkorak izan behar baitute. Horrenbestez,  $B^-(z) = kte$  egiteak erregresio lineal bat eragingo du, baina sistemaren 0 guztiak egonkorak direla jo behar dugu. Beraz, hori egoera jakin batzuetan besterik ez da gertatuko. Planteatu beharreko erregresio lineala hurrengo berdintzatik ondorioztatzen den gehikuntza-ekuazioan oinarrituko da. Gogoan izan behar dugu lortuko ditugun datuak  $\{y(kh)\}$  irteera-laginak eta  $\{u(kh)\}$  sarrera-laginak izango direla, eta zenbatetsi beharreko aldagaiak  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioen koefizienteak izango direla.  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioen koefizienteak (12.29) eta (12.31) berdintzetatik aterako dira. Koefiziente horiek 11. ataleko algoritmo errepikakor batekin zenbatetsi ohi dira.

$$A_e(z)A_0(z)Y(z) = kte.R(z)U(z) + kte.S(z)Y(z) \quad (12.37)$$

Bukatzeko, sistemaren zeroak egonkorak ez badira,  $B^-(z)$  ezaguntzat jo behar dugu erregresio lineal bat lortu ahal izateko.  $B^-(z)$  polinomioa ezaguna ez bada, erregresio ez-lineal bat ebatzi beharko dugu. Eskuarki, erregresio ez-linealak ebazteko teknikak oso konplexuak dira, eta, kontrol-algoritmoa asko moteltzen denez, nahiko zaila izaten da mikroprozesadore baten denbora-eten batean jartzea.  $B^-(z)$  polinomioa ezaguna bada, planteatu beharreko erregresio lineala (12.38) berdintzatik ondorioztatzen den gehikuntza-ekuazioan oinarrituko da. Izan ere, (12.37) ekuazioarekin lor genezakeen antzeko erregresio lineal bat lortuko dugu. Egoera horretan bezala identifikazio-algoritmo errepikakor bat erabiltzea izango da zentzuzkoena.

$$A_e(z)A_0(z)Y(z) = B^-(z)R(z)U(z) + B^-(z)S(z)Y(z) \quad (12.38)$$

$T(z)$  polinomioa kalkulatzeko, (12.22) ekuazioa erabiliko dugu. Gogoan izan behar dugu  $A_0(z)$  eta  $B_e'(z)$  polinomioak ezagunak direla.

$$T(z) = A_0(z)B_e'(z)$$

## 12.1 ariketa

Jo dezagun hau dela kontrolatu beharreko sistemaren transferentzia-funtzioa. Sistemaren laginketa-periodoa da  $h$  [s/lagin], eta  $a_0$  eta  $b_0$  parametro errealeak dira. Horrelako sistema bat begizta itxiko egin nahi dugu RST kontroladore baten bidez. Kontrol moldakor zuzen batekin kontrolatu nahi dugu. Identifikazioa algoritmoa errepikakor batekin egingo dugu.

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0}{z + a_0}$$

Begizta itxian lortu nahi dugun ereduak kondizio hauek bete behar ditu:

- 1.- 5 erloju-kolpetan  $A = 20$  moteltze-kondizio absolutua betetzen duen begizta itxiko sistema.
- 2.- Ez dugu perturbazio-konpentsatzailerik sartuko.
- 3.- Bihurtzeko denbora-tartearen eta RST algoritmoaren exekutatzeko denbora-tartearen batuketa baztergarria denez  $h$  laginketa-periodoarekiko,  $R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioen mailak berdinak dira; horrenbestez, 10.1 taulako inekuazioak berdintza bilakatzen dira.

Aurreko kondizio guztiak kontuan izanik kalkulatu dugu RST kontroladorea:

Kontrolatu beharreko sistemaren izendatzailea 1. mailako polinomioa denez, eta zerorik sartuko ez dugunez, ereduaren izendatzailea ere 1. mailako polinomio bilakatuko da.

$$\text{maila}(B_e(z)) = 0 \Rightarrow B_e(z) = B(z)B_e^*(z) = b_0 \Rightarrow B_e^*(z) = 1$$

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) = \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B(z))$$

$$\text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B_e(z)) = 1 \Rightarrow \text{maila}(A_e(z)) = 1$$

Beraz, honela idatziko dugu begizta itxian lortu nahi dugun ereduaren izendatzailea:

$$\text{maila}(A_e(z)) = 1 \Rightarrow A_e(z) = z + a_{0,e}$$

Eredu horren moteltze-kondizio absolutu eta erlatibo hauek betetzen dituen erro bat aukeratuko dugu:  $z = 0$  erroak ditugun moteltze-kondizioak betetzen ditu; beraz,  $a_{0,e} = 0$  izango da.

Hortaz, hau da jarraitu beharreko eredua, hots, begizta itxian lortu nahi dugun eredua:

$$H_e(z) = \frac{b_0}{z}$$

$A_0(z)$  polinomioa aukeratuko dugu orain. Polinomio behatzaile hori  $z'$  itxurako polinomio bat da.

$$\begin{aligned} \text{maila}(A_0(z)) &= 2\text{maila}(A(z)) - \text{maila}(A_e(z)) - \text{maila}(B^+(z)) - 1 = 2 - 1 - 0 - 1 = 0 \\ A_0(z) &= 1 \end{aligned}$$

$R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioen mailak kalkulatu ditugu orain. Gogoan izan behar dugu hiru polinomio horiek maila bera dutela exekutatzeko eta bihurtzeko denbora-tarteak baztergarriak direlako laginketa-periodoarekiko.

$$\begin{aligned} \text{maila}(R(z)) &= \text{maila}(A_0(z)) + \text{maila}(A_e(z)) + \text{maila}(B^+(z)) - \text{maila}(A(z)) \Rightarrow \\ \text{maila}(R(z)) &= 0 + 1 + 0 - 1 = 0 \\ \text{maila}(T(z)) &= \text{maila}(A_0(z)) + \text{maila}(B_e^-(z)) \Rightarrow \text{maila}(T(z)) = 0 \\ \text{maila}(S(z)) &= \text{maila}(A(z)) - 1 \Rightarrow \text{maila}(S(z)) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$R(z)$ ,  $S(z)$  eta  $T(z)$  polinomioak, horrenbestez, konstanteak dira.

$$R(z) = r_0$$

$$T(z) = t_0$$

$$S(z) = s_0$$

$T(z)$  polinomioa lor dezakegu 10. ataleko ekuazioak aplikatuz. Ikus daitekeenez,  $T(z)$  polinomioa ez da aldatzen denborarekin.

$$T(z) = A_0(z)B_e^-(z) \Rightarrow T(z) = 1$$

$R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioak kalkulatzeko identifikazio-algoritmo errepikakor bat proposatuko dugu orain. Horretarako, erregresio lineal eran idatzi behar ditugu  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioen koefizienteak. Erregresioa planteatzeko, (12.38) ekuazioa erabiliko dugu.

$$A_e(z)A_0(z)Y(z) = B^-(z)R(z)U(z) + B^-(z)S(z)Y(z)$$

$$zY(z) = b_0 r_0 U(z) + b_0 s_0 Y(z)$$

Azken berdintza hori gehikuntza-ekuazio bihurtuz gero, honako hau lortuko dugu:

$$y(kh + h) = b_0 r_0 u(kh) + b_0 s_0 y(kh)$$

Sarrerako eta irteerako laginen mendeko erregresio eran idatz gero  $S(z)$  eta  $R(z)$  eta polinomioen koefizienteak, honako hau lortuko dugu:

$$\begin{bmatrix} y(h) \\ y(2h) \\ \dots \\ y(kh + h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 u(0) & b_0 y(0) \\ b_0 u(h) & b_0 y(h) \\ \dots & \dots \\ b_0 u(kh) & b_0 y(kh) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(h) \\ e(2h) \\ \dots \\ e(kh + h) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[\Phi(k)] = \begin{bmatrix} b_0 u(0) & b_0 y(0) \\ b_0 u(h) & b_0 y(h) \\ \dots & \dots \\ b_0 u(kh) & b_0 y(kh) \end{bmatrix}$$

$b_0$  ezaguna dela joko dugu. Horrenbestez,  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioen koefizienteak identifikazio-algoritmo errepikakor baten bidez lortzeko, iragazki digital hau erabili behar dugu: (11. atalean aztertu dugu iragazki digitala: ikus 11.17, 11.18 eta 11.19 berdintzak).

$$[\hat{v}(k+1)] = [\hat{v}(k)] + [G(k+1)](y(k+1) - [\phi(k+1)]^T [\hat{v}(k)]) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} r_0(k+1) \\ s_0(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0(k) \\ s_0(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{1,1}(k+1) \\ g_{2,1}(k+1) \end{bmatrix} \left( y(k+1) - [b_0 u(kh) \quad b_0 y(kh)] \begin{bmatrix} r_0(k) \\ s_0(k) \end{bmatrix} \right)$$

Non:

$$[G(k+1)] = \frac{1}{(1 + [\phi(k+1)]^T [P(k)] [\phi(k+1)])} ([P(k)] [\phi(k+1)]) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} g_{1,1}(k+1) \\ g_{2,1}(k+1) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} p_{1,1}(k) & p_{1,2}(k) \\ p_{2,1}(k) & p_{2,2}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 u(kh) \\ b_0 y(kh) \end{bmatrix}}{\left( 1 + \begin{bmatrix} b_0 u(kh) & b_0 y(kh) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1}(k) & p_{1,2}(k) \\ p_{2,1}(k) & p_{2,2}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 u(kh) \\ b_0 y(kh) \end{bmatrix} \right)}$$

$$[P(k+1)] = ([I] - [G(k+1)][\phi(k+1)]^T)[P(k)] \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} p_{1,1}(k+1) & p_{1,2}(k+1) \\ p_{2,1}(k+1) & p_{2,2}(k+1) \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{1,1}(k+1) \\ g_{2,1}(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 u(kh) & b_0 y(kh) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} p_{1,1}(k) & p_{1,2}(k) \\ p_{2,1}(k) & p_{2,2}(k) \end{bmatrix}$$

Iragazki hori abiaraztean,  $[\Phi(k)]$ -k ez du  $P$  errenkadarik ere; hala, bada, algoritmoak hasieran hipotesia urratzen du. Hala ere, algoritmo hori abiatzeko, jo dezagun  $k_0$  aldiunean  $[\Phi(k_0)]$ -ren heina  $P$  dela. Orduan,

$$P(k_0) = [\Phi^T(k_0)\Phi(k_0)]^{-1}$$

$k_0$  aldiunetik aurrera, algoritmo errepikaria aplikatu ahal izango dugu,  $[\Phi(k)]$  behaketa-matrizearen heina  $P$  delako.

$$[\hat{v}(k_0)] = [P(k_0)][\Phi(k_0)]^T[y(k_0)]$$

Beraz,  $k_0$  aldiunetik aurrera  $R(z)$  eta  $S(z)$  polinomioen koefizienteak kalkulatu baditzakegu, iragazkia abiarazi ahal izango dugu. Iragazki hori laginketa-periodo bakoitzean exekutatu dugu. Laginketa-periodo bakoitzean iragazkia exekutatu eta gero, kontroladoreak atera behar duen kontrol-aldagaiaren balioa kalkulatu behar dugu. Kontuan harturik RST kontroladorearen eredua, lortu ditugun emaitzak ordezkatzeko ditugu.

$$U(z) = \frac{T(z)}{R(z)} Y_c(z) - \frac{S(z)}{R(z)} Y(z) \Rightarrow U(z) = \frac{1}{r_0} Y_c(z) - \frac{s_0}{r_0} Y(z) \Rightarrow$$

$$u(kh) = \frac{1}{r_0(kh)} y_c(kh) - \frac{s_0(kh)}{r_0(kh)} y(kh)$$

Ikus daitekeenez, honelako kontrol-algoritmo moldakorrek denborarekiko aldakorra den eta, oro har, ez-lineala den sistema bat sorrarazten dute. Eskuarki oso zaila izaten da horrelako sistemen egonkortasuna ziurtatzea.

# 13

## Egoera-adierazpena

### 13.1 SARRERA

Orain arte, sistema bat deskribatzeko, gehikuntza-ekuazioak eta sistemaren transferentzia-funtzioak erabili ditugu. Dena dela, deskribapen mota horiek badute ahulezia bat: sistemaren sarrerako eta irteerako aldagaien arteko erlazioak azaltzen dituzte. Horrelako deskribapenei sistema dinamikoen kanpo-adierazpen matematiko deritze. Sistema baten egoera azaltzean, ez da nahikoa izaten sistema horren sarrera eta irteera aztertzea; sistema baten egoera guztiz azaltzen duten aldagaien multzoa aztertu behar dugu. Liburuko atal honetan azalduko dugu sistemaren barne-egoera deskribatzen duen adierazpena: egoera-adierazpena.

### 13.2 EGOERA ETA EGOERA-ALDAGAIK

Sistema baten egoera finkatzen duen aldagaien multzoa aukeratzeko, sistemaren egoera zer den argitu behar dugu lehenik.

**Definizioa:**  $t_k$  aldiune jakin baterako sistema baten egoera hau da:  $t_k$  aldiune horretatik aurrera sistemaren irteerak kalkulatzeko  $t_k$  aldiune horretan behar dugun gutxieneko informazioa,  $t_k$  aldiune horretan eta  $t_k$  aldiune horretatik aurrera sistemaren sarrearen balioak ezagunak direla suposatuz.

Egoera deritzo sistemaren aldagai kopuru txikieneko multzoari, zeinetan  $t_k$  denbora-aldiuneko balioak eta sistemaren sarreraren bilakaera jakin batek  $t_k$  aldiune horretatik aurrera era bakarrean zehazten baitute sistemaren geroko bilakaera.

Definizio horrekin, hala ere, ez da batere argi geratzen nola adieraz daitekeen gutxieneko informazio hori. Azter dezagun hori lasaiago. Argi dago sistemari lotuta dauden aldagaietan dagoela informazio hori; beraz, sistemaren egoerak sistemari lotuta dagoen aldagai multzo bat izan behar duela. Baina, zenbat aldagai behar dira beharrezkoak sistema baten egoera definitzeko? Eta zein?

Sistemaren dinamika azaltzen duten ekuazio diferentzialen mailen batuketak adierazten digu sistemaren egoeran sartu behar den aldagai kopurua. Azken batean,  $n$ -garren mailako ekuazio diferentzial bat ebazteko  $n$  hasierako kondizioa behar da. Era berean, sistema baten ekuazio diferentzialak (edo gehikuntza-ekuazioak) ebazteko eta sistemaren irteerak kalkulatzeko, nahitaez, sistemaren sarrerak ezagunak izanik, hasierako kondizioak ezagutu behar ditugu.

Beraz, hasierako kondizioek definitzen dute sistemaren hasierako egoera, eta sistemaren egoera definitzeko behar den aldagai kopurua sistemak behar dituen hasierako kondizioen kopurua da. Halaber, sistemaren egoera osatzen duten aldagaiak hasierako kondizioen aldagaiak dira, edo aldagai horien arteko konbinazio lineal bat.

Hori hobeto ulertzeko, (13.1) adibidea aztertuko dugu:

### 13.1 adibidea

Azter dezagun 5.1 adibideko iman iraunkorreko korrante zuzeneko makina. Sistema horren ekuazioak hauek dira:

| Parametroa | Esanahia                                                                                          |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $R$        | Induzituaren induktantzia [ohm]                                                                   |
| $K_e$      | Higidurari egotzitako tentsioaren konstantea [ $V \cdot s / (\text{rad} \cdot \text{Wb})$ ].      |
| $\phi$     | Kitzikapen-fluxua [webber]                                                                        |
| $J$        | Biralaren eta higitzen dugun atal mekanikoaren inertzia-momentua [ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ] |

|       |                                                                                                                     |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| F     | Abiadurarekiko zuzenki proportzionala den marruskadura-maila<br>[N · m · s/rad]                                     |
| $K_m$ | Makinak eragiten duen momentua indusitutako korrante unitate bakoitzeko eta fluxu unitate bakoitzeko [N · m/Wb · A] |
| b     | Makinaren proportzionaltasun-parametroa abiadurarekiko                                                              |

Aldagaien zerrenda hau da:

$v(t)$  Tentsio indusitua [V]

$i(t)$  Korrante indusitua [A]

$W(t)$  Makinaren abiadura angeluarra [rad/s]

**Sistemaren eredu matematikoa.** Hipotesi sinplifikatzaile arruntak kontuan hartuz, bi ekuazio aterako dira: bata motorraren zirkuitu indusituari dagokiona (zati elektrikoa) eta bestea motorraren higidurari dagokiona (zati mekanikoa). Ekuazio horiek idazteko, fisikako Kirchhoffen legean eta Newtonen legean oinarrituko gara, hurrenez hurren.

- Kirchhoffen ekuazio indusitua

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K_e \phi w \quad (13.1)$$

- Makinaren biralaren (ingelesez, *rotor*) ekuazio dinamikoa, Newtonen legea aplikatuz.

$$\left. \begin{aligned} M_m &= K_m \phi i \\ M_m &= J \frac{d\omega}{dt} + bw \end{aligned} \right\} \Rightarrow K_m \phi i = J \frac{d\omega}{dt} + bw \quad (13.2)$$

Lortutako (13.1) eta (13.2) ekuazioak, lehen mailako ekuazio diferentzialak dira; beraz, sistemaren egoera definitzeko, bi aldagai behar ditugu, sistema osatzen duten ekuazio diferentzialen mailen batuketa 2 delako. Izan ere, sistemaren irteerak kalkulatzeko, hasierako bi kondizio behar ditugu: hasierako korrante indusitua,  $i(0)$ , eta makinaren hasierako abiadura angeluarra,  $w(0)$ . Sistemaren sarrera bakarra  $v(t)$  tentsio indusitua da, hots, elikatze-tentsioa. Sistemaren irteera, kasu honetan, makinaren abiadura angeluarra dela joko dugu. Sistema hori ebazteko, makinaren

tentsio induzitua behar dugu, eta, horretarako, Laplaceren transformatua aplikatuko dugu.

$$\begin{aligned} V(s) &= R \cdot I(s) + Ls \cdot I(s) - Li(0) + K_e \phi \cdot W(s) \\ K_m \phi \cdot I(s) &= Js \cdot W(s) - Jw(0) + bW(s) \end{aligned} \quad (13.3)$$

Gogoan izan  $w(0)$  eta  $i(0)$  makinaren hasierako abiadura angeluarra eta hasierako korrante induzitua direla, hurrenez hurren. Tentsio induzituaren Laplaceren transformatua da  $V(s)$ , eta korrante induzituaren Laplaceren transformatua,  $I(s)$ . (13.3) ekuazio multzotik korrante induzitua bakartuz gero, berdintza honetara heltzen gara:

$$\begin{aligned} \frac{V(s) + Li(0) - K_e \phi \cdot W(s)}{R + Ls} &= I(s) \\ I(s) &= \frac{(Js + b)W(s) - Jw(0)}{K_m \phi} \end{aligned} \quad (13.4)$$

Aurreko ekuazioak berdinuz, makinaren abiadura angeluarra kalkula dezakegu.

$$\begin{aligned} \frac{V(s) + Li(0) - K_e \phi \cdot W(s)}{R + Ls} &= \frac{(Js + b)W(s) - Jw(0)}{K_m \phi} \\ \frac{K_m \phi}{R + Ls} V(s) + \frac{LK_m \phi \cdot i(0)}{R + Ls} + Jw(0) &= \left( \frac{(Js + b)}{K_m \phi} + \frac{K_e \phi}{R + Ls} \right) W(s) \quad (13.5) \\ W(s) &= \left( \frac{K_m \phi (R + Ls)}{(Js + b)(R + Ls) + (K_m K_e \phi^2)} \right) \left[ \frac{K_m \phi}{R + Ls} V(s) + \frac{LK_m \phi \cdot i(0)}{R + Ls} + Jw(0) \right] \end{aligned}$$

$V(s)$  elikatze-tentsioaren Laplaceren transformatua eta  $i(0)$  eta  $w(0)$  hasierako kondizioak ezagunak ditugunez, makinaren abiadura angeluarraren Laplaceren transformatua kalkula dezakegu.  $W(s)$  transformatua ezaguna badugu, abiadura denboraren mende utz daiteke Laplaceren alderantzizko transformatua erabiliz.

$$w(t) = L^{-1}(W(s)) \quad (13.6)$$

$W(s)$  abiadura angeluarraren Laplaceren transformatua badugu, korrante induzituaren Laplaceren transformatua kalkula dezakegu.

$$I(s) = \left[ \left( \frac{(R + Ls)(Js + b)}{(Js + b)(R + Ls) + (K_m K_e \phi^2)} \right) \left[ \frac{K_m \phi}{R + Ls} V(s) + \frac{LK_m \phi \cdot i(0)}{R + Ls} + Jw(0) \right] \right] - \frac{Jw(0)}{K_m \phi} \quad (13.7)$$

eta era berean:

$$i(t) = L^{-1}(I(s)) \quad (13.8)$$

Beraz, makinaren sarrera bakarra elikatze-tentsioa da; eta ezagunak baldin badira elikatze-tentsioa denborarekiko eta  $w(0)$  eta  $i(0)$  hasierako kondizioak, korrontea eta abiadura kalkula ditzakegu. Ondorioz, sistemaren egoera definitzeko, bi aldagai behar dira, baina zer egoera-aldagai aukeratu? Makinaren egoera-aldagai gisa korrante indutua eta elikatze-tentsioa aukeratuko ditugu, (13.1) eta (13.2) ekuazioetan aldagai horien deribatuak agertzen direlako. Beraz, (13.1) eta (13.2) ekuazioak matrize-ekuazio baten bidez adieraz daiteke.

$$\left. \begin{aligned} \frac{di(t)}{dt} &= \frac{v(t)}{L} - \frac{K_e \phi}{L} w - \frac{R}{L} i \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{K_m \phi}{J} i - \frac{b}{J} w \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_e \phi}{L} \\ \frac{K_m \phi}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (13.9)$$

Sistemaren ekuazio dinamikoak, sistema linealak direnean, lehen mailako ekuazio diferentzialez egindako matrize-berdintza baten bidez adieraz daitezke.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= i \\ x_2 &= w \\ u &= v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_e \phi}{L} \\ \frac{K_m \phi}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (13.10)$$

Beraz, sistemaren egoera-adierazpena lortu dugu.

### 13.2.1 Denbora jarraituko sistema baten egoera-adierazpena

Denbora diskretuko sistema baten egoera-adierazpena egin aurretik, lehenik, denbora jarraituko sistema lineal baten egoera-adierazpena aztertuko dugu, kontrolatu beharreko sistemak denbora jarraitukoak direlako. Ondoren, sistema horien denbora diskretuko egoera-eredu baliokidea kalkulatu dugu diskretizazioaren bidez.

- Denbora jarraituko sistema dinamiko lineal baten egoera-adierazpena

Gogoan har dezagun  $n$  mailako sistema bat. Sistemaren  $u(t)$  sarrera-aldagaia eta  $y(t)$  irteera-aldagaia erlazionatzen dituen  $n$ -garren mailako ekuazio diferentzial lineal batez adierazten da sistemaren portaera dinamikoa:

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \dots + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b \cdot u(t) \quad (13.11)$$

Sistema lineal baten dinamika adierazten duen egoera-adierazpena lortzeko, bakartu dezagun maila handieneko irteeraren deribatua.

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = \frac{1}{a_n} \left[ -a_0 y(t) - a_1 \frac{dy(t)}{dt} - a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \dots - a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + b \cdot u(t) \right] \quad (13.12)$$

### • Sistemaren egoera-ekuazioak

Sistemaren egoera-aldagaiak,  $x_i$ , honela definitzen baditugu,

$$x_i(t) = \frac{d^{i-1}y(t)}{dt^{i-1}} : \quad (13.13)$$

$$x_1(t) = y(t) \quad (13.14)$$

$$x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad (13.15)$$

$$x_3(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1}(t) = \frac{d^{n-2}y(t)}{dt^{n-2}}$$

$$x_n(t) = \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} \quad (13.16)$$

Eta definitutako  $n$  egoera-aldagaiak elkarrekin erlazionatzen dira lehen mailako  $n$  ekuazio diferentzial hauen bitartez:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = \frac{1}{a_n} [a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \dots - a_{n-1} x_n(t) + b \cdot u(t)] \end{cases} \quad (13.17)$$

Orokortuz,  $m$  sarrerako  $n$  mailako sistema lineal batentzat:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + b_{12}u_2(t) + \dots + b_{1m}u_m(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + b_{22}u_2(t) + \dots + b_{2m}u_m(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + b_{n2}u_2(t) + \dots + b_{nm}u_m(t) \end{cases} \quad (13.18)$$

Beraz,  $n$  mailako sistema lineal batek  $n$  egoera-aldagai ditu eta egoera-aldagai bakoitzaren deribatua, une oro, egoera-aldagaien eta sarreraren arteko konbinazio lineal bat da. Ondorioz, sistema baten bilakaera dinamikoa lehen mailako  $n$  ekuazio diferentzialen bidez adierazten da, bat egoera-aldagai bakoitzeko. Ekuazio bilduma edo multzoari **egoera-ekuazio** deritzogu.

Sistema ez-lineala balitz, egoera-aldagaien arteko erlazioak eta egoera-aldagaien eta sarreraren arteko erlazioak ez-linealak lirateke; kasu horretan, hau da ekuazioaren adierazpen orokorra:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \end{cases} \quad (13.19)$$

#### • Irteera-ekuazioak

Irteera-ekuazioek sistemaren irteeren balioak ematen dizkigute. Ekuazio horiek berdintza aljebraikoak dira, eta, sistema linealetan, irteera bakoitzaren balioa egoera-aldagaien eta sarreraren arteko konbinazio lineal bat da une oro.

$$\begin{cases} y_1(t) = c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + \dots + c_{1n}x_n(t) + d_{11}u_1(t) + d_{12}u_2(t) + \dots + d_{1m}u_m(t) \\ y_2(t) = c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t) + \dots + c_{2n}x_n(t) + d_{21}u_1(t) + d_{22}u_2(t) + \dots + d_{2m}u_m(t) \\ \vdots \\ y_p(t) = c_{p1}x_1(t) + c_{p2}x_2(t) + \dots + c_{pn}x_n(t) + d_{p1}u_1(t) + d_{p2}u_2(t) + \dots + d_{pm}u_m(t) \end{cases} \quad (13.20)$$

Oro har, sistema ez-lineala balitz, irteera-ekuazioak honelakoak lirateke:

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ y_2(t) = g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ \vdots \\ y_p(t) = g_p(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \end{cases} \quad (13.21)$$

## EGOERA-EREDUA SISTEMA LINEALENTZAT

Denbora jarraituko sistema lineal baten egoera-adierazpenean hiru aldagai mota ditugu: sarrera-aldagaiak,  $\underline{u}(t)$  bektorearen osagai direnak; irteera-aldagaiak,  $\underline{y}(t)$  bektorearen osagai direnak; eta, azkenik, egoera-aldagaiak,  $\underline{x}(t)$  bektorearen osagai direnak.

$$\text{Sarrera-bektorea } \underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad \text{Irteera-bektorea } \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{Egoera-bektorea } \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Sarrera-bektorea, irteera-bektorea eta egoera-bektorea definituta, egoera-ekuazioak eta irteera-ekuazioak era matrizial estandarrean idatz litezke, eta **egoera-eredu hau** ematen dute:

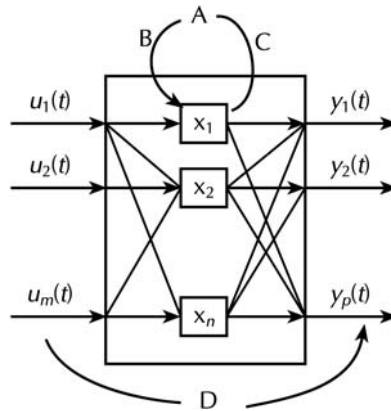
$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \cdot \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix} \cdot \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \dots & d_{pm} \end{bmatrix} \cdot \underline{u}(t) \end{aligned}$$

edo

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = [\underline{A}] \cdot \underline{x}(t) + [\underline{B}] \cdot \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = [\underline{C}] \cdot \underline{x}(t) + [\underline{D}] \cdot \underline{u}(t) \quad \underline{u} \in \Re^m \quad \underline{x} \in \Re^n \quad \underline{y} \in \Re^p \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$

Gogoan izan behar dugu sistemaren egoera-adierazpenak egoera-bektorearen hasierako balioa izan behar duela, sistemaren sarrerez gain, irteera kalkulatzeko. Beraz, sistema lineal baten egoera-eredua aztertuz gero, lau matrize ditugu:

- $[\underline{A}]$  dinamika-matrizea: sistemaren dinamikaren egonkortasuna finkatzen du.
- $[\underline{B}]$  sarrera-matrizea: sarrerek egoera-aldagaien gain duten eragina finkatzen du.
- $[\underline{C}]$  irteera-matrizea: egoera-aldagaiek irteera-aldagaien gain duten eragina finkatzen du.
- $[\underline{D}]$  matrizea: sarrera-aldagaiek irteera-aldagaien gain duten eragina finkatzen du.



**13.1 irudia.** Sistema baten egoera, sarrera- eta irteera-aldagaien arteko mendekotasun-erlazioak.

Sistema lineal ez-aldakorretan (geldikorretan)  $[\underline{A}]$ ,  $[\underline{B}]$ ,  $[\underline{C}]$  eta  $[\underline{D}]$  matrizeak konstanteak dira, hau da, matrizeen koefizienteen balioak konstante mantentzen dira une oro; sistema lineal aldakorretan, berriz, koefizienteak aldakorak dira, eta orduan:

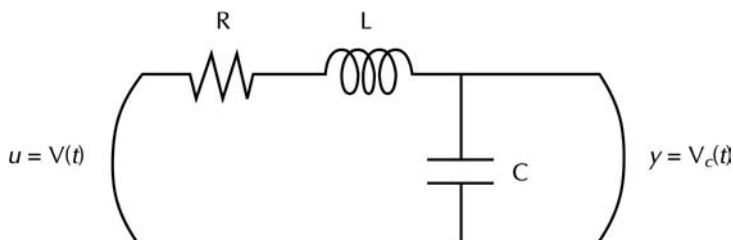
$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = [\underline{A}(t)] \cdot \underline{x}(t) + [\underline{B}(t)] \cdot \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = [\underline{C}(t)] \cdot \underline{x}(t) + [\underline{D}(t)] \cdot \underline{u}(t) \quad \underline{u} \in \Re^m \quad \underline{x} \in \Re^n \quad \underline{y} \in \Re^p \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$

Bestalde, sistema ez-linealek ez dute eredu matritzial estandarra onartzen eta, oro har, ereduak egitura hau hartzen du:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}[\underline{x}(t), \underline{u}(t), t] \\ \underline{y}(t) = \underline{g}[\underline{x}(t), \underline{u}(t), t] \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$

### 13.3 adibidea

Kalkulatu RLC zirkuitu elektriko baten egoera-eredua.



13.2 irudia. RLC zirkuitua.

**Ereduztapena:** RLC zirkuitua 2. mailako sistema bat da, eta, Kirchoffen legeak aplikatuz, ekuazio diferentzial hauek lortuko ditugu:

$$\begin{cases} V(t) = V_c(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \\ i(t) = C \cdot \frac{dV_c(t)}{dt} \end{cases}$$

Sistemaren egoera-eredu bat lortzeko, urrats hauek egin behar dira:

- Egoera-aldagaiak aukeratu.** Egoera-aldagaiak bi dira, sistemaren dinamika finkatzen duten ekuazio diferentzialaren maila 2 delako. Erresistentzia zeharkatzen duen korrontea eta kondentsadorearen tentsioa egoera-aldagaitzat hartuko ditugu, korrontearen eta kondentsadorearen tentsioaren deribatuak agertzen direlako sistemaren ekuazio diferentzialetan.

$$x_1 = i(t)$$

$$x_2 = V_c(t)$$

2. **Ekuazioko gaiak ordenatu.** Egoera-aldagaien deribatuak bakartu behar dira, lehengo deribatuko gaiak berdintzaren ikurraren ezkerrean ager daitezzen.

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{L}V_c(t) + \frac{1}{L}V(t) \\ \frac{dV_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i(t) \end{cases}$$

3. **Egoera-ekuazioak era matritzialean idatzi.** Egoera-bektorea definituz gero,  $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t) \\ V_c(t) \end{bmatrix}$ , aurreko ekuazio horiek matrize-ekuazio baten bidez idatziz gero, berdintza hau lortuko dugu:

$$\begin{bmatrix} \frac{di(t)}{dt} \\ \frac{dV_c(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ V_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot V(t)$$

4. **Irteera-ekuazioa idatzi.** Kasu honetan, irteera-aldagaitzat kondentsadorearen tentsioa hartuz gero,  $y(t) = V_c(t)$ , honela idatz dezakegu irteera-ekuazioa:

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ V_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot V(t)$$

Beraz, sistemaren egoera-eredua hau izan daiteke:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u & \text{non} & \underline{x} = \begin{bmatrix} i(t) \\ V_c(t) \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot u & & u = V(t) \end{aligned}$$

Gehitu dezagun irteera bat. Kondentsadorearen tentsioaz gain, erresistentzia zeharkatzen duen korrontea irteera-aldagaitzat hartuz gero, irteera-bektorea honela

idatz daiteke:  $\begin{bmatrix} V_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$

Beraz, irteerako matrize-ekuazio hau aterako da:

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} V_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

Orain, berriz,  $V_c(t)$  kondentsadorearen tentsioa eta  $V_L(t)$  kondentsadorearen eta bobinaren arteko tentsioa hartzen baditugu irteera-aldagaitzat, irteerako matrize-ekuazioa honela idatziko litzateke:

$$V_L(t) = V(t) - R \cdot i(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} V_c(t) \\ V_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -R & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Beraz, aurreko adibidearekin ikus daitekeenez,  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  eta  $[D]$  matrizeak aukeratutako egoera-aldagaien eta irteera-aldagaien mende daude. Horrenbestez, sistema lineal bat finkatzeko, egoera-eredu asko daude. Dena dela, eredu horiek guztiak baliokideak dira eta sarreren eta irteeren arteko erlazioak modu berean ereduizatzen dituzte. Beraz, sistema baten egoera-eredua ez da bakarra.

### 13.2.2 Eredu-aldaketa

Bi eredu mota ditugu sistema dinamiko bat ereduizatzeko: kanpo-ereduak eta barne-ereduak. Kanpo-ereduek sarreren eta irteeren arteko erlazioak finkatzen dituzte, eta, gehienetan, transferentzia-funtzioen bitartez adierazten dira; sarrera eta irteera asko baditugu, transferentzia-funtzioen matrize bat erabili beharko dugu. Dena dela, eredu horiek ez dute barne-aldagaiez ezer esaten, ez baitira agertzen. Bestalde, barne-ereduak egoera-ereduak dira. Egoera-eredu horiek sistemaren barne-aldagaien jarrera dinamikoak azaltzen dituzte. Beraz, sarrera- eta irteera-aldagaien arteko erlazioak ereduizatzearaz gain, sistemaren barne-egoera finkatzen duten aldagaiaik ere kontuan hartzen dituzte. Puntu honetan, kanpo-eredutik barne-eredura edo barne-eredutik kanpo-eredura igarotzeko metodoak ikusiko ditugu.

#### 13.2.2.1 Sistema baten barne-eredutik sistema horren kanpo-eredu baliokidea kalkulatzeara

Har dezagun sistema dinamiko lineal baten barne-eredua.

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = [A] \underline{x}(t) + [B] \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = [C] \underline{x}(t) + [D] \underline{u}(t) \end{cases} \quad (13.22)$$

Matrize-ekuazio horiei Laplaceren transformatua aplikatuz gero, ekuazio hauek lortuko ditugu:

$$\begin{aligned} s \cdot \underline{X}(s) - \underline{X}_0 &= [A] \cdot \underline{X}(s) + [B] \cdot \underline{u}(s) \\ \underline{y}(s) &= [C] \cdot \underline{X}(s) + [D] \cdot \underline{u}(s) \end{aligned} \quad (13.23)$$

Hasierako kondizioak nuluak badira, sarrera- eta irteera-aldagaien arteko erlazioak transferentzia-funtzioen matrize baten bidez kalkula daitezke.

$$[sI - A] \cdot \underline{X}(s) = [B] \cdot \underline{u}(s) \rightarrow \underline{X}(s) = [sI - A]^{-1} \cdot [B] \cdot \underline{u}(s)$$

Azkenik, irteera-ekuazioaren bidez:

$$\underline{y}(s) = \{[C] \cdot [sI - A]^{-1} \cdot [B]\} \cdot \underline{u}(s) + [D] \cdot \underline{u}(s)$$

$$\underline{y}(s) = \{[C] \cdot [sI - A]^{-1} \cdot [B] + [D]\} \cdot \underline{u}(s)$$

Beraz, sarrera- eta irteera-aldagaien Laplaceren transformatuen arteko erlazioak  $[M(s)]$  transferentzia-funtzioen matrize baten bidez ereduiztatuko ditugu.

$$\underline{y}(s) = [M(s)] \cdot \underline{u}(s) \text{ non } [M(s)] = \{[C] \cdot [sI - A]^{-1} \cdot [B] + [D]\} \quad (13.24)$$

Sarrera-aldagaien kopurua  $m$  bada eta irteera-aldagaien kopurua  $p$  bada,  $[M(s)]$  transferentzia-funtzioen matrize horren zutabe kopurua  $m$  izango da eta errenkada kopurua  $p$  izango da, eta  $[M(s)]$  matrizearen  $F_{ij}(s)$  elementua  $i$ -garren irteeraren eta  $j$ -garren sarreraren arteko transferentzia-funtzioa izango da. Beraz,  $[M(s)]$   $m \cdot p$  transferentzia-funtzioekin osatuta dago, eta guztiek izendatzaile bera dute.

$$[M(s)] = \{F_{ij}(s), i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, m\} \quad \text{eta} \quad F_{ij}(s) = \frac{N_{ij}(s)}{D(s)} \quad \forall i, j$$

**OHARRA:** Demagun  $[sI - A]$  matrizea karratua eta alderantzikagarria dela. Beraz,  $[sI - A]$  matrizearen alderantzizkoak itxura hau izango du:

$$[sI - A]^{-1} = \frac{\text{Adj}[sI - A]}{\det[sI - A]} \quad (13.25)$$

Ikus daitekeenez,  $[sI - A]$  matrizearen determinantea  $[M(s)]$  transferentzia-funtzioen matrizearen izendatzailean agertzen da.

$$\begin{aligned} \underline{y}(s) &= \left\{ [C] \cdot \frac{\text{Adj}[sI - A]}{\det[sI - A]} \cdot [B] + [D] \right\} \cdot \underline{u}(s) \rightarrow \\ \underline{y}(s) &= \frac{[C] \cdot \text{Adj}[sI - A] \cdot [B] + [D] \cdot \det[sI - A]}{\det[sI - A]} \cdot \underline{u}(s) \end{aligned} \quad (13.26)$$

Beraz,  $[s[I] - [A]]$  matrizearen determinantea  $[A]$  matrizearen polinomio karakteristikoa da. Horrenbestez,  $[s[I] - [A]]$  matrizearen determinantearen erroak sistema horren transferentzia-funtzioen poloak izango dira. Polo horiek sistemaren egonkortasuna adierazten dute.

$$s_i / \det[s[I] - [A]]|_{s=s_i} = 0 \rightarrow \text{poloak} \quad (13.27)$$

**Ondorioz**,  $[A]$  matrizearen autobalioak sistemaren poloak izango dira

### 13.2.2.2 Sistema baten kanpo-eredutik sistemaren barne-eredua kalkulatzeari

Sistema baten kanpo-eredutik abiatuz, sistema baten barne-eredua kalkulatzeko, hainbat bide ditugu. Hemen hiru bide aurkeztuko ditugu, eta, horiek hobeto ulertzeko, orokortasuna galdu gabe, 3. mailako transferentzia-funtzio bat aplikatuko dugu.

$$F(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (13.28)$$

#### Lehenengo bidea

Demagun sistemaren  $F(s)$  transferentzia-funtzioa (13.28) formularen antzekoa dela. Sistemaren sarrera-aldaia  $U(s)$  da, eta irteerako aldaia  $Y(s)$ .  $N(s)$  da transferentzia-funtzioaren zenbakitzailea, eta  $D(s)$  transferentzia-funtzioaren izendatzailea. Gogoan izan behar dugu  $N(s)$  eta  $D(s)$  polinomioak hirugarren mailako polinomioak direla.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (13.29)$$

(13.29) ekuazioko ezkerreko eta eskuineko aldeak  $D(s)$  eta  $U(s)$  polinomioez biderkatuz gero, ekuazio honetara helduko gara.

$$N(s)U(s) = D(s)Y(s) \quad (13.30)$$

Ekuazio horren Laplaceren alderantzizko transformatua kalkulatu gero, ekuazioari dagokion ekuazio diferentziala lortuko dugu.

$$\begin{aligned} L^{-1}[D(s)Y(s)] &= L^{-1}[N(s)U(s)] \\ L^{-1}[(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) \cdot Y(s)] &= L^{-1}[(b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0) \cdot U(s)] \quad (13.31) \\ \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_1 y + a_0 y &= b_3 \ddot{u} + b_2 \dot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 u \end{aligned}$$

Ondoren, maila bereko deribatuak elkarren ondoan jarriko ditugu.

$$(\ddot{y} - b_3\ddot{u}) + (a_2\ddot{y} - b_2\ddot{u}) + (a_1\dot{y} - b_1\dot{u}) = (b_0u - a_0y) \quad (13.32)$$

(13.33) eragile matematikoa definituz gero, (13.32) ekuazioa (13.34) ekuazio bihurtzen da.

$$D^n(.) = \frac{d^n(.)}{dt^n} \quad (13.33)$$

$$\begin{aligned} D^3[y - b_3u] + D^2[a_2y - b_2u] + D[a_1y - b_1u] &= b_0u - a_0y \\ D[D[D[y - b_3u] + a_2y - b_2u] + a_1y - b_1u] &= b_0u - a_0y \end{aligned} \quad (13.34)$$

#### • Egoera-aldagaiak hautatzea

Honela aukeratuko ditugu egoera-aldagaiak.

$$\begin{aligned} x_1 &= y - b_3u \\ x_2 &= D[y - b_3u] + a_2y - b_2u \\ x_3 &= D[D[y - b_3u] + a_2y - b_2u] + a_1y - b_1u \end{aligned} \quad (13.35)$$

Aukeratutako egoera-aldagaiak erabiliz, (13.35) eta (13.32) ekuazioak, sistemaren egoera-ekuazioak kalkulatuko ditugu.

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= b_0u - a_0y \\ x_3 = \dot{x}_2 + a_1y - b_1u &\Rightarrow \dot{x}_2 = x_3 - a_1y + b_1u \\ x_2 = \dot{x}_1 + a_2y - b_2u &\Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 - a_2y + b_2u \\ x_1 = y - b_3u &\Rightarrow y = x_1 + b_3u \end{aligned} \quad (13.36)$$

(13.36) ekuazioetan  $y$  aldagaia bakartuz gero, egoera-ekuazioak sarrera-aldagaiaren eta egoera-aldagaien mende geratuko dira.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - a_2(x_1 + b_3u) + b_2u \\ \dot{x}_2 &= x_3 - a_1(x_1 + b_3u) + b_1u \\ \dot{x}_3 &= -a_0(x_1 + b_3u) + b_0u \end{aligned} \quad (13.37)$$

**Ekuazioen era matriziala.** Horrenbestez, honela definituko dugu egoera-bektorea

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ eta egoera-ekuazioak matrizialki honela idatz daitezke.}$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{bmatrix} b_2 - a_2 b_3 \\ b_1 - a_1 b_3 \\ b_0 - a_0 b_3 \end{bmatrix} \cdot \underline{u} & \Rightarrow \dot{\underline{x}} = [\mathbf{A}] \cdot \underline{x} + [\mathbf{B}] \cdot \underline{u} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + [b_3] \cdot \underline{u} & \Rightarrow y = [\mathbf{C}] \cdot \underline{x} + [\mathbf{D}] \cdot \underline{u}\end{aligned}\quad (13.38)$$

### Bigarren bidea

Bigarren bide honetan,  $X(s)$  aldagai laguntzaile bat erabiliko dugu.  $Y(s)$  eta  $X(s)$  aldagaien arteko transferentzia-funtzioa  $N(s)$  polinomioa dela joko dugu.  $X(s)$  eta  $U(s)$  polinomioen arteko transferentzia-funtzioa  $D(s)$  polinomioaren alderantzizkoa da.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)} \cdot \frac{X(s)}{U(s)} \quad (13.39)$$

$$N(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (13.40)$$

$$\frac{1}{D(s)} = \frac{X(s)}{U(s)} \quad (13.41)$$

(13.41) ekuaziotik egoera-ekuazioak lortuko ditugu, eta (13.40) ekuaziotik irteera-ekuazioak. Jo dezagun aztertu nahi dugun sistemaren transferentzia-funtzioa hau dela:

$$F(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

**Egoera-aldagaiak.**  $X(s)$  eta  $U(s)$  aldagaien arteko transferentzia-funtzioaren Laplaceren alderantzizko transformatua aplikatuz gero, ekuazio diferentzial hau lortuko dugu:

$$(13.41) \rightarrow \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$s^3 X(s) + a_2 s^2 X(s) + a_1 s X(s) + a_0 X(s) = U(s)$$

$$\ddot{x}(t) + a_2 \dot{x}(t) + a_1 x(t) + a_0 x(t) = u(t) \quad (13.42)$$

- **Egoera-aldagaiak hautatzea**

Aldagaiaren  $x(t)$  eta  $\dot{x}(t)$  deribatuak egoera-aldagaitzat hartuko ditugu.

$$x_1 = x(t)$$

$$x_2 = \dot{x}(t)$$

$$x_3 = \ddot{x}(t)$$

- **Egoera-ekuazioak**

Egoera-ekuazioak aukeratutako egoera-aldagaien arteko erlazio matematikoak bilatuz lortzen dira.

$$\text{Hala, } \begin{matrix} x_2 = \dot{x}_1 \\ x_3 = \dot{x}_2 \end{matrix} \text{ eta, ondorioz, } \begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \end{matrix}$$

Bestalde,  $\ddot{x}(t)$  bakartuz ekuazio diferentzialetik, eta  $\ddot{x}(t) = \dot{x}_3$  denez:

$$\dot{x}_3 = -a_2 x_3 - a_1 x_2 - a_0 x_1 + u$$

Beraz, hiru egoera-ekuazio diferentzial lortuko ditugu.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -a_2 x_3 - a_1 x_2 - a_0 x_1 + u \end{cases}$$

**Ekuazioen era matritziala.**  $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  egoera-bektorea definituz gero, egoera-

ekuazio diferentziala (13.21) matrize-ekuazioaren arabera idatz dezakegu.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \Rightarrow \quad \dot{\underline{x}} = [\mathbf{A}] \underline{x} + [\mathbf{B}] u \quad (13.43)$$

**Irteera-ekuazioa.** Irteera-ekuazioa kalkulatzeko,  $Y(s)$  eta  $X(s)$  aldagaien arteko transferentzia-funtzioaren Laplaceren alderantzizko transformatua erabiliko dugu.

$$(13.40)\text{tik, } Y(s) = N(s)X(s) \Rightarrow$$

$$Y(s) = b_3 s^3 X(s) + b_2 s^2 X(s) + b_1 s X(s) + b_0 X(s) \quad (13.44)$$

Beraz, honela idatz daiteke irteera-ekuazioa. Gogoan izan behar dugu aldagaiaren  $x(t)$  eta  $\dot{x}(t)$  deribatuak egoera-aldagaiak direla.

$$\begin{aligned} y &= b_3 \ddot{x} + b_2 \dot{x} + b_1 x + b_0 x \\ &= b_3 [-a_2 x_3 - a_1 x_2 - a_0 x_1 + u] + b_2 x_3 + b_1 x_2 + b_0 x_1 \end{aligned} \quad (13.45)$$

(13.45) ekuazioa sinplifikatuz gero, honela idatz daiteke irteera-ekuazioa:

$$y = [b_2 - b_3 a_2] x_3 + [b_1 - b_3 a_1] x_2 + [b_0 - b_3 a_0] x_1 + b_3 u \quad (13.46)$$

Ekuazio hori matrize eran idatz daiteke.

$$y = [b_0 - b_3 a_0, b_1 - b_3 a_1, b_2 - b_3 a_2] \underline{x} + [b_3] u \quad \Rightarrow y = [C] \underline{x} + [D] u \quad (13.47)$$

Horrenbestez, honela idatz daiteke sistemaren egoera-eredua.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \quad \Rightarrow \dot{\underline{x}} = [A] \underline{x} + [B] u$$

$$y = [b_0 - b_3 a_0, b_1 - b_3 a_1, b_2 - b_3 a_2] \cdot \underline{x} + [b_3] \cdot u \Rightarrow y = [C] \underline{x} + [D] u$$

Bide honetatik lortutako egoera-ereduari konpainia-itxurako eredu deritzogu.

### Hirugarren bidea

Aztertu nahi dugun sistemaren transferentzia-funtzioaren poloak errealak eta bakunak badira, hirugarren bide bat proposa daiteke sistemaren barne-eredua kalkulatzeko. Horretarako, zatiketa bakunetan deskonposatu behar dugu sistemaren transferentzia-funtzioa.

$$Y(s) = \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{s - p_i} \right] \cdot U(s) \quad (13.48)$$

#### • Egoera-aldagaiak aukeratzea

Gogoan izan behar dugu sistemaren maila 3 dela, eta, beraz, sistemak hiru polo dituela. Honela idatz daiteke sistemaren egoera-ekuazioa:

$$\begin{aligned} X_i(s) &= \frac{1}{s - p_i} \cdot U(s) \quad \text{non } i = 1, 2, 3. \\ \dot{x}_i(t) &= p_i x_i(t) + u(t) \end{aligned} \quad (13.49)$$

eta egoera-ekuazioak honela:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_1 x_1 + u \\ \dot{x}_2 = p_2 x_2 + u \\ \dot{x}_3 = p_3 x_3 + u \end{cases}$$

Sistemaren egoera-bektorea honela definituz gero,  $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ , egoera-ekuazioak

matrize eran idatz daitezke, hots, (13.21) matrize eran idatziz.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \quad \Rightarrow \quad \dot{\underline{x}} = [\mathbf{A}] \underline{x} + [\mathbf{B}] u$$

### Irteera-ekuazioa

$$y = [c_1, c_2, c_3] \underline{x} \quad \Rightarrow \quad y = [\mathbf{C}] \underline{x} + [\mathbf{D}] u$$

Eredu horren ezaugarriak hauek dira:

1.  $F(s)$  transferentzia-funtzioaren poloak  $[\mathbf{A}]$  matrizearen diagonalean agertzen dira. Izan ere, lortzen diren egoera-ekuazioak askeak dira bata bestetik,  $[\mathbf{A}]$  matrizea diagonal delako.
2.  $[\mathbf{C}]$  matrizearen elementuak zatiketen zenbakitzaileak dira.
3.  $[\mathbf{D}]$  matrizea nulua da.

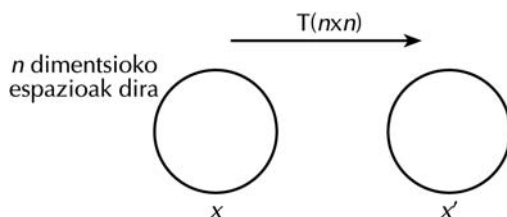
### 13.2.3 Sistema baten egoera-ereduztapen aniztuna

Atal honetan, egiaztatuko dugu sistema baten egoera-eredua ez dela bakarra. Aztertu nahi dugun sistema dinamikoaren barne-eredua hau dela kontsideratuz,

$$\dot{\underline{x}}(t) = [\mathbf{A}] \cdot \underline{x}(t) + [\mathbf{B}] \cdot \underline{u}(t) \quad (13.50)$$

$$y(t) = [\mathbf{C}] \cdot \underline{x}(t) + [\mathbf{D}] \cdot \underline{u}(t) \quad (13.51)$$

$[\mathbf{A}]$ ,  $[\mathbf{B}]$ ,  $[\mathbf{C}]$  eta  $[\mathbf{D}]$  matrizeak aukeratutako  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...  $x_n(t)$  egoera-aldagaien eta aukeratutako irteera-aldagaien mende daude.



**13.3 irudia.** Hainbat egoera-bektoreren arteko transformazio-matrizea.

Demagun  $\underline{x}$  eta  $\underline{x}'$  bi egoera-aldagai multzo direla. Bi multzo horiek aldagai kopuru bera dute, baina aldagaiak ezberdinak dira. Dena dela, multzo bateko egoera-aldagaiak beste multzoko egoera-aldagaien konbinazio linealak dira. Beraz,  $\underline{x}$  eta  $\underline{x}'$   $n$  dimentsioko espazio bektorialeko bektoreak dira, eta  $[T]$  baldin bada oinarri-aldaketarako matrizea:

$$\underline{x} = [T] \cdot \underline{x}' \quad \text{eta} \quad \dot{\underline{x}} = [T] \cdot \dot{\underline{x}}' \quad (13.52)$$

(13.52) aldagai-aldaketa aplikatuz, honela idatz daiteke (13.50) egoera-ekuazioa:

$$[T] \cdot \dot{\underline{x}}' = [A] \cdot [T] \cdot \underline{x}' + [B] \cdot \underline{u} \quad (13.53)$$

$\underline{x}$  eta  $\underline{x}'$  espazio bektorialak  $n$  dimentsiokoak direnez,  $[T]$  transformazio-matrizeak karratua izan behar du, eta, horrez gain,  $[T]^{-1}$  alderantzizko matrizeak ere kalkulagarria izan behar du. Beraz, egoera-bektorea  $\underline{x}'$  delarik, hau da sistemaren eredu berria:

$$\dot{\underline{x}}' = [T]^{-1} \cdot [A] \cdot [T] \cdot \underline{x}' + [T]^{-1} \cdot [B] \cdot \underline{u} \quad (13.54)$$

$$[A'] = [T]^{-1} \cdot [A] \cdot [T] \quad (13.55)$$

$$[B'] = [T]^{-1} \cdot [B] \quad (13.56)$$

(13.54) eta (13.50) ereduaren  $[A]$  eta  $[A']$  matrizeen arteko mendekotasunari antzekotasun-transformazio deritzogu.

$$[A'] = [T]^{-1} \cdot [A] \cdot [T] \quad (13.57)$$

Bi matrize horien autobalioak berdinak direla egiazta daiteke, autobalio horiek sistema beraren poloak direlako. Bestalde, irteera-ekuazioa hau izan daiteke  $\underline{x}'$  egoera-bektorearen mende utziz gero:

$$\underline{y} = [C] \cdot [T] \cdot \underline{x}' + [D] \cdot \underline{u} \quad (13.58)$$

$$[C'] = [C][T] \quad (13.59)$$

$$[D'] = [D] \quad (13.60)$$

Ikus daitekeenez, egoera-eredu infinitu daude sistema batentzat. Hain zuzen ere, egoera-eredu bat dagokio egoera multzo bati, eta egoera-aldagaien multzo infinituak aukeratu daitezke.

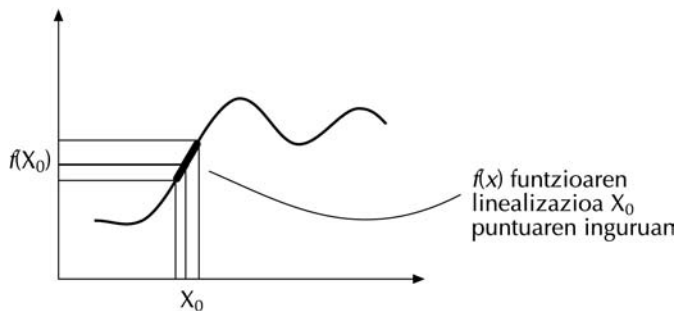
### 13.3 DENBORA JARRAITUKO SISTEMEN HURBILKETA LINEALA

$[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  eta  $[D]$  matrizeen bidez lortutako adierazpen matematiko estandarra sistema linealentzat soilik da baliagarria, eta, horrenbestez, ezin dira adierazi  $x_i^2(t)$ ,  $u_j^2(t)$ ,  $x_i(t)u_k(t)$ ... gaiak dituzten ekuazioak. Gai horiek eredu ez-lineala eratzen dutenez, kontrolatu beharreko sistemaren egoera-eredu ez-linealak (13.61) adierazpenaren itxura matematikoa du.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{f}[\underline{x}(t), \underline{u}(t), t] \\ \underline{y}(t) &= \underline{g}[\underline{x}(t), \underline{u}(t), t] \end{aligned} \quad (13.61)$$

Gogoan izan egoera-bektorea dela  $\underline{x}(t)$ , irteera-bektorea  $\underline{y}(t)$  eta sarrera-bektorea  $\underline{u}(t)$ . Egoera-eredua  $\underline{f}()$  eta  $\underline{g}()$  funtzioen bidez definitzen da:  $\underline{f}$  funtzioak sistemaren dinamika deskribatzen du eta  $\underline{g}$  funtzioa irteera-funtzioa da.

Hala ere, kontrolatu beharreko sistemaren eredua ez-lineala izan arren, sistema horrek ia beti puntu baten inguruan lanean dihardu eta seinale txikietarako sistema lineal bat defini daiteke; lan-puntu hori oreka-puntu bat izan ohi da.



#### 13.4 irudia. Hurbilketa lineala $X_0$ oreka-puntuaren inguruan.

Demagun sistema ez-lineal baten dinamika ekuazio diferentzial ez-lineal hauen sistemarekin adierazten dela:

$$\frac{d\underline{X}(t)}{dt} = \underline{f}[\underline{X}(t), \underline{U}(t), t]$$

eta har dezagun kontuan  $(\underline{X}_0, \underline{U}_0)$  sistemaren oreka-puntu bat, lan-puntu bat, hau da, puntu bat non

$$\left. \frac{d\underline{X}(t)}{dt} \right|_{\substack{\underline{X}=\underline{X}_0 \\ \underline{U}=\underline{U}_0}} = \underline{0}$$

Halaber, izan bitez  $\underline{x}(t), \underline{u}(t)$ ,  $\underline{X}$  eta  $\underline{U}$  aldagaien aldaketa txikiak  $\underline{X}_0, \underline{U}_0$  oreka-puntuaren inguruan:

$$\underline{X}(t) = \underline{X}_0 + \underline{x}(t)$$

$$\underline{U}(t) = \underline{U}_0 + \underline{u}(t)$$

Beraz, lehen gaiak hartuz, (13.61) ekuazioaren hurbilketa lineala lor daiteke  $\underline{f}()$  funtzioaren Taylorren garapenaren bidez.

$$\frac{d\underline{X}}{dt} = \frac{d\underline{X}_0}{dt} + \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}[\underline{X}_0, \underline{U}_0, t] + \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}^T} \right|_{[\underline{X}_0, \underline{U}_0]} \cdot \underline{x} + \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}^T} \right|_{[\underline{X}_0, \underline{U}_0]} \cdot \underline{u} + \dots$$

Sistema baten hurbilketa linealak erabiliz gero, bi eredu izango ditugu, batetik, lan-puntuaren eredu eta, bestetik, ereduaren seinale txikietarako hurbilketa lineala.

### Lan-puntuaren eredu

Lan-puntua aldakorra izan daiteke, edo oreka-puntu bat, bestela. Lan-puntua aldakorra bada, seinale txikietarako eredu lineala aldakorra izango da; horrenbestez, haren parametroak aldatuz joan behar dugu, hurbilketa eguneratua izan dadin. Bestetik, lan-puntua aldakorra bada, sistemaren ekuazio ez-linealak bete behar ditu.

$$\frac{d\underline{X}_0}{dt} = \underline{f}[\underline{X}_0, \underline{U}_0, t] \quad (13.62)$$

Bestalde, lan-puntua oreka-puntu bat ere izan daitekeenez, sistemaren hurbilketa linealaren ereduaren parametroak ez dira aldatu beharko, oreka-puntua ez baita aldatzen. Lan-puntua oreka-puntu bat baldin bada, (13.62) ekuazioa (13.64) gisa geratzen da. Beraz, lan-puntua kalkulatzeko, (13.63) ekuazioa ebatzi behar dugu.

$$\underline{0} = \underline{f}[\underline{X}_0, \underline{U}_0, t] \quad (13.63)$$

### Seinale txikietarako eredu lineala

Egoera-aldagaien eta sarrerako aldagaien aldaketa txikietarako hurbilketa lineala honelakoa litzateke:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}^T} \right|_{[\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0]} \cdot \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}^T} \right|_{[\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0]} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (13.64)$$

Lehen aipatu dugun bezala, ez dago hurbilketa lineal horren parametroak eguneratu beharrik baldin eta lan-puntua aldakorra ez bada. Bestetik, gogoan izan behar dugu  $\mathbf{x}$  eta  $\mathbf{u}$  bektoreak direla, eta beraz, deribatu partzialak matrizeak direla.  $n$  egoera-aldagai eta  $p$  sarrera-aldagai ditugula joz gero, honela idatzi ahal izango genuke (13.64) ekuazioa:

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ \dots \\ dx_n/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \dots & \partial f_1/\partial x_n \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \dots & \partial f_2/\partial x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial f_n/\partial x_1 & \partial f_n/\partial x_2 & \dots & \partial f_n/\partial x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial u_1 & \partial f_1/\partial u_2 & \dots & \partial f_1/\partial u_p \\ \partial f_2/\partial u_1 & \partial f_2/\partial u_2 & \dots & \partial f_2/\partial u_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial f_n/\partial u_1 & \partial f_n/\partial u_2 & \dots & \partial f_n/\partial u_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_p \end{bmatrix} \quad (13.65)$$

### Irteera-ekuazioaren linealizazioa

Irteera-ekuazioa aljebraikoa da, eta ez-lineala ere izan daiteke lan-puntu baten ingurunean (egoera-ekuazioko lan-puntu bera da). Demagun (13.66) ekuazioak adierazten duela sistemaren irteeren eta egoera-aldagaien arteko erlazioa.

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] \quad (13.66)$$

( $\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0$ ) sistemaren oreka-puntuarentzat edo lan-puntuarentzat, irteera  $\mathbf{Y}_0$  bektorea da, eta Taylorren garapenaren lehen gaiak hartuta, ekuazio hau lortuko dugu:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(t) &= \mathbf{Y}_0 + \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[(\mathbf{X}_0 + \mathbf{x}(t)), (\mathbf{U}_0 + \mathbf{u}(t)), t] = \\ &= \mathbf{g}[\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0, t] + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{X}^T} \right|_{[\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0]} \cdot \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{U}^T} \right|_{[\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0]} \cdot \mathbf{u}(t) + \dots \end{aligned}$$

### Lan-puntuari dagokion irteera

$$\underline{Y}_0 = \underline{g}[\underline{X}_0, \underline{U}_0, t] \quad (13.67)$$

### Sistemaren hurbilketa linealari dagokion irteera

Gogoan izan behar dugu  $\underline{y}(t)$  dela sistemaren seinale txikietarako hurbilketa linealari dagokion irteera.

$$\underline{y}(t) = \left. \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{X}^T} \right|_{[\underline{X}_0, \underline{U}_0]} \cdot \underline{x}(t) + \left. \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{U}^T} \right|_{[\underline{X}_0, \underline{U}_0]} \cdot \underline{u}(t) \quad (13.68)$$

Azkenik, (13.68) formula matrize-ekuazio bat denez, sistemaren irteera kopurua  $m$  dela suposatuz, honela idatz daiteke (13.68) formula:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial g_1 / \partial x_1 & \partial g_1 / \partial x_2 & \dots & \partial g_1 / \partial x_n \\ \partial g_2 / \partial x_1 & \partial g_2 / \partial x_2 & \dots & \partial g_2 / \partial x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial g_m / \partial x_1 & \partial g_m / \partial x_2 & \dots & \partial g_m / \partial x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial g_1 / \partial u_1 & \partial g_1 / \partial u_2 & \dots & \partial g_1 / \partial u_p \\ \partial g_2 / \partial u_1 & \partial g_2 / \partial u_2 & \dots & \partial g_2 / \partial u_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial g_m / \partial u_1 & \partial g_m / \partial u_2 & \dots & \partial g_m / \partial u_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_p \end{bmatrix} \quad (13.69)$$

## 13.4 EGOERA-EKUAZIOEN EMAITZA, DENBORAREKIKO ERANTZUNAREN EBAZPENA

Sarrera jakin batekin eta denbora-tarte batean sistema dinamiko batek duen denborarekiko erantzuna lortzeko,  $u(t, [t_0, t_f]) \equiv (u(t), t \in [t_0, t_f])$  sistemaren portaera dinamikoa adierazten duten ekuazioak ebatzi behar dira. Beraz, egoera-bektorearen hasierako balioak ezagunak izanik, irteera kalkulatzeko egin behar dena da egoera-ekuazioa ebatzi  $\underline{x}(t)$  lortzeko eta, gero, egoera irteera-ekuazioan ordezkatu.

### Arazoaren definizio matematikoa

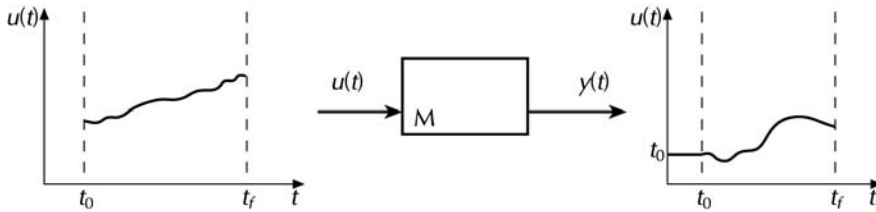
Kalkulatu  $\underline{y}(t)$  sistemaren irteeraren eboluzioa  $t \in [t_0, t_f]$  denbora-tartean, sarrera definitu batekin denbora-tarte horretan,  $\underline{u}(t) \quad \forall t \in [t_0, t_f]$ , eta  $\underline{u}(t)$  eta  $\underline{y}(t)$  arteko erlazioa hau delarik:

- **Sistemaren egoera-ekuazioa**

$$\dot{\underline{x}}(t) = [A(t)] \cdot \underline{x}(t) + [B(t)] \cdot \underline{u}(t), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (13.70)$$

- **Sistemaren irteera-ekuazioa**

$$\underline{y}(t) = [C(t)] \cdot \underline{x}(t) + [D(t)] \cdot \underline{u}(t) \quad (13.71)$$



**13.5 irudia.** Sistema baten denborarekiko erantzuna.

(13.70) formularen egoera-eredua lehen mailako ekuazio diferentzial linealez osatutako multzo bat da. Ekuazio horiek ebazteko, lehenik, sistemaren erantzun askea kalkulatu behar dugu, eta, ondoren, sistemaren sarrerak sortutako erantzuna. Sistema lineala denez, sistemaren erantzun osoa bi erantzun horien batuketara izango da. Sistemaren erantzun askea, berriz, sistemaren egoera-bektoreak duen  $\underline{x}_0$  hasierako kondizioak sortutako sistemaren erantzuna da. Bestalde, sistemaren erantzun behartu deritzogu sarrerak sortutako erantzunari.

### 13.4.1 Sistema baten erantzun askea

Sistema baten hasierako kondizioek sorrarazten duten sistemaren erantzuna da sistemaren erantzun askea. Sistemaren erantzun askea kalkulatzeko, sistemaren sarrera zerotzat hartu behar dugu, hau da, honela idatz daitezke sistemaren egoera-ekuazioak:

$$\underline{u}(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = [A(t)] \cdot \underline{x}(t) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases} \quad (13.72) \text{ eta } (13.73)$$

Beraz, helburua  $[\Phi(t, t_0)]$  matrizea zehaztea da,  $\underline{x}(t; x_0, t_0)$  kalkulatu ahal izateko;  $\underline{x}(t; x_0, t_0)$  sistemaren egoerari deritzogu edozein  $t$  unetan,  $t_0$  hasierako unetan  $\underline{x}_0$  egoeran zegoela.  $[\Phi(t, t_0)]$  da egoera-aldaketaren matrizea.

**Lema.** Sistema lineal batentzat, non  $[A(t)]$  matrize dinamikoaren  $\{a_{ij}(t)\}$  elementuak jarraituak baitira  $[t_0, t_f]$  denbora-tartean,  $\underline{x}(t; x_0, t_0)$  soluzio bat eta soilik bat existitzen da  $[t_0, t_f]$  tartean hasierako unean, eta  $\underline{x}_0$  egoeratik pasatzen da.

Oro har esanda,  $[A(t)]$  jarraitua baldin bada,  $(\forall t \in \mathbb{R})$  sistemak  $\underline{x}(t; x_0, t_0)$  soluzio bakar bat du  $t_0$  hasierako unean,  $\underline{x}_0$  egoeratik pasatzen dena, eta, orobat, transformazio lineal bat existitzen da,  $\underline{x}_0$  hasierako egoera ( $t_0$  hasierako unean)  $\underline{x}(t)$  egoeran proiektatzen duena  $t$  unean. Transformazio-matrizea  $[\Phi(t, t_0)]$  egoera-aldaketaren matrizea da:

$$\underline{x}(t) = [\Phi(t, t_0)] \cdot \underline{x}(t_0) \quad \forall t \geq t_0 \quad (13.74)$$

**OHARRA:**  $\underline{x}(t)$  egoera-bektorea  $n$  dimentsiokoa da; beraz,  $[\Phi(t, t_0)]$  egoera-aldaketaren matrizea  $n \times n$  dimentsioko matrize karratua da.

### 13.4.2 Egoera-aldaketaren matrizea. Oinarrizko matrizearen teorema

Lehenik eta behin, egiaztatu behar dugu (13.74) formula sistemaren erantzun askea dela. (13.73) ekuazioan (13.74) formula ordezkaturik egin daiteke hori:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\underline{x}}{dt} &= [A(t)] \underline{x} \\ \underline{x} &= [\Phi(t, t_0)] \underline{x}_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} [\Phi(t, t_0)] = [A(t)] \cdot [\Phi(t, t_0)] \\ [\Phi(t_0, t_0)] = [I] \end{cases} \quad (13.75)$$

Beraz, sistemaren erantzun askeak (13.74) ekuazioaren itxura du.

**$[A(t)]$  dinamika-matrizearen eta  $[\Phi(t, t_0)]$  egoera-aldaketaren matrizearen arteko erlazioa**

$\underline{x}(t)$  egoera-bektorea sistemaren ekuazio homogeneoa,  $\{\dot{\underline{x}}(t) = [A(t)] \cdot \underline{x}(t), \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0\}$ , betetzen duen ibilbidea da, eta  $\underline{x}(t)$  ebatziko da ekuazio hori  $t_0$  eta  $t$  denbora-tartean integratuta.

$$\underline{x}(t) = \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t [A(\tau)] \underline{x}(\tau) d\tau \quad (13.76)$$

(13.76) formula modu errepikakorrean aplikatuz gero, berdintza hauek lortuko ditugu:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t [A(\tau)] \cdot \left[ \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} [A(\xi)] \underline{x}(\xi) d\xi \right] \cdot d\tau \\ \underline{x}(t) &= \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t [A(\tau)] \cdot \left[ \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} [A(\xi)] \cdot \left[ \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{\xi} [A(\mu)] \underline{x}(\mu) d\mu \right] d\xi \right] \cdot d\tau \end{aligned} \quad (13.77)$$

(13.77) berdintzetako eragiketak  $\infty$  alditan aplikatuz gero, eta  $\underline{x}(t_0)$  hasierako kondizioak erabiliz, sistemaren erantzun askea kalkula daiteke.

$$\underline{x}(t) = \left[ I + \int_{t_0}^t [A(\tau)] d\tau + \int_{t_0}^t [A(\xi)] d\xi d\tau + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi} [A(\tau)] [A(\xi)] [A(\mu)] d\mu d\xi d\tau + \dots \right] \cdot \underline{x}(t_0) \quad (13.78)$$

Beraz,  $[A(t)]$  dinamika-matrizeak eta  $[\Phi(t, t_0)]$  egoera-aldaketaren matrizeak berdintza hau betetzen dute:

$$[\Phi(t, t_0)] = \left[ I + \int_{t_0}^t [A(\tau)] d\tau + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} [A(\xi)] d\xi d\tau + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \int_{t_0}^{\xi} [A(\tau)] [A(\xi)] [A(\mu)] d\mu d\xi d\tau + \dots \right] \quad (13.79)$$

Sistema denborarekin aldatzen ez bada,  $[A(t)]$  dinamika-matrizeak konstante izan behar du, hots, ez du izan behar denboraren edo  $\underline{x}$  egoera-bektorearen mendekoa. Horrenbestez, (13.78) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\underline{x}(t) = \left[ [I] + [A](t - t_0) + \frac{1}{2} [A]^2 (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} [A]^3 (t - t_0)^3 + \dots \right] \cdot \underline{x}(t_0) \quad (13.80)$$

Beraz, hau izan daiteke sistemaren dinamika-matrizearen eta sistemaren egoera-aldaketaren matrizearen arteko erlazioa:

$$[\Phi(t, t_0)] = e^{[A](t-t_0)} \quad (13.81)$$

### Oinarrizko matrizearen teorema

Gogoan har dezagun  $\dot{\underline{x}}(t) = [A(t)] \cdot \underline{x}(t)$  sistema dinamikoa. Lehen mailako ekuazio multzo horrek  $\underline{x}_0$  hasierako kondizio bakoitzeko soluzio bakarra du.

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{cc} t_0 & t \end{array} \\ \begin{array}{l} x_{01} \rightarrow x^1(t) \\ x_{02} \rightarrow x^2(t) \\ \dots \\ \dots \end{array} \end{array} \right\} \quad (13.82)$$

$\underline{x}_0$  bakoitza  $n$  dimentsioko espazio bektorialeko puntu bat denez, hasierako egoera infinitu existitzen dira; beraz,  $\dot{\underline{x}}(t) = [A(t)] \cdot \underline{x}(t)$  ekuazioak soluzio infinitu ditu. Hau da,  $n$  mailako sistema lineal batek infinitu erantzun aske ditu: bat hasierako kondizio bakoitzeko. Erantzun aske horiek multzo bat osatzen dute.

**Teorema:** “ $\dot{\underline{x}}(t) = [A(t)] \cdot \underline{x}(t)$  ekuazioaren hasierako kondizio ezberdinetako emaitzek  $n$  dimentsioko espazio bektorial bat osatzen dute”.

Horrenbestez, sistemaren  $n$  erantzun askeak linealki askeak badira, espazio horren oinarri bat osatzen dute. Beste erantzun guztiek aurreko erantzun horien konbinazio lineal bat osatzen dute.

$$\underline{x}_l(t) = \sum_{i=1}^n \underline{x}^{(i)}(t) \cdot c_i$$

Gogoan har dezagun horrelako  $[X(t)]$  oinarri bat,  $[X(t)] = [\underline{x}^{(1)}(t), \underline{x}^{(2)}(t), \dots, \underline{x}^{(n)}(t)]$ , oinarritzko matrizea deritzoguna; sistemaren egoera-aldaketa honela idatz daiteke.

$$[\Phi(t, t_0)] = [X(t)] \cdot [X(t_0)]^{-1}$$

### 13.4. Adibidea

Gogoan har dezagun  $\ddot{y}(t) + w^2 y(t) = 0 = u(t)$  ekuazio diferentziala. Kalkula dezagun sistema horren egoera-aldaketaren matrizea, bai eta sistema horren erantzun askea ere.

**Sistemaren analisisa.** Lehendabizi, sistema horrek oszilatzaile harmoniko baten dinamika adierazten du. Izan ere, sistemari Laplaceren transformatua aplikatuz gero, ikus daiteke bigarren mailako sistema horrek polo irudikariak dituela,  $s = \pm jw$ .

$$(s^2 + w^2) y(s) = u(s)$$

Sistemak transferentzia-funtzio hau du:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2 + w^2}$$

**Sistemaren egoera-eredua.** Bigarren mailako sistema bat denez, bi egoera-aldagaiak aukeratuko ditugu, adibidez:

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Egoera-aldagai horiek erabilita, egoera-ekuazio hauek lortuko ditugu:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -w^2 x_1 \end{cases}$$

**Oinarrizko matrizea.** Sistema baten linealki askeak diren bi erantzun askez osatuta dago,  $X(t) = [\underline{x}^{(1)}(t), \underline{x}^{(2)}(t)]$ . Arazoa da bi erantzun aske horiek egokiro aukeratzea. Baldin badakigu, kasu honetan, sistema oszilatzaile bat dela, aukeratutako erantzunak hauek dira:

$$x_1^{(1)} = y_1 = \cos wt$$

$$x_1^{(2)} = y_2 = \sin wt$$

$$x_2^{(1)} = \dot{y}_1 = -w \sin wt$$

$$x_2^{(2)} = \dot{y}_2 = w \cos wt$$

Erantzun horiek eta haien deribatuak matrize eran idatziz gero, hau aterako zaigu:

$$[X(t)] = [\underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}] = \begin{bmatrix} \cos wt & \sin wt \\ -w \sin wt & w \cos wt \end{bmatrix}$$

Matrize horren determinanteak  $w$  balioa hartzen du; determinantea ez da 0,  $w$  ere ez delako 0:  $|X(t)| = w$ ;  $w \neq 0$ . Beraz,  $[X(t)]$  matrizea osatzen duten bi erantzun askeak berekiko askeak dira, eta  $[X(t)]$  matrizea oinarrizko matrizea da.

**Egoera-aldaketaren matrizea:**  $[\Phi(t, t_0)] = [X(t)] \cdot [X(t_0)]^{-1}$

$[X(t)]$  matrizea oinarrizko matrize bat bada, matrize horren alderantzizkoa kalkula dezakegu.

$$[X(t)]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos wt & \sin wt \\ -\frac{\sin wt}{w} & \frac{\cos wt}{w} \end{bmatrix} \quad \text{eta } t = 0 \text{ denean: } [X(0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{w} \end{bmatrix}$$

Ondorioz, hona hemen sistema horren egoera-aldaketaren matrizea:

$$[\Phi(t, t_0)] = \begin{bmatrix} \cos wt & \sin wt \\ -w \sin wt & w \cos wt \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos wt & \frac{\sin wt}{w} \\ -w \sin wt & \cos wt \end{bmatrix}$$

- **Egoera-ekuazioen soluzioa.** Egoera-aldaketaren matrizea kalkulatu eta gero, sistemaren erantzun askea kalkula dezakegu edozein hasierako kondiziotarako.

$$\underline{x}(t) = [\Phi(t, t_0)] \cdot \underline{x}(t_0)$$

Hasierako kondizioak  $\begin{cases} x_1(0) = y_0 \\ x_2(0) = \dot{y}_0 \end{cases}$  direla kontuan izanda, sistemaren erantzun askea honela idatz daiteke:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos wt & \frac{1}{w} \sin wt \\ -w \sin wt & w \cos wt \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix}$$

Erantzun askearen matrize-adierazpen hori ekuazio eskalarretan idatziz gero, honako hau lortuko dugu:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0) \cos wt + x_2(0) \frac{1}{w} \sin wt \\ x_2(t) = -x_1(0) \sin wt + x_2(0) \cos wt \end{cases}$$

### 13.4.3 Egoera-aldaketaren matrizearen ezaugarriak eta propietateak

Jakinik  $[\Phi(t, t_0)]$ ,  $t_0$  hasierako uneko egoera  $t$  uneko egoeran proiektatzen duen matrizea dela, propietate hauek betetzen ditu (demostraziorik gabe):

1.  $t = t_0$  aldiunean, egoera-aldaketaren matrizea unitate matrizea da.

$$[\Phi(t_0, t_0)] = [1]$$

2. Egoera-aldaketaren matrizea  $[X(t)]$  matrizearen bidez kalkula daiteke.

$$[\Phi(t, t_0)] = [X(t)] \cdot [X(t_0)]^{-1}$$

3. Egoera-aldaketaren matrizeak sistemaren ekuazio dinamikoa betetzen du.

$$\frac{d[\Phi(t, t_0)]}{dt} = [A(t)] \cdot [\Phi(t, t_0)]$$

4. Denborarekin aldatzen ez diren sistemen egoera-aldaketaren matrizea, honela idatz daiteke:

$$[A] = \frac{\partial [\Phi(t, t_0)]}{\partial t} \bigg|_{t=t_0}$$

5.  $t_3$  eta  $t_1$  aldiuneen arteko egoera-aldaketaren matrizea, orduan,  $t_2$  eta  $t_1$  aldiuneen arteko eta  $t_2$  eta  $t_3$  aldiuneen arteko egoera-aldaketaren matrizeen bidez kalkula daiteke.

$$[\Phi(t_3, t_1)] = [\Phi(t_3, t_2)] \cdot [\Phi(t_2, t_1)] \quad \text{non } t_3 > t_2 > t_1$$

6. Egoera-aldaketaren matrizearen alderantzizkoa eta egoera-aldaketaren matrizea berdinak dira.

$$[\Phi(t_2, t_1)] = [\Phi(t_1, t_2)]^{-1}$$

7. Egoera-aldaketaren matrizearen determinantea  $\det([\Phi(t, t_0)]) = e^{\int_{t_0}^t \text{traza}[A(\zeta)] d\zeta}$ , non  $[A]$  matrizearen traza baita  $\sum a_{ii}$ .

**OHARRA:** Sistema aldakorra ez denean:

$$\underline{x}(t_{i+1}) = e^{[A](t_{i+1}-t_i)} \cdot \underline{x}(t_i)$$

$$[\Phi(t, t_0)] = e^{[A](t-t_0)}$$

#### 13.4.4 Egoera-ekuazio osoaren ebazpena

Har dezagun kontuan sistema bat, zeinaren egoera-ekuazioa honela idatz baitaiteke:

$$\dot{\underline{x}}(t) = [A(t)] \cdot \underline{x}(t) + [B(t)] \cdot \underline{u}(t)$$

**Teorema:**

Har dezagun  $\underline{x}(t_0)$  sistemaren egoera-bektorearen hasierako kondizioa; sistemaren sarrera-bektorea ezaguna bada  $t_0$  eta  $t_f$  aldiuneen artean,  $\underline{u}(\tau, [t_0, t_f])$ , sistemaren ekuazio diferentzial osoaren emaitza honela idatz daiteke:

$$\underline{x}(t) = [\Phi(t, t_0)] \cdot \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t [\Phi(t, \tau)] \cdot [B(\tau)] \underline{u}(\tau) d\tau \quad (13.83)$$

non  $[\Phi(t, t_0)]$  baita  $\dot{\underline{x}}(t) = [A(t)] \cdot \underline{x}(t)$  ren aldaketa-matrizea.

### **Egiaztapena:**

Har dezagun  $[X(t)]$  sistemaren linealki askeak diren  $n$  erantzun askeek osatutako oinarrizko matrizea:

$$[X(t)] = [\underline{x}^{(1)}(t), \underline{x}^{(2)}(t), \dots, \underline{x}^{(n)}(t)] \quad (13.84)$$

Beraz, sistemaren edozein erantzun aske  $[X(t)]$ -ren  $n$  erantzun askeen konbinazio linealen bidez idatz daiteke,  $\underline{x}_a(t) = [X(t)] \cdot \underline{c}$ . Sarrerak behartutako erantzuna ez dago hasierako kondizioen mende soilik, sistemaren sarreraren mende ere badago.  $\underline{c}$  bektorea denborarekin ez dela aldatzen kontsideratuz, honela adieraz daiteke:

$$\underline{x}(t) = [X(t)] \cdot \underline{c}(t) \quad (13.85)$$

$\underline{x}(t)$  egoera-bektorearen deribatua kalkulatuta:

$$\dot{\underline{x}}(t) = [\dot{X}(t)] \cdot \underline{c}(t) + [X(t)] \cdot \dot{\underline{c}}(t) \quad (13.86)$$

$[X(t)]$  matrizearen deribatua kontuan izanik, sistemaren dinamika-matrizea matrize berarekiko proportzionala da, matrizea sistemaren erantzun askeen eta haien deribatuez osatuta dagoelako.

$$[\dot{X}(t)] = [A(t)] \cdot [X(t)] \quad (13.87)$$

(13.87) formula, (13.86) ekuazioan ordezkatzuz gero, berdintza hau lortuko dugu.

$$\dot{\underline{x}}(t) = [A(t)][X(t)] \cdot \underline{c}(t) + [X(t)] \cdot \dot{\underline{c}}(t) \quad (13.88)$$

(13.85) formula sistemaren ekuazio dinamikoan ordezkatzuz:

$$\dot{\underline{x}}(t) = [A(t)][X(t)] \cdot \underline{c}(t) + [B(t)] \cdot \underline{u}(t) \quad (13.89)$$

Azkeneko bi adierazpemek berdinduz,  $\dot{\underline{c}}(t)$  bektorearen eta sarreraren artean erlazio hau dago:

$$\dot{\underline{c}}(t) = [X(t)]^{-1} [B(t)] \underline{u}(t) \quad (13.90)$$

(13.90) ekuazioa integratuz,  $\underline{c}(t)$  bektorea lortuko dugu.

$$\underline{c}(t) = \underline{c}(t_0) + \int_{t_0}^t [\underline{X}(\tau)]^{-1} [\underline{B}(\tau)] \underline{u}(\tau) d\tau \quad (13.91)$$

$\underline{c}(t)$  bektorea  $[\underline{X}(t)]$  matrizeaz biderkatuz gero,  $\underline{x}(t)$  bektorea lortuko dugu, hots, sistemaren erantzun osoa.

$$\underline{x}(t) = [\underline{X}(t)] [\underline{X}(t_0)]^{-1} \cdot \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t [\underline{X}(t)] [\underline{X}(\tau)]^{-1} [\underline{B}(\tau)] \underline{u}(\tau) d\tau \quad (13.92)$$

Hasierako kondizioak erabiliz,  $\underline{c}(t)$  bektorearen hasierako balioa kalkula daiteke.

$$\underline{c}(t_0) = [\underline{X}(t_0)]^{-1} \cdot \underline{x}(t_0) \quad (13.93)$$

Beraz, laburbilduz, hau izango da sistemaren erantzuna.

$$\underline{x}(t) = [\Phi(t, t_0)] \cdot \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t [\Phi(t, \tau)] [\underline{B}(\tau)] \underline{u}(\tau) d\tau$$

**Irteera-bektorea.** Irteera-bektorea kalkulatzeko, kalkulaturako  $\underline{x}(t)$  egoera ordezkaturako dugu irteeraren matrize-ekuazioan.

$$\underline{x}(t) \rightarrow \underline{y}(t) = [\underline{C}] \underline{x}(t) + [\underline{D}] \underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = [\underline{C}(t)] [\Phi(t, t_0)] \cdot \underline{x}(t_0) + [\underline{C}(t)] \int_{t_0}^t [\Phi(t, \tau)] [\underline{B}(\tau)] \underline{u}(\tau) d\tau + [\underline{D}(t)] \underline{u}(t) \quad (13.94)$$

Sistemaren erantzun osoa erantzun askearen eta erantzun behartuaren batuketa gisa adieraz daiteke.

- Sistemaren erantzun askea:

$$\underline{y}_f(t) = [\underline{C}(t)] [\Phi(t, t_0)] \cdot \underline{x}(t_0) \quad (13.95)$$

- Sistemaren sarrerek behartutako erantzuna:

$$\underline{y}_f(t) = [\underline{C}(t)] \int_{t_0}^t [\Phi(t, \tau)] [\underline{B}(\tau)] \underline{u}(\tau) d\tau + [\underline{D}(t)] \underline{u}(t) \quad (13.96)$$

Gogoan izanda sistema denborarekin aldatzen ez denean sistemaren egoera-aldaketaren matrizea dela  $[\Phi(t, t_0)] = e^{[A](t-t_0)}$ :

$$\underline{x}(t) = e^{[A](t-t_0)} \cdot \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{[A](t-\tau)} [\underline{B}(\tau)] \underline{u}(\tau) d\tau \quad (13.97)$$

## 13.5 DENBORA DISKRETUKO SISTEMEN EGOERA-ADIERAZPENEA; DENBORA JARRAITUKO SISTEMA BATEN DENBORA JARRAITUKO EREDU DISKRETUA

### 13.5.1 Denbora diskretuko sistema baten egoera-eredua

Sistema bat diskretua dela esaten da sistemaren sarrera- eta irteera-seinaleak  $t_k$  une diskretuetan soilik definituta daudenean,  $\underline{u}(t_k)$  eta  $\underline{y}(t_k)$ . T izanik laginketa-periodoa, egoera-ekuazio diskretuak eta irteera-ekuazio diskretu aljebraikoak osatzen dute denbora diskretuko sistema baten egoera-eredua.

Sistemaren egoeraren gehikuntza-ekuazioa honela defini dezakegu:

$$\begin{cases} \underline{x}(t_{k+1}) = [F(t_{k+1}, t_k)] \cdot \underline{x}(t_k) + [G(t_k)] \cdot \underline{u}(t_k) \\ \underline{x}(t_{k0}) = \underline{x}_{k0} \\ \underline{y}(t_k) = [C(t_k)] \cdot \underline{x}(t_k) + [D(t_k)] \cdot \underline{u}(t_k) \end{cases} \quad (13.98)$$

Hemendik aurrera idazkera laburtu hauek erabiliko ditugu.

$$\begin{aligned} \underline{u}(t_k) &\equiv \underline{u}(kT) \equiv \underline{u}_k & k \in \mathbb{Z} \\ \underline{x}(t_k) &\equiv \underline{x}_k \\ [F(t_{k+1}, t_k)] &\equiv [F_k] \end{aligned} \quad (13.99)$$

Beraz, sistemaren egoera-ekuazioa honela defini dezakegu:

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= [F_k] \underline{x}_k + [G_k] \underline{u}_k & \text{egoera-ekuazio diskretua} \\ \underline{y}_k &= [C_k] \underline{x}_k + [D_k] \underline{u}_k & \text{irteera-ekuazio diskretua} \end{aligned} \quad (13.100)$$

**OHARRA:** Gogoan izan behar dugu sistemaren egoera-aldaketaren matrizea honela definituko dugula;  $F_k$  matrizea deituko diogu.

$$[F_k] \equiv [\Phi(t_{k+1}, t_k)] \quad (13.101)$$

### 13.5.2 Denbora diskretuko sistema baten erantzun askea

Erantzun askea da egoera-ekuazio homogeneo diskretuaren ebazpenetik lortzen den soluzioa (sarrera nulua izanik),  $\underline{x}_k$ , edozein  $k$  laginketa-periodorako eta hasierako egoera ( $k_0$  laginketa-periodoan)  $\underline{x}_{k_0}$  izanik.

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = [\mathbf{F}_k] \cdot \underline{x}_k + [\mathbf{G}_k] \cdot \underline{u}_k \\ \underline{x}(t_{k_0}) = \underline{x}_{k_0} \\ \underline{y}_k = [\mathbf{C}_k] \cdot \underline{x}_k + [\mathbf{D}_k] \cdot \underline{u}_k \end{cases} \quad (13.102)$$

Sistemaren erantzun askea,  $\underline{x}(t_{k_0+m}) \quad \forall m$ , hasierako kondizioen eta egoera-aldaketaren matrizearen mende utz daiteke.

$$\underline{x}(t_{k_0+m}) = [\Phi(k_0 + m, k_0)] \cdot \underline{x}(t_{k_0}) \quad (13.103)$$

$$\text{non } [\Phi(k_0 + m, k_0)] = \prod_{i=0}^{m-1} [\mathbf{F}_{k_0+i}]; \rightarrow \forall m \in \mathbb{Z} \quad (13.104)$$

#### Egiaztapena:

Erantzun askea kalkulatzeko sarrera nulua dela kontsideratuz, gehikuntza-ekuazioa modu errepikakorrean aplikatuta, berdintza hauek lortuko ditugu:

$$t_{k_0+1} \text{ aldiunerako: } \underline{x}_{k_0+1} = [\Phi(k_0 + 1, k_0)] \cdot \underline{x}_{k_0} = [\mathbf{F}_{k_0}] \underline{x}_{k_0} \quad (13.105)$$

$$t_{k_0+2} \text{ aldiunerako: } \underline{x}_{k_0+2} = [\Phi(k_0 + 2, k_0 + 1)] \cdot \underline{x}_{k_0+1} = [\mathbf{F}_{k_0+1}] \underline{x}_{k_0+1}$$

$$\underline{x}_{k_0+2} = [\mathbf{F}_{k_0+1}] [\mathbf{F}_{k_0}] \underline{x}_{k_0} \quad (13.106)$$

$$t_{k_0+m} \text{ aldiunerako: } \underline{x}_{k_0+m} = [\Phi(k_0 + m, k_0)] \cdot \underline{x}_{k_0} =$$

$$\underline{x}_{k_0+m} = [\mathbf{F}_{k_0+m}] [\mathbf{F}_{k_0+m-1}] [\mathbf{F}_{k_0+m-2}] \cdots [\mathbf{F}_{k_0+1}] [\mathbf{F}_{k_0}] \underline{x}_{k_0} \quad (13.107)$$

$$\text{Beraz, } [\Phi(k_0 + m, k_0)] = [\mathbf{F}_{k_0+m}] \cdot [\mathbf{F}_{k_0+m-1}] \cdot [\mathbf{F}_{k_0+m-2}] \cdots [\mathbf{F}_{k_0+1}] \cdot [\mathbf{F}_{k_0}]$$

$$\text{edo } [\Phi(k_0 + m, k_0)] = \prod_{i=0}^m [\mathbf{F}_{k_0+i}]$$

### Egoera-aldaketaren matrizea $[\Phi(k, l)]$ . Definizio formala

Denbora diskretuko sistema baten egoera-aldaketaren matrizea  $n \times n$  matrizea da, eta ezaugarri eta propietate hauek ditu:

1.  $[\Phi(k+1, l)] = [F_k] \cdot [\Phi(k, l)]$
2.  $[\Phi(l, l)] = [I]$
3.  $[\Phi(l+1, l)] = [F_l]$

Denborarekin aldatzen ez den sistema baten egoera-aldaketaren matrizeak itxura hau du:

$$[\Phi(k, l)] = [F]^k \quad (13.108)$$

### 13.5.3 Denbora diskretuko sistema baten egoera-ereduaren erantzun osoaren kalkulua

Demagun hau dela sistema baten gehikuntza bidezko egoera-ekuazioa:

$$\underline{x}_{k+1} = [F_k] \underline{x}_k + [G_k] u_k \quad (13.109)$$

Sistemaren hasierako kondizioak eta sistemaren sarrera-bektorea denboran zehar ezagunak baditugu, sistemaren egoera-bektorea ebatz dezakegu.

$$\underline{x}_k = [\Phi(k, k_0)] \cdot \underline{x}_{k_0} + \sum_{l=k_0}^{k-1} [\Phi(k, l+1)] \cdot [G_l] \cdot u_l \quad (13.110)$$

$$\text{non: } [\Phi(k, k_0)] = \prod_{i=0}^{k-k_0-1} [F_{k_0+i}]$$

#### Egiaztapena:

Sistema homogeneoaren kasuan egin den bezala, gehikuntza-ekuazioa modu errepikakorrean aplikatuz:

$$-t_{k_0+1} \text{ aldiunera: } \underline{x}_{k_0+1} = [F_{k_0}] \underline{x}_{k_0} + [G_{k_0}] u_{k_0}$$

-  $t_{k_0+2}$  aldiunean:

$$\begin{aligned}\underline{x}_{k_0+2} &= [F_{k_0+1}] \underline{x}_{k_0+1} + [G_{k_0+1}] \underline{u}_{k_0+1} \\ \underline{x}_{k_0+2} &= [F_{k_0+1}] ([F_{k_0}] \underline{x}_{k_0} + [G_{k_0}] \underline{u}_{k_0}) + [G_{k_0+1}] \underline{u}_{k_0+1} \\ &= [F_{k_0+1}] [F_{k_0}] \underline{x}_{k_0} + [F_{k_0+1}] [G_{k_0}] \underline{u}_{k_0} + [G_{k_0+1}] \underline{u}_{k_0+1}\end{aligned}$$

-  $t_{k_0+3}$  aldiunerako:

$$\begin{aligned}\underline{x}_{k_0+3} &= [F_{k_0+2}] [F_{k_0+1}] [F_{k_0}] \underline{x}_{k_0} + [F_{k_0+2}] [F_{k_0+1}] [G_{k_0}] \underline{u}_{k_0} + [F_{k_0+2}] [G_{k_0+1}] \underline{u}_{k_0+1} + [G_{k_0+2}] \underline{u}_{k_0+2} \\ &= [\Phi(k_0+3, k_0)] \underline{x}_{k_0} + \sum_{i=0}^2 [\Phi(k_0+3, k_0+i+1)] [G_{k_0+i}] \underline{u}_{k_0+i}\end{aligned}$$

-  $t_{k_0+m}$  aldiunerako:

$$\underline{x}_{k_0+m} = [\Phi(k_0+m, k_0)] \underline{x}_{k_0} + \sum_{i=0}^{m-1} [\Phi(k_0+m, k_0+i+1)] [G_{k_0+i}] \underline{u}_{k_0+i} \quad (13.111)$$

$k_0+m = k$  aldagai-aldaketa eginez, (13.111) formula honela idatz dezakegu.

$$\underline{x}_k = [\Phi(k, k_0)] \underline{x}_{k_0} + \sum_{i=0}^{m-1} [\Phi(k, k_0+i+1)] [G_{k_0+i}] \underline{u}_{k_0+i} \quad (13.112)$$

eta  $k_0+i = l$  aldagai-aldaketa aplikatuz gero, ekuazio honetara hel gaitetzke; ekuazio hori (13.110) formula da, eta honela egiaztatuta geratzen da:

$$\underline{x}_k = [\Phi(k, k_0)] \underline{x}_{k_0} + \sum_{l=k_0}^{m-1} [\Phi(k, l+1)] [G_l] \underline{u}_l \quad (13.113)$$

Sistema denborarekin aldatuko ez balitz, kondizio hauek beteko lirateke:  $[F_k] = [F]$ ,  $[G_k] = [G]$  eta  $[\Phi(k, k_0)] = [F]^{k-k_0}$ . Horrenbestez,  $k$  aldiune jakin bateko egoera-bektorea bi era hauetako batean idatz daiteke:

$$\underline{x}_k = [F]^{k-k_0} \underline{x}_{k_0} + \sum_{l=k_0}^{k-1} [F]^{k-l-1} [G] \underline{u}_l$$

edo

$$\underline{x}_k = F^{k-k_0} \underline{x}_{k_0} + \sum_{j=0}^{k-k_0-1} F^{(k-k_0-1)-j} \cdot G \cdot \underline{u}_{k_0+j}$$

### 13.5.4 Denbora jarraituko sistema baten denbora diskretuko eredu baliokidearen kalkulua

Kontrolatu behar diren sistema guztiak denbora jarraituko ereduen bitartez adierazten dira. Hala ere, gaur egun, konputagailu bat erabiltzen da sistema horiek kontrolatzeko, eta horrek denbora diskretuko ereduak erabiltzera behartzen gaitu. Beraz, liburuko atal honetan denbora jarraituko sistema baten denbora diskretuko sistema baliokide bat kalkulatu behar dugu.

#### - Egoera-ekuazioa

Suposatuko dugu sistema ez dela aldakorra, eta kontrol-egiturari bihurtutako digital-analogiko bat erabiliko dugu; hala, kontrol-seinaleari ( $\underline{u}$  sarrerari) konstante eutsiko diogu laginketa-periodo bien artean. Diskretizazio-arazoa da  $\dot{\underline{x}}(t) = [A]\underline{x}(t) + [B]\underline{u}(t)$  eredutik  $\underline{x}_{k+1} = [F]\underline{x}_k + [G]\underline{u}_k$  eredu diskretura pasatzea.  $T$  laginketa-periodoa izanik, diskretizaziorako adierazpen bat lortzen da egoera-ekuazioaren (13.83) soluzioa idatzita  $t_0 = t_k$  eta  $t = t_{k+1}$  hartuz:

$$\begin{cases} \underline{x}(t_{k+1}) = e^{[A](t_{k+1}-t_k)} \underline{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{[A][t_{k+1}-\tau]} [B] \underline{u}(\tau) \cdot d\tau \\ \underline{u}(t) = \underline{u}(t_k) & t \in [t_k, t_{k+1}) \end{cases}$$

$$t_{k+1} = (k+1)T \text{ eta } t_k = kT \text{ direnez,}$$

$$\underline{x}(t_{k+1}) = e^{[A]T} \underline{x}(t_k) + \left[ \int_{kT}^{(k+1)T} e^{[A][(k+1)T-\tau]} [B] d\tau \right] \cdot \underline{u}(t_k) \quad (13.114)$$

Denbora diskretuko sistema baten egoera-ereduak itxura hori duela kontuan izanez gero,  $[F]$  eta  $[G]$  matriceak kalkula ditzakegu denbora jarraituko sistemaren  $[A]$  eta  $[B]$  matriceen arabera idatziz:

$$\underline{x}_{k+1} = [F]\underline{x}_k + [G]\underline{u}_k \quad (13.115)$$

Argi dago  $F_k$  matrizea  $[A]$  dinamika-matrizearen berreketa dela, (13.115) eta (13.114) ekuazioak ikusi besterik ez dago.

$$[F] = e^{[A]T} \quad (13.116)$$

$$[G] = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{[A][(k+1)T-\tau]} [B] d\tau \quad (13.117)$$

[G] **matrizearen kalkulua.** [G] matrizea kalkulatzeko, (13.117) formularen integrala ebatzi behar dugu. Horretarako, aldagai-aldaketa hauek aplikatu behar dira:

$$\begin{array}{c} \tau \\ \tau = kT + \lambda \\ \mu = T - \lambda \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \tau \text{---} \\ \text{---} \lambda \text{---} \quad \mu \text{---} \\ \text{---} t_k \text{---} T \text{---} t_k + 1 \text{---} t \end{array}$$

**13.6 irudia.** [G] matrizea kalkulatzeko egin beharreko aldagai-aldaketa.

Aurreko aldagai-aldaketak aplikatuz gero, honela idatz daiteke (13.117) formularen integrala.

$$[G] = \int_0^T e^{[A](T-\lambda)} [B] \, d\lambda = \int_T^0 e^{[A]\mu} [B] \, (-d\mu) \Rightarrow$$

Integrala ebatziz gero, honela utz daiteke [G] matrizea:

$$[G] = \int_0^T e^{[A]\mu} [B] \, d\mu = \left[ e^{[A]\mu} [A]^{-1} \right]_0^T \cdot [B] = \left( e^{[A]T} - [I] \right) [A]^{-1} [B] \quad (13.118)$$

Beraz,

$$[G_k] = \left[ e^{[A]T} - [I] \right] \cdot [A]^{-1} [B]$$

### - Irteera-ekuazioa

Irteera-ekuazioak berdinak dira, bai denbora jarraituan, bai denbora diskretuan.

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) \Big|_{t=t_k} &= [C(t)] \cdot \underline{x}(t) \Big|_{t=t_k} + [D(t)] \cdot \underline{u}(t) \Big|_{t=t_k} \\ \underline{y}(t_k) &= [C(t_k)] \cdot \underline{x}(t_k) + [D(t_k)] \cdot \underline{u}(t_k) \end{aligned} \quad (13.119)$$

**OHARRA:** [G] eta [F] matrizeak kalkulatzeko, matrize baten berreketa kalkulatu behar dugu; horretarako, zenbait era ditugu, baina erarik errazena da Taylorren garapenaren lehen mailako gaiak kalkulatzeko.

$$[F] = e^{[A]T} = [I] + [A]T \quad (13.120)$$

$$[G] = \left[ e^{[A]T} - [I] \right] \cdot [A]^{-1} [B] = \left[ [I] + [A]T - [I] \right] \cdot [A]^{-1} [B] = [B]T \quad (13.121)$$

Beraz, sistemaren denbora diskretuko eredu baliokidea honela idatz daiteke.

$$\underline{x}_{k+1} = \left[ [I] + [A]T \right] \cdot \underline{x}_k + [B]T \cdot \underline{u}_k \quad (13.122)$$

### 13.6 MATRIZE BATEN MENDEKO FUNTZIO BATEN KALKULUA; $E^{[A]T}$ FUNTZIOAREN KALKULUA

Denbora jarraituko sistema baten denbora diskretuko eredu baliokidea kalkulatzeko,  $e^{[A]T}$  funtzioa kalkulatu behar dugu, non  $[A]$  baita sistemaren dinamika-matrizea.  $[A]$  matrizea karratua denez, matrize horren funtzioa kalkula dezakegu.

Har ditzagun  $[A]_{(n \times n)}$  matrize karratu bat,  $[A] = \{a_{ij}, i = 1 \dots n, j = 1 \dots n\}$ , eta  $f(\cdot)$  funtzio bat.  $f([A]) \neq \{f(a_{ij}), \forall i, j\}$  denez, sortzen zaizkigun lehen galderak hauek dira:

1. Zein da  $f([A])$  funtzioaren irudia?
2. Nola kalkula dezakegu funtzioaren irudia.

#### Oinarrizko definizioak

$[A]_{(n,n)}$  **matrizearen espektroa**  $[A]_{(n,n)}$  matrizearen autobalioen multzoa da  $\{\lambda_i / A \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ .

Beraz, har ditzagun  $f(\lambda)$  funtzioa eta  $\{\lambda_i\}$   $[A]$  matrizearen autobalioak.  **$[A]$  matrizearen espektroaren gaineko 'f' funtzioaren balioak** funtzio horren  $[A]$  matrizearen autobalioetako irudien multzoa dira. Kontuan izan behar dugu ezen autobalioak anizkoitzak badira autobalio horri funtzioa gehiagotan aplikatu beharko diogula.

$$\{f(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, n\} \quad (\text{autobalio bakunak badira})$$

$$\{f(\lambda_k), \dot{f}(\lambda_k) \dots f^{(l-1)}(\lambda_k), \forall k < n\} \quad (\text{autobalio anizkoitzak badira})$$

$f^{(i)}(\lambda_k)$ ,  $\lambda_k$  balioari dagokion  $f(\lambda)$  funtzioaren  $i$ -garren deribatuaren balioa da.

#### Teorema:

$f(\cdot)$  eta  $g(\cdot)$  funtzioek irudi matritzial berdinak badituzte, espektroaren gaineko  $f(\cdot)$  eta  $g(\cdot)$  funtzioek dituzten irudiak berdinak dira. Bestalde,  $f(\cdot)$  eta  $g(\cdot)$  funtzioen

espektoaren gaineko balioak berdinak badira, bi funtzioen irudi matritzialak berdinak izango dira.

$$* f(\cdot), g(\cdot) / f(\lambda_i) = g(\lambda_i) \quad \forall \lambda_i \text{ ([A]-renak)} \quad \Leftrightarrow \quad f([A]) = g([A])$$

Beraz, matrize baten  $f([A])$  funtzioa kalkulatzeko,  $g([A])$  funtzio sinpleago bat erabiliko dugu. Funtzio hori eta espektoaren gaineko  $f([A])$  eta  $g([A])$  funtzioek dituzten balioak berdinak badira,  $f([A]) = g([A])$  izango da. Beraz,  $f([A])$  kalkulatu ordez,  $g([A])$  funtzioa kalkulatu dugu. Horrelako  $g(\cdot)$  funtzio bat Lagrange-Sylvester interpolatzaile polinomia da:

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= f(\lambda_1) \frac{(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \dots (\lambda - \lambda_n)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \dots (\lambda_1 - \lambda_n)} + \dots + f(\lambda_n) \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_{n-1})}{(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2) \dots (\lambda_n - \lambda_{n-1})} = \\ &= \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \cdot \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n ([A] - \lambda_k [1])}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_k)} \end{aligned} \quad (13.123)$$

Eta  $f(\lambda_i) = g(\lambda_i) \quad \forall i$  denez, aurreko teorema aplikatuz,  $f([A])$  kalkula dezakegu.

$$f([A]) = g([A]) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \cdot \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n ([A] - \lambda_k [1])}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_k)} \quad (13.124)$$

#### - Oinarritzko matrizeak

Aurreko puntuan ikusi dugun bezala, honela defini dezakegu  $f([A])$  funtzioa.

$$f([A]) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \cdot \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n ([A] - \lambda_k [1])}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_k)} \quad (13.125)$$

edo

$$f([A]) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \cdot [Z_i] \quad \text{non} \quad [Z_i] = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n ([A] - \lambda_k [1])}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_k)} \quad (13.126)$$

$Z_i$  matrizeari **[A] matrizearen oinarritzko matrize** deritzogu. Oinarritzko matrize horiek [A] matrizearen mende baino ez daude, eta ez dute inolako mendekotasunik  $f(\cdot)$  funtzioarekiko.

Ondorioz, [A] matrizearen oinarritzko matrizeak ezagutuz gero, oso erraz kalkula daiteke edozein  $f([A])$ .

### **$f([A])$ kalkulatzeko prozedura**

[A] matrizearen mende dagoen  $f([A])$  funtzioa kalkulatzeko egin behar diren urratsak hauek dira:

1. [A] matrizearen espektroa kalkulatu ([A] matrizearen autobalioak).
2. [A] matrizearen  $Z_i$  oinarritzko matrizeak kalkulatu.
3. Espektroaren gaineko funtzioaren balioak lortu.
4.  $f([A])$  funtzioa kalkulatu.

-Autobalioak bakunak badira:

$[A]_{(n,n)}$  matrizeak  $n$  autobalio izango ditu.

$$f([A]) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \cdot [Z_i] \quad (13.127)$$

-Autobalioak anizkoitzak badira:

$$f([A]) = \sum_{i=1}^l \left[ f(\lambda_i) [Z_{i1}] + f'(\lambda_i) [Z_{i2}] + \dots + f^{(m_i-1)}(\lambda_i) [Z_{im_i}] \right] \quad (13.128)$$

### **Oinarritzko matrizeak kalkulatzeko prozedura**

[A] matrizearen oinarritzko matrizeak bi metodo hauen bidez kalkula daitezke:

Sylvesterren era.

Ekuazio aljebraikoak.

#### **A. Sylvesterren era**

$Z_i$  oinarritzko matrizeek berdintza hau betetzen dute, baldin eta  $\lambda_i$  autobalioak bakunak badira:

$$[Z_i] = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n ([A] - \lambda_k [1])}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13.129)$$

## B. Ekuazio aljebraikoak

Oinarritzko matrizeak  $[A]$  matrize karratuari lotutako matrizeak dira, eta guztiz independenteak dira  $f(\cdot)$  funtzioarekiko. Hori dela eta, oinarritzko matrize horiek kalkulatzeko,  $g_i(\cdot)$  funtzio laguntzaileak erabiliko ditugu. Beraz,  $g_i([A])$  kalkulatzeara erraza izan behar du. Gomendatzen da  $g_i([A])$  oinarritzko funtzio gisa funtzio polinomikoak erabiltzea.

### Oinarritzko matrizeen kalkulua autobalio bakunentzat

Har ditzagun sistemaren dinamika-matrizea,  $[A]_{(n,n)}$ , eta  $[A]$  matrizearen autobalioak,  $\{\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ . Demagun autobalio horiek errealak direla.  $[A]$  matrizearen  $\lambda_i$  autobalioari dagokion  $Z_i$  oinarritzko matrizea kalkulatzeko, funtzio aljebraiko bat definituko dugu; eta  $[A]$  matrizeak  $n$  autobalio bakunak dituenetz,  $n$  ekuazio aljebraiko definitu beharko dira. Bakuntasun-arrazoiak direla eta, funtzio laguntzaile gisa  $\{g_i(\lambda) = \lambda - a_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  funtzioak hartuko ditugu, non  $a_i$  zenbaki errealak baitira. Orduan,  $Z_i$  oinarritzko funtzioen kalkulua lortzen da ekuazio-sistema hau ebatziz (gogoan izan behar dugu ekuazio hauek matrize-ekuazioak direla):

$$\begin{cases} g_1([A]) = g_1(\lambda_1) \cdot [Z_1] + g_1(\lambda_2) \cdot [Z_2] + \dots + g_1(\lambda_n) \cdot [Z_n] \\ g_2([A]) = g_2(\lambda_1) \cdot [Z_1] + g_2(\lambda_2) \cdot [Z_2] + \dots + g_2(\lambda_n) \cdot [Z_n] \\ \vdots \\ g_n([A]) = g_n(\lambda_1) \cdot [Z_1] + g_n(\lambda_2) \cdot [Z_2] + \dots + g_n(\lambda_n) \cdot [Z_n] \end{cases} \quad (13.130)$$

**OHARRA:**  $n$  autobalio bakuneko  $[A]$  matrize karratu batentzat,  $n-1$  mailako funtzio polinomioak hartuz gero,  $g_i(\lambda) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (\lambda - \lambda_k)$ ,  $[Z_i]$  oinarritzko matrizeen formula

Silvester erara ebatzita lortuko genituenak dira.

### 13.4 Adibidea

Har dezagun  $[A]_{(2,2)}$  matrize karratu bat. Matrize horren  $[Z_1]$  eta  $[Z_2]$  oinarritzko matrizeak kalkulatzeko,  $g_1(\cdot)$  eta  $g_2(\cdot)$  funtzioak aukeratu behar ditugu.

$$\begin{cases} g_1([A]) = g_1(\lambda_1)[Z_1] + g_1(\lambda_2)[Z_2] \\ g_2([A]) = g_2(\lambda_1)[Z_1] + g_2(\lambda_2)[Z_2] \end{cases}$$

$Z_1$  eta  $Z_2$  matrizeak aurreko matrize-ekuazioak askatuz kalkulatu dira. Ekuazio horiek askoz errazago askatzen dira  $g_1(\cdot)$  eta  $g_2(\cdot)$  funtzioek itxura hau izanez gero:

$$\text{aukeratuz } g_1(\lambda) = \lambda - \lambda_1 \quad \text{beraz, } g_1([A]) = [A] - \lambda_1 [1]$$

$$\text{aukeratuz } g_2(\lambda) = \lambda - \lambda_2 \quad \text{beraz, } g_2([A]) = [A] - \lambda_2 [1]$$

Horrenbestez,  $Z_1$  eta  $Z_2$  oinarritzko matrizeak kalkulatu ditzakegu.

$$\begin{aligned} [A] - \lambda_1 [1] &= (\lambda - \lambda_1)|_{\lambda=\lambda_1} [Z_1] + (\lambda - \lambda_1)|_{\lambda=\lambda_2} [Z_2] \\ [Z_2] &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot ([A] - \lambda_1 [1]) \end{aligned}$$

eta

$$\begin{aligned} [A] - \lambda_2 [1] &= (\lambda - \lambda_2)|_{\lambda=\lambda_1} [Z_1] + (\lambda - \lambda_2)|_{\lambda=\lambda_2} [Z_2] \\ [Z_1] &= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot ([A] - \lambda_2 [1]) \end{aligned}$$

Ebazpide hori autobalioak bakunak direnean soilik erabili daiteke. Autobalioak anizkoitzak direnean, berriz, beste era batera ebatzi behar dira.

#### Oinarritzko matrizeen kalkulua autobalio anizkoitzentzat

Demagun  $[A]_{(n,n)}$  matrize karratuak ' $l$ ' autobalio dituela  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ , eta autobalio horiek  $(m_1, m_2, \dots, m_l)$  anizkoitzasunak dituztela. Ondorioz,

$$f([A]) = \sum_{i=1}^l [f_i(\lambda_i)[Z_{i1}] + \dot{f}_i(\lambda_i)[Z_{i2}] + \dots + f_i^{(m_i-1)}(\lambda_i)[Z_{im_i}]] \quad (13.131)$$

$$\text{non } f_i^{(k)}(\lambda_i) = \left. \frac{d^k f_i(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_i} \quad (13.132)$$

Aurreko kasuan bezalaxe, oinarritzko  $n$  matrize lortzeko,  $n$   $\{g_{ik}(\lambda)\}$  funtzio egokiak aukeratuta, ekuazio-sistema hau askatu beharko dugu:

$$g_{ik}([A]) = \sum_{i=1}^I \left[ \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}^{(k-1)}(\lambda_i) [Z_{ik}] \right] \quad (13.133)$$

$n$  funtzioak  $\{g_{ik}(\lambda), i = 1, 2, \dots, I, k = 1, 2, \dots, m_i\}$  aukeratu dira,  $\{g_{ik}([A])\}$  ezaguna edo kalkulatzeko 'erraza' izan dadin. Hala,  $m_i$  anizkoiztasuneko autobalio bakoitzarentzat  $m_i$  funtzio polinomikoak aukeratu ahal dira,  $\{g_{ik}(\lambda) = \lambda^{k-1} + c_{k-1}\lambda^{k-2} + c_{k-2}\lambda^{k-3} + \dots + c_2\lambda + c_1, \quad k = 1, 2, \dots, m_i\}$ .

### 13.7 EGOERA-EREDU LINEALEN ANALISA: EGONKORTASUNA, KONTROLAGARRITASUNA ETA BEHAGARRITASUNA

Liburuaren atal honetan eta 13.8 atalean, egoera-ereduen zenbait kontzeptu garrantzitsu aztertuko ditugu: egonkortasuna, kontrolagarritasuna, eta behagarritasuna. 7. gaian aztertu dugu egonkortasuna, eta, zehazki, BIBO egonkortasuna. Atal honetan, Lyapunovek proposatutako teoremaren bitartez aztertuko dugu egonkortasuna. Teorema hori sistema ez-linealekin ere erabili ohi da, eta sistemen BIBO egonkortasunarekin bat dator sistema linealentzat. Bestetik, sistemen kontrolagarritasuna eta behagarritasuna kontzeptu berriak dira. Kontrolagarritasuna da, hitzak adierazten duen bezalaxe, sarreraren bitartez sistemaren egoera-aldagaien balioak aldatzeko gaitasunari kontrola ezartzea. Eta, azkenik, sistema baten artean bitartez sistemaren egoera-bektorea kalkulatzeko gaitasuna da sistema baten behagarritasuna. Beraz, behagarritasuna, kontrolagarritasunarekin batera, oso garrantzitsua da sistema baten kontrolerako.

#### 13.7.1 Egonkortasuna ikuspuntu fisiko batetik, oreka-puntua

Har dezagun  $\underline{x}_e$  sistema baten egoera-bektorearen hasierako kondizioa; beste era batera esanda,  $t_0$  aldiune baterako sistema  $\underline{x}_e$  egoeran dagoela suposatuko dugu. Sistema hori denbora diskretukoa edo denbora jarraitukoa izan daiteke.  $\underline{x}_e$  bektoreari sistemaren oreka-puntu deritzogu, baldin eta egoera horretatik higitzen ez bada  $t_0$  aldiunetik aurrera. Har dezagun  $\dot{\underline{x}}(t) = [A]\underline{x}(t)$  ekuazioa betetzen duen sistema dinamikoa, eta izan bedi  $\underline{x}_e = \underline{0}$  sistema horren oreka-puntua; sistemaren hasierako kondizioa  $\underline{0}$  bada, sistema ez da puntu horretatik irtengo,  $\underline{x}$  egoera-bektorearen denborarekiko deribatua zero delako.

$$\dot{\underline{x}}(t) = [\underline{A}] \underline{x}(t) = [\underline{A}] \underline{0} = \underline{0} \quad (13.134)$$

Sistema bat oreka-puntuan dagoenean, orekan dagoela esaten da.

### Definizioia

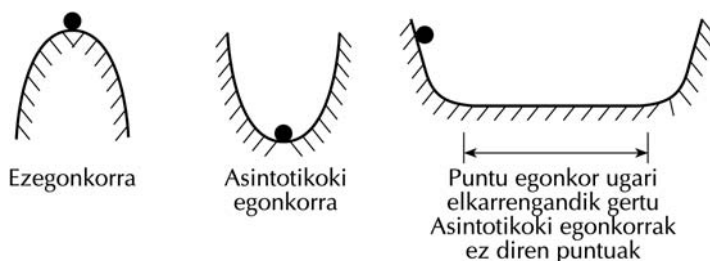
Denborarekin aldatzen ez den sistema lineal bat egonkorra da, baldin eta, hasierako kondizioa edozein izanda ere, sistema ( $\underline{x}_e$ ) oreka-punturantz gerturatzen bada, denbora aurrera doan heinean.

Baldin eta  $\exists \underline{x}_e / \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) \rightarrow \underline{x}_e$  Denbora jarraituko sistema egonkorra

Baldin eta  $\exists \underline{x}_e / \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}(k) \rightarrow \underline{x}_e$  Denbora diskretuko sistema egonkorra

Alderantziz, sistema bat ezegonkorra dela esango dugu, baldin eta  $\underline{x}(t)$  egoera-bektoreak, perturbazio baten eraginez, infiniturantz jotzen badu denbora handitzen denean, eta handitzen ez denean, oreka-puntura gerturatzen bada.

### Oreka-puntu bati lotutako egonkortasuna



### 13.7 irudia. Oreka-puntu bati lotutako oreka-puntua.

Oreka-puntuek, beraz, egonkorrak eta ezegonkorrak izan daitezke. Irudian ikus daitekeenez, oreka-puntu egonkorrak erakarpen-eremu bat izan ohi du. Sistema lineala bada eta oreka-puntua egonkorra bada, eremu hori egoera-espazio osoa izango da. Sistema ez-linealetan, berriz, oreka-puntu egonkor baten inguruan dagoen erakarpen-eremuak mugak izan ditzake. Horrelako oreka-puntu egonkorrei asintotikoki egonkorrak deritzugu. Beste zenbait sistematan oreka-puntu anitz elkartuta daude. Horrek esan nahi du sistemak perturbazio bat jasaten badu oreka-puntutik higitu egingo dela; baina ez da hasierako oreka-puntura itzuliko, geratu den puntua ere oreka-puntu bat delako. Oreka-puntu horiek egonkorrak dira, baina ez dira asintotikoki egonkorrak.

Beraz, sistema ez-linealen egonkortasuna oreka-puntuaren inguruneari bakarrik lotutako ezaugarri dinamiko bat da, eta, oro har esanda, sistema ez-linealen egonkortasun hori ez da egoera-espazio osorako ezaugarri bat.

### 13.7.2 Egonkortasuna eta sarrerak behartutako erantzuna; BIBO egonkortasuna

#### Definizioa

Sistema bat BIBO egonkorra da, baldin eta sarrera mugatu baten aurrean sistemak beti erantzun mugatu bat izaten badu.

Beraz, oreka-puntu batean dagoelarik, sistema BIBO egonkorra denean, oreka-puntu berri baterantz jotzen du sarrera aldatzean. Sistema ez-linealekin jardutean ez da definizio hau erabiltzen, egonkortasunak sarrerari lotutako kontzeptu bat ematen duelako, eta sistema baten egonkortasuna sistemaren dinamikari baino ez dagoelako lotuta.

### 13.7.3 Lyapunov egonkortasuna

Kontuan har ditzagun bi sistema dinamiko hauek. Eredu hauek denbora diskretukoak eta denbora jarraitukoak dira, eta sistema lineal baten erantzun askea kalkulatzeko erabiliko ditugu.

$\dot{\underline{x}}(t) = [A_c] \underline{x}(t) \Rightarrow$  Denbora jarraituko sistema lineala eta askea (fr., *autonome*)

$\dot{\underline{x}}_{k+1} = [F] \cdot \underline{x}_k \Rightarrow$  Denbora diskretuko sistema lineala eta askea (fr., *autonome*)

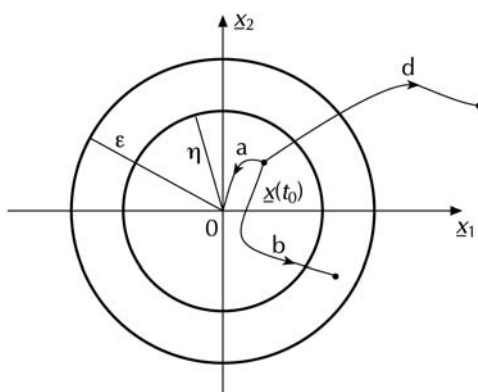
#### Definizioa

Sistema egonkorra da, baldin eta  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta : \|\underline{x}(t_0)\| < \eta \Rightarrow \|\underline{x}(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$

Sistema asintotikoki egonkorra da, baldin eta  $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) \rightarrow \underline{0}$ , hots, egoera-espazioaren jatorria oreka-puntua dela jo dugu.

**OHARRA:**  $\|\underline{x}\|$  egoera-bektorearen luzera neurri euklidestarraren arabera kalkulatu dugu. ( $\|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ).

**Definizioaren interpretazio geometrikoa.** Demagun bigarren mailako sistema dinamiko bat dugula, hau da, bi egoera-aldagai ditugula. Irudika dezagun sistemaren erantzun askea edo bilakaera askea fase-diagrama batean, 13.8 irudian agertzen den bezala. Jatorri-punturantz edo beste puntu baterantz jotzen badu (sistemak puntu batean konbergitzen badu), esango dugu sistema egonkorra dela.



Sistemaren jarrera ezberdinak  
a: egonkortasun asintotikoa  
b: egonkortasun ez-asintotikoa  
c: egonkortasunik eza

**13.8 irudia.** Egonkortasuna eta fase-diagrama.

$\underline{x}(t_0)$  hasierako kondizioa  $\eta$  erradioko zirkulu baten barruan badago eta sistemaren egoerak  $\varepsilon$  erradioko zirkulu baten barrurantz jotzen badu, esango dugu sistema egonkorra dela. Sistemak jatorri-punturantz jotzen badu edo beste puntu zehatz baterantz jotzen badu, esango dugu sistema asintotikoki egonkorra dela. Sistemak infiniturantz jotzen badu, hau da, sistema dibergentea bada, sistema ezegonkorra dela esango dugu.

#### 13.7.4 Egonkortasun-irizpide arruntak, BIBO egonkortasuna

Denbora diskretuko sistema linealen eta denbora jarraituko sistema linealen egonkortasun asintotikoa egiaztatzeko beharrezko eta nahikoak diren kondizioak desberdinak dira.

1.- Denbora jarraituko sistema dinamiko bat,  $(\dot{\underline{x}}(t) = [A] \cdot \underline{x}(t))$ , asintotikoki egonkorra da, baldin eta  $[A]$  dinamika-matrizearen autobalio guztien atal erreala negatiboa bada.

**Egiaztapena:**

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{x}} &= [\underline{A}] \underline{x} \Rightarrow \mathcal{L}(\dot{\underline{x}}) = \mathcal{L}([\underline{A}] \underline{x}) \\
\mathcal{L}(\underline{x}) &= \underline{X}(s) \Rightarrow s \underline{X}(s) - \underline{x}_0 = [\underline{A}] \underline{X}(s) \\
[s[\underline{I}] - [\underline{A}]] \underline{X}(s) &= \underline{x}_0 \Rightarrow \underline{X}(s) = [s[\underline{I}] - [\underline{A}]]^{-1} \underline{x}_0 \quad (13.135) \\
[s[\underline{I}] - [\underline{A}]]^{-1} &= \frac{\text{Adj}(s[\underline{I}] - [\underline{A}])}{\det([s[\underline{I}] - [\underline{A}]])} \\
\underline{X}(s) &= \frac{\text{Adj}(s[\underline{I}] - [\underline{A}])}{\det([s[\underline{I}] - [\underline{A}]])} \underline{x}_0
\end{aligned}$$

Ikus daitekeenez,  $\det([s[\underline{I}] - [\underline{A}]])$  determinantea  $\underline{X}(s)$  egoera-bektorearen Laplaceren transformatuaren izendatzailea da. Laplaceren transformatuen taula bat behatuz gero, ikusiko dugu seinale baten izendatzailearen erroek atal negatiboa badute seinaleak zerorantz jotzen duela denbora handitu ahala.  $\det([s[\underline{I}] - [\underline{A}]])$  ekuazioari sistemaren **ezaugarri-ekuazio** deritzogu, eta bere erroak sistemaren transferentzia-funtzioaren poloak dira. Erro horiek  $[\underline{A}]$  dinamika-matrizearen autobalioak dira. Autobalio horien atal errealak negatiboak badira, sistema asintotikoki egonkorra izango da.

**13.5 adibidea**

Demagun 3. mailako sistema bat dugula, eta egoera-eredu baten bidez adieraziko dugu sistemaren dinamika. Kalkula dezagun sistema horren  $\underline{X}(s)$  egoera-bektorea.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Lehenik, matrize-ekuazio horri Laplaceren transformatua aplikatuko diogu, eta, ondoren, ekuazio-sistema bat askatzen dugun bezala askatuko dugu Kramer baten bidez.

$$\begin{bmatrix} -1-s & 1 & 0 \\ 0 & -1-s & 0 \\ 0 & 0 & -1-s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

Beraz, Kramer aplikatuz,  $\underline{X}_1(s)$  bakartuko dugu:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= - \frac{\begin{vmatrix} x_1(0) & 1 & 0 \\ x_2(0) & -1-s & 0 \\ x_3(0) & 0 & -1-s \end{vmatrix}}{(s+1)^3} \\ X_1(s) &= - \frac{(s+1)^2 x_1(0) + (s+1) x_2(0)}{(s+1)^3} \\ X_1(s) &= - \frac{(s+1) x_1(0) + x_2(0)}{(s+1)^2} \\ X_2(s) &= - \frac{x_2(0)}{(s+1)} \\ X_3(s) &= - \frac{x_3(0)}{(s+1)} \end{aligned}$$

Ikus daitekeenez, sistemaren dinamika-matrizearen ezaugarri-polinomioa  $X_1(s)$ ,  $X_2(s)$  eta  $X_3(s)$  transformatuen izendatzailea da, hots,  $\det([sI] - [A])$  determinantea transformatu horien guztien izendatzailea da. Beraz, sistemaren egonkortasuna  $\det([sI] - [A]) = 0$  ezaugarri-polinomioaren erroen mende dago. Erroen atal errealak negatiboak badira, sistema BIBO egonkorra izango da.

2.- Denbora diskretuko sistema bat,  $(\dot{\underline{x}}_{k+1} = [F] \cdot \underline{x}_k)$ , asintotikoki egonkorra da, baldin eta  $F$  dinamika-matrizearen autobalio guztien moduluak 1 baino txikiagoak badira.

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= [F] \underline{x}_k \Rightarrow Z(\underline{x}_{k+1}) = Z([F] \underline{x}_k) \\ z\underline{X}(z) - \underline{x}_0 &= [F] \underline{X}(z) \\ [zI] - [F] \underline{X}(z) &= \underline{x}_0 \Rightarrow \underline{X}(z) = [zI] - [F]^{-1} \underline{x}_0 \\ [zI] - [F]^{-1} &= \frac{\text{Adj}([zI] - [F])}{\det([zI] - [F])} \\ \underline{X}(z) &= \frac{\text{Adj}([zI] - [F])}{\det([zI] - [F])} \underline{x}_0 \end{aligned} \quad (13.136)$$

Ikus daitekeenez,  $\det([zI] - [F])$  determinantea  $\underline{X}(z)$  egoera-bektorearen  $Z$  transformatuaren izendatzailea da.  $Z$  transformatuen taula bat behatuz gero, konturatuko gara seinale baten izendatzailearen erroen moduluak 1 baino txikiagoak

badira seinale horrek zerorantz jotzen duela denbora handitu ahala.  $\det([z[I] - F]) = 0$  ekuazioari sistemaren ezaugarri-polinomio deritzogu. Ezaugarri-polinomio horren erroak sistemaren transferentzia-funtzioaren polok dira. Erro horiek  $[F]$  dinamika-matrizearen autobalioak dira. Autobalio horien moduluak 1 baino txikiagoak badira, sistema asintotikoki egonkorra izango da.

### 13.6 adibidea

Demagun 3. mailako sistema bat dugula, eta egoera-eredu baten bidez adieraziko dugu sistemaren dinamika. Kalkula dezagun sistema horren  $\underline{X}(z)$  egoera-bektorea.

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ x_3[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \end{bmatrix}$$

Lehenik, matrize-ekuazio horri Z transformatua aplikatuko diogu, eta, ondoren, ekuazio sistema bat askatzen dugun bezala askatuko dugu Kramer baten bidez.

$$\begin{bmatrix} -1/2 - z & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 - z & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 - z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ X_3(z) \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

Beraz, Kramer aplikatuz,  $\underline{X}_1(z)$  bakartuko dugu:

$$\begin{aligned} X_1(z) &= - \frac{\begin{vmatrix} x_1(0) & 1 & 0 \\ x_2(0) & -1/2 - z & 0 \\ x_3(0) & 0 & -1/2 - z \end{vmatrix}}{(z + 1/2)^3} \\ X_1(z) &= - \frac{(z + 1/2)x_1(0) + x_2(0)}{(z + 1/2)^2} \\ X_2(z) &= - \frac{x_2(0)}{(z + 1/2)} \\ X_3(z) &= - \frac{x_3(0)}{(z + 1/2)} \end{aligned}$$

Ikus daitekeenez, sistemaren dinamika-matrizearen ezaugarri-polinomioa  $X_1(z)$ ,  $X_2(z)$  eta  $X_3(z)$  transformatuen izendatzailea da, hau da,  $\det([z[I] - F])$  determinantea transformatu horien guztien izendatzailea da. Beraz, sistemaren

egonkortasuna  $\det([zI] - [F]) = 0$  ezaugarri-polinomioaren erroen mende dago. Erroen moduluak 1 baino txikiagoak badira, sistema BIBO egonkorra izango da.

### 13.7.5 Lyapunoven egonkortasunaren irizpidea, denbora jarraituko sistementzat

**Lyapunoven teorema**  $\dot{\underline{x}}(t) = [A]\underline{x}(t)$  sistema egonkorra da, baldin eta:

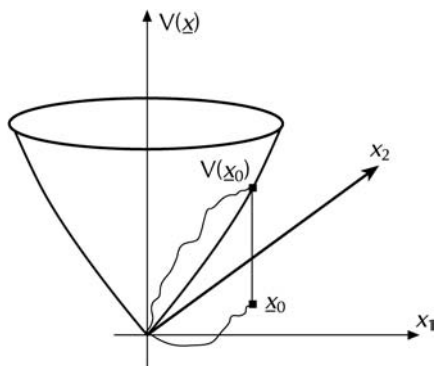
1. Kondizio hauek betetzen dituen funtzio bat badago (Lyapunoven funtzioa):

- funtzioa positiboa da  $\underline{x}$  egoera-bektorearentzat,  $V(\underline{x}) > 0$ ,
- $\underline{x}$  egoera-bektorearekiko jarraitua da
- funtzioak zero balio du jatorri-egoerarentzat,  $V(0) = 0$ .

2.  $\dot{V}(\underline{x}(t))$  negatiboa bada  $\underline{x}(t)$  edozein ibilbiderentzako

$$\frac{dV(\underline{x}(t))}{dt} < 0 \quad \forall \underline{x}(t) / \dot{\underline{x}}(t) = [A]\underline{x}(t) \quad (13.137)$$

**Interpretazio geometrikoa.** Har dezagun 2. mailako sistema bat; hots, sistemak bi egoera-aldagai ditu:  $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$



**13.9 irudia.** Lyapunoven funtzioa eta fase-diagrama.

Defini dezagun Lyapunoven funtzio bat,  $V(\underline{x}) = f(x_1, x_2)$ . Funtzio hori ahurra da, 13.9 irudian agertzen den bezala. Sistema lineal bat asintotikoki egonkorra bada, hasierako kondizioa,  $\underline{x}(t_0)$ , sistemaren ibilbidea edozein delarik ere,  $\underline{x}(t)$  jatorri-

puntura joango da; beraz,  $V[\underline{x}(t)]$  funtzioaren ibilbidearen deribatua negatiboa izango da. Bestalde,  $V[\underline{x}(t)]$  funtzioaren ibilbidearen deribatua negatiboa bada beti, sistema asintotikoki egonkorra da.

### Lyapunoven teoremaren erabilera

Aukeratu dezagun Lyapunoven funtzio karratu bat,  $V(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot [\underline{P}] \cdot \underline{x}$  funtzioa.  $[\underline{P}]$  matrize erdipositiboa da. Beraz, Lyapunoven funtzioa positiboa izango da edozein egoera-bektorearentzat, jatorri-puntuarentzat izan ezik:  $V(\underline{x}) > 0$ ,  $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Jatorri-puntuarentzat, Lyapunoven funtzioak 0 balioa du.

**OHARRA:**  $[\underline{P}] = \{p_{ij}\}$  matrizea positiboki definitua da, baldin eta simetrikoa bada ( $p_{ij} = p_{ji}$ ) eta matrize horren determinantea positiboa bada.

**Sistema bat asintotikoki egonkorra izan dadin, kondizio beharrezkoa eta nahikoa** da  $\dot{\underline{x}}(t) = [\underline{A}] \cdot \underline{x}(t)$  matrize-ekuazio diferentziala asintotikoki egonkorra izatea, baldin eta  $[\underline{P}]$  eta  $[\underline{Q}]$  matrize erdipositibo bi existitzen badira eta berdintza hau betetzen badute:

$$[\underline{A}]^T \cdot [\underline{P}] + [\underline{P}] \cdot [\underline{A}] = -[\underline{Q}]$$

$$\text{Beraz, } \forall [\underline{Q}] > 0, \exists [\underline{P}] > 0 / [\underline{A}]^T \cdot [\underline{P}] + [\underline{P}] \cdot [\underline{A}] = -[\underline{Q}] \quad (13.138)$$

### Egiaztapena:

Har dezagun  $\dot{\underline{x}}(t) = [\underline{A}] \cdot \underline{x}(t)$  sistema lineal eta ez-aldakor bat. Pentsatuko dugu  $[\underline{A}]$  matrizearen determinantea ez dela 0. Har dezagun funtzio hori Lyapunoven funtziotzat:  $V(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot [\underline{P}] \cdot \underline{x}$ . Baldin eta funtzio horren denborarekiko deribatua negatiboa bada, sistema asintotikoki egonkorra da:

$$\frac{dV(\underline{x}(t))}{dt} < 0 \quad \forall \underline{x}(t) / \dot{\underline{x}}(t) = [\underline{A}] \underline{x}(t)$$

Honela idatz daiteke Lyapunoven funtzioaren deribatua.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\underline{x}) &= \dot{\underline{x}}^T \cdot [\underline{P}] \cdot \underline{x} + \underline{x}^T \cdot [\underline{P}] \cdot \dot{\underline{x}} = \\ &= ([\underline{A}] \cdot \underline{x})^T \cdot [\underline{P}] \cdot \underline{x} + \underline{x}^T \cdot [\underline{P}] \cdot [\underline{A}] \cdot \underline{x} = \\ &= \underline{x}^T \cdot [\underline{A}]^T \cdot [\underline{P}] \cdot \underline{x} + \underline{x}^T \cdot [\underline{P}] \cdot [\underline{A}] \cdot \underline{x} = \\ &= \underline{x}^T \cdot ([\underline{A}]^T [\underline{P}] + [\underline{P}] [\underline{A}]) \cdot \underline{x} < 0 \end{aligned}$$

Beraz, baldin  $\dot{V}(\underline{x}) < 0$  bada, sistema asintotikoki egonkorra da. Honela idatz daiteke funtzio horren denborarekiko deribatua:  $\dot{V}(\underline{x}) = -\underline{x}^T \cdot [\underline{Q}] \cdot \underline{x}$ . Eta  $[\underline{Q}]$  matrizea positiboki definitua bada, Lyapunoven funtzioaren denborarekiko deribatua negatiboa izango da.

$$[\underline{A}]^T \cdot [\underline{P}] + [\underline{P}] \cdot [\underline{A}] = -[\underline{Q}]$$

Beraz, sistema bat asintotikoki egonkorra dela ziurtatzeko, lehenik,  $[\underline{P}]$  eta  $[\underline{Q}]$  matrizeetatik bat aukeratuko dugu arbitrarioki, eta aukeratutako matrizea positiboki definitutako matrizea dela ziurtatuko dugu. Ondoren,  $[\underline{A}]^T \cdot [\underline{P}] + [\underline{P}] \cdot [\underline{A}] = -[\underline{Q}]$  ekuazioa betetzen duen matrizea kalkulatu dugu, eta egiaztatuko dugu emaitza positiboki definitua dela.

**Lyapunoven egonkortasunaren erabilera.** Demagun  $[\underline{Q}] = [\underline{I}]$  dela.  $-[\underline{Q}] = [\underline{A}]^T [\underline{P}] + [\underline{P}] [\underline{A}]$  ekuazioa betetzen duen  $\underline{P}$  matrizea simetrikoa eta positiboki definitua bada, sistema asintotikoki egonkorra izango da

$[\underline{Q}]$  matrizea aukeratuz gero,  $[\underline{P}]$  matrizeko  $p_{ij}$  elementuak kalkulatzeko,  $[\underline{A}]^T [\underline{P}] + [\underline{P}] [\underline{A}] = -[\underline{Q}]$  matrize-ekuazioa erabiliko dugu.  $[\underline{P}]$  matrizeak, beraz, simetrikoa izan behar du. Matrize-ekuaziotik  $[n(n+1)]/2$  berdintza lortuko ditugu.

### 13.7 adibidea

Egiazta dezagun sistema hau asintotikoki egonkorra dela, Lyapunoven metodoa erabiliz; halaber, kalkula ditzagun sistemaren autobalioak, sistema BIBO egonkorra dela egiaztatzeko.

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

$[\underline{Q}] = [\underline{I}]_{(2,2)}$  unitate matrizea aukeratuz gero, sistema asintotikoki egonkorra izango da, baldin eta  $\exists [\underline{P}] > 0 / [\underline{A}]^T [\underline{P}] + [\underline{P}] [\underline{A}] = -[\underline{I}]$  bada.  $[\underline{P}] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$  matrize simetrikoa kalkulatu dugu, Lyapunoven ekuazioaren bidez:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Elementuz elementu berdinduz, P matrizeko ekuazioko elementuak lortuko ditugu.

$$\left. \begin{array}{l} -2p_{12} = -1 \\ p_{11} - p_{12} - p_{22} = 0 \\ 2p_{12} - 2p_{22} = -1 \end{array} \right\} \quad P = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

**OHARRA:** Har dezagun kontuan P matrizea:

$$[P] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

Sylvester-en irizpidearen arabera, [P] matrizea positiboki definitua da, baldin eta determinante hauek positiboak badira:

$$\begin{aligned} m_1 &= \det(1 \times 1) = p_{11} > 0 \\ m_2 &= \det(2 \times 2) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0 \\ m_3 &= \det(3 \times 3) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} > 0 \end{aligned}$$

[P] matrizea positiboki definitua al da?

$$\left. \begin{array}{l} \det(1 \times 1) = 3/2 > 0 \\ \det(2 \times 2) = \begin{vmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 5/4 > 0 \end{array} \right\}$$

[P] simetrikoa denez, eta kalkulaturako determinanteak ere positiboak direnez, sistema **asintotikoki egonkorra izango da**.

### 13.7.6 Lyapunoven egonkortasunaren irizpidea, denbora diskretuko sistementzat

**Lyapunoven teorema.**  $\underline{x}_{k+1} = [F] \underline{x}_k$  sistema egonkorra izango da, baldin eta:

1. Badago  $V(\underline{x})$  funtzio bat (Lyapunoven funtzioa) kondizio hauek betetzen dituen:

Edozein  $\underline{x}$  egoera-bektore batentzat,  $V(\underline{x}) > 0$  bada,

$\underline{x}$  egoera-bektorearekiko jarraitua bada

eta  $V(\underline{0}) = 0$  bada

2.  $\Delta V(\underline{x}_k)$  positiboa ez bada  $\underline{x}_k$  egoera-bektoreak duen edozein ibilbiderekiko, hau da,

$$\Delta V(\underline{x}_k) = V(\underline{x}_{k+1}) - V(\underline{x}_k) \leq 0 \quad \forall \underline{x}_k / \underline{x}_{k+1} = [\underline{F}] \underline{x}_k \quad (13.139)$$

**Egonkortasun asintotikoaren kondizio beharrezko eta nahikoa:**  $\underline{x}_{k+1} = [\underline{F}] \underline{x}_k$  sistema diskretua asintotikoki egonkorra da, baldin eta ekuazio matrizial hau betetzen duten  $[\underline{P}]$  eta  $[\underline{Q}]$  matrize positiboki definituak bilatu ahal badira:

$$[\underline{F}]^T [\underline{P}] [\underline{F}] - [\underline{P}] = -[\underline{Q}]$$

hau da, baldin  $\forall [\underline{Q}] > 0, \exists [\underline{P}] > 0 / [\underline{F}]^T [\underline{P}] [\underline{F}] - [\underline{P}] = -[\underline{Q}] \quad (13.140)$

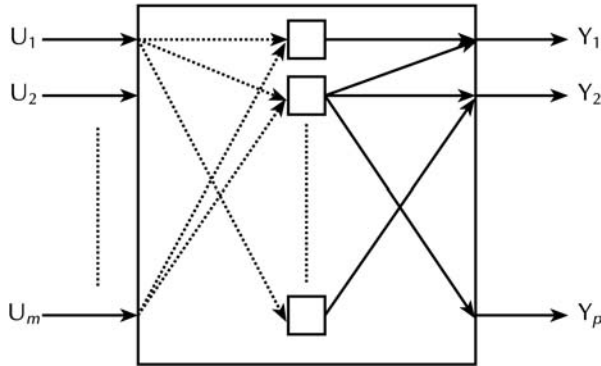
## 13.8 KONTROLAGARRITASUNA ETA BEHAGARRITASUNA

### 13.8.1 Kontzeptu intuitiboa

Kontrol-egitura baten helburua da sistema baten dinamika eta portaera baldintzatzea sistemaren sarrerak manipulaturik; horretarako, kontrolatu behar den aldagaiak 'sentibera' izan behar du aldagai manipulatuaren aldaketarekiko. Hala ez balitz, aldagai hori ezingo litzateke aldagai manipulatu horrekin kontrolatu, edo aldagai hori ez litzateke kontrolagarria izango.

Egoera-aldagai bat kontrolagarria da, baldin eta sistemaren edozein sarreraren bitartez egoera aldagai hori aldarazi badaiteke. Egoera-aldagai bat behagarria da, baldin eta sistemaren irteeraren balioetatik (edozeinetatik) egoera-aldagaiaren balioa zehaztu badaiteke.

Kontrolagarritasuna, beraz, sistemaren sarreretatik sistemaren bilakaera baldintzatzeko gaitasunarekin lotuta dagoen kontzeptua da; behagarritasuna, berriz, sistemaren irteeren neurrietatik sistemaren egoera-aldagaien balioak zehazteko posibilitatea da.



**13.10 irudia.** Sistemaren sarrerako egoera-aldagaien eta irteerakoen arteko loturak.

Hitz batean esanda, kontrolagarritasuna da egoera-aldagai bat edozein sarrerarekin lotzen duen bide bat badagoela erakusten duen ezaugarria (bide zuzena edo zeharkakoa, beste egoera-aldagai baten bidez). Halaber, behagarritasuna da egoera-aldagai bat edozein irteerarekin lotzen duen bide bat badagoela erakusten duen ezaugarria.

Horrenbestez, egoera-aldagaia bat kontrolagarria da aldagai hori sarrera batekin lotzen duen bide badago (modu zuzenean edo zeharka beste egoera-aldagai baten bidez). Orokortuz, sistema bat kontrolagarria da, baldin eta egoera-aldagai guztiak kontrolagarriak badira.

Bestalde, egoera-aldagai bat behagarria da aldagai hori irteera batekin lotzen duen bide bat badago (modu zuzenean edo zeharka beste egoera-aldagai baten bidez). Orokortuz, sistema bat behagarria da, baldin eta egoera-aldagaia guztiak behagarriak badira.

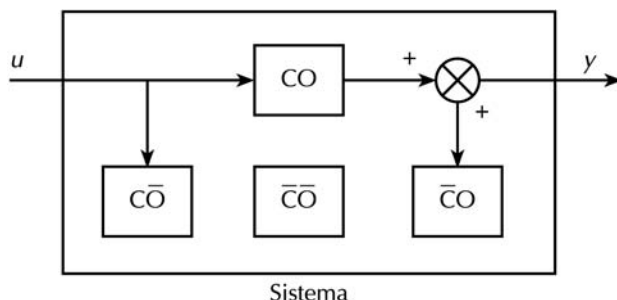
Enuntziatu ditugun egoera-aldagaien kontrolagarritasunaren eta behagarritasunaren kontzeptuen arabera, egoera-aldagaiak multzotan elkartu daitezke. Hala, lau azpisistemek osatzen dute Kalmanek enuntziatu zuen sistema:

azpisistema kontrolagarria eta ez-behagarria:  $\overline{CO}$

azpisistema kontrolagarria eta behagarria:  $CO$

azpisistema ez-kontrolagarria eta ez-behagarria:  $\overline{\overline{CO}}$

azpisistema ez-kontrolagarria eta behagarria:  $\overline{CO}$



13.11 irudia. Azpisistemez osatutako sistema.

### 13.8.2 Kalmanen egitura kanonikoa

Kalmanen arabera, sistemak lau azpisistematatan zatitu daitezke; egoera-bektorea lau bektoretan zatitzen da, eta zati horietako bakoitza azpisistema bati lotzen zaio.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \\ \underline{x}_4 \end{bmatrix} : \begin{array}{l} n_1 \rightarrow C\bar{O} \text{ azpisistema} \\ n_2 \rightarrow CO \text{ azpisistema} \\ n_3 \rightarrow \bar{C}\bar{O} \text{ azpisistema} \\ n_4 \rightarrow \bar{C}O \text{ azpisistema} \end{array} \quad \begin{array}{l} C: \text{kontrolagarria} \\ O: \text{behegarria} \end{array} \quad (13.141)$$

$$(n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4)$$

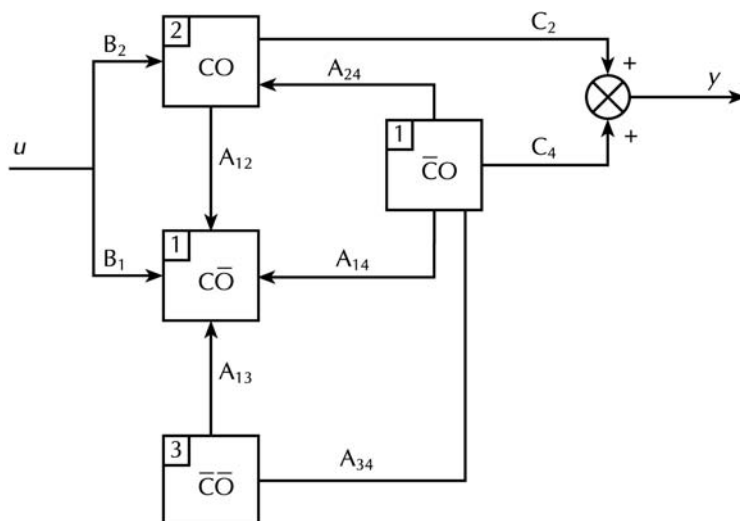
$n_i$  = azpisistema bakoitzaren egoera-bektorearen egoera-aldagaien kopurua.

Beraz, sistema lineal bat adierazteko eredu matematiko orokorra Kalmanen egitura kanoniko hau da:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] & [A_{13}] & [A_{14}] \\ [0] & [A_{22}] & [0] & [A_{24}] \\ [0] & [0] & [A_{33}] & [A_{34}] \\ [0] & [0] & [0] & [A_{44}] \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{bmatrix} [B_1] \\ [B_2] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$\underline{y} = [0 \quad [C_2] \quad 0 \quad [C_4]] \cdot \underline{x} \quad (13.142)$$

$[A_{ij}]$  azpimatrizeez egoera-aldagaien arteko loturak adierazten dituzte,  $[B_i]$  azpimatrizeez azpisistemen loturak sarrerekin eta  $[C_i]$  azpimatrizeez azpisistemen loturak irteerekin. Kontuan har ezazu Kalmanen egitura kanonikoan azpimatrizen nuluak daudela. Horrek horrela izan behar du, bestela, ez lioke egiturari eutsiko; hau da, horietakoen bat nulua izango ez balitz, azpisistemaren batek ez-kontrolagarria edo ez-behegarria izateari utziko lioke.



13.12 irudia. Bloke-diagrama, Kalmanen egitura kanonikoaren arabera.

Kalmanen egitura egitura orokor bat da, baina, askotan, sistemak azpisistema haietako bakar batzuk besterik ez ditu, eta, ondorioz, Kalmanen egitura kanonikoko azpimatrizatze batzuk nuluak dira.

### 13.8.3 Oinarritzko teorema

#### \*Oinarritzko teorema

**Definizioa:** “Transferentzia-matrizeak sistema baten zati kontrolagarria eta behagarria baino ez du adierazten”.

Har dezagun sistema baten eredua:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = [\underline{A}] \underline{x}(t) + [\underline{B}] u(t) \\ \underline{y}(t) = [\underline{C}] \underline{x}(t) \end{cases} \quad (13.143)$$

Laplaceren transformatua aplikatuz,

$$\underline{Y}(s) = [\underline{C}] [s[\underline{I}] - [\underline{A}]]^{-1} [\underline{B}] \cdot \underline{U}(s) \quad (13.144)$$

$[M(s)]$  da sistemaren sarrerak eta irteerak elkarrekin lotzen dituen transferentzia-matrizea:  $[M(s)] = [\underline{C}] \cdot [s[\underline{I}] - [\underline{A}]]^{-1} \cdot [\underline{B}]$ . Eta oinarritzko teoremaren arabera:

$$[M(s)] = [C] [s[I] - [A]]^{-1} [B] = [C_2] [s[I] - [A_{22}]]^{-1} [B_2] \quad (13.145)$$

non  $[C_2]$ ,  $[A_{22}]$  eta  $[B_2]$  baitira CO azpisistemaren matrizeak.

*Frogapena*

1) **Sarrera. Lema:** Har dezagun  $[A]$  matrize karratu bat lau azpimatrizetan zatiturik,  $[A_{11}]$ ,  $[A_{12}]$ ,  $[A_{21}]$  eta  $[A_{22}]$ , eta jo dezagun  $[A_{21}] = [0]$  dela eta  $[A_{11}]$  eta  $[A_{22}]$  bi matrize karratu eta alderantzikagarriak direla. Beraz, honela idatz daiteke  $[A]$  matrizearen alderantzizkoa:

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [0] & [A_{22}] \end{bmatrix} \text{ beraz,}$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [0] & [A_{22}] \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} [A_{11}]^{-1} & -[A_{11}]^{-1} \cdot [A_{12}] \cdot [A_{22}]^{-1} \\ [0] & [A_{22}]^{-1} \end{bmatrix}$$

$[B]$  bada  $[A]$  matrizearen alderantzizkoa,  $[A] \cdot [B] = [I]$ ; edo

$$\begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [0] & [A_{22}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] \\ [B_{21}] & [B_{22}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix}$$

Hortik, ekuazio matrizial hauek ateratzen dira:

$$\begin{aligned} [A_{11}] \cdot [B_{11}] + [A_{12}] \cdot [B_{21}] &= [I] \\ [A_{11}] \cdot [B_{12}] + [A_{12}] \cdot [B_{22}] &= [0] \\ [A_{22}] \cdot [B_{21}] &= [0] \\ [A_{22}] \cdot [B_{22}] &= [I] \end{aligned}$$

Horrenbestez,

$$[B_{22}] = [A_{22}]^{-1}; \quad [B_{21}] = [0]; \quad [B_{11}] = [A_{11}]^{-1}$$

$$[B_{12}] = -[A_{11}]^{-1} [A_{12}] [A_{22}]^{-1}$$

2) Oinarritzko teorema frogatzea  $[M(s)] = [C] [s[I] - [A]]^{-1} [B]$

Kalkula dezagun transferentzia-matrizea:

$$[s[I] - [A]]^{-1} = \begin{bmatrix} s[I] - [A_{11}] & -[A_{12}] & -[A_{13}] & -[A_{14}] \\ [0] & s[I] - [A_{22}] & [0] & -[A_{24}] \\ [0] & [0] & s[I] - [A_{33}] & -[A_{34}] \\ [0] & [0] & [0] & s[I] - [A_{44}] \end{bmatrix}^{-1} =$$

eta lemaren ondorioz,

$$[s[I] - [A]]^{-1} = \begin{bmatrix} [s[I] - [A_{11}]]^{-1} & -[A_{12}] & & \\ [0] & s[I] - [A_{22}] & & \\ & [0] & [s[I] - [A_{33}]]^{-1} & -[A_{34}] \\ & & [0] & s[I] - [A_{44}] \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} [s[I] - [A_{11}]]^{-1} & * & * & * \\ [0] & [s[I] - [A_{22}]]^{-1} & * & * \\ [0] & [0] & [s[I] - [A_{33}]]^{-1} & * \\ [0] & [0] & [0] & [s[I] - [A_{44}]]^{-1} \end{bmatrix}$$

\* ikurrak azpimatriz bat adierazten du, baina, aurrerago ikusiko dugun bezala, azpimatriz horren balio zehatzak ez du inolako garrantzirik frogapen honetan.

Orduan,  $[C]$  eta  $[B]$  matrizeekin biderkatuz,

$$[M(s)] = [C][s[I] - [A]]^{-1}[B] =$$

$$\begin{bmatrix} [0] & [C_2] & [0] & [C_4] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [s[I] - [A_{11}]]^{-1} & * & * & * \\ [0] & [s[I] - [A_{22}]]^{-1} & * & * \\ [0] & [0] & [s[I] - [A_{33}]]^{-1} & * \\ [0] & [0] & [0] & [s[I] - [A_{44}]]^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [B_1] \\ [B_2] \\ [0] \\ [0] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} * \\ s[I] - A_{22} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 & [s[I] - A_{22}]^{-1} B_2 \end{bmatrix}$$

Hortaz, oinarritzko teorema frogatua dago; hau da, transferentzia-matrizeak sistemaren zati kontrolagarria eta behagarria adierazten du.

### 13.8.4 Kontrolagarritasuna. Definizioa eta irizpideak

#### 1. definizioa

Sistema bat kontrolagarria da baldin eta soilik baldin  $\underline{x}(t_0)$  hasierako kondizio onargarri bakoitzeko  $\underline{u}(t)$  sarrera bakarra badago, sistemak eboluzionatu dezan hasierako kondizio horretatik  $\underline{x}(t_f)$  bukaerako kondizio batera,  $t_f$  azken unea edozein dela ere. Mnemoteknikoki adierazita:

$$\forall \underline{x}(t_0) \in X, \exists \underline{u}(t) / \underline{x}(t_0) \xrightarrow{\underline{u}(t)} \underline{x}(t_f), \forall t_f \quad (13.146)$$

#### 2. definizioa

Sistema bat kontrolagarria da, baldin eta hasierako kondiziotik, edozeinetatik, jatorrira eraman badaiteke.

#### Kontrolagarritasuna aztertzeko irizpideak

1.- [A] matrizea diagonal baldin bada, sistema kontrolagarria da [B] matrizeak errenkada nulurik ez badu, hau da:

$$\dot{\underline{x}}(t) = [A] \cdot \underline{x}(t) + [B] \cdot \underline{u}(t) \quad \text{eta} \quad [A] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{non} \quad \lambda_1 \dots \lambda_n \quad \text{baitira}$$

sistemaren poloak.

$$\text{eta } [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$x_i$  egoera-aldagaiaren bilakaeraren ekuazioa hau da:

$$\dot{x}_i(t) = \lambda_i \cdot x_i(t) + \sum_{j=1}^m b_{ij} u_j(t)$$

Koefiziente guztiak 0 badira,  $b_{ij} = 0 \quad \forall j$ ,  $x_i(t)$  egoera-aldagai  $u(t)$  sarrerarekiko independentea da eta askatasun osoz eboluzionatzen du,  $\dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t)$ ,  $x_i(t) = e^{\lambda_i(t-t_0)} x_i(t_0)$ . Ez dago aldagaia kontrolatzeko erarik, ezin da bere bilakaera baldintzatu; beraz, aldagai ez-kontrolagarria da. Aipatutako hori beste egoera-aldagaietara aplikatzen zaie.

**2.- Sistema kontrolagarria da baldin eta  $[M_c]$  kontrolagarritasun-matrizearen heina  $n$  bada ( $n$  sistemaren maila da).**

$$\text{Kontrolagarritasun-matrizea: } [M_c] = \begin{bmatrix} [B] & [A][B] & [A]^2[B] & \dots & [A]^{n-1}[B] \end{bmatrix} \quad (13.147)$$

\* Sistema kontrolagarria da, baldin eta heina( $[M_c]$ ) =  $n$

\* heina( $[M_c]$ ) =  $v \leq n$  bada:

$v$ : kontrolagarritasun-indizea; sistemak duen egoera-aldagai kontrolagarrien kopurua adierazten du.

### 13.8.5 Behagarritasuna. Definizioa eta irizpideak

#### 1. definizioa

Sistema bat behagarria da, baldin eta edozein  $t_0$  uneko egoera behatu (edo lortu) ahal bada, sistemaren eredua eta irteeraren neurria ezagututa,  $t_0$  unea barne hartzen duen edozein denbora-tartean.

#### Behagarritasuna aztertzeko irizpideak

**1.-  $[A]$  matrizea diagonal delarik, sistema bat behagarria da baldin eta soilik baldin  $[C]$  irteera-matrizeak zutabe nulurik ez badu.**

2.- Sistema bat behagarria da baldin eta  $[M_o]$  behagarritasun-matrizearen heina  $n$  bada ( $n$  sistemaren maila da).

Behagarritasun-matrizea:

$$[M_o] = \begin{bmatrix} [C]^T & [A]^T [C]^T & ([A]^2)^T [C]^T & \dots ([A]^{n-1})^T [C]^T \end{bmatrix} \quad (13.148)$$

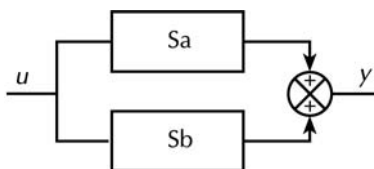
\* Sistema behagarria da, baldin eta heina( $[M_o]$ ) =  $n$

\* heina( $[M_o]$ ) =  $v \leq n$  bada:

$v$ : behagarritasun-indizea; sistemaren egoera-aldagai behagarrien kopurua adierazten du.

### 13.8.6 Sistema konposatuen kontrolagarritasuna eta behagarritasuna

#### A) Egitura paraleloa

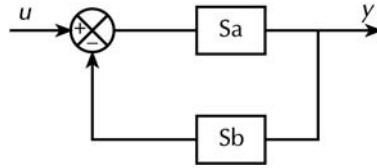


Egitura paraleloan, sistema konposatu bat kontrolagarria izateko, kondizio beharrezkoa eta nahikoa da Sa eta Sb azpisistemak ere kontrolagarriak izatea; gauza bera esan daiteke behagarritasunari dagokionez ere.

#### B) Serie-egitura



S sistema konposatua kontrolagarria izateko, kondizio beharrezkoa baina ez nahikoa da Sa eta Sb azpisistemak ere kontrolagarriak izatea; gauza bera esan daiteke behagarritasunari dagokionez ere. Sa eta Sb kontrolagarriak badira, sistema konposatuaren polo edo egoera-aldagai ez-kontrolagarriak Sb azpisistematik datoz, eta polo ez-behagarriak Sa azpisistematik.

**C) Berrelikadura-egitura**

Lehenik Sa eta ondoren Sb seriean konektatuta dituen egiturari Sc deritzogu. Bestalde, lehenik Sb eta ondoren Sa seriean konektatuta dituen egiturari So deritzogu. Horrenbestez, teorema hauek enuntziatzen dira sistema konposatuarentzat:

**1. teorema**

S sistema konposatua kontrolagarria izateko, kondizio beharrezkoa eta nahikoa da Sc ere kontrolagarria izatea. S sistema konposatua behagarria izateko, kondizio beharrezkoa eta nahikoa da So ere behagarria izatea.

**2. teorema**

S sistema konposatua kontrolagarria izateko, kondizio beharrezkoa baina ez nahikoa da Sa eta Sb azpisistemak ere kontrolagarriak izatea; gauza bera esan daiteke behagarritasunari dagokionez ere.

**3. teorema**

Sa eta Sb kontrolagarriak baldin badira, S-ren aldagai ez-kontrolagarriak Sc-ren aldagai ez-kontrolagarriak dira, eta, beraz, Sb-tik datoz.

Sa eta Sb behagarriak baldin badira, S-ren aldagai ez-behagarriak So-ren aldagai ez-behagarriak dira, eta, beraz, Sa-tik datoz.

**13.9 POLOAK KOKATZEKO KONTROLA****13.9.1 Sarrera**

Kontrol-lege bat aplikatzearen helburua da sistema baten portaera dinamikoa aldatzea, industria-prozesu baten eskaeretara egokitzeko. Egoera-berrelikaduraren

kontrol-legea aurkezten dugu hemen; lege horri esker, kondizio batzuk betetzen dituelarik, sistema baten poloak koka ditzakegu, hau da, polo horiek dauden s planoko lekuetatik beste kokagune batzuetara lekualdatzea. Hainbat teknika erakusten dira egoera- edo irteera-berrelikaduraren irabazi-matrizea kalkulatzeko, oinarriaren eredu matematiko batean oinarrituta.

**Helburua.** Sistemaren poloak Laplaceren planoan finkatutako guneeetan kokatzea, **poloak kokatzea**, eta, hala, sistemarentzat nahi genukeen dinamika lortzea, egoera-berrelikaduraren lege bat aplikatuz:

$$\underline{u} = \underline{u}_c - [\mathbf{K}]^T \underline{x} \quad (13.149)$$

$\underline{u}$ : sistemaren sarrera-bektorea

$\underline{x}$ : egoera-bektorea

$\underline{u}_c$ : sarrera-bektore berria

$[\mathbf{K}]$ : egoera-berrelikaduraren irabazi-matrizea,  $(n, m)$  dimentsiokoa

$m$ : sarrera kopurua

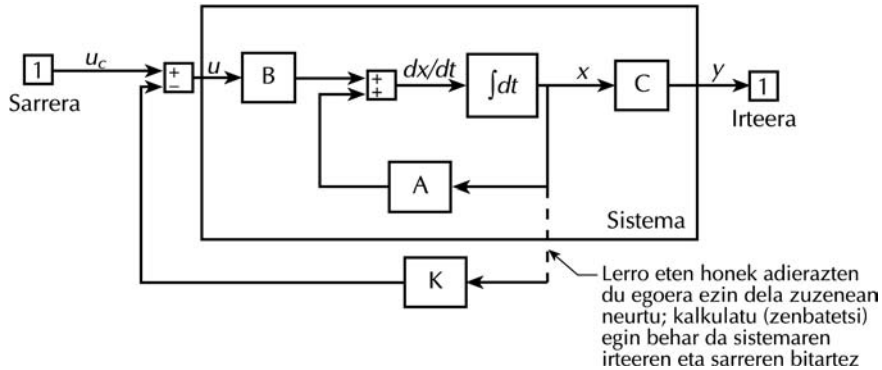
$n$ : egoera-aldagaien (eta abarren) kopurua

**Kontrol-arazoaren enuntziatua.** Poloak kokatzeko arazoa da  $[\mathbf{K}]$  egoera-berrelikaduraren irabazi-matrizea kalkulatzeko, begizta itxiko sistemaren poloak kokagune jakin batzuetan koka daitezen.

**Teknikak.** Besteak beste, honko teknika hauek nabarmen daitezke:

- Zuzenak: poloak kokatzeko teknika; poloak non kokatu nahi diren esplizituki definitu behar da.
- Zeharkakoak: hobetze-kontrola

Sistema kontrolagarria bada, teknika guzti horiei esker, egoera-berrelikaduraren irabazi-matrizea lor daiteke, sistemaren eredu matematiko batean oinarrituta. Aplikazio praktikorako, baina, nahitaezkoa da egoera-aldagaiak izatea; beraz, suposatuko dugu egoera-aldagaiak neurtzeko edo zenbatesteko modukoak direla.



**13.13 irudia.** Egoera-berrelikaduraren kontrolaren eskema funtzionala.

**Arazoak:**

- egoera-berrelikaduraren irabazi-matrisea,  $K$ , zehaztea
- egoeraren zenbateslea zehaztea

Ikusiko dugunez, egoera-berrelikadurak sistemaren poloak lekualdatzen ditu jatorrizko kokagunetik  $s$  plano konplexuko beste edozein kokagunetara. Praktikan, metodo honen abantailak ez dira hainbestearainokoak, eragingailuei lotutako mugak direla eta.

Erantzun beharreko galderak:

1. Zer kondizio bete behar da  $K$  matrizearentzat soluzio bat egoteko?
2. Nola aurkitu daiteke  $K$  matrize hori?

Atal hauetan aztertuko dira galdera bi horien erantzunak.

## 13.9.2 Poloak kokatzeko metodoa. Egoera-berrelikaduraren funtsa

### 13.9.2.1 Oinarriko funtsa

Egoera-berrelikadura batekin sistemaren dinamika alda daiteke.

Defini dezagun sistema bat egoera-eredu honetatik:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = [\underline{A}] \underline{x} + [\underline{B}] \underline{u} \\ \underline{y} = [\underline{C}] \underline{x} + [\underline{D}] \underline{u} \end{cases} \quad \underline{x} \in \mathfrak{R}^n, \quad \underline{u} \in \mathfrak{R}^m, \quad \underline{y} \in \mathfrak{R}^p$$

Egoera-bektorearen osagai guztiak neurgarriak direla suposatuz, aplika dezagun  $\underline{u} = \underline{u}_c - [\underline{K}]^T \underline{x}$  kontrol-legea;  $(m,n)$  dimentsioko matrizea da  $[\underline{K}]$ .

Kontrol-legea sistemaren ekuazioetan ordezkaturata lortzen da sistema berria (sistema kontrolatua):

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = [\underline{A}] \underline{x} + [\underline{B}] [\underline{u}_c - [\underline{K}]^T \underline{x}] \\ \underline{y} = [\underline{C}] \underline{x} + [\underline{D}] [\underline{u}_c - [\underline{K}]^T \underline{x}] \end{cases} \quad (13.150)$$

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = [\underline{A}] - [\underline{B}] [\underline{K}]^T \underline{x} + [\underline{B}] \underline{u}_c \\ \underline{y} = [\underline{C}] - [\underline{D}] [\underline{K}]^T \underline{x} + [\underline{D}] \underline{u}_c \end{cases} \quad (13.151)$$

Sistema berri hori maila bereko sistema da, egoera-aldagai berdinekin, eta sarrera-bektore berria,  $\underline{u}_c$ , lehengo sarreraren dimentsio berekoa da. Beraz, berrelikadura-sistemaren matrizeak dira:

$$\begin{aligned} [\underline{A}_r] &= [\underline{A}] - [\underline{B}] [\underline{K}]^T & [\underline{B}_r] &= [\underline{B}] \\ [\underline{C}_r] &= [\underline{C}] - [\underline{D}] [\underline{K}]^T & [\underline{D}_r] &= [\underline{D}] \end{aligned} \quad (13.152)$$

**Ondorioa:**  $[\underline{K}]$  matrizeak sistemaren dinamika-matrizea aldatzen du, eta, beraz, sistemaren poloak lekuz aldatzen dira. Baina *nola kalkulatuko ditugu  $[\underline{K}]$  poloak s planoko gune jakin batzuetan koka daitezen?*

### 13.9.2.2 Arazoaren planteamendua

Defini dezagun sistema bat egoera-eredu batetik:  $\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = [\underline{A}] \underline{x}(t) + [\underline{B}] \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = [\underline{C}] \underline{x}(t) \end{cases}$ . Portaera

dinamikoak  $[\underline{A}]$  dinamika-matrizearen balio propioak ezartzen ditu. Balio propio horiek dira  $[\underline{A}]$  matrizearen ekuazio karakteristikoaren erroak:

$$\{s / \delta(s) = \det(s[\underline{I}] - [\underline{A}]) = 0\} \quad (13.153)$$

$$(\delta(s) = s^n + \delta_1 s^{n-1} + \delta_2 s^{n-2} + \dots + \delta_{n-1} s + \delta_n) \quad (13.154)$$

**Arazoa.** Kontrol-legeak  $d(s)$  ekuazio karakteristiko hau lortu behar du begizta itxian:

$$d(s) = s^n + d_1 s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + \dots + d_{n-1} s + d_n \quad (13.155)$$

**Soluzioa.** Froga daitekeenez,  $\underline{u} = \underline{u}_c - [\mathbf{K}]^T \underline{x}$  egoera-berrelikaduraren bidez lortuko dugu hori. Sarrera bakarreko sistema batentzat, kontrol-lege hori egoera-aldagaien konbinazio lineal bat da:

$$u = u_c - k_1 x_1 - k_2 x_2 - \dots - k_n x_n \quad (13.156)$$

Arazoa, orain,  $[\mathbf{K}]$  matrizea kalkulatzeko da, begizta itxiko sistemaren portaera egoki bat lortzeko horren bidez. Orduan, hiru galdera sortzen dira:

- 1- Begizta itxiko sistemaren ekuazio karakteristikoa edonola finka daiteke?
- 2- Zer kondizio bete behar da  $[\mathbf{K}]$  matrizearentzat soluzio bat egon dadin?
- 3- Nola kalkula daiteke  $[\mathbf{K}]$  matrizea?

**OHARRA:** Sarrera bakarra badugu, egoera-bektorearen  $[\mathbf{K}]$  berrelikadura-matrizea zutabe motako bektore bihurtzen da.

$$\underline{u} \in \mathbb{R} \Rightarrow [\mathbf{K}] = \underline{\mathbf{K}} \quad (13.157)$$

### 13.9 $\underline{\mathbf{K}}$ MATRIZEAREN EXISTENTZIA. POLOAK BEGIZTA ITXIAN KOKATZEA

Egoera berrelikatuz gero, sistemaren poloak lekuz alda daitezke  $\underline{\mathbf{K}}$  egoera-berrelikaduraren irabazi-matrizearen bidez.

Hori egiazta daiteke begizta irekiko eta begizta itxiko polinomio karakteristikoak,  $\delta(s)$  eta  $d(s)$  hurrenez hurren,  $\underline{\mathbf{K}}$  matrizearen bidez erlazionatuta daudela ikusita.

Har ditzagun kontuan adierazpide hauek  $n$  mailako sistema batentzat:

$$\delta(s) = \det(s[\mathbf{I}] - [\mathbf{A}]) \quad \text{kontrolatu behar den sistemaren polinomio karakteristikoa}$$

$d(s) = \det[s[I] - [A_r]]$  sistema kontrolatuaren polinomio karakteristikoak

$$\begin{aligned}\delta(s) &= s^n + \delta_1 s^{n-1} + \delta_2 s^{n-2} + \dots + \delta_{n-1} s + \delta_n, \quad \delta_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \\ d(s) &= s^n + d_1 s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + \dots + d_{n-1} s + d_n, \quad d_i \in \mathbb{R} \quad \forall i\end{aligned}$$

Froga daiteke existitzen dela  $\underline{K}$  matrize bat non:

$$\begin{aligned}d(s) &= \delta(s) + q^T(s) \underline{K} = \\ &= \delta(s) + \underline{K}^T q(s) \quad (13.157) \\ \text{eta} \quad \underline{q}(s) &= \text{Adj}^T[s[I] - [A]] \underline{b}\end{aligned}$$

eta, beraz, egoera-berrelikadura baten bidez  $\delta(s)$ tik eta  $d(s)$ ra pasa daitekeela.

**OHARRA:** Sarrera bakarreko sistema dugunean,  $[B]$  sarrera-matrizeari  $\underline{b}$  deritzogu.

*Frogapena:*

Har dezagun sistema hau: 
$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = [A] \underline{x} + \underline{b} u \\ \underline{y} = [C] \underline{x} \end{cases}$$

Laplaceren transformatua aplikatuz:

$$\begin{aligned}s \underline{X}(s) &= [A] \underline{X}(s) + \underline{b} U(s) \\ [s[I] - [A]] \underline{X}(s) &= \underline{b} U(s) \\ \frac{\underline{X}(s)}{U(s)} &= [s[I] - [A]]^{-1} \underline{b}\end{aligned}$$

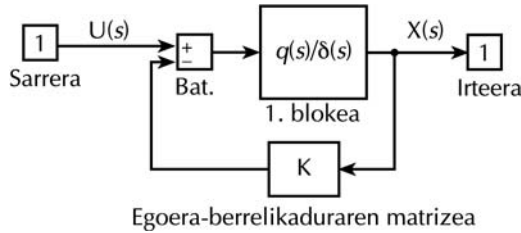
eta nola

$$\begin{aligned}[s[I] - [A]]^{-1} &= \frac{\text{Adj}^T[s[I] - [A]]}{\det[s[I] - [A]]} \\ \frac{\underline{X}(s)}{U(s)} &= \frac{\text{Adj}^T[s[I] - [A]]}{\det[s[I] - [A]]} \underline{b} = \frac{\text{Adj}^T[s[I] - [A]]}{\delta(s)} \underline{b}\end{aligned}$$

eta  $\text{Adj}^T[s[I] - [A]] \underline{b} = \underline{q}^T(s)$  deituz gero

$$\frac{\underline{X}(s)}{U(s)} = \frac{\underline{q}^T(s)}{\delta(s)} \Rightarrow \underline{X}(s) = \frac{\underline{q}^T(s)}{\delta(s)} U(s)$$

( $\underline{X}(s)$  bektorea denez,  $\underline{q}(s)$  ere bektorea izango da).



**13.14 irudia.** Sistema kontrolatuaren bloke-diagrama.

Eta, egoera-berrelikaduraren eraginez, sistema kontrolatuaren polinomio karakteristikoa hau da:

$$1 + \frac{\underline{q}^T(s)}{\delta(s)} \underline{K} \quad \text{edo} \quad 1 + \underline{K}^T \frac{\underline{q}(s)}{\delta(s)} \rightarrow \delta(s) + \underline{K}^T \underline{q}(s) = d(s) \quad (13.158)$$

**Ondorioa:**  $\delta(s)$  eta  $d(s)$  polinomio karakteristikoak  $\underline{K}$  matrizearen bidez erlazionatuta daude; erlazio hori  $d(s) = \delta(s) + \underline{K}^T \underline{q}(s)$  da, non  $\underline{q}^T(s) = \text{Adj}^T[s[I] - [A]] \underline{b}$  baita. Beraz, kontrol-arazoa  $\underline{K}$  matrizea aurkitzea da, sistemaren begizta itxiko  $d(s)$  polinomio karakteristikoa guk nahi duguna izan dadin.

### 13.9.4 Faddeev-Leverrier metodo orokorra (SISO sistema)

#### 13.9.4.1 Faddeev-Leverrier metodoa $\underline{K}$ zehazteko

Helburua da  $\underline{K}$  matrizea aurkitzea, non:

$$\begin{aligned} d(s) &= \delta(s) + \underline{q}^T(s) \underline{K} = \delta(s) + \underline{K}^T \underline{q}(s) \\ \text{non} \quad \underline{q}(s) &= \text{Adj}^T[s[I] - [A]] \underline{b} \end{aligned} \quad (13.159)$$

Aurrez ezagutu behar ditugun datuak:  $\delta(s)$ ,  $d(s)$ ,  $\underline{b}$

Sistemaren matrize dinamikoa,  $[A]$ , edo  $\delta(s)$  polinomio karakteristikoa

Sistemarentzat nahi genukeen  $d(s)$  polinomio karakteristikoa

Sistemaren sarrera-matrizea,  $\underline{b}$

K matrizea bi urratsetan kalkulatzen da:

- 1-  $d(s)$  polinomio karakteristikoaren koefizienteak zehaztu,  $\delta(s)$  eta  $\text{Adj}[s\mathbf{1} - \mathbf{A}]$  renak, hain zuzen.
- 2- Egoera-berrelikaduraren matrizea,  $\mathbf{K}$ , zehaztu

**1. urratsa:**  $\delta(s)$  polinomioaren eta  $\text{Adj}[s\mathbf{1} - \mathbf{A}]$  matrizearen koefizienteak aurkitu

$\text{Adj}[s\mathbf{1} - \mathbf{A}]$  ren koefizienteak kalkulatzeko, Leverrieren algoritmoa proposatzen dugu; eta polinomio karakteristikoa  $[s\mathbf{1} - \mathbf{A}]$  -z zati daitekeenez, bai ezkerretik bai eskuinetik:

$$[s\mathbf{1} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{\text{Adj}[s\mathbf{1} - \mathbf{A}]}{\det[s\mathbf{1} - \mathbf{A}]} \quad (13.160)$$

$$\delta(s) \cdot \mathbf{1} = [s\mathbf{1} - \mathbf{A}] \cdot \text{Adj}[s\mathbf{1} - \mathbf{A}]$$

$\text{maila}(\delta(s)) = n$  denez eta sistemak kausala izan behar duenez,  $\text{maila}(\text{Adj}[s\mathbf{1} - \mathbf{A}]) = n-1$  izango da. Ondorioz, hurrengo adierazpide hau planteatu dezakegu:

$$\text{Adj}[s\mathbf{1} - \mathbf{A}] = s^{n-1}[\mathbf{1}] + [\mathbf{R}_1]s^{n-2} + [\mathbf{R}_2]s^{n-3} + \dots + [\mathbf{R}_{n-1}] \quad (13.161)$$

Ondoren,  $\mathbf{R}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  matrizeak berdintza hau kontuan hartuz kalkulatu dira:

$$\delta(s)\mathbf{1} = [s\mathbf{1} - \mathbf{A}] \cdot [s^{n-1}[\mathbf{1}] + [\mathbf{R}_1]s^{n-2} + \dots + [\mathbf{R}_{n-1}]]$$

$$\begin{aligned} s^n[\mathbf{1}] + s^{n-1}\delta_1[\mathbf{1}] + \dots + \delta_n[\mathbf{1}] = \\ s^n[\mathbf{1}] + ([\mathbf{R}_1] - [\mathbf{A}])s^{n-1} + ([\mathbf{R}_2] - [\mathbf{A}][\mathbf{R}_1])s^{n-2} + \dots + [-[\mathbf{A}][\mathbf{R}_{n-1}]] \end{aligned}$$

Eta  $s$ -ren gradu bereko gaiak berdinduz:

$$\delta_1[\mathbf{1}] = [\mathbf{R}_1] - [\mathbf{A}]$$

$$\delta_2[\mathbf{1}] = [\mathbf{R}_2] - [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{R}_1]$$

$$\delta_3[\mathbf{1}] = [\mathbf{R}_3] - [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{R}_2]$$

...

$$\langle a \rangle \quad \delta_k [1] = [R_k] - [A] \cdot [R_{k-1}]$$

$$\text{Gai orokorra: } [R_k] = \delta_k [1] + [A][R_{k-1}] \quad (13.162)$$

...

$$\delta_N [1] = -[A] \cdot [R_{N-1}]$$

**OHARRA:**

$$k = 1 \text{ denean: } \delta_1 [1] = [R_1] - [A] \cdot [R_0]$$

Eta lehenengo berdintzatik ondorioztatuko dugu

$$[R_0] = [1] \quad (13.163)$$

$k = N$  denean:

$$\delta_N [1] = [R_N] - [A] \cdot [R_{N-1}]$$

$$\text{Beraz, } [R_N] = [0] \quad (13.164)$$

Aurreko ekuazioetatik:

$$[R_1] = \delta_1 [1] + [A]$$

$$[R_2] = \delta_2 [1] + [A]R_1 = \delta_2 [1] + [A][\delta_1 [1] + [A]] = \delta_2 [1] + \delta_1 [A] [1] + [A]^2$$

...

$$[R_k] = \delta_k [1] + \delta_{k-1} [A] + \dots + [A]^k$$

...

$$[R_N] = \delta_N [1] + \delta_{N-1} [A] + \dots + [A]^N = [0] \quad (13.165)$$

$$(\det [s[1] - [A]])_{s=[A]} = 0 \text{ baita)}$$

$[R_N] = [0]$  da, Caley-Hamilton teorematik abiatuta matrize batek bere ekuazio karakteristiko batetuz duelako,  $\det [s[1] - [A]]_{s=[A]} = 0$ .

$$(13.165)\text{tik:} \quad [R_k] - \delta_k [1] = \delta_{k-1} [A] + \dots + \delta_1 [A]^{k-1} + [A]^k$$

eta (13.165) formulatik eta  $k-1$  balioa hartuz,

$$[A][R_{k-1}] = \delta_{k-1} [A] + \dots + \delta_1 [A]^{k-1} + [A]^k \quad (13.166)$$

Har dezagun  $s_k = \text{traza}[[A]^k]$  (traza: matrice baten diagonal nagusiko gaien batura).

$$\text{traza}[[A] [R_{k-1}]] = \text{traza}[\delta_{k-1}[A]] + \dots + \text{traza}[\delta_1[A]^{k-1}] + \text{traza}[[A]^k] \text{ denez,}$$

$$\text{traza}[[A] \cdot [R_{k-1}]] = \delta_{k-1} \text{traza}[A] + \dots + \delta_1 \text{traza}[[A]^{k-1}] + \text{traza}[[A]^k]$$

hau da,

$$\text{traza}[[A] [R_{k-1}]] = s_k + \delta_1 s_{k-1} + \dots + \delta_{k-1} s_1 \quad (13.167)$$

eta Newtonen formularen arabera:  $s_k + \delta_1 s_{k-1} + \dots + \delta_{k-1} s_1 = -k \delta_k$  beraz,

$$\delta_k = -\frac{1}{k} \text{traza}[[A][R_{k-1}]], \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (13.168)$$

**Ondorioa:**  $[A]$  dinamika-matrizea ezagututa, algoritmo interaktibo hauekin kalkulatzeko dira ekuazio karakteristikoaren  $\delta_k$  koefizienteak eta  $\text{Adj}[s[1]-[A]]$  matrize adjuntua definitzen duten  $[R_k]$  matrizeak:

$$[R_0] = [1]$$

$k = 1, \dots, n$  denean:

$$\delta_k = -\frac{1}{k} \text{traza}[[A][R_{k-1}]]$$

$$[R_k] = \delta_k [1] + [A][R_{k-1}]$$

## 2. urratsa: $\underline{K}$ matrizea kalkulatzeko

Gogora dezagun  $\underline{K}$  matrizeak  $\delta(s)$  eta  $d(s)$  polinomioak erlazionatzeko dituela,  
 $d(s) = \delta(s) + \underline{q}^T(s) \cdot \underline{K}$  non  $\underline{q}(s) = \text{Adj}[s[1] - [A]] \cdot \underline{b}$  eta  
 $\underline{q}(s) = [s^{n-1}[1] + [R_1]s^{n-2} + \dots + [R_{n-1}]] \cdot \underline{b}$

Beraz,

$$d(s) - \delta(s) = \underline{q}^T(s) \cdot \underline{K} \quad (13.169)$$

$$d(s) - \delta(s) = \underline{b}^T \cdot [s^{n-1}[1] + [R_1]s^{n-2} + \dots + [R_{n-1}]]^T \cdot \underline{K} \quad (13.170)$$

$$(d_1 - \delta_1)s^{n-1} + (d_2 - \delta_2)s^{n-2} + \dots + (d_n - \delta_n) = \underline{b}^T \cdot [s^{n-1}[1] + [R_1]s^{n-2} + \dots + [R_{n-1}]]^T \cdot \underline{K} \quad (13.171)$$

s-ren potentzia bereko gaiak berdinduz:

$$\begin{cases} d_1 - \delta_1 = \underline{\mathbf{b}}^T [\mathbf{1}] \cdot \underline{\mathbf{K}} \\ d_2 - \delta_2 = \underline{\mathbf{b}}^T [\mathbf{R}_1]^T \cdot \underline{\mathbf{K}} \\ \dots \\ d_n - \delta_n = \underline{\mathbf{b}}^T [\mathbf{R}_{n-1}]^T \cdot \underline{\mathbf{K}} \end{cases}$$

$\underline{\mathbf{K}}$  matrizearen  $n$  koefizienteak,  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , aurreko ekuazio-sistematik aterako dira. Ekuazio-sistema hori era matrizialean idatziz gero:

$$[\underline{\mathbf{d}} - \underline{\boldsymbol{\delta}}] = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}^T [\mathbf{1}] \\ \underline{\mathbf{b}}^T [\mathbf{R}_1]^T \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{b}}^T [\mathbf{R}_{n-1}]^T \end{bmatrix} \cdot \underline{\mathbf{K}}$$

hau da:

$$= [\mathbf{W}]^{-1} [\underline{\mathbf{d}} - \underline{\boldsymbol{\delta}}] \quad (13.172)$$

$$\text{non } [\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}^T [\mathbf{1}] \\ \underline{\mathbf{b}}^T [\mathbf{R}_1]^T \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{b}}^T [\mathbf{R}_{n-1}]^T \end{bmatrix} \text{ baita } (n, n) \text{ dimentsioko matrizea.}$$

Baina, beti al dago soluzio bat  $\underline{\mathbf{K}}$  matrizearentzat?

#### 13.9.4.2 $\underline{\mathbf{K}}$ matrizearen existentzia-kondizioak

$\underline{\mathbf{K}}$  existitzen da, baldin eta  $[\mathbf{W}]$  alderantzikagarria bada, hau da,  $[\mathbf{W}]$ ren heina  $n$  bada ( $[\mathbf{W}]$ ren determinantea ez da 0).

Baina  $[\mathbf{W}] = [\mathbf{N}] \cdot [\mathbf{M}_c]^T$  denez,  $[\mathbf{M}_c]$  izanik kontrolagarritasun-matrizea,

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_1 & 1 & \dots & 0 \\ \delta_2 & \delta_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n-1} & \delta_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (13.173)$$

$$[M_C] = \begin{bmatrix} \underline{b}^T \\ \underline{b}^T [A]^T \\ \dots \\ \underline{b}^T ([A]^{n-1})^T \end{bmatrix} \quad (13.174)$$

Bi matrize horien biderkadura denez  $[W]$ , biderkaduraren heina da biderkatzen diren bi faktoreen heinetatik txikiena; beraz,  $[N]$  eta  $[M_C]$  matrizeen heinak  $n$  izan behar du, hau da,  $[M_C]$  matrizeak alderantzikagarria izan behar du eta, horrenbestez, sistemak kontrolagarria izan behar du. Osterantzean,  $\underline{K}$  ez da existituko.

*Frogapena:*

Hain zuzen ere,  $[R_k] = \delta_k[1] + [A][R_{k-1}]$  denez,  $[R_i]$  matrizeak  $\underline{K} = [W]^{-1}[\underline{d} - \underline{\delta}]$  adierazpidean ordezkatzuz:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{b}^T [1] \\ \underline{b}^T [A] + \delta_1 [1]^T \\ \vdots \\ \underline{b}^T [A]^{n-1} + [A]^{n-2} \delta_1 + \dots + \delta_{n-1} [1]^T \end{bmatrix}^{-1} \cdot [\underline{d} - \underline{\delta}]$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{b}^T [1] \\ \underline{b}^T [A]^T + \underline{b}^T \delta_1 \\ \vdots \\ \underline{b}^T [A]^{n-1}]^T + \underline{b}^T [\delta_1 [A]^{n-2}]^T + \dots + \underline{b}^T [\delta_{n-1} [1]]^T \end{bmatrix}^{-1} \cdot [\underline{d} - \underline{\delta}]$$

eta matrizeen biderkadura gisa idatziz:

$$\underline{K} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_1 & 1 & \dots & 0 \\ \delta_2 & \delta_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n-1} & \delta_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}^T \\ \underline{\mathbf{b}}^T [\mathbf{A}]^T \\ \dots \\ \dots \\ \underline{\mathbf{b}}^T ([\mathbf{A}]^{n-1})^T \end{bmatrix} \right\}^{-1} \cdot [\underline{d} - \underline{\delta}]$$

$$\text{Eta } [\mathbf{W}] = [\mathbf{N}] \cdot [\mathbf{M}_c]^T \text{ denez, } [\mathbf{W}]^{-1} = [\mathbf{M}_c]^T{}^{-1} \cdot [\mathbf{N}]^{-1}$$

$[\mathbf{N}]$  matrizea karratua da eta bere determinantea ez da 0. Bestalde, sistema sarrera bakarrekoa bada,  $[\mathbf{M}_c]$  matrizea karratua izango da. Horrenbestez,  $[\mathbf{W}]$  alderanzgarria izango da  $[\mathbf{M}_c]$  matrizearen determinantea 0 ez bada, hau da, sistema kontrolagarria bada.

### 13.9.4.3 Faddeev-Leverrier algoritmoaren aplikazioa. Adibidea

Har dezagun hirugarren mailako sistema bat:

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{b}} \quad \mathbf{u}$$

$$\text{non} \quad [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} \quad \text{eta} \quad \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -31 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Zehaztu egoera-berrelikaduraren kontroladore bat, begizta itxiko sistemaren dinamika  $d(s) = s^3 + 19s^2 + 115s + 250$  ( $d(s) = s^3 + d_1s^2 + d_2s + d_3$ ) polinomio karakteristikoari dagokiona izan dadin.

### Ebazpena

Lehenik eta behin, egiaztatu beharko genuke sistema kontrolagarria dela (kasu honetan hala da). Egoera-berrelikaduraren matrizea urrats bitan kalkulatu dugu:

**1.- Sistemaren  $\delta(s)$  polinomio karakteristikoaren koefizienteak eta  $[R_k]$  matrizeak kalkulatu**

$k = 1$  denean:

$$\delta_1 = -\frac{1}{1} \text{traza}[[A][R_0]] = 50$$

$$[R_1] = \delta_1[1] + [A][R_0] = 50 \cdot [1] + [A][R_0] =$$

$$\begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 2 & -5 \\ -1 & 50 & 31 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$k = 2$  denean:

$$\delta_2 = -\frac{1}{2} \text{traza} \begin{bmatrix} -2 & 100 & 62 \\ -50 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$[R_2] = \delta_2[1] + [A][R_1] = 2 \cdot [1] + [A][R_1] =$$

$k = 3$  denean:

$$\delta_3 = -\frac{1}{3} \text{traza} \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} = 100$$

$$[R_3] = \delta_3[1] + [A][R_2] = 100 \times [1] + \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{egiaztatzea})$$

Beraz, sistemaren polinomio karakteristikoa da:

$$\delta(s) = s^3 + \delta_1 s^2 + \delta_2 s + \delta_3 = s^3 + 50s^2 + 2s + 100$$

**2.- K egoera-berrelikaduraren matrizea kalkulatzeko**

Sistema kontrolatuarentzat nahi genukeen polinomio karakteristikoa  $d(s) = s^3 + 50s^2 + 25s + 100$  ( $d(s) = s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3$ ) denez:

$$[K] = [W]^{-1}[\underline{d} - \delta]$$

non

$$[W] = \begin{bmatrix} \underline{b}^T [1] \\ \underline{b}^T [R_1] \\ \vdots \\ \underline{b}^T [R_{n-1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -31 & 50 \\ -312 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 100 \end{bmatrix}$$

$$[W]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{312} & 0 \\ -\frac{1}{156} & 0 & \frac{1}{312} \\ \frac{5}{312} & 0 & \frac{31}{15.600} \end{bmatrix} = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 32 & 0 \\ -64 & 0 & 32 \\ 160 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

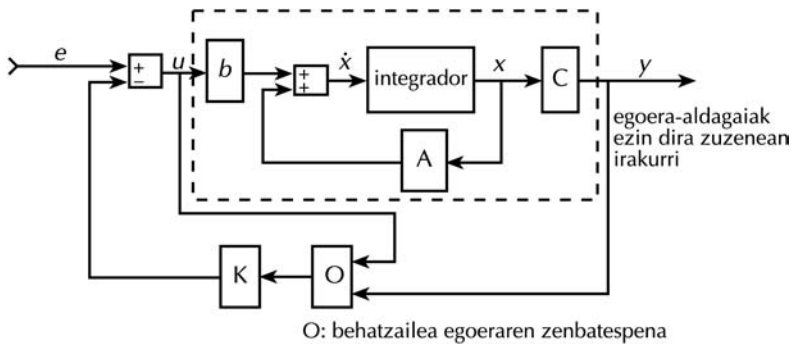
eta

$$[\underline{d} - \underline{\delta}] = \begin{bmatrix} d_1 - \delta_1 \\ d_2 - \delta_2 \\ d_3 - \delta_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 - 50 \\ 115 - 2 \\ 250 - 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31 \\ 113 \\ 150 \end{bmatrix}$$

eta  $\underline{K}$  matrizea da:

$$\underline{K} = [W]^{-1} \begin{bmatrix} -31 \\ 113 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-113}{312} \\ \frac{53}{78} \\ \frac{-31}{156} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,36 \\ 0,68 \\ -0,2 \end{bmatrix}$$

Implementazio erreala



**13.15 irudia.** Egoera-berrelikaduraren kontroladorearen implementazioa.

**OHARRA:** Egoera-berrelikaduraren matrizeak poloen kokatze-arazoa konpontzen du, sistemaren dinamika soilik aldatzen du; ez du zehaztasuna tratatzen.

### 13.9.5 K matrizea kalkulatzeko metodo bakuna

#### 13.9.5.1 Metodoaren aplikazioa sistema konpainia eran dagoenean

Egoera-espazioan, infinitu  $\langle [A], [B], [C] \rangle$  matrize hirukote baliokideak ditugu, hau da, matrize hirukote bik sarrera/irteera erlazio bera adierazten dute. Poloak kokatzeko metodoan, sistemaren polinomio karakteristikoak garrantzia hartzen du; beraz, konpainia erako eredua oso egokia da, polinomio karakteristikoaren koefizienteak  $[A]$  matrize-dinamikaren azkeneko errenkadan agertzen baitira. Hala,

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \underline{b} = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \quad (13.175)$$

Zero ez den balioa

Polinomio karakteristikoaren koefizienteak  
 $\delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$

Halaber, berrelikadura-sistemak nahi genukeen  $d(s)$  ekuazio karakteristikoa izango du, baldin eta idatz badaiteke  $[A_{bi}] = [A] - [B][K]^T$  era berean (konpainia eran). Hala,  $[A]$  eta  $[A_{bi}]$  dimentsio bereko matrizeak dira, eta azkeneko errenkadetan soilik bereizten dira. Egoera-berrelikaduraren legea aplikatuz, sistemaren matrize-dinamika berria  $[A_{bi}] = [A] - [B][K]^T$  da;  $[A]$ -ren itxura berekoa izango da, baldin eta  $[B][K]^T$  matrizea (zutabe bektorearen eta errenkada bektorearen biderkadura) lehengo  $n-1$  errenkadak nuluak dituen matrizea bada. Horretarako,  $[B]$  bektorearen lehengo  $n-1$  elementuek nuluak izan behar dute.

Beraz, helburua da  $[K]$  matrizea zehaztea,  $d(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0$  polinomio karakteristiko berri bat lortzeko, hau da, sistema kontrolatuaren eredua honako hau izan dadin:

$$[A_r] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \dots & -d_{n-1} \end{bmatrix} \quad [B_r] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ * \end{bmatrix} \quad (13.176)$$

Orain,  $[K]$  matrizea atera daiteke. SISO sisteman (sarrera bakarrekoa ( $m = 1$ ) eta irteera bakarrekoa ( $p = 1$ )),  $K$  egoera-berrelikaduraren matrizearen dimentsioa ( $n \times 1$ ) da.

$$[K] = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ k_{n-1} \end{bmatrix} \quad (13.177)$$

$[A_r] = [A] - [B][K]^T$  ekuazio matritziala berridatziz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \dots & -d_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ b \end{bmatrix} [k_0 \ k_1 \ \dots \ k_{n-1}]$$

$[A_r] \qquad \qquad [A] \qquad \qquad [B] \qquad [K]^T \quad (13.178)$

Eta azkeneko errenkadako koefizienteak elementuz elementu berdinduz:

$$(d_i - a_i) = k_i b \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1$$

Beraz,  $K$  matrizearen koefizienteak hauek dira:

$$k_i = \frac{1}{b} (d_i - a_i) \quad (13.179)$$

eta  $b = 1$  bada,  $k_i = a_i - d_i, \forall i$

K matrizea kalkulatzeko prozedura:

1) Sistemaren ekuazio karakteristikoa zehaztea.

$$\delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (13.180)$$

2) Sistema kontrolatuarentzat nahi genukeen ekuazio karakteristikoa planteatzea:

$$d(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0 \quad (13.181)$$

3) K egoera-berrelikaduraren matrizearen koefizienteak kalkulatzeko:

$$k_i = \frac{1}{b} (d_i - a_i) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (13.182)$$

### 13.9.5.2 Metodoaren aplikazioa kasu orokorrean

Har dezagun kontuan sistema bat eta jo dezagun sistema horren portaera dinamikoa  $\dot{\underline{x}} = [A]\underline{x} + [B]u$  ekuazioaren bitartez ereduza daitekeela. Halaber, har dezagun  $[M]$  transformazio-matrizea.  $\underline{x}$  eta  $\underline{x}_c$  egoera-bektoreak erlazionatzen dituen ( $\underline{x} = [M]\underline{x}_c$ ) adierazpidearen eta antzekotasun-transformazio baten bidez,  $[M]$  matrize horrek konpainia erako eredu bat lortzen du,  $\dot{\underline{x}}_c = [A_c]\underline{x}_c + [B_c]u$ .

Har dezagun, orobat, K lehengo sistemaren portaera dinamikoa moldatzeko egoera-berrelikaduraren matrizea eta  $\underline{K}_c$  konpainia erako sistemari aplikatutako egoera-berrelikaduraren matrizea, portaera bera lortzeko.

Hala, lehengo kasuan:  $\underline{u} = \underline{e} - [K]^T \underline{x} \quad (13.183)$

Eta bigarrenetan:  $\underline{u} = \underline{e} - \underline{K}_c^T \underline{x}_c$

$$\underline{x} = [M]\underline{x}_c \text{ denez, } \underline{u} = \underline{e} - \underline{K}_c^T [M]^{-1} \underline{x} \quad (13.184)$$

$$\text{Beraz, } \underline{K}^T = \underline{K}_c^T [M]^{-1} \text{ edo } \underline{K} = [M^{-1}]^T \underline{K}_c \quad (13.185)$$

**Ondorioa:** M antzekotasun-transformazioaren matrizea ezagutuz  $\underline{x}$  egoera-bektorea eta  $\underline{x}_c$  konpainia erako sistema baten egoera-bektorea erlazionatzen dituen, posible da metodo bakunarekin  $[K_c]$  egoera-berrelikaduraren matrizea kalkulatzeko eta  $\underline{K} = [M^{-1}]^T \underline{K}_c$  matrizea sisteman aplikatzea.

**[M] matrizea zehazteko prozedura.** Antzekotasun-transformazioa aplikatuz,  $\langle [A], [B] \rangle$  eta  $\langle [A_c], [B_c] \rangle$  matrizeen arteko erlazioak hauek dira:

$$\begin{aligned} [A_c] &= [M]^{-1} [A] [M] \\ [B_c] &= [M]^{-1} [B] \end{aligned} \quad (13.186)$$

$\langle [A], [B] \rangle$  eta  $\langle [A_c], [B_c] \rangle$  matrizeak ezagutuz gero, [M] matrizea kalkula daiteke; baina, hori erraztearren, sistema hau ebatziko da:

$$\begin{aligned} [M][A_c] &= [A][M] \quad (a) \\ [M][B_c] &= [B] \quad (b) \end{aligned} \quad (13.187)$$

(13.187) eta (13.186) baliokideak dira baldin eta soilik baldin [M] alderantzikagarria bada.

Jo dezagun  $\underline{m}_1, \underline{m}_2, \dots, \underline{m}_n$  direla aurkitu behar dugun [M] matrizearen zutabeak; (13.187.b) ekuazioa honela idatziko litzateke:

$$[\underline{m}_1, \underline{m}_2, \dots, \underline{m}_n] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = [B] \Rightarrow \underline{m}_n = [B] \quad (13.188)$$

(13.187.a) ekuazioa, berriz, honela:

$$[\underline{m}_1, \underline{m}_2, \dots, \underline{m}_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} = [A] \cdot [\underline{m}_1, \underline{m}_2, \dots, \underline{m}_n] \quad (13.189)$$

①
②

Helburua da [M] matrizearen  $n^2$  elementuak kalkulatzeko; baina,  $n^2$  ezezagunen ekuazio-sistema bat ebatzi beharrean,  $n$  ekuazio bektorial ebatziko dira. Horretarako, matrize-adierazpen hori  $n$  ekuazio bektorialetan banatzen da, eta ekuazioak banan-banan ebazten dira azken zutabetik hasita.

Har dezagun  $\boxed{2}$  zatia:

$$[A] \cdot [\underline{m}_1, \underline{m}_2, \dots, \underline{m}_n] = [[A] \cdot \underline{m}_1, [A] \cdot \underline{m}_2, \dots, [A] \cdot \underline{m}_n]$$

Bestalde,  $\boxed{1}$  zatia:

$$[\underline{m}_1, \underline{m}_2, \dots, \underline{m}_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} = \left[ \sum_{i=1}^n a_{i1} \underline{m}_i, \sum_{i=1}^n a_{i2} \underline{m}_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in} \underline{m}_i \right] =$$

$$= [-a_0 \underline{m}_n, \underline{m}_1 - a_1 \underline{m}_n, \underline{m}_2 - a_2 \underline{m}_n, \dots, \underline{m}_{n-1} - a_{n-1} \underline{m}_n] \quad (13.190)$$

$\boxed{1}$  eta  $\boxed{2}$  zatien zutabeak berdinuz,  $n-1$  bektore-ekuazio dituen ekuazio-sistema hau lortuko dugu:

$$\begin{aligned} \underline{m}_{n-1} - a_{n-1} \underline{m}_n &= [A] \cdot \underline{m}_n \\ \underline{m}_{n-2} - a_{n-2} \underline{m}_n &= [A] \cdot \underline{m}_{n-1} \\ &\vdots \\ \underline{m}_1 - a_1 \underline{m}_n &= [A] \cdot \underline{m}_2 \end{aligned}$$

eta  $\underline{m}_n = [B]$  denez:

$$\begin{aligned} \underline{m}_{n-1} &= ([A] + a_{n-1} [1]) \cdot [B] \\ \underline{m}_{n-2} &= ([A]^2 + a_{n-1} [A] + a_{n-2} [1]) \cdot [B] \\ &\vdots \\ \underline{m}_1 &= ([A]^{n-1} + \dots + a_2 [A] + a_1 [1]) \cdot [B] \end{aligned} \quad (13.191)$$

**[M] matrizearen alderantzikagarritasuna.** Enuntziatzen dugu, frogapenik gabe, (13.187) ekuazio-sistemarekin bateragarria izan dadin kondizio hau bete behar duela:

$$\text{heina} \left[ [A]^{n-1} [B] + \dots + a_1 [B], \dots, [A] [B] + a_{n-1} [B], [B] \right] = n$$

eta hori betetzeko, kondizio beharrezkoa eta nahikoa da:

$$\text{heina} \left[ [A]^{n-1} [B], \dots, [A][B], [B] \right] = n \quad (13.192)$$

Hau da,  $([A],[B])$  sistemak kontrolagarria izan behar du.

### 13.9.6 K matrizea kalkulatzeko Ackermann-en formula erabiliz

Jo dezagun  $\dot{x} = [A]x + [B]u$  sistema kontrolagarria dela. Egoera-berrelikaduraren kontrol-legea aplikatuz gero, sistema kontrolatuaren dinamika-matrizea hau da:

$$[A_r] = [A] - [B]\underline{K}^T \quad (13.193)$$

Eta K egoera-berrelikaduraren matrizea zehaztu nahi dugu, sistema kontrolatuaren polinomio karakteristikoa  $-\det[sI - [A] + [B]\underline{K}^T]$  nahi genukeen  $d(s)$  polinomioa izan dadin. Hona K matrize hori:

$$\underline{K}^T = [0 \dots 1][M_c]^{-1} \cdot d([A]) \quad (13.194)$$

non  $[M_c]$  kontrolagarritasun-matrizea baita:

$$[M_c] = \begin{bmatrix} [B], & [A][B], & \dots & [A]^{n-1}[B] \end{bmatrix} \quad (13.195)$$

*Frogapena:*

Har dezagun nahi genukeen polinomio karakteristikoa,

$$d(s) = s^n + d_1 s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + \dots + d_{n-1} s + d_n$$

Alde batetik,

$$d([A]) = [A]^n + d_1 [A]^{n-1} + d_2 [A]^{n-2} + \dots + d_{n-1} [A] + d_n [I]$$

eta Caley-Hamilton teoremaren arabera:

$$d([A_r]) = [A_r]^n + d_1 [A_r]^{n-1} + d_2 [A_r]^{n-2} + \dots + d_{n-1} [A_r] + d_n = [0]$$

Kontuan har ditzagun, orain, berdintza hauek:

$$[I] = [I]$$

$$[A_r] = [A] - [B]K^T$$

$$[A_r]^2 = ([A] - [B]K^T)^2 = [A]^2 - [A][B]K^T - [B]K^T[A_r]$$

$$\begin{aligned} ([A] - [B]K^T)[A_r] &= [A]([A] - [B]K^T) - [B]K^T[A_r] = \\ &= [A]^2 - [A][B]K^T - [B]K^T[A_r] \end{aligned}$$

$$[A_r]^3 = ([A] - [B]K^T)^3 = [A]^3 - [A]^2[B]K^T - [A][B]K^T[A_r] - [B]K^T[A_r]^2$$

$$\begin{aligned} ([A] - [B]K^T)[A_r]^2 &= [A][A_r]^2 - [B]K^T[A_r]^2 = \\ &= [A]([A]^2 - [A][B]K^T - [B]K^T[A_r]) - [B]K^T[A_r]^2 = \\ &= [A]^3 - [A]^2[B]K^T - [A][B]K^T[A_r] - [B]K^T[A_r]^2 \end{aligned}$$

$$[A_r]^4 = ([A] - [B]K^T)^4 = [A]^4 - [A]^3[B]K^T - [A]^2[B]K^T[A_r] - [A][B]K^T[A_r]^2 - [B]K^T[A_r]^3$$

$$\begin{aligned} ([A] - [B]K^T)^4 &= ([A] - [B]K^T)[A_r]^3 = \\ &= [A][A_r]^3 - [B]K^T[A_r]^3 = \\ &= [A]([A]^3 - [A]^2[B]K^T - [A][B]K^T[A_r] - [B]K^T[A_r]^2) - [B]K^T[A_r]^3 = \\ &= [A]^4 - [A]^3[B]K^T - [A]^2[B]K^T[A_r] - [A][B]K^T[A_r]^2 - [B]K^T[A_r]^3 \end{aligned}$$

eta orokortuz gero:

$$\begin{aligned} [A_r]^n &= [A]^n - [A]^{n-1}[B]K^T - [A]^{n-2}[B]K^T[A_r] - [A]^{n-3}[B]K^T[A_r]^2 - \dots \\ &\dots - [A]^{n-j}[B]K^T[A_r]^{j-1} - \dots - [B]K^T[A_r]^{n-1} \end{aligned}$$

$[A_r]$  matrizeak bere ekuazio karakteristikoa betetzen duenez:

$$d([A_r]) = [A_r]^n + d_1[A_r]^{n-1} + d_2[A_r]^{n-2} + \dots + d_{n-1}[A_r] + d_n[I] = [0]$$

eta  $[A_r]$  matrizearen berretura guztiak ordezkatzuz:

$$\begin{aligned} d([A_r]) &= d_n [I] + \\ &\quad d_{n-1}([A] - [B]\underline{K}^T) + \\ &\quad d_{n-2}([A]^2 - [A][B]\underline{K}^T - [B]\underline{K}^T[A_r]) + \\ &\quad d_{n-3}([A]^3 - [A]^2[B]\underline{K}^T - [A][B]\underline{K}^T[A_r] - [B]\underline{K}^T[A_r]^2) + \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad ([A]^n - [A]^{n-1}[B]\underline{K}^T - \dots - [B]\underline{K}^T A_r^{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d([A_r]) &= d_n [I] + d_{n-1}[A] + d_{n-2}[A]^2 + \dots + d_1[A]^{n-1} + [A]^n - \\ &\quad - d_{n-1}[B]\underline{K}^T - d_{n-2}[A][B]\underline{K}^T - d_{n-3}[A]^2[B]\underline{K}^T - \dots - [A]^{n-1}[B]\underline{K}^T - \\ &\quad - d_{n-2}[B]\underline{K}^T[A_r] - d_{n-3}[A][B]\underline{K}^T[A_r] - d_{n-4}[A]^2[B]\underline{K}^T[A_r] - \dots - [A]^{n-2}[B]\underline{K}^T[A_r] - \\ &\quad - d_{n-3}[B]\underline{K}^T[A_r]^2 - d_{n-4}[A][B]\underline{K}^T[A_r]^2 - d_{n-5}[A]^2[B]\underline{K}^T[A_r]^2 - \dots - [A]^{n-3}[B]\underline{K}^T[A_r]^2 - \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad - d_1[B]\underline{K}^T[A_r]^{n-2} - [A][B]\underline{K}^T[A_r]^{n-2} - \\ &\quad - [B]\underline{K}^T[A_r]^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d([A_r]) &= d([A]) - \\ &\quad - [B] \cdot \left[ d_{n-1}\underline{K}^T + d_{n-2}\underline{K}^T[A_r] + d_{n-3}\underline{K}^T[A_r]^2 + \dots + \underline{K}^T[A_r]^{n-1} \right] - \\ &\quad - [A][B] \cdot \left[ d_{n-2}\underline{K}^T + d_{n-3}\underline{K}^T[A_r] + d_{n-4}\underline{K}^T[A_r]^2 + \dots + \underline{K}^T[A_r]^{n-2} \right] - \\ &\quad - [A]^2[B] \cdot \left[ d_{n-3}\underline{K}^T + d_{n-4}\underline{K}^T[A_r] + d_{n-5}\underline{K}^T[A_r]^2 + \dots + \underline{K}^T[A_r]^{n-3} \right] - \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad - [A]^{n-2}[B] \cdot \left[ d_1\underline{K}^T + \underline{K}^T[A_r] \right] - \\ &\quad - [A]^{n-1}[B] \cdot \underline{K}^T \end{aligned}$$

$$d([A_r]) = d([A]) -$$

$$- \left[ \begin{array}{c} [B]/[A][B] / \dots [A]^{n-1}[B] \\ d_{n-1}\underline{K}^T + d_{n-2}\underline{K}^T[A_r] + d_{n-3}\underline{K}^T[A_r]^2 + \dots + \underline{K}^T[A_r]^{n-1} \\ d_{n-2}\underline{K}^T + d_{n-3}\underline{K}^T[A_r] + d_{n-4}\underline{K}^T[A_r]^2 + \dots + \underline{K}^T[A_r]^{n-2} \\ d_{n-3}\underline{K}^T + d_{n-4}\underline{K}^T[A_r] + d_{n-5}\underline{K}^T[A_r]^2 + \dots + \underline{K}^T[A_r]^{n-3} \\ \vdots \\ d\underline{K}^T + \underline{K}^T[A_r] \\ \underline{K}^T \end{array} \right]$$

$d([A_r]) = 0$  eta sistema kontrolagarria bada, heina( $[M_c]$ ) =  $n$ ; hau da,  $[M_c]$  matrizea singularra (alderantzikagarria izan behar du) ez bada,

$$d([A]) = [M_c] \cdot \left[ \begin{array}{c} \underline{0}^T \\ \underline{0}^T \\ \vdots \\ \underline{K}^T \end{array} \right]$$

Eta ekuazioaren alde biak  $[0, 0, \dots, 1]$  bektoreaz biderkatuz,  $K$  bakartu dezakegu:

$$\underline{K}^T = [0, 0, \dots, 1] \cdot [M_c]^{-1} \cdot d([A]) \quad (13.196)$$

## 13.10 KONTROL MODALA

**Helburua:** Sistemaren polo bat bere kokagunetik beste batera lekualdatzea.

Metodo honen bidez,  $\underline{K}$  egoera-berrelikaduraren matrizea lortzen da, eta, horretarako, ez dago matrizearen alderantzizkoa kalkulatu beharrik. Horixe da kontrol modalaren berezitasuna.

### 13.10.1 Kontzeptuak berrikusten

#### 1. Sistema lineal baten erantzun askea eta erantzun behartua

Har dezagun  $n$  mailako sistema lineal bat, eredu matematiko hau duena:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = [\underline{A}] \cdot \underline{x}(t) + [\underline{B}] \cdot \underline{u}(t) \\ y(t) = [\underline{C}] \cdot \underline{x}(t) \end{cases}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{y} \in \mathbb{R}^p, \underline{u} \in \mathbb{R}^m$$

Sistemaren erantzunak:

erantzun askea:  $\underline{x}(t) = e^{[\underline{A}]t} \cdot \underline{x}_0$

erantzun behartua:  $\underline{x}(t) = e^{[\underline{A}]t} \underline{x}_0 + \int_0^t e^{[\underline{A}](t-\tau)} [\underline{B}] u(\tau) d\tau$

#### 2. $[\underline{A}]$ matrizearen matrize modala, $[\underline{V}]$

Har dezagun  $[\underline{A}]$  matrize karratu bat.

**$[\underline{A}]$  matrizearen balio propioak.**  $[\underline{A}]$  matrizearen ekuazio karakteristikoa betetzen dutenak dira, hau da,  $\{\lambda_i = \lambda / \det(\lambda [\underline{1}] - [\underline{A}]) = 0, i = 1, 2, \dots, n\}$

**Bektore propioak.**  $[\underline{A}]$  dinamika-matrizeak  $n$  balio propio baditu,  $\{\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ , balio propioei dagozkien bektore propioak,  $\underline{v}_i$ , dira  $[\underline{A}] \cdot \underline{v}_i = \lambda_i \cdot \underline{v}_i$  betetzen duten bektoreak.

**$[\underline{A}]$  matrizearen matrize modala,  $[\underline{V}]$ .** Bestetik,  $[\underline{A}]$  matrizearen bektore propioekin osatutako matrizeari deritzo matrize modal,  $[\underline{V}] = [\underline{v}_1, \underline{v}_2 \dots \underline{v}_n]$  (13.197)

Har dezagun  $\Lambda$  dinamika-matrize diagonal bat, diagonal nagusian  $[\underline{A}]$  matrizearen balio propioak dituen (guztiak desberdinak):

$$[\underline{\Lambda}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (13.198)$$

Hortaz,  $[\underline{A}]$  eta  $[\underline{\Lambda}]$  matrizeak honela daude erlazionatuta matrize modalarekin:

$$[\underline{A}] \cdot [\underline{V}] = [\underline{V}] \cdot [\underline{\Lambda}]$$

### 3. $[A]$ matrizearen matrize elkarrekikoa, $[R]$

$[A]$  matrizearen matrize elkarrekikoa,  $[R]$ , da  $[A]^T$  matrizearen matrize modala.

Hau da,  $[R] = [r_1, r_2, \dots, r_n]$ , non  $r_k \perp [A]^T r_k = \lambda_k r_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  eta  $[A]^T \cdot [R] = [R] \cdot [A]$  baitira.

**Propietatea:**  $[V]$  bada  $[A]$  matrizearen matrize modala,  $[R]$  eta  $[V]$  matrizeek berdintza hau betetzen dute:

$$[R]^T [V] = [1]$$

*Frogapena:*

Propietatea:  $[A]$  eta  $[A]^T$  matrizeek balio propio berdinak dituzte, baina bektore propio desberdinak.

Jo dezagun  $\lambda_k, k = 1 \dots n$  direla  $[A]$  eta  $[A]^T$  matrizeen  $n$  balio propioak

eta  $r_k, k = 1 \dots n$  direla  $[A]^T$  matrizearen  $n$  bektore propioak

Beraz, definiziotik ateratzen dugu:  $[A]^T r_k = \lambda_k r_k$

eta irauliz gero:  $\left([A]^T r_k\right)^T = (\lambda_k r_k)^T \rightarrow r_k^T [A] = \lambda_k r_k^T$

$$v_j \text{-z biderkatuz (eskuinetik): } r_k^T [A] \cdot v_j = \lambda_k r_k^T \cdot v_j \quad (13.199)$$

Bestalde,  $[A] v_j = \lambda_j v_j$  denez,

$$r_k^T \text{-z biderkatuz (ezkerretik): } r_k^T \cdot [A] v_j = r_k^T \cdot \lambda_j v_j$$

$$\text{Eta } \lambda_j \text{ eskalarra denez, } r_k^T \cdot [A] \cdot v_j = \lambda_j \cdot r_k^T \cdot v_j \quad (13.200)$$

(13.199) eta (13.200) arteko kenketa eginez,

$$(\lambda_j - \lambda_k) \cdot r_k^T \cdot v_j = 0 \quad \begin{cases} j \neq k \rightarrow r_k^T \cdot v_j = 0 \\ j = k \rightarrow r_j^T \cdot v_j = \alpha \end{cases}$$

Matrize modalaren eta matrize elkarrekikoaren bektoreak normalizatuak direnean, 1 modulukoak,  $\underline{r}_k^T \cdot \underline{v}_k = 1$ . Horrenbestez,

$$[R]^T [V] = [1] \text{ eta } [R]^T = [V]^{-1} \quad (13.201)$$

Beste era batera garatuta:

$$[R] \text{ bada } [A] \text{ matrizearen matrize elkarrekikoa: } [A]^T \cdot [R] = [R] \cdot [\Lambda]$$

Irailiz gero:  $([A]^T \cdot [R])^T = ([R] \cdot [\Lambda])^T \rightarrow [R]^T \cdot [A] = [\Lambda] \cdot [R]^T$ , eta  $[\Lambda]$  diagonalak denez,  $[\Lambda]^T \equiv [\Lambda]$

$$\text{Bestalde, } [V] \text{ bada } [A] \text{ matrizearen matrize modala: } [A] \cdot [V] = [V] \cdot [\Lambda]$$

$$[V]^{-1} \text{-z biderkatuz eskuinetik eta ezkerretik: } [V]^{-1} \cdot [A] = [\Lambda] \cdot [V]^{-1}$$

$$\text{Beraz, gaiak berdinduz: } [R]^T = [V]^{-1}$$

### 3. Sistema baten diagonalizazioa

$[V]$  bada  $[A]$  matrizearen matrize modala:  $[A] \cdot [V] = [V] \cdot [\Lambda]$ . Eta  $[V]$  alderantzikagarria bada:

$[V]^{-1}$  -z ezkerretik biderkatuz:

$$[V]^{-1} \cdot ([A] \cdot [V]) = [V]^{-1} \cdot ([V] \cdot [\Lambda]) \rightarrow [V]^{-1} \cdot [A] \cdot [V] = [\Lambda]$$

$[V]^{-1}$  -z eskuinetik biderkatuz:

$$([A] \cdot [V]) \cdot [V]^{-1} = ([V] \cdot [\Lambda]) \cdot [V]^{-1} \rightarrow [A] = [V] \cdot [\Lambda] \cdot [V]^{-1}$$

#### Sistema baten diagonalizazioa: egoera-aldagaiak isolatzea

Jo dezagun sistema bat egoera-eredu honekin ereduizatuta dagoela:  $\dot{\underline{x}}(t) = [A]\underline{x}(t) + [B]\underline{u}(t)$ ,  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ . Har dezagun  $V$  matrize modala aldakuntza bat egiteko oinarri gisa,  $\underline{x}(t) = [V]\underline{\varepsilon}(t)$ . Eta sisteman aplikatuz:

$$\dot{\underline{x}}(t) = [V]\dot{\underline{\varepsilon}}(t) = [A] \cdot [V]\underline{\varepsilon}(t) + [B]\underline{u}(t) \quad (13.202)$$

$$\dot{\underline{x}}(t) = [V]^{-1}[A][V] \cdot \underline{x}(t) + [V]^{-1}[B] \cdot \underline{u}(t) \rightarrow \dot{\underline{x}}(t) = [\Lambda] \cdot \underline{x}(t) + [B_d] \cdot \underline{u}(t) \quad (13.203)$$

Hala, matrize-dinamika berria matrize diagonalaren denez, egoera-aldagaiak elkarrekin banakatuta daude. Egoera-aldagai batek ez dio beste egoera-aldagai baten bilakaerari eragiten, egoera-aldagai baten bilakaera ez dago beste egoera-aldagai baten balioaren mende.

### 13.10.2 Kontrol modalen azterketa

Har dezagun  $n$  mailako sistema bat:

$$\dot{\underline{x}} = [A]\underline{x} + [B]\underline{u} \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{u} \in \mathbb{R}^m$$

**Helburua** da polo bakar bat edo gehiago ( $l < n$ ) s plano konplexuko kokagune finko batzuetara lekualdatzea.

**Soluzioa.** Kontrol modalaren legeak,  $u(t) = k \underline{m}^T \underline{x}(t)$ ,  $[A]$  matrizearen  $\lambda_i$  balio propioa aldatzen du,  $\underline{m} = \underline{r}_i$  hartuz ( $\underline{r}_i$  da  $\lambda_i$  balio propioari dagokion  $[A]^T$  matrizearen bektore propioa).

Arazoa da  $\underline{K}$  irabaziaren balioa zehaztea,  $l$ -garren balio propioak,  $\lambda_i$  balioa duena,  $\rho_i$  balioa har dezan.

Beraz, honela idatz daiteke egoera-berrelikaduraren matrizea:  $[K] = k \underline{r}_i^T$ .

Metodo honen ezaugarri nagusia da egoera-berrelikaduraren matrizea kalkulatu daitekeela matrizeen alderantzizko matrizea kalkulatu beharrik gabe, Faddeev-Leverrier metodoan ez bezala.

#### 13.10.2.1 $[A]$ matrizearen balio propio bat aldatzea (SISO sistema)

Har dezagun sarrera bakarreko  $\dot{\underline{x}} = [A]\underline{x} + b\underline{u}$  sistema, eta aplika diezaiogun kontrol modalaren legea:  $u(t) = k \underline{m}^T \underline{x}(t)$ .  $\lambda_i$  balio propioa  $\rho_i$  izatera pasatzea nahi dugu. Beraz, sistema kontrolatuaren eredu dinamikoa hau da:

$$\dot{\underline{x}} = [A]\underline{x} + b k \underline{m}^T \underline{x} = \left[ [A] + k b \underline{m}^T \right] \cdot \underline{x} = [G]\underline{x} \quad (13.204)$$

$$\text{non matrize-dinamika berria } [G] = \left[ [A] + k b \underline{m}^T \right] \text{ baita} \quad (13.205)$$

**A) Kontrol modaleko metodoaren funtsa**

$\underline{m} = \underline{r}_l$  bektorea hartuz ( $\lambda_l$  balio propioari dagokion  $[A]^T$  matrizearen bektore propioa),  $[G]$  eta  $[A]$  matrizeen balio propioak berdinak dira,  $l$ -garrena izan ezik. Ondorioz,  $\underline{k}$  irabaziarentzako balio bat aurki daiteke, non  $[A]$  matrizearen  $l$ -garren balio propioak,  $\lambda_l$  balioa duenak,  $\rho_l$  balioa hartuko baitu.

*Frogapena*

$\underline{m} = \underline{r}_l$  bektorea hartuz, non  $\underline{r}_l$  baita  $\lambda_l$  balio propioari dagokion  $[A]$ -ren matrize elkarrekikoaren bektorea, matrize-dinamika berria  $[G] = [A] + k\underline{b}\underline{r}_l^T$  da.

$\underline{v}_j$  bektore propioaz biderkatuz eskuinetik:

$$[G]\underline{v}_j = [A]\underline{v}_j + k\underline{b}\underline{r}_l^T \underline{v}_j$$

Eta  $[V]$  matrize modalaren eta  $[R]$  matrize elkarrekikoaren ezaugarriak kontuan harturik:

$l \neq j$  denean,  $\underline{r}_l^T \underline{v}_j = 0$  Beraz,  $[G]\underline{v}_j = \lambda_j \underline{v}_j$

$l = j$  denean,  $\underline{r}_l^T \underline{v}_j = 1$  Beraz,  $[G]\underline{v}_j = \lambda_l \underline{v}_j + k\underline{b}$

Ondorioz,  $[G]$  matrizearen balio propioak  $[A]$ -renak ere badira  $l \neq j$  denean. Hala ere,  $l = j$  denean,  $[A]$ -ren balio propioa ez da  $[G]$ -ren balio propioa (eta, horrenbestez,  $\underline{v}_l$  ere ez da  $[G]$ -ren bektore propioa).

**B) k irabazia kalkulatzeari**

$k$  irabaziaren balioa  $\lambda_l \xrightarrow{k} \rho_l$  lortzeko da:

$$k = \frac{\rho_l - \lambda_l}{\underline{r}_l^T \underline{b}} \quad (13.206)$$

*Frogapena:*

$\rho_l$  izan bedi  $[G]$  matrizearen  $l$ -garren balio propioarentzat nahi genukeen balioa, eta  $\underline{\omega}_l$  izan bedi  $\rho_l$ -ri dagokion bektore propioa.  $[A]$ -ren matrize modala  $R^n$  espazioaren oinarri bat da. Beraz,  $\underline{\omega}_l$  eta  $\underline{b}$  bektoreak idatz daitezke  $\underline{v}_j$  bektoreen konbinazio lineal gisa; hau da,  $\underline{g}$  eta  $\underline{p}$  existitzen dira, eta:

$$\underline{\omega}_l = q_1 \underline{v}_1 + q_2 \underline{v}_2 + \dots + q_l \underline{v}_l + \dots + q_n \underline{v}_n$$

$$\underline{b} = p_1 \underline{v}_1 + p_2 \underline{v}_2 + \dots + p_n \underline{v}_n$$

Berrelikadura-sistemaren matrize dinamikoaren adierazpidea,  $[G] = [A] + k \underline{b} \underline{r}_l^T$ , hartuz eta  $\underline{\omega}_l$  ( $[G]$ -ren bektore propioa) bektoreaz eskuinetik biderkatuz:

$$[G] \underline{\omega}_l = [A] \underline{\omega}_l + k \underline{b} \underline{r}_l^T \underline{\omega}_l$$

$\underline{\omega}_l$  eta  $\underline{b}$  bektoreak ordezkatzuz:

$$[G](q_1 \underline{v}_1 + q_2 \underline{v}_2 + \dots + q_l \underline{v}_l + \dots + q_n \underline{v}_n) = [A](q_1 \underline{v}_1 + q_2 \underline{v}_2 + \dots + q_l \underline{v}_l + \dots + q_n \underline{v}_n) +$$

$$+ k(p_1 \underline{v}_1 + p_2 \underline{v}_2 + \dots + p_n \underline{v}_n) \underline{r}_l^T (q_1 \underline{v}_1 + q_2 \underline{v}_2 + \dots + q_l \underline{v}_l + \dots + q_n \underline{v}_n)$$

$[G]$ -ren bektore propioa  $\underline{\omega}_l$  denez,  $[G] \underline{\omega}_l = \rho_l \underline{\omega}_l$ , eta  $[A]$ -ren bektore propioa  $\underline{v}_i$  denez,  $[A] \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$ ; beraz,  $[A] q_i \underline{v}_i = q_i [A] \underline{v}_i = q_i \lambda_i \underline{v}_i$ . Halaber,  $j \neq k$  bada,  $\underline{r}_k^T \underline{v}_j = 0$  dela jakinik:

$$\rho_l (q_1 \underline{v}_1 + q_2 \underline{v}_2 + \dots + q_l \underline{v}_l + \dots + q_n \underline{v}_n) = (q_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + q_2 \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + q_l \lambda_l \underline{v}_l + \dots + q_n \lambda_n \underline{v}_n) +$$

$$+ k(p_1 \underline{v}_1 + p_2 \underline{v}_2 + \dots + p_n \underline{v}_n) \cdot q_l$$

Eta gaiz gai  $\underline{v}_j$ -ren koefizienteak berdinduz:

$$\rho_l q_j = q_j \lambda_j + k p_j q_l, j = 1, 2, \dots, n$$

$n$  ekuazio lortzen dira ezezagun bakarrarentzat ( $k$ ). Eta  $j=l$  kondizioari dagokion ekuazioa da interesatzen zaigun soluzioa, hau da:  $\rho_l q_l = q_l \lambda_l + k p_l q_l$ . Hortik ateratzen da:

$$k = \frac{\rho_l - \lambda_l}{p_l}$$

Azkenik,  $p_l = \underline{r}_l^T \underline{b}$  denez,

$$k = \frac{\rho_l - \lambda_l}{p_l} = \frac{\rho_l - \lambda_l}{\underline{r}_l^T \underline{b}}$$

Beraz, egoera-berrelikaduraren matrizea  $[K] = k \underline{r}_l^T$  da. (13.207)

### 13.10.1.1 Hainbat balio propio aldatzea

**Lehen egoera: sarrera bakarreko sistema**  $[B] = \underline{b}$ ,  $(\dot{\underline{x}}(t) = [A]\underline{x}(t) + \underline{b}u(t))$

Jo dezagun  $l$  balio propio aldatu nahi dugula ( $l < n$ ). Kontrol modalaren metodoarekin, balio propio bakar bat aldatzen da aldi berean; hainbat balio propio aldatzeko, metodo hori hainbat bider aplikatu behar da, aldatu behar diren balio propioen kopurua hainbat aldiz. Sarrera bakarreko sistema lineal bat dugunean, sistema linealetan gainezarmenaren printzipioa betetzen denez, jarraitu beharreko prozedura da  $u(t)$  sarrera hainbat itxurazko sarreretan zatitzea, aldatu behar diren balio propioen kopurua adina zatitan.

$$u(t) = u_1(t) + \dots + u_l(t) = \sum_{i=1}^l u_i(t) \quad (13.208)$$

Gero, kontrol modala modu iteratiboan aplikatzen da, iterazio bakoitzean  $k_i, i = 1, 2, \dots, l$  irabazia kalkulatzeko adierazpide honekin:  $k_i = \frac{\rho_i - \lambda_i}{\underline{r}_i^T \underline{b}}$ . Hala, iterazio bakoitzean, polo bat lekualdatzen da.

#### Prozedura

$i = 1$  denean,  $u_1(t) = k_1 \underline{r}_1^T \underline{x}(t)$

$k_1$  kalkulatu da lehenengo balio propioa aldatzeko;  $k_1 = \frac{\rho_1 - \lambda_1}{\underline{r}_1^T \underline{b}}$

Begizta itxiko sistemaren matrize-dinamika berria hau da:

$$\dot{\underline{x}}(t) = [G_1] \underline{x}(t) + \underline{b} \left( \sum_{i=2}^l u_i(t) \right) \quad \text{eta} \quad [G_1] = [A] + \underline{b} k_1 \underline{r}_1^T$$

$i = 2$  denean,  $u_2(t) = k_2 \underline{r}_2^T \underline{x}(t)$

$k_2$  kalkulatu da bigarren balio propioa aldatzeko;  $k_2 = \frac{\rho_2 - \lambda_2}{\underline{r}_2^T \underline{b}}$

Horrela,  $\dot{\underline{x}}(t) = [G_2] \underline{x}(t) + \underline{b} \left( \sum_{i=3}^l u_i(t) \right)$  eta  $[G_2] = [G_1] + \underline{b} k_2 \underline{r}_2^T$

⋮  
⋮

$$i = l \text{ denean, } u_l(t) = k_l r_l^T \underline{x}(t)$$

$$k_l \text{ kalkulatu da } l\text{-garren balio propioa aldatzeko; } k_l = \frac{\rho_l - \lambda_l}{r_l^T \underline{b}}$$

Eta  $u(t) = [K] \cdot \underline{x}(t)$  da kontrol-legea, non  $[K] = \sum_{i=1}^l k_i r_i^T$  baita.

### Bigarren egoera: sarrera askoko sistema ( $m$ sarrera)

Har dezagun  $m$  sarrerako sistema bat,  $\dot{\underline{x}}(t) = [A] \underline{x}(t) + [B] \underline{u}(t)$ ,  $\underline{x} \in \Re^n$ ,  $\underline{u} \in \Re^m$

Orduan,  $[B] = [\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_m]$ , eta honako hau litzateke sistemaren eredua:

$$\dot{\underline{x}}(t) = [A] \underline{x}(t) + [B] \underline{u}(t) = [A] \underline{x}(t) + \sum_{i=1}^m \underline{b}_i u_i(t) \quad (13.209)$$

$[A]$  matrizearen hainbat balio propio aldatzeko, aurreko prozedura iteratiboa aplikatzen da, aldiko sarrera bat aukeratuz.  $m$  sarrera kopurua baino balio propio gehiago aldatu nahi badira, ( $l > n$ ), lehenengo,  $m$  balio propio aldatzeko,  $m$  bider bakoitzean sarrera bat hartuta aplikatzen da metodoa; gero, gainerako  $l - m$  balio propioak aldatzeko, iteratu egin behar da berriro lehenengo sarreratik hasita.

### Prozedura

$$i = 1 \text{ denean, } u_1(t) = k_1 r_1^T \underline{x}(t), \text{ non } k_1 = \frac{\rho_1 - \lambda_1}{r_1^T \underline{b}} \text{ baita}$$

$$\text{Beraz, } \dot{\underline{x}}(t) = [G_1] \underline{x}(t) + \left( \sum_{i=2}^m \underline{b}_i u_i(t) \right), \text{ non } [G_1] = [A] + \underline{b}_1 k_1 r_1^T \text{ baita}$$

$$i = 2 \text{ denean, } u_2(t) = k_2 r_2^T \underline{x}(t), \text{ non } k_2 = \frac{\rho_2 - \lambda_2}{r_2^T \underline{b}} \text{ baita}$$

$$\text{Ondorioz, } \dot{\underline{x}}(t) = [G_2] \underline{x}(t) + \left( \sum_{i=3}^m \underline{b}_i u_i(t) \right), \text{ non } [G_2] = [G_1] + \underline{b}_2 k_2 r_2^T \text{ baita}$$

Kasu guztietan jo dugu  $\underline{x}(t)$  egoera-bektorea eskura daitekeela.

### 13.10.2.3 Kontrol modala irteeran oinarrituz

Batzuetan,  $\underline{x}(t)$  egoera-bektorea ez da eskuratzen erraza; hori dela eta, interesgarria izan daiteke poloak kokatzearen arazoa planteatzea irteera berrelikatuz. Beraz, sistema honentzat

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= [\mathbf{A}]\underline{x} + [\mathbf{B}]\underline{u} & \underline{x} &\in \mathbb{R}^n \quad \underline{y} \in \mathbb{R}^n \\ \underline{y} &= [\mathbf{C}]\underline{x} & \underline{u} &\in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

hau da irteera-berrelikaduraren kontrol modalaren legea:  $\underline{u} = [\mathbf{K}]\underline{y}$

Helburua da  $[\mathbf{K}]$  matrizea kalkulatzeko, begizta itxiko sistemaren poloek balio jakin batzuk izan ditzaten.

#### 1. egoera: $p = n$ ; $m = n$

$[\mathbf{V}]$  har dezagun  $[\mathbf{A}]$  matrize-dinamikaren matrize modal gisa.  $\underline{x}(t) = [\mathbf{V}]\underline{\varepsilon}(t)$  antzekotasun-transformazioa aplikatuz, eredu diagonalizatu hau lortzen da:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\varepsilon}} &= [\mathbf{\Lambda}]\underline{\varepsilon} + [\mathbf{V}]^{-1}[\mathbf{B}]\underline{u} \\ \underline{y} &= [\mathbf{C}][\mathbf{V}]\underline{\varepsilon}\end{aligned}\tag{13.210}$$

Irteera-berrelikaduraren kontrol-legearen arabera:

$$\begin{aligned}\underline{u}(t) &= [\mathbf{K}]\underline{y}(t) & \text{non } [\mathbf{K}] \text{ (} n \times n \text{) dimentsioko matrizea baita} \\ \underline{u}(t) &= [\mathbf{K}][\mathbf{C}][\mathbf{V}]\underline{\varepsilon}(t)\end{aligned}\tag{13.211}$$

#### \* $[\mathbf{K}]$ matrizea kalkulatzeko

$[\mathbf{K}]$  irteera-berrelikaduraren matrizea kalkulatu behar da,  $\lambda_i$  poloak  $p_i$  kokagune berrietara lekualdatzeko. Kontuan hartu polo konplexu bat lekualdatzen bada bere konjugatua ere lekualdatu behar dela.

Sistema berriaren eredua:

$$\dot{\underline{\varepsilon}} = \left[ [\mathbf{\Lambda}] - [\mathbf{V}]^{-1}[\mathbf{B}][\mathbf{K}][\mathbf{C}][\mathbf{V}] \right] \underline{\varepsilon}\tag{13.212}$$

Beraz,  $[K]$  matrizea kalkulatu beharra dago, non  $[\Lambda_d] = [\Lambda] + [V]^{-1}[B][K][C][V]$  baita;  $[\Lambda_d]$  matrize diagonal bat da, bere diagonal nagusian sistema kontrolatuaren poloentzat nahi genituzkeen kokagune berriak dituen. Hau da:

$$[\Lambda_d] - [\Lambda] = [V]^{-1}[B] \cdot [K][C][V] \quad (13.213)$$

$$K = [V]^{-1}[B]^{-1} [\Lambda_d - \Lambda][C][V]^{-1} \quad (13.214)$$

$[K]$  existi dadin, beharrezkoa da  $[V]^{-1}[B]$  eta  $[C][V]$  matrizeak alderantzikagarriak izatea. Metodo honen arazo nagusia da  $[V]$  matrize modala eta matrizeen alderantzizko matrizeak kalkulatzeko.

## 2. egoera: polo erreala, $p < n$ ; $m < n$

Kasu honetan,  $n$  mailako sistema honentzat:

$$\dot{\underline{x}} = [A]\underline{x} + [B]\underline{u} \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad \underline{y} \in \mathbb{R}^p$$

$$\underline{y} = [C]\underline{x} \quad \underline{u} \in \mathbb{R}^m$$

Irteera-berrelikaduraren matrizea,  $K$ , zehaztu behar da ( $m \times p$  dimentsiokoa), sistemaren poloak  $s$  planoko nahi den kokaguneetara eramateko. Aurreko kasuan bezala, aurkitu nahi dugun  $[K]$  matrizeak  $[\Lambda_d] = [\Lambda] + [V]^{-1}[B][K][C][V]$  kondizioa bete behar du.  $[H]$  eta  $[F]$  matrizeak honela definituz gero, honela idatz daiteke aurreko berdintza:

$$[H] = [V]^{-1}[B] \quad (13.215)$$

eta

$$[F] = [C][V] \quad (13.216)$$

Horrenbestez, 
$$[\Lambda_d] - [\Lambda] = [H] \cdot [K] \cdot [F] \quad (13.217)$$

Arazoa hau sortzen da:  $[H]$  eta  $[F]$  matrizeak ez dira matrize karratuak eta, ondorioz, ez dute alderantzizko matrizerik. Sasi alderantzizkoa erabiltzea da horren konponbidea; hala, ezkerretik  $[H]^T$ -z biderkatuz eta eskuinetik  $[F]^T$ -z biderkatuz:

$$[H]^T [\Lambda_d - \Lambda] [F]^T = [H]^T ([H][K][F])[F]^T \quad (13.218)$$

Hartara,

$$[K] = \left[ \begin{bmatrix} H \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} H \end{bmatrix}^T \left[ \begin{bmatrix} \Lambda_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}^T \right]^{-1} \quad (13.219)$$

**OHARRA:**  $r$  polo kopurua baino ezin da lekualdatu;  $r = txikinena(m,p)$  izanda.



# 14

## Zenbatespena

### 14.1 SARRERA

Sistema bat kontrolatzeko, nahitaezkoa dugu sistemaren neurketetatik sistemaren egoera bektorea zenbatestea. Horretarako, egoera bektorearen behatzaile bat behar dugu. Behatzailearen betebeharra da, sistemaren neurketetan oinarrituz, sistemaren egoera bektorearen zenbatespen bat ematea kontrolari. Hori dela eta, kontrol-algoritmoak sistemari sartu behar dion kontrol-aldagaia kalkulatu ahal izateko, denbora errealean exekutatu behar ditugu behatzaile horiek. Beraz, behatzaileek azkar exekutatu behar diren algoritmoak izan behar dute. Liburu honetan, berez, bi behatzaile aztertuko ditugu: Leuenberger behatzailea eta Kalman behatzailea. Behatzaile garrantzitsuenak direlako aukeratu ditugu bi behatzaile horiek. Leuenberger behatzaileak ez ditu perturbazioak kontuan izaten; hala ere, Kalman behatzaileak baino askoz errazago kalkula dezake sistemaren egoera bektorea. Kalman behatzaileak, berriz, konplexuagoa izan arren, kontuan hartzen ditu sistemaren ereduaren perturbazioak. Adibidez, sistemaren gain agertzen diren ausazko edo zorizko perturbazioak eta sistemaren neurgailuei eragiten dieten perturbazioak hartzen ditu kontuan. Beraz, sistema baten egoera bektorea zenbatetsi behar badugu, bi behatzaile horiek erabil ditzakegu.

## 14.2 LEUENBERGER

Atal honetan ikusiko dugu behatzaile hauek ez dutela sistemaren begizta itxiko autobaliorik, eta, beraz, ez dituztela sistemaren ezaugarri dinamikoak aldatzen. Lehenik, zenbatetsi beharreko sistemaren egoera-eredua proposatu behar dugu. Suposatuko dugu sistema ez dela lineala eta ez dela aldatzen denborarekin. Bestalde, honelako behatzaileak beti mikroprozesadorearen bidez egiten direnez, behatzailea denbora diskretuko sistementzat definituko dugu. Atal honetan ikusiko dugu zer nolako eragina duen behatzaile honek kontrolaren dinamikan, eta nola kalkulatu behar dugun kontroladore bat 13. gaian ikusitako kontroladoreen bertsio diskretuak erabiliz. Sistemaren ekuazioak proposatzean, suposatuko dugu sistemak irteera bakarra duela. Hori garrantzitsua da, eskuarki ezin baitira sistemaren egoera-aldagai guztiak neurtu.

$$\underline{x}(kh+h) = [F] \underline{x}(kh) + [G] \underline{u}(kh) \quad (14.1)$$

$$y(kh) = \underline{c}^T \cdot \underline{x}(kh) \quad (14.2)$$

$y(kh)$  da irteera-aldagaia. Irteera bakarra dugula joko dugu.

$\underline{x}(kh)$  da sistemaren egoera bektorea. Bektore hau zutabe erakoa da eta  $n$  osagai ditu.

$\underline{u}(kh)$  da sistemaren sarrera-aldagaien bektorea. Bektore hau ere zutabe erakoa da eta  $m$  osagai ditu.

$[F]$  da sistemaren dinamika finkatzen duen matrizea, eta  $n$  zutabe eta  $n$  errenkada ditu.

$[G]$  da sistemaren sarrerek egoera-aldagaietan duten eragina adierazten duen matrizea. Matrize honek  $m$  zutabe eta  $n$  errenkada ditu.

$\underline{c}^T$  da sistemaren egoera-aldagaien arteko konbinazio lineala adierazten duen errenkada erako bektorea. Eskuarki, bat ez beste guztiak zero izaten dira. Bektore honek  $n$  zutabe ditu.

Esaten da zenbatesle baten definizioa, ia beti, begizta itxian lan egiten duen algoritmo bat dela. Hori horrela esateko, arrazoi garrantzitsu bi ditugu. Lehenik, sistemaren eredu zehatz bat izatea oso zaila da. Bestetik, kontroladoreak dituen sistemaren irteera-laginek oso informazio ona ematen digute zenbatesleak egiten dituen zenbatespenen kalitateaz. Horrenbestez, ia zenbatesle guztiak begizta itxian

lan egiten dute sistemaren irteeren lakinak erabiliz. Hori hobeto ulertzeko, begizta irekian lan egiten duen zenbatesle baten ekuazioa proposatuko dugu.

$$\hat{\underline{x}}(kh+h) = [\underline{F}] \hat{\underline{x}}(kh) + [\underline{G}] \underline{u}(kh) \quad (14.3)$$

$\hat{\underline{x}}(kh)$  da zenbatesleak sistemaren egoera-aldagaiez egiten duen zenbatespena.

Kontrolatu behar dugun sistemaren ekuazioak dituen iragazki bat da zenbatezle hori. Sistemari sartzen zaizkion sarrera berak sartzen ditugu iragazkiaren sarreran. Sistemaren dinamika zehatz bat izango bagenu, iragazkiak duen errorea ondorengo ekuazio dinamikoa izango luke egoera bektorearen zenbatespena egitean. Errorearen dinamika lortzeko, (14.3) eta (14.4) ekuazioen arteko kenketa egin behar dugu.

$$\underline{e}(kh) = \underline{x}(kh) - \hat{\underline{x}}(kh) \Rightarrow$$

$$\underline{x}(kh+h) - \hat{\underline{x}}(kh+h) = [\underline{F}](\underline{x}(kh) - \hat{\underline{x}}(kh)) \Rightarrow$$

$$\underline{e}(kh+h) = [\underline{F}] \underline{e}(kh)$$

Ikus daitekeenez, aurreko ekuazioan, errorearen dinamika eta sistemaren dinamika berdinak dira. Beraz, lortuko dugun errorearen dinamika hobetu nahi badugu, irteeraren berrelikadura egin behar dugu. Zenbatesle bat begizta itxian egin behar dugula frogatu eta gero, Leuenberger zenbateslearen egitura azalduko dugu.

### 14.2.1 Leuenberger zenbateslearen egitura

Honela definituko dugu Leuenberger zenbateslearen egitura.

$$\hat{\underline{x}}(kh+h) = [\underline{F}] \hat{\underline{x}}(kh) + [\underline{G}] \underline{u}(kh) + \underline{L}(y(kh) - \hat{y}(kh)) \quad (14.4)$$

$$\hat{y}(kh) = \underline{c}^T \hat{\underline{x}}(kh) \quad (14.5)$$

$\hat{y}(kh)$  da sistemaren irteeraren zenbatespena.

$\hat{\underline{x}}(kh)$  Sistemaren egoeraren zenbatespena  $n$  errenkadako zutabe erako bektore bat da.

$\underline{L}$  : Zenbateslearen berrelikadura bektorea da. Bektore hau zutabe erakoa da, eta  $n$  errenkada ditu.

Ikus daitekeenez, zenbatesleak berrelikadura bat du. Berrelikadura horrek zenbateslearen jarrera dinamikoa hobetzen du. Hori hobeto ulertuko dugu zenbateslearen errorearen dinamika kalkulatzeko. Errorearen dinamika kalkulatzeko, (14.1), (14.2), (14.4) eta (14.5) berdintzak erabiliko ditugu. Lehenik, (14.1) eta (14.4) ekuazioen arteko kenketa egingo dugu.

$$\underline{x}(kh+h) - \hat{\underline{x}}(kh+h) = [F](\underline{x}(kh) - \hat{\underline{x}}(kh)) - \underline{L}(y(kh) - \hat{y}(kh)) \Rightarrow$$

(14.2) eta (14.5) berdintzak aurreko ekuazioan ordezkaturak, ekuazio hau lortuko dugu.

$$\underline{x}(kh+h) - \hat{\underline{x}}(kh+h) = [F](\underline{x}(kh) - \hat{\underline{x}}(kh)) - \underline{L}\underline{c}^T(\underline{x}(kh) - \hat{\underline{x}}(kh)) \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\underline{e}(kh) = \underline{x}(kh) - \hat{\underline{x}}(kh)$$

$$\underline{e}(kh+h) = [F](\underline{e}(kh)) - \underline{L}\underline{c}^T \underline{e}(kh) \Rightarrow$$

$$\underline{e}(kh+h) = ([F] - \underline{L}\underline{c}^T) \underline{e}(kh) \quad (14.6)$$

(14.6) ekuazioan ikus daitekeenez, errorearen dinamika ez da jadanik  $[F]$  matrizea. Zenbatesleak begizta ixtean, errorearen dinamika guztiak alda daitezke,  $\underline{L}$  zutabe bektorea egoki aukeratzen badugu. Honela definituko errorearen dinamika-matrize baliokidea.

$$[F_b] = [F] - \underline{L}\underline{c}^T \quad (14.7)$$

Horrenbestez, sistemaren errorearen egoera-ekuazioa hau da.

$$\underline{e}(kh+h) = [F_b] \underline{e}(kh) \quad (14.8)$$

13. gaian ikusi dugu sistema jarraitu baten autobalioek sistemaren egonkortasuna finkatzen dutela. Sistema diskretu batean ere gauza bera gertatzen da. Hala ere, badago alde garrantzitsu bat: sistema diskretu bat egonkorra izan dadin, autobalioen moduluak 1 baino txikiagoak izan behar dute. Hori dela era, zenbateslearen  $\underline{L}$  berrelikadura-matrizea aukeratzeko,  $[F_b]$  matrizearen autobalioak kalkulatu behar ditugu, zenbateslea iragazkia egonkorra izan dadin eta, horrez gain, sortzen duen errorea ahalik eta azkarren desagertu dadin.  $[F_b]$  matrizearen autobalioen moduluak gero eta txikiagoak izanez gero, errorea gero eta azkarrago desagertuko da. Beraz, guk aukeratu beharko ditugu zenbateslearen autobalio horiek. Autobalioak aukeratuz gero,  $[F_b]$  matrizearen polinomio karakteriskoa izango dugu.

$$\det(\lambda[I] - [F_b]) = 0 \Rightarrow$$

$$\det(\lambda[I] - [F] + \underline{L}\underline{c}^T) = 0 \Rightarrow \quad (14.9)$$

$$(\lambda - \lambda_1)^{l_1} (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \dots (\lambda - \lambda_q)^{l_q} = 0$$

Ekuazio horretan:

$\lambda_j$  da zenbateslearen  $j$ -garren autobalioa. Guztira,  $q$  autobalio ditugu.

$l_j$  da  $j$ -garren autobalioaren anizkotasuna. Autobalioen anizkoitasunen batura  $n$  da.

$$\sum_{j=1}^{j=q} l_j = n \quad (14.10)$$

## 14.2.2 Leuenberger zenbateslearen kalkulua

$\underline{L}$  berrelikadura-matrizearen kalkulua egiteko, bi egoera aztertuko ditugu. Lehen egoeran, suposatuko dugu sistemaren eredua behagarritasun-moduan idatzita dagoela. Bigarren egoeran, joko dugu sistemaren eredua ez dagoela behagarritasun-moduan idatzita.

### 14.2.2.1 $\underline{L}$ berrelikadura-matrizearen kalkulua, sistema behagarritasun-moduan dagoenean

Egoera-espazioan, infinitu  $\langle [F], [G], [C] \rangle$  matrize-hirukote baliokide ditugu; hau da, guztiek adierazten dute sarrera/irteera erlazio bera. Poloak kokatzeko metodoan sistemaren polinomio karakteristikoak garrantzi handia hartzen duenez, behagarritasun-moduko eredua oso egokia da, polinomio karakteristikoaren koefizienteak  $[F]$  dinamika-matrizearen azkeneko lerroan agertzen baitira. Sarrera bakarreko eta irteera bakarreko sistema bat dela joko dugu. Beraz, sistemaren egoera ereduaren matrizea honela idatz dezakegu.

$$[F] = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \quad (14.11)$$

Polinomio karakteristikoaren koefizienteak

$$\delta(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

$$\underline{c}^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

0 ez den balioa

Ikus daitekeenez,  $[F]$  matrizearen  $\delta(z)$  polinomio karakteriskoaren koefizienteak  $[F]$  matrizearen lehen zutabeko elementuak dira, baina aurkako zeinua dute.  $\underline{L}$  berrelikadura-matrizea erabiliz, zenbateslearen  $[F_b]$  dinamika-matrizea baliokidearen polinomio karakteristiko jakin bat lortu ahal izango dugu. Beraz, zenbateslearen  $d(z) = z^n + d_1 z^{n-1} + d_2 z^{n-2} + \dots + d_{n-1} z + d_n$  polinomio karakteristikoa aukeratu ondoren, honela idatz dezakegu zenbateslearen eredu baliokidea. Gogoan izan behar dugu  $d(z)$  polinomioaren erroek moteltze-kondizio egokiak bete behar dituztela.

$$[F_b] = \begin{bmatrix} -d_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -d_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -d_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -d_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad [G_b] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \quad (14.12)$$

SISO sistema baten  $-$ sarrera bakarrekoa ( $m = 1$ ) eta irteera bakarrekoa ( $p = 1$ )  $\underline{L}$  egoeraren berrelikadura-matrizearen dimentsioa ( $n \times 1$ ) da.

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \quad (14.13)$$

Horrenbestez,  $d(z)$  polinomio karakteristikoa lortu ahal izateko,  $\underline{L}$  berrelikadura kalkulatu dugu, matrize-berdintza hau aplikatuz:

$$[F_b] = [F] - \underline{L} \underline{c}^T$$

$[F_b]$  eta  $[F]$  matrizeak, batetik, eta  $\underline{c}^T$  eta  $\underline{L}$  bektoreak, bestetik, haiei dagokien balioez ordezkatuz gero, emaitza hau lortuko dugu.

$$\begin{bmatrix} -d_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -d_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -d_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -d_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} [F_b] & & [F] & & \underline{L} & \underline{c}^T \end{matrix} \quad (14.14)$$

Berdintza horren eskuineko atala garatuz:

$$\begin{bmatrix} -d_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -d_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -d_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -d_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Berdintza hori elementuz elementu berdinuz:

$$d_i - a_i = I_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Beraz, honela lortu ahal dira  $\underline{L}$  matrizearen koefizienteak:

$$I_i = d_i - a_i \quad (14.15)$$

$\forall i = 1, 2, \dots, n$  non  $n$  egoera-aldagai baititugu

$\underline{L}$  matrizea kalkulatzeko prozedura:

1) Kontrolatu beharreko sistemaren polinomio karakteristikoa zehaztu.

$$\delta(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (14.16)$$

2) Lortu nahi dugun polinomio karakteristikoa zehaztu.

$$d(z) = z^n + d_1 z^{n-1} + \dots + d_{n-1} z + d_n \quad (14.17)$$

3)  $\underline{K}$  egoeraren berrelikadura-matrizearen koefizienteak kalkulatu:

$$d_i - a_i = I_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (14.18)$$

#### 14.2.2.2 Metodoaren aplikazioa kasu orokorrean

Har dezagun kontuan sistema bat, zeinaren portaera dinamikoa  $\underline{x}(k+1) = [\underline{F}] \underline{x}(k) + [\underline{G}] u$  ekuazioarekin ereduza baitaiteke. Beraz, lehen garatu dugun metodoa aplikatu nahi badugu,  $[\underline{F}]$  dinamika-matrizea aldatu behar dugu. Hori lortzeko,  $[\underline{M}]$  transformazio-matrize bat erabili behar dugu.  $[\underline{M}]$  matrize horrek  $\underline{x}$  eta  $\underline{x}_{be}$  egoera bektoreak erlazionatzen ditu ( $\underline{x} = [\underline{M}] \underline{x}_{be}$ ), eta, antzekotasun-

transformazio baten bidez, behagarritasun-moduko eredua lortuko du,  $\underline{x}_{be}(k+1) = [F_b] \underline{x}_{be}(k) + [G_b] u$ .

[M] matrizea kalkulatzeko urrats hauek egingo ditugu, Leuenberger zenbateslea behagarritasun-moduko egoera-ereduan idatzi ahal izateko. [M] matrizea kalkulatzeko erarik errazena da [M] matrizearen alderantzizkoa kalkulatzeko. Matrize horri [T] matrize deritzogu.

$$[T] = [M]^{-1}$$

1. Sistemaren eredua egoera-ereduan idatziko dugu: joko dugu sistema sarrera bakarrekota eta irteera bakarrekota dela.

$$\underline{x}(k+1) = [F] \underline{x}(k) + [G] u \quad (14.20)$$

$$y(k) = \underline{c}^T \underline{x}$$

Behaketa-matrizea honela idazten da.

$$\underline{x}_{beha}(k+1) = [F_b] \underline{x}_{beha}(k) + [G_b] u$$

$$y(k) = \underline{c}_{beha}^T \underline{x}_{beha}$$

Non  $\underline{c}_{beha}^T$  eta  $[F_b]$  gaiek balio hauek hartzen baitituzte:

$$\underline{c}_{beha}^T = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

$$[F_b] = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Gogoan izan behar dugu [F] matrizearen polinomio karakteristikoak itxura hau duela.

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n$$

2. Sistemaren eredua behagarritasun-moduan idatzi behar dugu; horretarako, [M] transformazio-matrize bat erabiliko dugu.

- Ekuazio honen bidez kalkulatu dugu  $[M]$  transformazio-matrizea:

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}(k) &= [M] \underline{x}_{beha}(k) \\ \underline{x}(k+1) &= [F] \underline{x}(k) + [G] u \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{x}_{beha}(k+1) = [M]^{-1} [F] [M] \underline{x}_{beha}(k) + [M]^{-1} [G] u$$

$$[M]^{-1} [F] [M] = [F_b] \quad (14.21)$$

$[F_b]$  da behagarritasun-matrizea.

$$[F_b] = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (14.22)$$

(14.21) berdintza erabiliz,  $[M]$  matrizea lortuko dugu. Horretarako,  $[M]$  matrizea  $[T]^{-1}$  matrizeaz ordezkatu dugu berdintza horretan.

$$[T][F][T]^{-1} = [F_b]$$

Ekuazioa  $[T]$  matrizeaz biderkatuz gero.

$$[T][F] = [F_b][T] \quad (14.23)$$

- $[M]$  matrizearen kalkuluaren prozedura:

$[F]$  eta  $[F_b]$  matrizeak ezagutuz gero,  $[M]$  matrizea kalkula daiteke; baina, errazago izateko, ebazpide hau erabiliko dugu:

$$[T][F] = [F_b][T] \quad (a)(14.24)$$

$$\begin{aligned} \underline{c}_{beha}^T &= \underline{c}^T [M] \Rightarrow \underline{c}_{beha}^T [M]^{-1} = \underline{c}^T \\ \underline{c}^T &= \underline{c}_{beha}^T [T] \Rightarrow \\ \underline{c} &= [T]^T \underline{c}_{beha} \end{aligned} \quad (b)$$

(14.24.a) eta (14.24.b) balioak dira, baldin eta soilik baldin  $[M]$  alderantzgarria bada.

Jakinik  $\underline{c}_{beha}^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$  dela eta  $f_1, f_2, \dots, f_n$  direla bilatu behar den  $[T]$  matrizearen errenkadak; honela idatz daiteke (14.24.b) ekuazioa:

$$[T]^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{c} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{f}_1^T & \underline{f}_2^T & \dots & \underline{f}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{c} \Rightarrow \underline{f}_1^T = \underline{c} \quad (14.25)$$

Bestalde, (14.24.a) ekuazioaren matrize iraulia eginez gero, honako hau lortuko dugu:

$$[T]^T [F_b]^T = [F]^T [T]^T \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{f}_1^T & \underline{f}_2^T & \dots & \underline{f}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} = [F]^T \begin{bmatrix} \underline{f}_1^T & \underline{f}_2^T & \dots & \underline{f}_n^T \end{bmatrix} \quad (14.26)$$

[1]

[2]

Helburua da  $[T]$  matrizearen  $n \times n$  elementuak kalkulatzeko; baina,  $n \times n$  ezezagunen ekuazio-sistema bat ebatzi beharrean,  $n$  ekuazio bektorial ebatziko ditugu. Horretarako, matrize-adierazpen hori  $n$  ekuazio bektorialetan banatzen da, eta banan-banan ebatziko dira horiek azkeneko zutabearen kalkulutik hasita.

Har dezagun [2] zatia:

$$[F]^T \cdot \begin{bmatrix} \underline{f}_1^T & \underline{f}_2^T & \dots & \underline{f}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F]^T \cdot \underline{f}_1^T, [F]^T \cdot \underline{f}_2^T, \dots, [F]^T \cdot \underline{f}_n^T \end{bmatrix}$$

Bestalde, [1] zatia:

$$\begin{bmatrix} \underline{f}_1^T & \underline{f}_2^T & \dots & \underline{f}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -a_1 \underline{f}_1^T + \underline{f}_2^T & -a_2 \underline{f}_1^T + \underline{f}_3^T & \dots & -a_j \underline{f}_1^T + \underline{f}_{j+1}^T & \dots & -a_n \underline{f}_1^T \end{bmatrix} \quad (14.27)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n-1\}$$

1 eta 2 zatien zutabeak berdinuz,  $n-1$  ekuazio bektorial dituen ekuazio-sistema lortuko dugu:

$$\begin{aligned}
 -a_n \underline{f}_1^T &= [F]^T \underline{f}_n^T \\
 -a_{n-1} \underline{f}_1^T + \underline{f}_n^T &= [F]^T \underline{f}_{n-1}^T \\
 -a_{n-2} \underline{f}_1^T + \underline{f}_{n-1}^T &= [F]^T \underline{f}_{n-2}^T \\
 &\dots \\
 -a_2 \underline{f}_1^T + \underline{f}_3^T &= [F]^T \underline{f}_2^T \\
 -a_1 \underline{f}_1^T + \underline{f}_2^T &= [F]^T \underline{f}_1^T
 \end{aligned} \tag{14.28}$$

Azken berdintzak landuz, honako hau lortuko dugu:

$$\begin{aligned}
 \underline{f}_n^T &= \left( a_{n-1} [I] + a_{n-2} [F]^T + \dots + ([F]^T)^{n-1} \right) \underline{f}_1^T \\
 \underline{f}_{n-1}^T &= \left( a_{n-2} [I] + a_{n-3} [F]^T + \dots + ([F]^T)^{n-2} \right) \underline{f}_1^T \\
 &\dots \\
 \underline{f}_3^T &= \left( a_2 [I] + a_1 [F]^T + ([F]^T)^2 \right) \underline{f}_1^T \\
 \underline{f}_2^T &= \left( a_1 [I] + [F]^T \right) \underline{f}_1^T
 \end{aligned} \tag{14.29}$$

Hala ere, (14.28) ekuazioetako lehenengo berdintza aztertuz gero, honako hau lortuko dugu.

$$\begin{aligned}
 -a_n \underline{f}_1^T &= [F]^T \underline{f}_n^T \Rightarrow \\
 [0] &= \left( a_n [I] + a_{n-1} [F]^T + \dots + ([F]^T)^n \right) \underline{f}_1^T \Rightarrow \\
 [0] &= \left( a_n [I] + a_{n-1} [F]^T + \dots + ([F]^T)^n \right)
 \end{aligned}$$

Azken berdintza horrek ez digu inolako informaziorik ematen, edozein  $[F]$  matrize bere polinomio karakteristikoan ordezkaturata matrize nulua ematen duelako. Hori dela eta,  $n$  berdintzatik  $n-1$  bakarrik izango dira erabilgarriak. Gogoan izan behar dugu polinomio karakteristikoa ez dagoela  $[T]$  matrizearen errenkaden mende. Arazo horri aurre egiteko, (14.25) ekuazioa erabiliko dugu.

$$\begin{aligned}
\underline{f}_1^T &= \underline{c} \\
\underline{f}_n^T &= \left( \underline{a}_{n-1} [I] + \underline{a}_{n-2} [F]^T + \dots + ([F]^T)^{n-1} \right) \underline{c} \\
\underline{f}_{n-1}^T &= \left( \underline{a}_{n-2} [I] + \underline{a}_{n-3} [F]^T + \dots + ([F]^T)^{n-2} \right) \underline{c} \\
&\dots \\
\underline{f}_3^T &= \left( \underline{a}_2 [I] + \underline{a}_1 [F]^T + ([F]^T)^2 \right) \underline{c} \\
\underline{f}_2^T &= \left( \underline{a}_1 [I] + [F]^T \right) \underline{c}
\end{aligned}$$

[T] matrizea kalkulatzeko, aurreko ekuazioen irauliak errenkadan jarri besterik ez dugu egin behar.

$$\begin{aligned}
\underline{f}_1 &= \underline{c}^T \\
\underline{f}_n &= \underline{c}^T \left( \underline{a}_{n-1} [I] + \underline{a}_{n-2} [F] + \dots + [F]^{n-1} \right) \\
\underline{f}_{n-1} &= \underline{c}^T \left( \underline{a}_{n-2} [I] + \underline{a}_{n-3} [F] + \dots + [F]^{n-2} \right) \\
&\dots \\
\underline{f}_3 &= \underline{c}^T \left( \underline{a}_2 [I] + \underline{a}_1 [F] + [F]^2 \right) \\
\underline{f}_2 &= \underline{c}^T \left( \underline{a}_1 [I] + [F] \right)
\end{aligned}$$

Horrenbestez, honela kalkula daiteke [M] matrizea.

$$[M] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T (\underline{a}_1 [I] + [F]) \\ \underline{c}^T (\underline{a}_2 [I] + \underline{a}_1 [F] + [F]^2) \\ \dots \\ \underline{c}^T (\underline{a}_{n-2} [I] + \underline{a}_{n-3} [F] + \dots + [F]^{n-2}) \\ \underline{c}^T (\underline{a}_{n-1} [I] + \underline{a}_{n-2} [F] + \dots + [F]^{n-1}) \end{bmatrix}^{-1} \quad (14.30)$$

**[M]** matrizearen alderanzgarritasuna ziurta daiteke, baldin eta sistema behagarria bada:

$$[T] = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T (a_1[l] + [F]) \\ \underline{c}^T (a_2[l] + a_1[F] + [F]^2) \\ \dots \\ \underline{c}^T (a_{n-2}[l] + a_{n-3}[F] + \dots + [F]^{n-2}) \\ \underline{c}^T (a_{n-1}[l] + a_{n-2}[F] + \dots + [F]^{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \dots & 1 & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T [F] \\ \underline{c}^T [F]^2 \\ \dots \\ \underline{c}^T [F]^{n-2} \\ \underline{c}^T [F]^{n-1} \end{bmatrix}$$

Matrize horren heina  $n$  izango da, baldin eta behagarritasun-matrizearen heina ere  $n$  bada.

$$\text{heina} \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T [F] \\ \underline{c}^T [F]^2 \\ \dots \\ \underline{c}^T [F]^{n-2} \\ \underline{c}^T [F]^{n-1} \end{bmatrix} = n \Rightarrow \text{heina}([T]) = n \Rightarrow \text{heina}([M]) = n$$

3. Leuenberger zenbateslearen ekuazioak idatziko ditugu:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}(k+1) &= [F] \hat{\underline{x}}(k) + [G]u + \underline{L}(y(k) - \hat{y}(k)) \Rightarrow \\ \hat{\underline{x}}(k+1) &= [F] \hat{\underline{x}}(k) + [G]u + \underline{L}\underline{c}^T (\underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k)) \Rightarrow \\ \hat{\underline{x}}(k+1) &= ([F] - \underline{L}\underline{c}^T) \hat{\underline{x}}(k) + \underline{L}\underline{c}^T \underline{x}(k) + [G]u \Rightarrow \\ [M] \hat{\underline{x}}_{beha}(k+1) &= ([F] - \underline{L}\underline{c}^T)[M] \hat{\underline{x}}_{beha}(k) + \underline{L}\underline{c}^T [M] \underline{x}_{beha} + [G]u \Rightarrow \\ \hat{\underline{x}}_{beha}(k+1) &= [M]^{-1}([F] - \underline{L}\underline{c}^T)[M] \hat{\underline{x}}_{beha}(k) + [M]^{-1} \underline{L}\underline{c}^T [M] \underline{x}_{beha} + [M]^{-1} [G]u \\ \hat{\underline{x}}_{beha}(k+1) &= ([F_b] - [M]^{-1} \underline{L}\underline{c}_{beha}^T) \hat{\underline{x}}_{beha}(k) + [M]^{-1} \underline{L}\underline{c}_{beha}^T \underline{x}_{beha} + [M]^{-1} [G]u \end{aligned} \quad (14.31)$$

$[M]$  antzekotasun-transformazioaren matrizea ezagutuz,  $\underline{x}$  egoera bektorea eta  $\underline{x}_{beha}$  egoera bektorea erlaziona ditzakegu. Transformazio hori erabiliz gero, ekuazio hau aterako da zenbateslearen behagarritasun-moduan idaztean.

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}_{beha}(k+1) &= ([F_b] - [M]^{-1} \underline{L} \underline{C}_{beha}^T) \hat{\underline{x}}_{beha}(k) + [M]^{-1} \underline{L} \underline{C}_{beha}^T \underline{x}_{beha} + [M]^{-1} [G] u \\ \underline{x}_{beha}(k+1) &= [F] \underline{x}(k) + [G] u \Rightarrow \underline{x}_{beha}(k+1) = [M]^{-1} [F] [M] \underline{x}_{beha}(k) + [M]^{-1} [G] u \Rightarrow \\ \underline{x}_{beha}(k+1) - \hat{\underline{x}}_{beha}(k+1) &= ([F_b] - [M]^{-1} \underline{L} \underline{C}_{beha}^T) (\underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}_{beha}(k))\end{aligned}$$

Ikus daitekeenez,  $\underline{L}$  berrelikadura bektorea kalkulatzeko, berdintza hau egingo dugu.

$$\begin{aligned}\underline{L}_{beha} &= [M]^{-1} \underline{L} \Rightarrow \\ \underline{L} &= [M] \underline{L}_{beha}\end{aligned}\tag{14.32}$$

Non

$$\underline{L}_{beha} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix}\tag{14.33}$$

Gogoan izan behar dugu  $d_j$  eta  $a_j$  koefizienteak lortu nahi dugun polinomio karakteristikoaren eta sistemak berez duen polinomio karakteristikoaren koefizienteak direla hurrenez hurren.  $\underline{L}_{beha}$  bektorearen osagaiak lortzeko, (14.16), (14.17) eta (14.18) berdintzak erabili behar ditugu.

### 14.2.3 Leuenberger zenbateslearen erabilera begizta itxian

Aurreko atalean ikusi dugunez, Leuenberger zenbateslea sistema baten egoera bektorea zenbatesteko egina dago. Horrez gain, zenbatesle honek denbora errealean ematen dizkigu sistemaren egoeraren zenbatespena. Leuenberger zenbateslea kontrol-algoritmo batean erabiltzeko, urrats hauek egingo ditugu.

1. Sistemaren eredua finkatuko dugu. Sistemak sarrera bakarra eta irteera bakarra dituela suposatuko dugu.

$$\begin{aligned}\underline{x}(k+1) &= [\underline{F}]\underline{x}(k) + [\underline{G}]u(k) \\ y(k) &= \underline{c}^T \underline{x}(k)\end{aligned}\quad (14.34)$$

2. Zenbateslearen ekuazioak idatziko dugu:

$$\hat{\underline{x}}(k+1) = [\underline{F}]\hat{\underline{x}}(k) + [\underline{G}]u + \underline{L}(y(k) - \hat{y}(k)) \quad (14.35)$$

3. Berrelikadura-lege bat erabiliko dugu.  $[\underline{K}]$  berrelikadura-matrize bat erabiliko dugu ia beti. Kontsigna nulua dela joko dugu. Eskuarki, kontsigna aldatuz gero lan-puntua aldatzen dugunez, lan-puntuaren inguruan dugun hurbilketa lineala aldatzen dugu. Beraz, kontsigna aldakorrentzat  $u(k)$  irteera-aldagaia kalkulatzean, sistemaren hurbilketa lineala kalkulatu dugu, eta Leuenberger zenbatesleari dagokion  $\underline{L}$  bektorea kalkulatu dugu. Hori dela eta, ez dirudi zentzuzkoa seinale txikietako ereduan kontuan hartzea kontsigna. Horrenbestez, kontrolaren legea honela idatz daiteke.

$$u(k) = -[\underline{K}]\underline{x}(k)$$

$\underline{x}(k)$  egoera bektorerik ez dugunez, Leuenberger zenbatesleak ematen digun  $\hat{\underline{x}}(k)$  egoeraren zenbatespena erabiliko dugu berrelikadura ixteko.

$$u(k) = -[\underline{K}]\hat{\underline{x}}(k) \quad (14.36)$$

Begizta ixtean,  $\underline{u}(k)$  aldagaia kenduko dugu (14.36), (14.35) eta (14.34) ekuazioetatik, ez delako ez sarrera-aldagaia, ez egoera-aldagaia. Ondorioz, sistemaren begizta itxiko egoera-eredu bat proposatzean, ekuazio hau idatziko dugu.

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}(k+1) &= [\underline{F}]\hat{\underline{x}}(k) - [\underline{G}][\underline{K}]\hat{\underline{x}}(k) + \underline{L}\underline{c}^T(\underline{x}(k) - \hat{\underline{x}}(k)) \Rightarrow \\ \hat{\underline{x}}(k+1) &= ([\underline{F}] - [\underline{G}][\underline{K}] - \underline{L}\underline{c}^T)\hat{\underline{x}}(k) + \underline{L}\underline{c}^T \underline{x}(k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) \\ \hat{\underline{x}}(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [\underline{F}] & -[\underline{G}][\underline{K}] \\ \underline{L}\underline{c}^T & [\underline{F}] - [\underline{G}][\underline{K}] - \underline{L}\underline{c}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \hat{\underline{x}}(k) \end{bmatrix} \\ y(k) &= [\underline{c}^T \quad \underline{0}^T] \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \hat{\underline{x}}(k) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (14.37)$$

Hala ere, (14.37) ereduaren dinamika aztertzea oso zaila denez,  $\hat{\underline{x}}(k)$  aldagaia erabili beharrean honela definitzen dugun errore bektorea erabiliko dugu  $\underline{x}(k)$  bektorearekin batera, sistemaren begizta itxiko egoera-eredua idazteko.

$$\underline{\delta}(k) = \hat{\underline{x}}(k) - \underline{x}(k) \quad (14.38)$$

$$\begin{aligned} \underline{\delta}(k+1) &= ([F] - \underline{L}\underline{c}^T) \underline{\delta}(k) \\ \underline{x}(k+1) &= [F]\underline{x}(k) - [G][K](\underline{x}(k) + \underline{\delta}(k)) \\ \begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) \\ \underline{\delta}(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [F] - [G][K] & -[G][K] \\ [0] & [F] - \underline{L}\underline{c}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{\delta}(k) \end{bmatrix} \\ \underline{y}(k) &= \begin{bmatrix} \underline{c}^T & \underline{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{\delta}(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14.39)$$

Begizta itxiko sistemaren egonkortasuna eta dinamika aztertzeko,  $[\Phi_{bi}]$  matrizearen autobalioak kalkulatu behar ditugu.

$$[\Phi_{bi}] = \begin{bmatrix} [F] - [G][K] & -[G][K] \\ [0] & [F] - \underline{L}\underline{c}^T \end{bmatrix} \quad (14.40)$$

Horretarako,  $\det(\lambda[I]_{2nx2n} - [\Phi_{bi}]) = 0$  ekuazioa ebatzi behar dugu. Determinanteen propietateak erabiliz,

$$\begin{aligned} \det(\lambda[I]_{2nx2n} - [\Phi_{bi}]) &= 0 \Rightarrow \\ \det\left(\lambda[I]_{2nx2n} - \begin{bmatrix} [F] - [G][K] & -[G][K] \\ [0] & [F] - \underline{L}\underline{c}^T \end{bmatrix}\right) &\Rightarrow \\ \det\left(\begin{bmatrix} \lambda[I] - ([F] - [G][K]) & [G][K] \\ [0] & \lambda[I] - ([F] - \underline{L}\underline{c}^T) \end{bmatrix}\right) &\Rightarrow \\ \det(\lambda[I]_{n \times n} - ([F] - [G][K])) \det(\lambda[I]_{n \times n} - ([F] - \underline{L}\underline{c}^T)) - \det([0]) \det([G][K]) &= 0 \Rightarrow \\ \det(\lambda[I]_{n \times n} - ([F] - [G][K])) \det(\lambda[I]_{n \times n} - ([F] - \underline{L}\underline{c}^T)) &= 0 \end{aligned}$$

Beraz, begizta itxiko sistemaren polinomio karakteristikoak bi polinomioz osatuta dago.

$p(\lambda)$  polinomioaren erroak finkatuz,  $[K]$  berrelikadura-matrizea lortuko dugu.

$$p(\lambda) = \det(\lambda[I] - [F] + [G][K]) = 0 \quad (14.41)$$

Polinomio hori kalkulatzeko, 13. ataleko irizpideei jarraitu behar diegu (ikus 13.9.5). Irizpide horiek eman ditugunez, ez ditugu hemen errepikatuko. Hasieran esan dugun bezala, sistema sarrera bakarrekoa denez,  $[G]$  matrizea zutabe erako bektore bilakatzen da, eta  $[K]$  matrizea errenkada erako bektore.

Bestalde,  $q(\lambda)$  polinomioak Leuenberger zenbateslearen dinamika finkatzen digu. Ikus daitekeenez, kontrol-legeak eta zenbatesleak dagozkien poloak sartzen dizkiote sistemari begizta itxian. Zenbatesleak eta berrelikadura-legeak sartzen dituzten poloek egonkortasun-kondizio egoki batzuk bete behar dituzte. Kontrolari egotzi behar zaizkion kondizioek emango dizkigute moteltze-kondizioak. Kondizio horiek BIBO egonkortasuna bete behar dute.

$$q(\lambda) = \det(\lambda[I] - [F] + \underline{L}\underline{c}^T) = 0$$

### 14.3 KALMAN

Kontrolatu beharreko sistema guztiek perturbazioak jasaten dituzte. Bi mailatan gerta daitezke perturbazio horiek. Perturbazio batzuk eragin zuzena dute sistemaren dinamikan; sistemaren eragin ez-linealek sortutakoak edo guk sistema ereduizatzean sortzen ditugun hurbilketa eta akatsen ondoriozkoak dira. Beste perturbazioak, berriz, sistema kontrolatzeko erabiltzen ditugun neurgailuetan agertzen zaizkigu; neurgailuek jasaten dituzten perturbazio horiek, eskuarki, zarata elektrikoari lotutako fenomenoak dira. Horrelako sistemak kontrolatzeko, lehenik zenbatesle egoki bat eraiki behar da. Horretarako, Kalman zenbateslea erabiliko dugu. Kalman zenbatesleak eredu hau duela joko dugu.

Sistemaren eredua:

$$\begin{aligned} [x(k+1)] &= [F][x(k)] + [G][u(k)] + [v(k)] \\ [y(k)] &= [C][x(k)] + [e(k)] \end{aligned} \quad (14.42)$$

Neurgailuetan ditugun perturbazioen bektorea da  $[e(k)]$ , eta dinamikan ereduizatu gabeko fenomenoek sortutako perturbazioen bektorea,  $[v(k)]$ . Estatistika erabilita ereduiztatuko ditugu perturbazio horiek, ez baitugu ezagutzen beren jarrera. Suposatuko dugu  $[e(k)]$  eta  $[v(k)]$  bektoreak prozesu estokastikoak direla eta ez dutela inolako lotura edo mendekotasunik haien artean. Bestalde, joko dugu prozesu horiek prozesu gausstarrak direla. Prozesuek  $k_1$  aldiunean duten banaketa, horrenbestez, askea edo independentea da prozesuek  $k_2$  aldiunean duten banaketarekiko. Beraz, batetik, prozesu guztiak askeak dira bata

bestearekiko, eta, bestetik, prozesu bereko aldiune ezberdinetako banaketak ere askeak dira. Prozesuak gausstarrak direla jakinda, suposatuko dugu prozesu horien aldiune jakin bateko batezbestekoa 0 dela, eta haien autokobariantza-matrizeak ezagunak direla.

$$E(\mathbf{e}(k)) = [0] \quad (14.43)$$

$$E(\mathbf{v}(k)) = [0] \quad (14.44)$$

$$E(\mathbf{e}(k)\mathbf{e}(k)^T) = [\mathbf{R}_e] \quad (14.45)$$

$$E(\mathbf{v}(k)\mathbf{v}(k)^T) = [\mathbf{R}_v] \quad (14.46)$$

Gogoan izan behar dugu  $[\mathbf{R}_e]$  eta  $[\mathbf{R}_v]$  matrizeak diagonalak direla, prozesuak independenteak edo askeak direlako bata bestetik.

Kalman zenbateslearen egiturak itxura hau du:

$$[\hat{\mathbf{x}}(k+1)] = [\mathbf{F}][\hat{\mathbf{x}}(k)] + [\mathbf{G}][\mathbf{u}(k)] + [\mathbf{K}(k)]([\mathbf{y}(k)] - [\mathbf{C}][\hat{\mathbf{x}}(k)]) \quad (14.47)$$

Non  $[\mathbf{K}(k)]$  baita Kalman zenbateslearen edo iragazkiaren irabazi-matrizea. Irabazi-matrize hori  $k$  aldiunearen mende dago. Kalman iragazkiaren kalkulua  $[\mathbf{K}(k)]$  irabazi-matrizearen kalkuluan datza.  $[\mathbf{K}(k)]$  irabazi-matrizea lortzeko, zenbatespen-errorean oinarrituko gara. Zenbatespen-erroreen karratuaren batezbestekoa ahalik eta txikiena egiten duen  $[\mathbf{K}(k)]$  matrizea lortu behar dugu.

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{x}}(k+1)] &= [\mathbf{x}(k+1)] - [\hat{\mathbf{x}}(k+1)] \Rightarrow \\ [\mathbf{K}(k)] & \underset{\text{txikiena}}{\arg\min} \left( E([\tilde{\mathbf{x}}(k+1)] [\tilde{\mathbf{x}}(k+1)]^T) \right) \end{aligned} \quad (14.48)$$

Bestalde, zenbatespen-erroreen batezbestekoa honela kalkula daiteke.

$$\begin{aligned} E([\tilde{\mathbf{x}}(k+1)]) &= E([\mathbf{x}(k+1)] - [\hat{\mathbf{x}}(k+1)]) \Rightarrow \\ \left\{ \begin{aligned} E([\mathbf{x}(k+1)]) &= E([\mathbf{F}][\mathbf{x}(k)] + [\mathbf{G}][\mathbf{u}(k)] + [\mathbf{v}(k)]) \\ E([\hat{\mathbf{x}}(k+1)]) &= E([\mathbf{F}][\hat{\mathbf{x}}(k)] + [\mathbf{G}][\mathbf{u}(k)] + [\mathbf{K}(k)][\mathbf{C}]E([\mathbf{x}(k)] - [\hat{\mathbf{x}}(k)]) \end{aligned} \right. \Rightarrow \\ \left\{ \begin{aligned} E([\mathbf{x}(k+1)]) &= E([\mathbf{F}][\mathbf{x}(k)] + [\mathbf{G}][\mathbf{u}(k)]) \\ E([\hat{\mathbf{x}}(k+1)]) &= E([\mathbf{F}][\hat{\mathbf{x}}(k)] + [\mathbf{G}][\mathbf{u}(k)] + [\mathbf{K}(k)][\mathbf{C}]E([\mathbf{x}(k)] - [\hat{\mathbf{x}}(k)]) \end{aligned} \right. \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\tilde{x}(k+1)) &= E(x(k+1) - \hat{x}(k+1)) \Rightarrow \\
E(\tilde{x}(k+1)) &= [F]E(x(k)) - [K(k)][C]E(x(k) - \hat{x}(k)) \Rightarrow \\
E(\tilde{x}(k+1)) &= ([F] - [K(k)][C])E(x(k) - \hat{x}(k)) \Rightarrow \\
E(\tilde{x}(k+1)) &= ([F] - [K(k)][C])E(\tilde{x}(k))
\end{aligned}$$

Horrenbestez, hau da zenbatespen-errorearen batezbestekoa:

$$E(\tilde{x}(k+1)) = ([F] - [K(k)][C])E(\tilde{x}(k)) \quad (14.49)$$

Gehikuntza-ekuazio horrek hasierako kondizio hau du:

$$E(\tilde{x}(0)) = [b_0] \quad (14.50)$$

Erroreen karratuaren batezbestekoa kalkulatzeko, urrats hauek egingo ditugu.

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = [F]\tilde{x}(k) + [v(k)] - [K(k)][y(k) - [C]\hat{x}(k)] \\ y(k) = [C]x(k) + [e(k)] \end{cases} \Rightarrow \quad (14.51)$$

$$\tilde{x}(k+1) = ([F] - [K(k)][C])\tilde{x}(k) + [v(k)] - [K(k)][e(k)]$$

$$E(\tilde{x}(k)[\tilde{x}(k)]^T) = [P(k)] \Rightarrow \quad (14.52)$$

$$[P(k+1)] = E(\tilde{x}(k+1)[\tilde{x}(k+1)]^T)$$

Aurreko ekuazioa gehiago garatzeko,

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(k+1)[\tilde{x}(k+1)]^T &= (([F] - [K(k)][C])\tilde{x}(k) + [v(k)] - [K(k)][e(k)]) \\
&\quad (([F] - [K(k)][C])\tilde{x}(k) + [v(k)] - [K(k)][e(k)])^T \\
\tilde{x}(k+1)[\tilde{x}(k+1)]^T &= ([F] - [K(k)][C])\tilde{x}(k)[\tilde{x}(k)]^T([F] - [K(k)][C])^T + \\
&\quad + [v(k)][\tilde{x}(k)]^T([F] - [K(k)][C])^T - [K(k)][e(k)][\tilde{x}(k)]^T([F] - [K(k)][C])^T \\
&\quad - ([F] - [K(k)][C])\tilde{x}(k)[v(k)]^T + [v(k)][v(k)]^T - [K(k)][e(k)][v(k)]^T \\
&\quad - [v(k)][e(k)]^T[K(k)]^T + [K(k)][e(k)][e(k)]^T[K(k)]^T \\
&\quad - ([F] - [K(k)][C])\tilde{x}(k)[e(k)]^T[K(k)]^T
\end{aligned}$$

Aurreko ekuazio horren batezbestekoa kalkulatz gero, honako hau lortuko dugu. Izan ere,  $[v(k)]$ ,  $[\tilde{x}(k)]$  eta  $[e(k)]$  bektoreak estatistikoki askeak dira. Horrenbestez, bektore horien arteko korrelazioa nulua da.

$$[P(k+1)] = ([F] - [K(k)][C])[P(k)]([F] - [K(k)][C])^T + [R_v] + [K(k)][R_e][K(k)]^T \quad (14.53)$$

$$E([v(k)][\tilde{x}(k)]^T) = [0]$$

$$E([e(k)][\tilde{x}(k)]^T) = [0]$$

$$E([\tilde{x}(k)][v(k)]^T) = [0]$$

$$E([e(k)][v(k)]^T) = [0]$$

$$E([v(k)][e(k)]^T) = [0]$$

$$E([\tilde{x}(k)][e(k)]^T) = [0]$$

$[K(k)]$  matrizea aukeratuko dugu,  $[P(k+1)]$  matrizearen diagonal nagusiko elementuak ahalik eta txikiak izan daitezen. Horretarako, (14.53) matrize-berdintza berridatziko dugu. Gogoan izan behar dugu  $[R_v]$ ,  $[R_e]$ ,  $[P(k)]$  eta  $[P(k+1)]$  matrizeak simetrikoak eta positiboki erdidefinituak direla. Izan ere,  $[R_v]$  eta  $[R_e]$  matrizeak diagonalak dira, eta beren diagonal nagusiko elementu guztiek positiboak izan behar dute,  $[v(k)]$  eta  $[e(k)]$  prozesuen korrelazioak direlako. Kondizio eta propietate horiek guztiak kontuan harturik, ondorio hau atera dezakegu:

$$[R_v] = [R_v]^T \quad (14.54)$$

$$[R_e] = [R_e]^T \quad (14.55)$$

$$[P(k)] = [P(k)]^T \quad (14.56)$$

$$[P(k+1)] = [P(k+1)]^T \quad (14.57)$$

(14.54), (14.55), (14.56) eta (14.57) propietateak erabiliz, (14.53) berdintza honela idatz daiteke.

$$\begin{aligned}
 [P(k+1)] &= [F][P(k)][F]^T \\
 &\quad - [K(k)][C][P(k)][F]^T + [R_v] \\
 &\quad - [F][P(k)][C]^T [K(k)]^T \\
 &\quad + [K(k)]([R_e] + [C][P(k)][C]^T)[K(k)]^T
 \end{aligned} \tag{14.58}$$

$$\begin{aligned}
 [P(k+1)] &= [F][P(k)][F]^T \\
 &\quad - [K(k)]([R_e] + [C][P(k)][C]^T)([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1} [C][P(k)][F]^T \\
 &\quad + [R_v] \\
 &\quad - [F][P(k)][C]^T [K(k)]^T \\
 &\quad + [K(k)]([R_e] + [C][P(k)][C]^T)[K(k)]^T \\
 &\quad + [F][P(k)][C]^T ([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1} [C][P(k)][F]^T \\
 &\quad - [F][P(k)][C]^T ([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1} [C][P(k)][F]^T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [P(k+1)] &= [F][P(k)][F]^T \\
 &\quad - [K(k)]([R_e] + [C][P(k)][C]^T)([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1} [C][P(k)][F]^T \\
 &\quad + [R_v] \\
 &\quad - [F][P(k)][C]^T [K(k)]^T \\
 &\quad + [K(k)]([R_e] + [C][P(k)][C]^T)[K(k)]^T \\
 &\quad + [F][P(k)][C]^T ([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1} [C][P(k)][F]^T \\
 &\quad - [F][P(k)][C]^T ([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1} [C][P(k)][F]^T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[P(k+1)] &= [F][P(k)][F]^T + [R_v] \\
&- [K(k)]([R_e] + [C][P(k)][C]^T)([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1}[C][P(k)][F]^T \\
&- [F][P(k)][C]^T[K(k)]^T \\
&+ [K(k)]([R_e] + [C][P(k)][C]^T)[K(k)]^T \\
&+ [F][P(k)][C]^T([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1}[C][P(k)][F]^T \\
&- [F][P(k)][C]^T([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1}[C][P(k)][F]^T
\end{aligned}$$

Aurreko berdintza apur bat landuz, honako hau lortuko dugu.

$$\begin{aligned}
[P(k+1)] &= [F][P(k)][F]^T + [R_v] \\
&- [F][P(k)][C]^T([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1}[C][P(k)][F]^T \\
&+ ([K(k)]([R_e] + [C][P(k)][C]^T) - [F][P(k)][C]^T) \\
&\left( [K(k)]^T - ([F][P(k)][C]^T([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1})^T \right)
\end{aligned}$$

Azkenik, matrize-berdintza hau lor dezakegu.

$$\begin{aligned}
[P(k+1)] &= [F][P(k)][F]^T + [R_v] \\
&- [F][P(k)][C]^T([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1}[C][P(k)][F]^T \\
&+ \left( [K(k)] - [F][P(k)][C]^T([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1} \right) ([R_e] + [C][P(k)][C]^T) \quad (14.59) \\
&\left( [K(k)]^T - ([F][P(k)][C]^T([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1})^T \right)
\end{aligned}$$

$[P(k)]$ ,  $[R_v]$  eta  $[R_e]$  matrizeak positiboki erdidefinituak direnez,  $([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1}$ ,  $([R_e] + [C][P(k)][C]^T)$  eta  $[F][P(k)][F]^T$  matrizeak ere positiboki erdidefinituak dira. Horrenbestez,  $[P(k+1)]$  matrizea ere halakoa izango da, hau da, positiboki erdidefinitua.  $[P(k+1)]$  matrizeko elementu guztiak ahalik eta txikienak izan daitezzen, (14.59) ekuazioko eskuineko hirugarren atala ahalik eta txikiena egin behar dugu. Gogoan izan behar dugu (14.59) ekuazioko eskuineko hiru terminotatik, hirugarrena bakarrik dagoela  $[K(k)]$  matrizearen mende.  $([R_e] + [C][P(k)][C]^T)$  matrizea positiboki erdidefinitua denez,  $[P(k+1)]$  matrizeko

elementuen balio absolutuak ahalik eta txikienak izan daitezen,  $[K(k)]$  matrizeak balio hau hartu behar du.

$$[K(k)] = [F][P(k)][C]^T ([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1} \quad (14.60)$$

$[K(k)]$  matrizea (14.60) formularen bidez kalkulatzen badugu, honela lor dezakegu  $[P(k+1)]$  matrizea.

$$\begin{aligned} [P(k+1)] &= \\ &= [F][P(k)][F]^T + [R_v] - [F][P(k)][C]^T ([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1} [C][P(k)][F]^T \end{aligned} \quad (14.61)$$

Horrenbestez, Kalman zenbateslearen ekuazioak honela idatz daitezke. Ekuazio horiek  $k$  aldiune guztietan exekutatu behar ditugu.

1. Lehenik,  $[K(k)]$  irabazi-matrizea kalkulatuko dugu.

$$[K(k)] = [F][P(k)][C]^T ([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1} \quad (14.62)$$

2. Ondoren, Kalman zenbateslearen zenbatespena lortuko dugu. Horretarako, sistemaren irteera lagindu behar dugu. Gogoan izan behar dugu  $[C]$ ,  $[F]$  eta  $[G]$  matrizeak ezagunak izan behar dutela.  $[x(k)]$  egoera bektorearen  $k$  aldiuneko zenbatespena da  $[\hat{x}(k)]$ . Kontuan hartu behar dugu zenbatespen hori  $k-1$  aldiunean egin dela. Beraz,  $[\hat{x}(k+1)]$  zenbatespena  $k$  aldiunean egiten da,  $k$  aldiunea bitartean ditugun laginekin bakarrik.

$$[\hat{x}(k+1)] = [F][\hat{x}(k)] + [G][u(k)] + [K(k)]([y(k)] - [C][\hat{x}(k)]) \quad (14.63)$$

3. Azkenik,  $[P(k+1)]$  matrizea kalkulatuko dugu,  $k+1$  aldiuneko  $[K(k+1)]$  matrizea lortu ahal izateko.

$$[P(k+1)] = [F][P(k)][F]^T + [R_v] - [F][P(k)][C]^T ([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1} [C][P(k)][F]^T \quad (14.64)$$

1, 2 eta 3 urratsak  $k$  aldiune guztietan exekutatzen ditugu. Hala ere, Kalman zenbateslearen hasieratzea argitu behar dugu:  $k = 0$  denean,  $[P(0)]$  matrizea eta  $[\hat{x}(0)]$  bektorea ezagutu behar ditugu  $[\hat{x}(1)]$  bektorearen zenbatespena egin ahal izateko, eta  $[K(0)]$  eta  $[P(1)]$  matrizeak lortu ahal izateko. Eskuarki, sistemaren

$[x(0)]$  hasierako egoera ezaguna izan ohi denez,  $[\hat{x}(0)] = [x(0)]$  berdintza egin ohi da. Bestalde, unitate matritzearekiko proportzionala den matritze baten itxura hartzen du  $[P(0)]$  matritzeak.

$$[P(0)] = \alpha [I] \quad (14.65)$$

Non  $\alpha$  zenbaki positibo txiki bat baita.

Sarritan, Kalman zenbateslearen matritzeak egonkortu egiten dira. Horrek esan nahi  $[K(k)]$  eta  $[P(k)]$  matritzeen balioak ez direla aldatzen.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [K(k)] = [K_{\infty}] \quad (14.66)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [P(k)] = [P_{\infty}] \quad (14.67)$$

Kalman zenbateslea eraikitzean,  $[K(k)] = [K_{\infty}]$  eta  $[P(k)] = [P_{\infty}]$  berdintzak egin ditzakegu kalkuluak errazteko. Horrek esan nahi du hasieran bakarrik kalkulatu behar ditugula  $[P(k)]$  eta  $[K(k)]$  matritzeak. Horretarako, (14.64) eta (14.62) berdintzetan  $[K(k)] = [K_{\infty}]$  eta  $[P(k)] = [P_{\infty}]$  ordezkapenak egin beharko ditugu.

$$[P_{\infty}] = [F][P_{\infty}][F]^T + [R_v] - [F][P_{\infty}][C]^T ([R_e] + [C][P_{\infty}][C]^T)^{-1} [C][P_{\infty}][F]^T \quad (14.68)$$

$$[K_{\infty}] = [F][P_{\infty}][C]^T ([R_e] + [C][P_{\infty}][C]^T)^{-1} \quad (14.69)$$

Beraz, Kalman zenbateslea ekuazio bakar batean laburtu daiteke. Ekuazio hori  $k$  aldiune orotan exekutatu beharko dugu,  $[\hat{x}(k+1)]$  zenbatespena lortu ahal izateko.

$$[\hat{x}(k+1)] = [F][\hat{x}(k)] + [G][u(k)] + [K_{\infty}]([y(k)] - [C][\hat{x}(k)]) \quad (14.70)$$

## 14.1 ariketa

Demagun kontrolatu nahi dugun sistemak eredu hau duela.

$$y(k+3) + y(k+2) - 4y(k+1) - 4y(k) - u(k+1) + u(k) = 0$$

➤ Kalkulatu sistema horren egoera-eredu baliokide bat.

$$y(k+3) + y(k+2) - 4y(k+1) - 4y(k) - u(k+1) + u(k) = 0 \Rightarrow$$

$$x_3(k+1) = y(k+3) + y(k+2) - 4y(k+1) - u(k+1) = 4y(k) - u(k) \Rightarrow$$

$$x_3(k) = y(k+2) + y(k+1) - 4y(k) - u(k) \Rightarrow$$

$$x_2(k+1) = y(k+2) + y(k+1) = 4y(k) + u(k) \Rightarrow$$

$$x_2(k) = y(k+1) + y(k) \Rightarrow$$

$$x_1(k+1) = y(k+1) \Rightarrow$$

$$x_1(k) = y(k)$$

Laburbilduz, hiru egoera-aldagai izango ditugu, sistema hirugarren mailakoa delako.

$$\begin{cases} x_3(k) = y(k+2) + y(k+1) - 4y(k) - u(k) \\ x_2(k) = y(k+1) + y(k) \\ x_1(k) = y(k) \\ x_3(k+1) = 4y(k) - u(k) \end{cases}$$

Aurreko hiru ekuazioetatik  $y(k)$ ,  $y(k+1)$  eta  $y(k+2)$  aldagaiak kentzen baditugu, eta  $x_1(k)$ ,  $x_2(k)$  eta  $x_3(k)$  aldagaiez ordezkatu.

$$\begin{cases} x_3(k+1) = 4x_1(k) - u(k) \\ x_3(k) = x_2(k+1) - 4x_1(k) - u(k) \Rightarrow \\ x_2(k) = x_1(k+1) + x_1(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3(k+1) = 4x_1(k) - u(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) + 4x_1(k) + u(k) \\ x_1(k+1) = x_2(k) - x_1(k) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y(k)] = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

- Garatu Leuenberger zenbatesle bat sistemarentzat. Zenbateslearen polinomio karakteristikoak  $z^3 = 0$  itxura izan behar du.

Zenbateslearen egitura hau da:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \hat{x}_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} (y(k) - \hat{y}(k))$$

$$\hat{y}(k) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix}$$

$$[F_b] = [F] - \underline{L}c^T$$

Gogoan izan behar dugu  $[F_b]$  matrizea dela lortu nahi dugun matrizea.

Berdintza horren eskuineko atala garatuz gero, honako hau lortuko dugu:

$$d(z) = z^3 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -d_1 & 1 & 0 \\ -d_2 & 0 & 1 \\ -d_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ l_2 & 0 & 0 \\ l_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdintza hori elementuz elementu berdinduz, honako hau lortuko dugu:

$$d_i - a_i = l_i \quad \forall i = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} d_1 - a_1 &= l_1 \Rightarrow \\ l_1 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 - a_2 &= l_2 \Rightarrow \\ l_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 - a_3 &= l_3 \Rightarrow \\ l_3 &= 4 \end{aligned}$$

Horrenbestez, honela idatz daiteke zenbateslearen egitura.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \hat{x}_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} (y(k) - \hat{y}(k))$$

$$\hat{y}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix}$$

- Egotzi kontroladore bat sistemari. Demagun kontsigna nulua dela. Ondorioz, erabili beharreko kontrol-legeak itxura hau izan behar du:  $u(k) = -[K] \hat{x}(k)$ .

Kalkulatu  $[K]$  berrelikadura-matrizea, aurreko Leuenberger zenbateslea erabiliz. Kalkulatu  $[K]$  matrizea, begizta itxian berrelikadurak sortzen duen polinomio karakteristikoa  $z^3 = 0$  izan dadin.

Kontrolatu beharreko sistemak eredu hau du:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y(k)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Bestalde, lehen erabilitako zenbateslea honelakoa da:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \hat{x}_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} (y(k) - \hat{y}(k))$$

$$\hat{y}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix}$$

Kontrol-legeak itxura hau du:

$$u(k) = -[K] \hat{x}(k)$$

$$u(k) = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix}$$

Zenbatespen-errorearen bektorea egoera-aldagaitzat hartuz gero, zenbateslea kontuan hartuta, honela idatz dezakegu begizta itxian dugun egoera-eredua.

$$\underline{\delta}(k) = \hat{x}(k) - \underline{x}(k)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) \\ \underline{\delta}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F] - [G][K] & -[G][K] \\ [0] & [F] - \underline{L}\underline{c}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{\delta}(k) \end{bmatrix}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \underline{c}^T & \underline{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \underline{\delta}(k) \end{bmatrix}$$

Begizta itxiko sistemaren egonkortasuna eta dinamika aztertzeko,  $[\Phi_{bi}]$  matrizearen autobalioak kalkulatu behar ditugu.

$$[\Phi_{bi}] = \begin{bmatrix} [F] - [G][K] & -[G][K] \\ [0] & [F] - \underline{L}\underline{c}^T \end{bmatrix}$$

Horretako  $\det(\lambda [I]_{2n \times 2n} - [\Phi_{bi}]) = 0$  ekuazioa ebatzi behar dugu.

$$\det(\lambda [I]_{2n \times 2n} - [\Phi_{bi}]) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \det \left( \lambda [I]_{2n \times 2n} - \begin{bmatrix} [F] - [G][K] & -[G][K] \\ [0] & [F] - \underline{L}c^T \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \\
& \det \left( \begin{bmatrix} \lambda [I] - ([F] - [G][K]) & [G][K] \\ [0] & \lambda [I] - ([F] - \underline{L}c^T) \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \\
& \det(\lambda [I]_{n \times n} - ([F] - [G][K])) \det(\lambda [I]_{n \times n} - ([F] - \underline{L}c^T)) - \det([0]) \det([G][K]) \Rightarrow \\
& \det(\lambda [I]_{n \times n} - ([F] - [G][K])) \det(\lambda [I]_{n \times n} - ([F] - \underline{L}c^T)) = 0
\end{aligned}$$

Ikus daitekeenez,  $[K]$  berrelikadura-matrizeak begizta itxian sartzen dituen autobalioak eta zenbatesleak sartzen dituen autobalioak independienteak dira. Horrenbestez,  $[K]$  berrelikadura-matrizea zenbateslerik gabe kalkula daiteke. Beraz,  $[K]$  matrizeak  $\underline{x}(k)$  bektorea ezaguna duela joko dugu.  $[K]$  matrizea lortzeko, beraz, kontrola honelakoa dela suposa dezakegu:  $u(k) = -[K]\underline{x}(k)$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} \\
[y(k)] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Azken era horretara, zaila denez guk nahi ditugun autobalioak lortzea, beste egoera-aldagai batzuk erabiliiko ditugu. Lortu nahi dugun eredu berriak itxura hau izan behar du.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_{1,g}(k+1) \\ x_{2,g}(k+1) \\ x_{3,g}(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,g}(k) \\ x_{2,g}(k) \\ x_{3,g}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\
[y(k)] &= [C_g]^T \begin{bmatrix} x_{1,g}(k) \\ x_{2,g}(k) \\ x_{3,g}(k) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Non itxura hau baitu sistemaren polinomio karakteristikoak:

$$\delta(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = z^3 + z^2 - 4z - 4$$

Polinomio karakteristikoa  $[F]$  matrizearen autobalioak kalkulatzeko lor daiteke. Aurreko eredua lortzeko,  $[T]$  transformazio-matrizea kalkulatu dugu.

$$\underline{x}(k) = [T] \underline{x}_g(k)$$

$$[T] \begin{bmatrix} x_{1,g}(k+1) \\ x_{2,g}(k+1) \\ x_{3,g}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} [T] \begin{bmatrix} x_{1,g}(k) \\ x_{2,g}(k) \\ x_{3,g}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y(k)] = [1 \ 0 \ 0] [T] \begin{bmatrix} x_{1,g}(k) \\ x_{2,g}(k) \\ x_{3,g}(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,g}(k+1) \\ x_{2,g}(k+1) \\ x_{3,g}(k+1) \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} [T] \begin{bmatrix} x_{1,g}(k) \\ x_{2,g}(k) \\ x_{3,g}(k) \end{bmatrix} + [T]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y(k)] = [1 \ 0 \ 0] [T] \begin{bmatrix} x_{1,g}(k) \\ x_{2,g}(k) \\ x_{3,g}(k) \end{bmatrix}$$

$$[T] \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} [T]$$

$$[T][C] = [T] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow [T] = [\underline{f}_1^T \ \underline{f}_2^T \ \underline{f}_3^T] \Rightarrow \underline{f}_1^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Zutabeka biderkatuz gero,

$$-\underline{f}_1^T + \underline{f}_2^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{f}_1^T \Rightarrow \underline{f}_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{f}_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$4\underline{f}_1^T + \underline{f}_3^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{f}_2^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{f}_3^T = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Eredu berriak itxura hau du.

$$\begin{bmatrix} x_{1,g}(k+1) \\ x_{2,g}(k+1) \\ x_{3,g}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,g}(k) \\ x_{2,g}(k) \\ x_{3,g}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$[y(k)] = [0 \quad 1 \quad -1] \begin{bmatrix} x_{1,g}(k) \\ x_{2,g}(k) \\ x_{3,g}(k) \end{bmatrix}$$

Honela idatziko dugu kontrol-legea eredu berri horrentzat:

$$u(k) = -[K_g] \underline{x}_g(k) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,g}(k+1) \\ x_{2,g}(k+1) \\ x_{3,g}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,g}(k) \\ x_{2,g}(k) \\ x_{3,g}(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [k_{1,g} \quad k_{2,g} \quad k_{3,g}] \begin{bmatrix} x_{1,g}(k) \\ x_{2,g}(k) \\ x_{3,g}(k) \end{bmatrix}$$

$$[y(k)] = [0 \quad 1 \quad -1] \begin{bmatrix} x_{1,g}(k) \\ x_{2,g}(k) \\ x_{3,g}(k) \end{bmatrix}$$

Sistemak begizta itxian izan behar duen polinomio karakteristikoak  $z^3 = 0$  izan behar duenez, honela kalkula dezakegu  $[K_g]$  berrelikadura-matrizea.

$$z^3 = z^3 + d_1 z^2 + d_2 z + d_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,g}(k+1) \\ x_{2,g}(k+1) \\ x_{3,g}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-k_{1,g} & 4-k_{2,g} & 4-k_{3,g} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,g}(k) \\ x_{2,g}(k) \\ x_{3,g}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_1 & -d_2 & -d_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,g}(k) \\ x_{2,g}(k) \\ x_{3,g}(k) \end{bmatrix}$$

$$[K_g] = [-1 \quad 4 \quad 4]$$

$[K]$  matrizea berdintza honetatik lor dezakegu:

$$u(k) = -[K_g] \underline{x}_g(k) = -[K] \underline{x}(k) \Rightarrow$$

$$[K][T] = [K_g] \Rightarrow$$

$$[K] = [T]^{-1} [K_g]$$

$$[K] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 31 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Beraz, zenbateslea kalkulatu eta gero eta  $[K]$  berrelikadura-matrizea lortu eta gero, sistema honela geratuko litzateke:

1. Kontrolatu beharreko sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

2. Sistemaren egoera bektorea lortzeko zenbateslea:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \hat{x}_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} (y(k) - \hat{y}(k))$$

$$\hat{y}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix}$$

## 3. Sistemaren kontrol-legea:

$$u(k) = -\frac{1}{6}[31 \ 1 \ 7]x(k)$$

Sistemak eskatutako polinomio karakteristikoa duela egiaztatzeko, matrize honen autobalioak kalkulatu besterik ez dugu egin behar.

$$[\Phi_{bi}] = \begin{bmatrix} [F] - [G][K] & -[G][K] \\ 0 & [F] - \underline{L}c^T \end{bmatrix}$$

$$[\Phi_{bi}] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} [31/6 \ 1/6 \ 7/6] & - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} [31/6 \ 1/6 \ 7/6] \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \end{bmatrix}$$

Matrize horren autobalio guztiak nuluak dira; matrizearen polinomio karakteristikoak itxura hau du.

$$z^3 z^3 = z^6 = 0$$

## 14.2 ariketa

Demagun aurreko sistemak perturbazio gausstarrez kitzikatuta dagoela. Horrez gain, sistemaren irteerako ekuazioak ere perturbazio gausstar bat jasaten du. Perturbazio horiek independenteak dira bata bestetik. Gara ezazu Kalman zenbatesle bat sistema honentzat. Perturbazioen batezbestekoa nulua da. Bestalde, perturbazioen autokorrelazio-matrizeek balio hauek dituzte.

$$[R_v] = 10^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_e] = 20^{-2}$$

1. Sistemak eredu hau du.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} [u(k)] + \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ v_3(k) \end{bmatrix}$$

$$[y(k)] = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + e(k)$$

2. Lehenik,  $[K(k)]$  irabazi-matrizea kalkulatu dugu.

$$[K(k)] = [F][P(k)][C]^T ([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1} \Rightarrow$$

$$q = \left( 20^{-2} + [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} p_{1,1}(k) & p_{1,2}(k) & p_{1,3}(k) \\ p_{2,1}(k) & p_{2,2}(k) & p_{2,3}(k) \\ p_{3,1}(k) & p_{3,2}(k) & p_{3,3}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$[K(k)] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1}(k) & p_{1,2}(k) & p_{1,3}(k) \\ p_{2,1}(k) & p_{2,2}(k) & p_{2,3}(k) \\ p_{3,1}(k) & p_{3,2}(k) & p_{3,3}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q$$

3. Ondoren, Kalman zenbateslearen zenbatespena lortu dugu.

$$[\hat{x}(k+1)] = [F][\hat{x}(k)] + [G][u(k)] + [K(k)]([y(k)] - [C][\hat{x}(k)])$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(k+1) \\ \hat{x}_2(k+1) \\ \hat{x}_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} [u(k)] + \begin{bmatrix} k_1(k) \\ k_2(k) \\ k_3(k) \end{bmatrix} \left( [y(k)] - [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \hat{x}_1(k) \\ \hat{x}_2(k) \\ \hat{x}_3(k) \end{bmatrix} \right)$$

4. Azkenik,  $[P(k+1)]$  matrizea kalkulatu dugu,  $k+1$  aldiuneko  $[K(k+1)]$  matrizea lortu ahal izateko.

$$[P(k+1)] = [F][P(k)][F]^T + [R_v] - [F][P(k)][C]^T ([R_e] + [C][P(k)][C]^T)^{-1} [C][P(k)][F]^T$$

$$\begin{bmatrix} p_{1,1}(k+1) & p_{1,2}(k+1) & p_{1,3}(k+1) \\ p_{2,1}(k+1) & p_{2,2}(k+1) & p_{2,3}(k+1) \\ p_{3,1}(k+1) & p_{3,2}(k+1) & p_{3,3}(k+1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1}(k) & p_{1,2}(k) & p_{1,3}(k) \\ p_{2,1}(k) & p_{2,2}(k) & p_{2,3}(k) \\ p_{3,1}(k) & p_{3,2}(k) & p_{3,3}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 10^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1}(k) & p_{1,2}(k) & p_{1,3}(k) \\ p_{2,1}(k) & p_{2,2}(k) & p_{2,3}(k) \\ p_{3,1}(k) & p_{3,2}(k) & p_{3,3}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1}(k) & p_{1,2}(k) & p_{1,3}(k) \\ p_{2,1}(k) & p_{2,2}(k) & p_{2,3}(k) \\ p_{3,1}(k) & p_{3,2}(k) & p_{3,3}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\hat{x}(0)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[P(0)] = \alpha [I] = 10^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

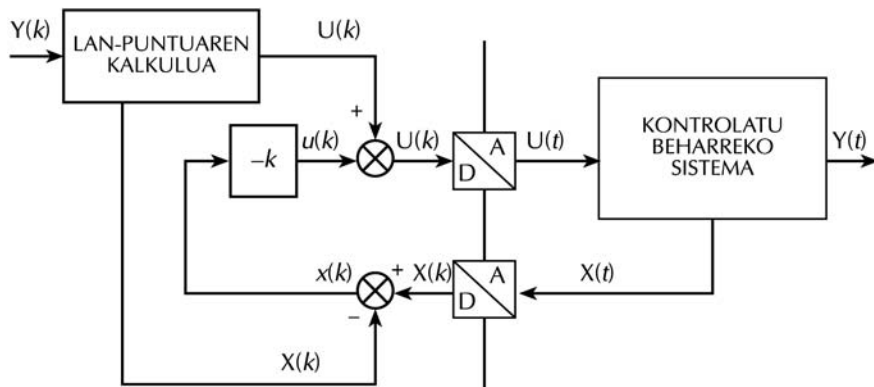


# 15

## Hobetze-kontrola

### 15.1 SARRERA

Aurreko kontrol motak aztertu eta gero, hobetze-kontrola landuko dugu orain. Kontrol mota honen helburu bakarra da gastu-funtzioa ahalik eta txikiena egitea. Gehienetan, gastu-funtzio hori sistemaren egoera-aldagaien mende dago, bai eta sistemaren sarrera-aldagaien mende ere. Horrelako gastu-funtzioekin lortu nahi dena da, batetik, sistemaren egoera-aldagaiak zerorantz jotzea eta, bestetik, sistemaren sarrera-aldagaiek ahalik eta energia gutxien erabiltzea. Kontrol mota hauek lan-puntu batekiko lan egin dute. Lan-puntu hori alda daitekeenez, hobetze-kontrolak kontsignen erroreekiko bakarrik lan egingo du. Beraz, kontrol hauek irudian agertzen den bezala lan egiten dute.



**15.1. irudia.** Kontsignaren bitartez, egoera-aldagaien eta sarrera-aldagaien lan-puntua lor daiteke, eta lan-puntu horren inguruan lan egiten du seinale txikietarako hobetze-kontrolak.

Beraz, honela adieraz daitezke kontrolaren ekuazioak.

$\underline{U}(k)$  sarrera-aldagaia

$\underline{U}_p(k)$  sarrera-aldagaiaren lan-puntua

$\underline{u}(k)$  seinale txikietarako sarrera-aldagaia

$$\underline{U}(k) = \underline{U}_p(k) + \underline{u}(k) \quad (15.1)$$

$\underline{Y}(k)$  irteera-aldagaia

$\underline{Y}_p(k)$  irteera-aldagaiaren lan-puntua

$\underline{y}(k)$  seinale txikietarako irteera-aldagaia

$$\underline{Y}(k) = \underline{Y}_p(k) + \underline{y}(k) \quad (15.2)$$

$\underline{X}(k)$  egoera-aldagaia

$\underline{X}_p(k)$  egoera-aldagaiaren lan-puntua

$\underline{x}(k)$  seinale txikietarako egoera-aldagaia

$$\underline{X}(k) = \underline{X}_p(k) + \underline{x}(k) \quad (15.3)$$

Gogoan izan behar dugu  $\underline{Y}_p(k)$  –hau da, irteeraren lan-puntua edo kontsigna–badugu, sistemaren egoera- eta sarrera-aldagaien lan-puntua lor dezakegula

sistemaren egoera-eredutik abiatuta. Beraz,  $\underline{Y}_{ip}(k)$  izateko behar ditugun  $\underline{U}_{ip}(k)$  eta  $\underline{X}_{ip}(k)$  balioak kalkulatu behar ditugu (15.4) ekuazioaren bidez.

$$\left. \begin{array}{l} \underline{X}(k+1) = \underline{f}(\underline{X}(k), \underline{U}(k)) \\ \underline{Y}(k) = \underline{g}(\underline{X}(k), \underline{U}(k)) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{X}_{ip}(k) = \underline{f}(\underline{X}_{ip}(k), \underline{U}_{ip}(k)) \\ \underline{Y}_{ip}(k) = \underline{g}(\underline{X}_{ip}(k), \underline{U}_{ip}(k)) \end{array} \right. \quad (15.4)$$

Ondoren,  $\underline{x}(k)$  seinale txikietarako egoera-aldagaiak kalkulatu behar ditugu  $\underline{X}(k)$  egoera-aldagaien laginen eta  $\underline{X}_{ip}(k)$  egoera-aldagaien lan-puntuaren bitartez.

$$\underline{x}(k) = \underline{X}(k) - \underline{X}_{ip}(k) \quad (15.5)$$

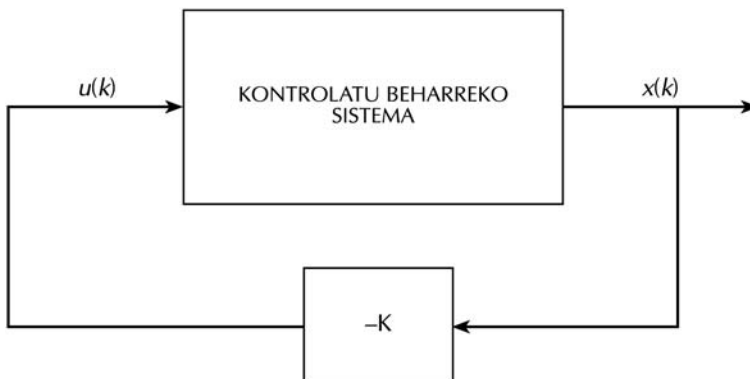
Hobetze-kontrolaren legea lortzen da, geroago egiaztatuko dugun bezala,  $\underline{x}(k)$  seinale txikietarako egoera-aldagaiak eta  $[K]$  irabazi-matrizea biderkatuta eta zeinua aldatuta. Lege horren bidez,  $\underline{u}(k)$  seinale txikietarako sarrera-aldagaiak lortu behar ditugu.

$$\underline{u}(k) = -[K] \underline{x}(k) \quad (15.6)$$

Hortaz, kontrolatu beharreko sistemaren sarrera-aldagaiak kalkulatzeko:

$$\underline{U}(k) = \underline{U}_{ip}(k) + \underline{u}(k) \quad (15.7)$$

Seinale txikietarako ereduan ez dugu kontsignarik,  $\underline{Y}_{ip}(k)$  kontsigna lan-puntua kalkulatzeko erabili delako. Horrenbestez, seinale txikietarako eredua honela adieraz daiteke:



**15.2. irudia.** Ikus daitekeenez, seinale txikietarako eredua begizta itxiko egitura da. Horrelako egitura du hobetze motako kontrolak.

## 15.2 HOBETZE-KONTROLAREN AZTERKETA ETA GARAPENA

Gogoan har dezagun seinale txikietarako sistemaren eredua. Eredua lineala da eta egoera-ekuazio hauek betetzen ditu.

$$\underline{x}(k+1)_{nx1} = [\Phi]_{n \times n} \underline{x}(k)_{nx1} + [\Gamma]_{n \times r} \underline{u}(k)_{rx1} \quad (15.8)$$

Gastu-funtzioak ahalik eta txikienak izan daitezen, hobetze-kontrolak  $\underline{u}(k)$  sarrera-aldagaiaren laginak kalkulatuko ditu. Gastu-funtzioak itxura hau duela joko dugu.

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=N} [\underline{x}^T(k) [\mathbf{Q}_1] \underline{x}(k) + \underline{u}^T(k) [\mathbf{Q}_2] \underline{u}(k)] \quad (15.9)$$

Gogoan izan gastu-funtzioak denbora-tarte bat hartzen duela, hau da,  $k = 0$  aldiunetik  $k = N$  aldiunera arte. Gastu-funtzio horrek  $\underline{x}(k)$  egoera-aldagaiaren laginak eta  $\underline{u}(k)$  sarrera-aldagaiaren laginak kontuan hartzen ditu.

Gainera,  $[\mathbf{Q}_1]$  eta  $[\mathbf{Q}_2]$  matrizeak kondizio hauek betetzen ditu:

- $[\mathbf{Q}_1]$  matrizeak  $n$  zutabe eta  $n$  errenkada ditu, egoera-aldagai kopurua  $n$  dela jakinda.
- $[\mathbf{Q}_1]$  matrizea simetrikoa da.

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}_1] &= [q_{1i,j}] \\ i, j &= \{1, 2, \dots, n\} \\ q_{1i,j} &= q_{1j,i} \end{aligned} \quad (15.10)$$

- Bestetik,  $[\mathbf{Q}_1]$  matrizea positiboki definitua da.

$$\begin{aligned} \underline{x}^T [\mathbf{Q}_1] \underline{x} &> 0 : \underline{x} \neq \underline{0} \\ \underline{x}^T [\mathbf{Q}_1] \underline{x} &= 0 : \underline{x} = \underline{0} \end{aligned} \quad (15.11)$$

- $[\mathbf{Q}_2]$  matrizeak  $n$  zutabe eta  $n$  errenkada ditu, sarrera-aldagai kopurua  $r$  dela jakinda.
- $[\mathbf{Q}_2]$  matrizea simetrikoa da.

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}_2] &= [q_{2i,j}] \\ i, j &= \{1, 2, \dots, r\} \\ q_{2i,j} &= q_{2j,i} \end{aligned} \quad (15.12)$$

- Bestalde,  $[Q_2]$  matrizea positiboki definitua da.

$$\begin{aligned} \underline{u}^T [Q_2] \underline{u} &> 0 : \underline{u} \neq \underline{0} \\ \underline{u}^T [Q_2] \underline{u} &= 0 : \underline{u} = \underline{0} \end{aligned} \quad (15.13)$$

Beraz, (15.9) gastu-funtzioa ahalik eta txikiena izateko,  $u(k)$  sarrera-laginak kalkulatzeko Lagrangeren biderkatzaileen irizpidea erabiliko dugu. Kontuan izan behar dugu Lagrangeren  $L$  funtzio laguntzailea idazteko sistemaren (15.8) ekuazio dinamikoak erabili behar ditugula.

$$L = J + \sum_{k=0}^{k=N} \left[ \underline{\lambda}^T(k+1) \left( -\underline{x}(k+1) + [\Phi] \underline{x}(k) + [\Gamma] \underline{u}(k) \right) \right] \quad (15.14)$$

Bestalde, bestelako mugak ezarriko ditugu.

- Sistemaren sarrera-aldagaia  $k = N$  denean, 0 balioa hartu behar du; hau da,  $u(N) = 0$  izan behar du.
- Sistemaren egoera bektorea hasierako aldiunean finkoa da; beraz,  $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$  kondizioa beteko da.

Horrenbestez,  $L$  funtzio laguntzailea aldagai hauen mende dago.

- Sistemaren  $k = 1, 2, \dots, N$  aldiunetako  $x(k)$  egoera-aldagaien mende dago.
- Sistemaren  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$  aldiunetako  $u(k)$  aldagaien mende dago.
- $L$  funtzio laguntzailearen  $\underline{\lambda}^T(k+1)$  parametroen mende dago,  $k = 0$  aldiunetik  $k = N$  aldiunera arte.

Beraz, gastu-funtzioa ahalik eta txikiena izatea egiten duten  $u(k)$  sarrera-laginak lortzeko,  $L$  funtzio laguntzailearen deribatuak lortu behar ditugu, eta zerora berdindu. Lehenik, sarrera-aldagaietako deribatuko dugu  $u(k)$ . Gogoan izan behar dugu  $r$  sarrera ditugula.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial u_1(k)} \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial u_r(k)} \end{bmatrix} = \frac{\partial L}{\partial \underline{u}(k)} = [Q_2] \underline{u}(k) + [\Gamma]^T \underline{\lambda}(k+1) = \underline{0} \quad (15.15)$$

$k = N$  denean  $\underline{u}(N) = \underline{0}$  denez, honela idatz daiteke (15.15) berdintza:

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{Q}_2] \underline{u}(N) + [\Gamma]^T \underline{\lambda}(N+1) &= \underline{0} \\ \underline{u}(N) &= \underline{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\lambda}(N+1) = \underline{0} \quad (15.16)$$

Funtzio laguntzailea  $\underline{\lambda}$  parametroekiko deribatuta, berdintza hau lortuko dugu, eta, gero, zerora berdinduko dugu. Ikus daitekeenez, sistemaren ekuazio dinamikoak lortuko ditugu.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1(k+1)} \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_n(k+1)} \end{bmatrix} = \frac{\partial L}{\partial \underline{\lambda}(k+1)} = -\underline{x}(k+1) + [\Phi] \underline{x}(k) + [\Gamma] \underline{u}(k) = \underline{0} \quad (15.17)$$

Azkenik, emaitza hau lortuko dugu egoera-aldagaiekiko deribatuta eta, ondoren, zerora berdinduta:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1(k)} \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n(k)} \end{bmatrix} = \frac{\partial L}{\partial \underline{x}(k)} = -\underline{\lambda}(k) + [\mathbf{Q}_1] \underline{x}(k) + [\Phi]^T \underline{\lambda}(k+1) = \underline{0} \quad (15.18)$$

(15.18) berdintza  $k = n$  denean, ekuazio hau lortuko dugu.

$$-\underline{\lambda}(N) + [\mathbf{Q}_1] \underline{x}(N) + [\Phi]^T \underline{\lambda}(N+1) = \underline{0} \Rightarrow \underline{\lambda}(N) = [\mathbf{Q}_1] \underline{x}(N) \quad (15.19)$$

Arazo horietatik guztietatik sarrera-aldagaien laginen kalkulua da konturik garrantzitsuena. Beraz, (15.15) ekuazioa erabiliko dugu  $\underline{u}(k)$  sarrera-aldagaiak lortzeko.

$$\underline{u}(k) = -[\mathbf{Q}_2]^{-1} [\Gamma]^T \underline{\lambda}(k+1) \quad (15.20)$$

Horrenbestez,  $\underline{u}(k)$  sarrera-aldagaia lortzeko, nahitaez  $\underline{\lambda}(k+1)$  parametroa askatu behar dugu. Horretarako, (15.18) formula erabilita,  $k = N$  aldiunetik  $k = 0$  aldiunera joango gara. Dena dela, (15.18) formula erabili ahal izateko,  $\underline{x}(k)$  egoera-aldagaiak izan behar ditugu; eta  $k = N$  aldiunetik hasiz gero, ez dugu  $\underline{x}(k)$  aldagairik, (15.17) ekuazio dinamikoak erabili behar ditugulako eta ekuazio hori  $k = 0$  aldiunetik abiatuta soilik erabil dezakegun hasierako kondizioa dugulako. (Gogoan izan behar dugu egoera bektorearen hasierako balioa  $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$  soilik dugula). Horrez gain, (15.17)

ekuazioa erabili ahal izateko,  $\underline{u}(k)$  ezagutu behar dugu, eta horixe zen, hain zuzen, lortu nahi genuen aldagaia. Zenbakizko arazo hori ebazteko, Ricattik ebazpide hau proposatu zuen. Ricattik  $[S(k)]$  matrize laguntzaile bat proposatu zuen.  $[S(k)]$  matrizea simetrikoa eta karratua denez,  $n$  zutabe eta  $n$  errenkada izango ditu, eta honela lotuko ditu  $\underline{x}(k)$  egoera bektorea eta  $\underline{\lambda}(k)$  parametro bektorea.

$$\underline{\lambda}(k) = [S(k)] \underline{x}(k) \quad (15.21)$$

$k = N$  denean, horrela idatziko dugu (15.21) ekuazioa. (15.16) ekuazioa erabiliz,  $[S(N)]$  lortuko dugu.

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\lambda}(N) = [S(N)] \underline{x}(N) \\ \underline{\lambda}(N) = [Q_1] \underline{x}(N) \end{array} \right\} \Rightarrow [S(N)] = [Q_1] \quad (15.22)$$

(15.15), (15.17) eta (15.18) ekuazioetan (15.21) ekuazioa ordezkatzuz gero, berdintza hauek lortuko ditugu.

$$\underline{u}(k) = -[Q_2]^{-1} [\Gamma]^T [S(k+1)] \underline{x}(k+1) \quad (15.23)$$

$$\underline{x}(k+1) = [\Phi] \underline{x}(k) + [\Gamma] \underline{u}(k) \quad (15.24)$$

$$[S(k)] \underline{x}(k) = [Q_1] \underline{x}(k) + [\Phi]^T [S(k+1)] \underline{x}(k+1) \quad (15.25)$$

(15.23) ekuazioa (15.24) ekuazioan ordezkatzuz,

$$([I] + [\Gamma][Q_2]^{-1} [\Gamma]^T [S(k+1)]) \underline{x}(k+1) = [\Phi] \underline{x}(k) \quad (15.26)$$

(15.25) berdintza apur bat sinplifikatuz,

$$([S(k)] - [Q_1]) \underline{x}(k) = [\Phi]^T [S(k+1)] \underline{x}(k+1) \quad (15.27)$$

(15.25) eta (15.27) ekuazioak erabiliz,

$$([S(k)] - [Q_1] - [\Phi]^T [S(k+1)]([I] + [\Gamma][Q_2]^{-1} [\Gamma]^T [S(k+1)]))^{-1} [\Phi] = [0]$$

Beraz,  $[S(k)]$  matrizea kalkulatzeko, errepikapenezko ekuazio hau lortuko dugu:

$$[S(k)] = [Q_1] + [\Phi]^T [S(k+1)]([I] + [\Gamma][Q_2]^{-1} [\Gamma]^T [S(k+1)])^{-1} [\Phi] \quad (15.28)$$

Dena dela, (15.28) ekuazioa zail samarra denez kalkulu errepikakorrek egiteko, eragiketa batzuk proposatzen dira ekuazio horren gain. Horretarako, (15.28) ekuazioaren eskuineko bigarren gaia aztertuko dugu.

$$[P] = [S(k+1)] \left( [I] + [\Gamma][Q_2]^{-1}[\Gamma]^T [S(k+1)] \right)^{-1} \quad (15.29)$$

$[P]$  matrizea eskuinetik  $[\Gamma][Q_2]^{-1} \left( [Q_2] + [\Gamma]^T [S(k+1)][\Gamma] \right)$  gaiaz biderkatuz gero, berdintza hau lortuko dugu:

$$\begin{aligned} [P][\Gamma][Q_2]^{-1} \left( [Q_2] + [\Gamma]^T [S(k+1)][\Gamma] \right) &= \\ &= [P][\Gamma] + [P][\Gamma][Q_2]^{-1}[\Gamma]^T [S(k+1)][\Gamma] \end{aligned} \quad (15.30)$$

$$[P][\Gamma][Q_2]^{-1} \left( [Q_2] + [\Gamma]^T [S(k+1)][\Gamma] \right) = [P] \left( [\Gamma][Q_2]^{-1}[\Gamma]^T [S(k+1)] + [I] \right) [\Gamma]$$

Beraz, honela idatz daiteke (15.30) ekuazioa:

$$[P][\Gamma][Q_2]^{-1} \left( [Q_2] + [\Gamma]^T [S(k+1)][\Gamma] \right) = [S(k+1)][\Gamma] \quad (15.31)$$

$[P]$  matrizea kalkulatzeko, (15.31) ekuazioa eskuinetik gai honetaz biderkatuz gero,  $\left( [Q_2] + [\Gamma]^T [S(k+1)][\Gamma] \right)^{-1} [\Gamma]^T [S(k+1)]$  (15.31) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\begin{aligned} [P][\Gamma][Q_2]^{-1}[\Gamma]^T [S(k+1)] &= \\ &= [S(k+1)][\Gamma] \left( [Q_2] + [\Gamma]^T [S(k+1)][\Gamma] \right)^{-1} [\Gamma]^T [S(k+1)] \end{aligned} \quad (15.32)$$

(15.29) ekuazioa birmoldatuz, (15.32) ekuazioaren ezkerreko gaia lor daiteke.

$$\begin{aligned} [P] \left( [I] + [\Gamma][Q_2]^{-1}[\Gamma]^T [S(k+1)] \right) &= [S(k+1)] \\ [P][\Gamma][Q_2]^{-1}[\Gamma]^T [S(k+1)] &= [S(k+1)] - [P] \end{aligned}$$

Beraz, honela idatz dezakegu (15.32) ekuazioa.

$$[S(k+1)] - [P] = [S(k+1)][\Gamma] \left( [Q_2] + [\Gamma]^T [S(k+1)][\Gamma] \right)^{-1} [\Gamma]^T [S(k+1)] \quad (15.33)$$

P matrizea aska dezakegu, (15.33) ekuaziotik abiatuta.

$$[P] = [S(k+1)] - [S(k+1)][\Gamma]([Q_2] + [\Gamma]^T [S(k+1)][\Gamma])^{-1} [\Gamma]^T [S(k+1)] \quad (15.34)$$

(15.34) ekuazioa (15.28) berdintzan ordezkatzeko dugu. Gogoan izan behar dugu [P] matrizearen definizioa; hau da, (15.29) ekuazioa.

$$[S(k)] = [Q_1] + [\Phi]^T ([S(k+1)] - [S(k+1)][\Gamma]([Q_2] + [\Gamma]^T [S(k+1)][\Gamma])^{-1} [\Gamma]^T [S(k+1)]) [\Phi] \quad (15.35)$$

Beraz, (15.35) ekuazioa modu errepikakorrean aplikatuz gero, [S(k)] matrizea denboran zehar kalkulatu ahal izango dugu. Gogoan izan behar dugu  $k = N$  aldiunetik hasi behar dugula eta  $k = 0$  aldiunean bukatu behar dugula. Bestalde, (15.22) formularen oinarritutaz, badakigu  $[S(N)] = [Q_1]$  dela. Beraz, [S(k)] matrizea kalkulatu dezakegu modu errepikakorrean. Dena dela, garrantzitsuen kontrol-legea lortzea da. Horretarako, (15.23) eta (15.24) berdintzak erabiliko ditugu.

$$\underline{u}(k) = -[Q_2]^{-1} [\Gamma]^T [S(k+1)]([\Phi]\underline{x}(k) + [\Gamma]\underline{u}(k))$$

Horrenbestez, honela idatz dezakegu kontrol-legea:

$$[Q_2]\underline{u}(k) = -[\Gamma]^T [S(k+1)][\Phi]\underline{x}(k) - [\Gamma]^T [S(k+1)][\Gamma]\underline{u}(k)$$

$$([Q_2] + [\Gamma]^T [S(k+1)][\Gamma])\underline{u}(k) = -[\Gamma]^T [S(k+1)][\Phi]\underline{x}(k)$$

$$\underline{u}(k) = -([Q_2] + [\Gamma]^T [S(k+1)][\Gamma])^{-1} [\Gamma]^T [S(k+1)][\Phi]\underline{x}(k) \quad (15.36)$$

Beraz,  $\underline{u}(k)$  kontrol-aldagaia egoera-aldagaiaren eta  $[K(k)]$  irabazi-matrize baten biderketa gisa idatz daiteke.

$$\begin{aligned} \underline{u}(k) &= -[K(k)]\underline{x}(k) \\ [K(k)] &= ([Q_2] + [\Gamma]^T [S(k+1)][\Gamma])^{-1} [\Gamma]^T [S(k+1)][\Phi] \end{aligned} \quad (15.37)$$

Gogoan izan behar dugu  $[K(k)]$  matrizeak  $n$  zutabe dituela eta  $r$  errenkada, jakinda  $n$  egoera-aldagai eta  $r$  sarrera-aldagai ditugula.

Hortaz, hobetze-kontrolaren legea kalkulatzeko, algoritmo errepikakor hau erabili behar dugu.

1. Hasierako kondizioak finkatu:

$$[S(N)] = [Q_1]$$

$$[K(N)] = [0]$$

2.  $k = N$  eginez hasi.

3.  $[R(k)]$  eta  $[R(k)]^{-1}$  matrizeak lortu.

$$[R(k)] = [Q_2] + [\Gamma]^T [S(k)] [\Gamma]$$

4.  $[M(k)]$  matrizea kalkulatu.

$$[M(k)] = [S(k)] - [S(k)] [\Gamma] [R(k)]^{-1} [\Gamma]^T [S(k)]$$

5.  $[K(k-1)]$  irabazi-matrizea kalkulatu

$$[K(k-1)] = [R(k)]^{-1} [\Gamma]^T [S(k)] [\Phi]$$

6.  $[K(k-1)]$  matrizea memorian gorde.

7.  $[S(k-1)]$  matrizea kalkulatu.

$$[S(k-1)] = ([\Phi]^T [M(k)] [\Phi]) + [Q_1]$$

8.  $k = k-1$  egin eta 3. urratetik aurrera errepikatuz joan,  $k = 0$  aldiunera arte.

### 15.3 LQR KONTROLA (LINEAR QUADRATIC REGULATOR)

Hobetze-kontrolaren denboran epeak infiniturantz jotzen duenean sortutako hobetze-kontrolari LQR kontrol deritzogu.  $n$ -k infiniturantz jotzen duenean, kontrolaren  $[K(k)]$  irabazi-matrizeak balio konstante baterantz jotzen du. Beraz, LQR kontrolean irabazi-matrizea ez da denborarekin aldatzen. LQR kontrolaren irabazia lortzeko, lehenik, kontrol-legearen garapena egingo dugu.

Lehendabizi, gastu-funtzioa definitu behar dugu. Gogoan izan behar dugu gastu-funtzioaren denbora-tarteak infiniturantz jotzen duela.

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=N} [\underline{x}^T(k) [Q_1] \underline{x}(k) + \underline{u}^T(k) [Q_2] \underline{u}(k)] \quad (15.38)$$

Bestalde, badakigu kontrolatu nahi den sistemaren  $\underline{u}(k)$  sarrera-aldagaia sistemaren egoera bektorearen eta  $[K(k)]$  irabazi-matrizearen arteko biderketatik lortzen dela. Berdintza hori (15.37) ekuazioetatik dator.  $[K(k)]$  irabazi-matrizeak  $[K_\infty]$  matrize konstante baterantz jotzen duenez –LQR kontrolean  $[K_\infty]$  erabiliko dugu hasieratik, beraz–, erabiliko dugun kontrol-legea ez da aldatuz joango, hobetze-kontrola bezala. Horrenbestez, LQR kontrolaren legea ez da denborarekiko aldatuko.

$$\left. \begin{aligned} \underline{u}(k) &= -[K(k)]\underline{x}(k) \\ [K_\infty] &= \lim_{k \rightarrow \infty} [K(k)] \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{LQR}} \underline{u}(k) = -[K_\infty]\underline{x}(k) \quad (15.39)$$

$[K_\infty]$  irabazi-matrizea lortzeko, (15.37) berdintzetatik bigarrena hartuko dugu.  $k$  aldiuneak infiniturantz jotzen duenean  $[S(k+1)]$  matrizeak  $[S_\infty]$  matrize konstante baterantz jotzen du. Beraz,  $[K_\infty]$  matrizea honela kalkula dezakegu:

$$\begin{aligned} [K_\infty] &= \lim_{k \rightarrow \infty} [K(k)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( [Q_2] + [\Gamma]^T [S(k+1)][\Gamma] \right)^{-1} [\Gamma]^T [S(k+1)][\Phi] \\ [K_\infty] &= \left( [Q_2] + [\Gamma]^T [S_\infty][\Gamma] \right)^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty][\Phi] \end{aligned} \quad (15.40)$$

$[S_\infty]$  matrizea lortzeko, (15.35) ekuazioa erabiliko dugu.  $k$  aldiuneak infiniturantz jotzen duenean lortzen den berdintzari Ricattiren ekuazio aljebraiko deritzogu.

$$\begin{aligned} [S_\infty] &= \lim_{k \rightarrow \infty} [S(k)] \\ [S_\infty] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( [Q_1] + [\Phi]^T \left( [S(k+1)] - [S(k+1)][\Gamma] \left( [Q_2] + [\Gamma]^T [S(k+1)][\Gamma] \right)^{-1} [\Gamma]^T [S(k+1)] \right) [\Phi] \right) \\ [R_\infty] &= [Q_2] + [\Gamma]^T [S_\infty][\Gamma] \\ [S_\infty] &= [Q_1] + [\Phi]^T \left( [S_\infty] - [S_\infty][\Gamma][R_\infty]^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] \right) [\Phi] \\ [K_\infty] &= ([R_\infty])^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty][\Phi] \end{aligned} \quad (15.41)$$

Beraz, aurreko legearen bidez lortu ahal izango dugu  $[K_\infty]$  irazpena. Matrize hori kalkulatu eta gero, sistema LQR kontrolaren bidez kontrolatu ahal izango dugu. Gogoan izan behar dugu beti  $[Q_1]$  eta  $[Q_2]$  matrizeak positiboki definituak direla. Bestalde,  $n$  egoera-aldagai ditugula jakinda,  $[S_\infty]$  matrizeak  $n$  zutabe ditu, eta  $n$  errenkada.  $r$  sarrera-aldagai ditugula jakinda,  $[K_\infty]$  irabazi-matrizeak  $n$  zutabe ditu, eta  $r$  errenkada.

$[S_\infty]$  matrizea kalkulatzeko ekuazioa ebatzi behar dugu. Hala ere,  $[S_\infty]$  matrizea lortzeko ebatzi beharreko ekuazioa ez da lineala.

$$[S_\infty] = [Q_1] + [\Phi]^T \left( [S_\infty] - [S_\infty][\Gamma][R_\infty]^{-1}[\Gamma]^T [S_\infty] \right) [\Phi]$$

Beraz,  $[S_\infty]$  matrizea kalkulatzeko, (15.35) errepikapenezko ekuazioa erabili behar dugu. Errepikapenezko ekuazio hori emaitza konstante batera heltzen denean, esan dezakegu  $[S_\infty]$  matrizea lortu dugula.

$$[S(k)] = [Q_1] + [\Phi]^T \left( [S(k+1)] - [S(k+1)][\Gamma]([Q_2] + [\Gamma]^T [S(k+1)][\Gamma])^{-1} [\Gamma]^T [S(k+1)] \right) [\Phi]$$

Aldagai aldaketa hau eginda, beste era honetara idatz daiteke errepikapenezko ekuazio hori:

$$\begin{cases} [S(k+1)] = [S_i] \\ [S(k)] = [S_{i+1}] \end{cases} \Rightarrow$$

$$[S_{i+1}] = [Q_1] + [\Phi]^T \left( [S_i] - [S_i][\Gamma]([Q_2] + [\Gamma]^T [S_i][\Gamma])^{-1} [\Gamma]^T [S_i] \right) [\Phi]$$

Non  $[S_i] = [Q_1]$  baita errepikapenezko ekuazio horren hasierako kondizioa.

$[S_\infty]$  matrizea lortzeko,  $[S_i] = [Q_1]$  hasierako kondizioa erabiliz, behin eta berriz exekutatu behar dugu aurreko errepikapenezko ekuazioa.

## 15.4 HOBETZE-KONTROLAREN EGONKORTASUNA

Hobetze-kontrolaren gastu-funtzioak  $k = 0$  aldiunetik  $k = N$  aldiunera jotzen du. Beraz, hobetze-kontrolaren gastu-funtzioak balio finitu bat hartzen du beti, baldin eta hobetze-kontrola egiteko behar diren kondizioak betetzen badira, nahiz eta kontrolatu beharreko sistema ez izan egonkorra. Dena dela, gastu-funtzioaren bitartez,  $\underline{x}(N)$  bukaerako egoera bektorea  $\underline{0}$  oreka-puntura ahalik eta gertuen eramateko joera du hobetze-kontrolak. Beraz, egonkortasuna ez da arazoa.

## 15.5 LQR KONTROLAREN EGONKORTASUNA

LQR kontrolaren egonkortasuna azaltzeko, lehenik, matrize positiboki definituen propietate batzuk azaldu behar ditugu.

### 15.5.1 Matrize positiboki definituak, definizioa eta zenbait propietate

$[A]$  matrizea positiboki definitua izango da, baldin eta  $[A]$  matrizea  $n$  mailako matrize karratu bat bada eta kondizio matematiko hau betetzen badu:

$$\forall \underline{x} \neq \underline{0} \quad \underline{x}^T [A] \underline{x} > 0 \quad (15.42)$$

Gogoan izan behar dugu  $n$  errenkada dituen zutabe bektore bat dela  $\underline{x}$ . Horrenbestez,  $\forall \underline{x} \neq [0] \quad \underline{x}^T [A] \underline{x} \geq 0$  kondizioa betetzen duen matrizeari matrize erdipositiboki definitu deritzogu.

#### Matrize positiboki definituen propietateak

I.  $[A]$  matrize positiboki definitu baten determinantea ez da 0:

**Egiaztapena.** Kontraesanaren oinarriaren bitartez egiaztatuko dugu propietate hau. Jo dezagun  $[A]$  matrizearen determinantea 0 dela. Beraz, bektore nulua ez diren  $\underline{x}_1 \neq \underline{0}$  bektore batzuk bektore nulua izango dute iruditzat (Gogoan izan behar dugu  $[A]$  matrize baten determinantea nulua bada  $[A]$  matrizearen Kernelak bektore nulua baino bektore gehiago izango dituela).  $\underline{x}_1$  bektorearen irudia nulua bada,  $\underline{x}_1^T [A] \underline{x}_1 = 0$  berdintza lortuko dugu. Baina  $\underline{x}_1 \neq \underline{0} : \underline{x}_1^T [A] \underline{x}_1 = 0$  berdintza betetzen bada,  $[A]$  matrizea ezin da matrize positiboki definitua izan. Beraz, ezinezkoa da  $[A]$  matrizearen determinantea nulua izatea eta  $[A]$  matrizea positiboki definitua izatea, (15.42) matrize positiboki definituen definizioaren aurka dagoelako.

$$|A| = 0 \Rightarrow [A] \underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \exists \underline{x}_1 \neq [0] / [A] \underline{x}_1 = [0] \Rightarrow \underline{x}_1^T [A] \underline{x}_1 = 0 \neq \underline{x}^T [A] \underline{x} > 0 \quad (15.43)$$

II.  $[A]$  matrizea  $n$  mailako matrize positiboki definitua bada, eta  $[B]$  matrizea  $n \times s$  mailakoa eta 's' heinekoa bada,  $[C]$  matrizea ere positiboki definitua izango da. Honela definituko dugu  $[C]$  matrizea:

$$[B]_{s \times n}^T [A]_{n \times n} [B]_{n \times s} = [C]_{s \times s} \quad (15.44)$$

Beraz,  $[C]$  matrizeak kondizio hau beteko du:  $\forall \underline{y} \neq \underline{0} \quad \underline{y}^T [B]^T [A] [B] \underline{y} \geq 0$ .

**Egiaztapena.**  $[B]$  matrizea bi azpimatrizetan banatuko dugu:  $[B_1]$  eta  $[B_2]$  matrizeak.  $[B_1]$  matrizeak  $s$  errenkada eta  $s$  zutabe ditu eta bere determinantea ez da nulua. Azken kondizio hori bete daiteke  $[B]$  matrizearen heina  $s$  delako. Bestalde,  $[B_2]$  matrizeak  $n-s$  errenkada eta  $s$  zutabe ditu.

$$[B] = \begin{pmatrix} [B_1] \\ [B_2] \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} s \times s \det([B_1]) \neq 0 \\ (n-s) \times s \end{array} \right. \quad (15.45)$$

$B$  matrizearen eta  $\underline{y}$  bektorearen biderketa gisa definituko dugu  $\underline{x}$  bektorea. Bektore hori zutabe bakarrekoa da eta  $n$  errenkada ditu.  $\underline{x}$  bektorea  $\underline{x}_1$  eta  $\underline{x}_2$  azpibektoreetan banatuko dugu.  $\underline{x}_1$  bektoreak zutabe bakarra du eta  $\underline{x}$  bektorearen lehenengo  $s$  errenkadak izango ditu.  $\underline{x}_2$  bektoreak zutabe bakarra du eta  $\underline{x}$  bektorearen azkeneko  $n-s$  errenkadak izango ditu.  $\underline{y}$  bektoreak  $s$  errenkada ditu, eta zutabe bakarra  $\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [B_1] \\ [B_2] \end{pmatrix} \cdot \underline{y}$ ,  $\underline{y} \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{x} \neq \underline{0}$  du.  $\underline{y}$  bektorea nulua ez bada,  $\underline{x}$  bektorea ez da bektore nulua izango,  $[B_1]$  matrizearen heina  $s$  delako.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [B_1] \\ [B_2] \end{pmatrix} \cdot \underline{y}, \underline{y} \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{x} \neq \underline{0} \quad (15.46)$$

$[B_1]$   $s \times s$  mailakoa da,  $s$  heinekoa; beraz,  $[B_1] \cdot \underline{y} = \underline{0}$  bada,  $\underline{y} = \underline{0}$  izan behar du. Hortaz,  $\underline{y}^T [B]^T [A] [B] \underline{y} = \underline{x}^T [A] \underline{x} > 0$  izan behar du. Horrenbestez,  $[C]$  matrizea positiboki definitua izango da.

III.  $[A]$  matrizea positiboki definitua bada,  $[A]$  matrizearen alderantzizkoa ere positiboki definitua izango da.

**Egiaztapena.** Propietate hau II bigarren propietatearen bitartez egiaztatzea daiteke.  $[A]$  positiboki definitua bada eta  $[B] = [A]^{-1}$  bada,  $[C] = [B]^T [A] [B]$ ,  $[C]$  matrizeak positiboki definitua izan behar du. Gogoan izan behar dugu  $[B] = [A]^{-1}$  matrizearen determinantea ez dela zero,  $[A]$  matrizearen determinantea ere ez delako zero (ikus I. propietatea). Horrenbestez,  $[B]$  matrizearen heina  $n$  da. II. propietatean oinarrituz,  $[C]$  matrizea  $[A]$  matrizearen alderantzizkoa izango da. Esan dezakegu  $[C]$  matrizea II. propietatearen bitartez positiboki definitua dela.

$$[C] = [A]^{-1} [A] [A]^{-1} = [A]^{-1} \quad (15.47)$$

IV.  $[A]$  matrizea positiboki definitua bada,  $[A]$  matrizearen autobalio edo balio propio guztiak positiboak izango dira.

V.  $[A]$  matrizea positiboki definitu bada,  $A$  matrizearen determinantea positiboa izango da.

**Egiaztapena.** Jo dezagun  $[A]$  matrizearen autobalio guztiak ezberdinak direla, egiaztapena errazagoa delako. Autobalio anizkoitzak dituen  $[A]$  matrize bat izango bagenu, Jordan matrizeen bitartez egin beharko genuke egiaztapen hori. Hala ere, ia ez da orokortasunik galtzen autobalioak ezberdinak direla jotzen badugu.  $[D]$  matrizearen zutabeak  $[A]$  matrizearen autobektoreak dira. Autobektoreak ortogonalak direnez,  $[D]$  matrizearen determinantea ez da nulua; beraz,  $[D]$  matrizearen alderantzikoa kalkula dezakegu. Horrenbestez, honela defini dezakegu  $[S]$  matrizea.

$$[S] = [D]^{-1}[A][D] \quad (15.48)$$

$[D]$  matrizearen zutabeak  $[A]$  matrizearen autobektoreak direnez,  $[S]$  matrizea diagonal izango da, eta  $[S]$  matrizearen diagonal nagusiaren elementuak  $[A]$  matrizearen autobalioak dira.

$$[S] = [D]^{-1}[A][D] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (15.49)$$

$S$  matrizearen determinantea kalkulatu dugu.

$$\det([S]) = \det([D]^{-1}[A][D]) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad (15.50)$$

Determinanteen propietateak erabiliz,  $[S]$  matrizearen determinantea positiboa dela egiaztatuko dugu.

$$\det([S]) = \det([D]^{-1})\det([A])\det([D]) = \det([A]) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0 \quad (15.51)$$

### 15.5.2 LQR kontrolaren Lyapunov egonkortasuna

Kontrolaren legea kontuan izanik, honela idatz ditzakegu sistemaren ekuazioak:

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= [\Phi] \underline{x}(k) + [\Gamma] \underline{u}(k) \\ \underline{u} &= [K_\infty] \underline{x}(k) \text{ non } [K_\infty] = \left( [Q_2] + [\Gamma]^T [S_\infty] [\Gamma] \right)^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] [\Phi] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (15.52)$$

$$\underline{x}(k+1) = \left( [I] - [\Gamma] \left( [Q_2] + [\Gamma]^T [S_\infty] [\Gamma] \right)^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] \right) [\Phi] \underline{x}(k)$$

Sistemaren egonkortasuna egiaztatzeko, Lyapunov funtzioa definituko dugu.

$$V(\underline{x}(k)) = \frac{1}{2} (\underline{x}^T(k) [S_\infty] \underline{x}(k)) \quad (15.53)$$

$V(\underline{x}(k))$  funtzioa Lyapunov funtzioa izan dadin,  $[S_\infty]$  matrizea positiboki definitua dela egiaztatu behar dugu. Lehenik,  $[S_\infty]$  matrizearen heina kalkulatu dugu.  $[S_\infty]$  matrizearen heina  $n$  da,  $[Q_1]$  matrizearen heina  $n$  delako. Gogoan izan behar dugu  $[Q_1]$  matrizea positiboki definitua dela, eta, horrenbestez, bere determinantea ez dela nulua.

$$\left. \begin{aligned} [S_\infty] &= [Q_1] + [\Phi]^T \left( [S_\infty] - [S_\infty] [\Gamma] [R_\infty]^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] \right) [\Phi] \\ \det([Q_1]) &\neq 0 \Rightarrow \text{heina}([Q_1]) = n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (15.54)$$

$$\text{heina}([S_\infty]) = \max \left( \text{heina}([Q_1]), \text{heina} \left( [\Phi]^T \left( [S_\infty] - [S_\infty] [\Gamma] [R_\infty]^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] \right) [\Phi] \right) \right) \leq n \Rightarrow$$

$$\text{heina}([S_\infty]) = \text{heina}([Q_1]) = n$$

Puntu honetara helduta, azter dezagun  $[S_\infty]$  matrizea lortzeko ekuazioa.  $[S_\infty]$  matrizea positiboki definitua dela frogatzeko,  $[Q_1]$  matrizea askatuko dugu,  $[Q_1]$  matrizea positiboki definitua delako.

$$[S_\infty] = [Q_1] + [\Phi]^T \left( [S_\infty] - [S_\infty] [\Gamma] [R_\infty]^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] \right) [\Phi] \Rightarrow$$

$$[Q_1] = [S_\infty] - [\Phi]^T \left( [S_\infty] - [S_\infty] [\Gamma] [R_\infty]^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] \right) [\Phi] \Rightarrow$$

$$[Q_1] = [S_\infty] + [\Phi]^T [S_\infty] [\Gamma] [R_\infty]^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] [\Phi] - [\Phi]^T [S_\infty] [\Phi]$$

$[Q_1]$  matrizea positiboki definitua bada, bi aukera ditugu:

1.  $[S_\infty]$  matrizea positiboki definitua da.
2.  $[\Phi]^T [S_\infty] [\Gamma] [R_\infty]^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] [\Phi]$  matrizea positiboki definitua da,  $-[\Phi]^T [S_\infty] [\Phi]$  matrizea ezin daitekeelako positiboki definitua izan.  $[\Phi]^T [S_\infty] [\Gamma] [R_\infty]^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] [\Phi]$  matrizea positiboki definitua bada, esan dezakegu  $[R_\infty]^{-1}$  matrizea positiboki definitua dela, matrize positiboki definituen II. propietatea erabiliz.  $[R_\infty]^{-1}$  definitu positiboa bada, matrize definitu positiboen III propietatea erabiliz,  $[Q_2] + [\Gamma]^T [S_\infty] [\Gamma]$  matrizea definitu positiboa dela esan dezakegu.  $[Q_2]$  matrizea matrize positiboki definitua dela badakigunez,  $[\Gamma]^T [S_\infty] [\Gamma]$  matrizea ere positiboki definitua izango da. Matrize positiboki definituen II. propietatea erabiliz berriz ere, ondoriozta dezakegu  $[S_\infty]$  matrizea positiboki definitua dela.

Beraz, edozein aukera hartuta, ondorio berera helduko gara:  $[S_\infty]$  matrizea positiboki definitua izango da, baldin eta  $[Q_1]$  eta  $[Q_2]$  matrizeak positiboki definituak badira.

$[S_\infty]$  matrizea positiboki definitua bada, (15.53) ekuazioa Lyapunov funtziotzat har dezakegu. Lyapunov funtzio horren gehikuntza negatiboa dela frogatzen badugu, LQR motako kontrola egonkorra dela ondorioztatu ahal izango dugu.

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) \Rightarrow$$

$$\Delta V(k) = \frac{1}{2} (\underline{x}^T(k+1) [S_\infty] \underline{x}(k+1)) - \frac{1}{2} (\underline{x}^T(k) [S_\infty] \underline{x}(k)) \Rightarrow$$

$$\Delta V(k) = \frac{1}{2} (\underline{x}^T(k) ([\Phi] - [\Gamma] [K_\infty])^T [S_\infty] ([\Phi] - [\Gamma] [K_\infty]) \underline{x}(k) - \underline{x}^T(k) [S_\infty] \underline{x}(k)) \quad (15.55)$$

(15.55) ekuazioa negatiboa dela frogatzeko, lehenik  $[S_\infty]$  matrizeari lortutako ekuazioa berrantolatuko dugu.

$$[S_\infty] = [Q_1] + [\Phi]^T ([S_\infty] - [S_\infty] [\Gamma] [R_\infty]^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty]) [\Phi] \Rightarrow$$

$$[S_\infty] = [Q_1] + [\Phi]^T [S_\infty] [\Phi] - [\Phi]^T [S_\infty] [\Gamma] [R_\infty]^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] [\Phi] \Rightarrow$$

$$[S_\infty] = [Q_1] + [\Phi]^T [S_\infty] [\Phi] - ([\Phi]^T [S_\infty] [\Gamma] [R_\infty]^{-1}) [R_\infty] ([R_\infty]^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] [\Phi]) \Rightarrow$$

Aurreko ekuazioan  $[K_\infty] = [R_\infty]^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] [\Phi]$  ekuazioa ordezkatzuz,  $[S_\infty]$  matrizearen berdintza hau lortuko dugu:

$$\begin{aligned} [S_\infty] &= [Q_1] + [\Phi]^T [S_\infty] [\Phi] - [K_\infty]^T [R_\infty] [K_\infty] \Rightarrow \\ [S_\infty] &= [Q_1] + [\Phi]^T [S_\infty] [\Phi] - [K_\infty]^T [R_\infty] ([R_\infty]^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] [\Phi]) \Rightarrow \\ [S_\infty] &= [Q_1] + [\Phi]^T [S_\infty] [\Phi] - [K_\infty]^T [\Gamma]^T [S_\infty] [\Phi] \Rightarrow \\ [S_\infty] &= [Q_1] + ([\Phi] - [\Gamma] [K_\infty])^T [S_\infty] [\Phi] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [S_\infty] &= [Q_1] + ([\Phi] - [\Gamma] [K_\infty])^T [S_\infty] [\Phi] + \\ &+ [\Phi]^T [S_\infty] [\Gamma] [R_\infty]^{-1} (-[R_\infty] + [\Gamma]^T [S_\infty] [\Gamma] + [Q_2]) [K_\infty] \Rightarrow \\ [S_\infty] &= [Q_1] + ([\Phi] - [\Gamma] [K_\infty])^T [S_\infty] [\Phi] + \\ &+ [\Phi]^T [S_\infty] [\Gamma] (-[I] + [R_\infty]^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] [\Gamma] + [R_\infty]^{-1} [Q_2]) [K_\infty] \Rightarrow \\ [S_\infty] &= [Q_1] + ([\Phi] - [\Gamma] [K_\infty])^T [S_\infty] [\Phi] + \\ &- [\Phi]^T [S_\infty] [\Gamma] [K_\infty] + [\Phi]^T [S_\infty] [\Gamma] [R_\infty]^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] [\Gamma] [K_\infty] + \\ &+ [\Phi]^T [S_\infty] [\Gamma] [R_\infty]^{-1} [Q_2] [K_\infty] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [S_\infty] &= [Q_1] + ([\Phi] - [\Gamma] [K_\infty])^T [S_\infty] [\Phi] + \\ &- [\Phi]^T [S_\infty] [\Gamma] [K_\infty] + [K_\infty]^T [\Gamma]^T [S_\infty] [\Gamma] [K_\infty] + \\ &+ [K_\infty]^T [Q_2] [K_\infty] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [S_\infty] &= [Q_1] + ([\Phi] - [\Gamma] [K_\infty])^T [S_\infty] [\Phi] + \\ &- [\Phi]^T [S_\infty] [\Gamma] [K_\infty] + [K_\infty]^T [\Gamma]^T [S_\infty] [\Gamma] [K_\infty] + \\ &+ [K_\infty]^T [Q_2] [K_\infty] \Rightarrow \\ [S_\infty] &= [Q_1] + ([\Phi] - [\Gamma] [K_\infty])^T [S_\infty] [\Phi] + \\ &- ([\Phi] - [\Gamma] [K_\infty])^T [S_\infty] [\Gamma] [K_\infty] + \\ &+ [K_\infty]^T [Q_2] [K_\infty] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$[S_\infty] = [Q_1] + ([\Phi] - [\Gamma] [K_\infty])^T [S_\infty] ([\Phi] - [\Gamma] [K_\infty]) + [K_\infty]^T [Q_2] [K_\infty]$$

$$[S_\infty] - [Q_1] - [K_\infty]^T [Q_2] [K_\infty] = ([\Phi] - [\Gamma] [K_\infty])^T [S_\infty] ([\Phi] - [\Gamma] [K_\infty]) \quad (15.56)$$

(15.56) ekuazioa (15.55) ekuazioan ordezkatzuz gero, honako hau lortuko dugu:

$$\Delta V(k) = \frac{1}{2} \left( \underline{x}^T(k) ([\Phi] - [\Gamma] [K_\infty])^T [S_\infty] ([\Phi] - [\Gamma] [K_\infty]) \underline{x}(k) - \underline{x}^T(k) [S_\infty] \underline{x}(k) \right) \Rightarrow$$

$$\Delta V(k) = \frac{1}{2} \left( \underline{x}^T(k) ([S_\infty] - [Q_1] - [K_\infty]^T [Q_2] [K_\infty]) \underline{x}(k) - \underline{x}^T(k) [S_\infty] \underline{x}(k) \right) \Rightarrow$$

Lyapunov funtzioaren gehikuntza negatiboa da,  $[Q_1] + [K_\infty]^T [Q_2] [K_\infty]$  matrizea positiboki definitua delako. Lyapunov funtzioaren gehikuntza-denboran zehar negatiboa bada, sistema asintotikoki egonkorra da.

$$\Delta V(k) = -\frac{1}{2} \left( \underline{x}^T(k) ([Q_1] + [K_\infty]^T [Q_2] [K_\infty]) \underline{x}(k) \right) \quad (15.57)$$

### 15.1 ariketa

Demagun 14.4.1 ariketako sistemari hobetze-kontrol bat egotzi nahi diogula. Demagun hobetze-kontrolaren denbora-tartea laginketa-periodo bakarrekoa dela, hau da,  $N = 1$  dela. Sistemaren eredia honelakoa dela joko dugu.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k)$$

Hobetze-kontrolaren gastu-funtzioak itxura hau du.

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=N} [\underline{x}^T(k)[Q_1]\underline{x}(k) + \underline{u}^T(k)[Q_2]\underline{u}(k)] \Rightarrow$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=1} \left[ \begin{bmatrix} x_1(k) & x_2(k) & x_3(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \underline{u}^T(k) 10 \underline{u}(k) \right]$$

Beraz,  $[Q_1]$  eta  $[Q_2]$  matrizeek itxura hau dute:

$$[Q_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[Q_2] = q_2 = 10$$

➤ Diseinatu hobetze-kontrolaren algoritmo egoki bat sistema honentzat.

Nahiz eta  $N \neq 0$  izan,  $[K(k)]$  berrelikadura-matrize guztiak kalkulatzeko behin eta berriz laginketa-periodo bakoitzean, gero eta informazio gehiago dugulako. Beraz,  $k$  laginketa-periodo bakoitzean honako hau egin behar dugu.

1. Hasierako kondizioak finkatu:

$$[S(1)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K(1)]^T = [0 \quad 0 \quad 0]$$

2.  $q = k+1$  eginez hasi.

3.  $[R(q)]$  eta  $[R(q)]^{-1}$  matrizeak lortu.

$$[R(q)] = r(q) = 10 + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1,1}(q) & s_{1,2}(q) & s_{1,3}(q) \\ s_{2,1}(q) & s_{2,2}(q) & s_{2,3}(q) \\ s_{3,1}(q) & s_{3,2}(q) & s_{3,3}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4.  $[M(q)]$  matrizea kalkulatu.

$$[M(q)] = [S(q)] - [S(q)][\Gamma][R(q)]^{-1}[\Gamma]^T[S(q)] \Rightarrow$$

$$[M(q)] = ([I] - [S(q)][\Gamma][R(q)]^{-1}[\Gamma]^T)[S(q)] \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} m_{1,1}(q) & m_{1,2}(q) & m_{1,3}(q) \\ m_{2,1}(q) & m_{2,2}(q) & m_{2,3}(q) \\ m_{3,1}(q) & m_{3,2}(q) & m_{3,3}(q) \end{bmatrix} =$$

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{r(q)} \begin{bmatrix} s_{1,1}(q) & s_{1,2}(q) & s_{1,3}(q) \\ s_{2,1}(q) & s_{2,2}(q) & s_{2,3}(q) \\ s_{3,1}(q) & s_{3,2}(q) & s_{3,3}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} s_{1,1}(q) & s_{1,2}(q) & s_{1,3}(q) \\ s_{2,1}(q) & s_{2,2}(q) & s_{2,3}(q) \\ s_{3,1}(q) & s_{3,2}(q) & s_{3,3}(q) \end{bmatrix}$$

5.  $[K(q-1)]$  irabazi-matrizea kalkulatu

$$[k_1(q-1) \quad k_2(q-1) \quad k_3(q-1)] =$$

$$\left( \frac{1}{r(q)} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1,1}(q) & s_{1,2}(q) & s_{1,3}(q) \\ s_{2,1}(q) & s_{2,2}(q) & s_{2,3}(q) \\ s_{3,1}(q) & s_{3,2}(q) & s_{3,3}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.  $[K(q-1)]$  matrizea memorian gorde.

7.  $[S(q-1)]$  matrizea kalkulatu.

$$\begin{bmatrix} s_{1,1}(q-1) & s_{1,2}(q-1) & s_{1,3}(q-1) \\ s_{2,1}(q-1) & s_{2,2}(q-1) & s_{2,3}(q-1) \\ s_{3,1}(q-1) & s_{3,2}(q-1) & s_{3,3}(q-1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} m_{1,1}(q) & m_{1,2}(q) & m_{1,3}(q) \\ m_{2,1}(q) & m_{2,2}(q) & m_{2,3}(q) \\ m_{3,1}(q) & m_{3,2}(q) & m_{3,3}(q) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.  $q = q-1$  egin eta 3. urratsetik aurrera errepikatu,  $q = k$  aldiunera arte.
9.  $q = k$  aldiunera heldutakoan, hobetze-kontrolak atera behar duen  $u(k)$  irteera kalkulatu eta balio hori D/A bihurgailuetara bidali.

$$u(k) = - \begin{bmatrix} k_1(k) & k_2(k) & k_3(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Horrelako sistema bat begizta itxian egonkorra dela frogatu dugu. Hala ere, hobetze-kontrollean egoera-aldagai guztiak ezaguntzat jo ditugu  $k$  aldiune guztietan. Egoera bektorearen aldagai guztiak izateko, 14. ataleko teknikak aplikatu ditzakegu.

## 15.2 ariketa

**Demagun 14.4.1. ariketako sistemari hobetze-kontrol bat egotzi nahi diogula. Demagun hobetze-kontrola LQR motakoa dela, hau da,  $N = \infty$  dela. Sistemaren eredua honelakoa dela joko dugu.**

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k)$$

Hobetze-kontrolaren gastu-funtzioak itxura hau du.

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \underline{x}^T(k) [\underline{Q}_1] \underline{x}(k) + \underline{u}^T(k) [\underline{Q}_2] \underline{u}(k) \right] \Rightarrow$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \begin{bmatrix} x_1(k) & x_2(k) & x_3(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \underline{u}^T(k) 10 \underline{u}(k) \right]$$

Beraz,  $[Q_1]$  eta  $[Q_2]$  matrizeek itxura hau dute.

$$[Q_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[Q_2] = q_2 = 10$$

➤ Diseinatu hobetze-kontrolaren algoritmo egoki bat sistema honentzat.

Kasu honetan ez dugu lortu behar  $[K(k)]$  berrelikadura-matrizea  $k$  laginketa-periodo bakoitzeko. Beraz,  $[K_\infty]$  berrelikadura-matrizea,  $[S_\infty]$  eta  $[R_\infty]$  matrizeak behin bakarrik kalkulatu ditugu, sistema kontrolatzen hasi baino lehen. Beraz, ekuazio hauek ebatzi beharko ditugu.

Lehenik,  $[S_\infty]$  eta  $[R_\infty]$  matrizeak kalkulatu ditugu.

$$[R_\infty] = [Q_2] + [\Gamma]^T [S_\infty] [\Gamma]$$

$$[S_\infty] = [Q_1] + [\Phi]^T \left( [S_\infty] - [S_\infty] [\Gamma] [R_\infty]^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] \right) [\Phi]$$

$[S_\infty]$  matrizea kalkulatzeko, aurreko errepikapenezko bi ekuazio erabili behar ditugu. Errepikapenezko bi ekuazio horiek emaitza konstante batera heltzen direnean  $[S_\infty]$  matrizea lortu dugula esan dezakegu.

$$[S(k)] = [Q_1] + [\Phi]^T \left( [S(k+1)] - [S(k+1)] [\Gamma] ([Q_2] + [\Gamma]^T [S(k+1)] [\Gamma])^{-1} [\Gamma]^T [S(k+1)] \right) [\Phi]$$

Errepikapenezko ekuazio hori beste era honetara ere idatz daiteke, aldagai-aldaketa hau eginez.

$$\begin{cases} [S(k+1)] = [S_i] \\ [S(k)] = [S_{i+1}] \end{cases} \Rightarrow$$

$$[S_{i+1}] = [Q_1] + [\Phi]^T \left( [S_i] - [S_i] [\Gamma] ([Q_2] + [\Gamma]^T [S_i] [\Gamma])^{-1} [\Gamma]^T [S_i] \right) [\Phi]$$

Non  $[S_i] = [Q_1]$  baita errepikapenezko ekuazio horren hasierako kondizioa.

$[S_\infty]$  matrizea lortzeko,  $[S_i] = [Q_1]$  hasierako kondizioa erabiliz, aurreko errepikapenezko ekuazioa behin eta berriz exekutatu behar dugu.

$[S_\infty]$  eta  $[R_\infty]$  matrizeak lortu eta gero,  $[K_\infty]$  matrizea kalkulatu dugu.

$$[K_\infty] = ([R_\infty])^{-1} [\Gamma]^T [S_\infty] [\Phi]$$

Kontrol-legeak honela kalkulatzen du  $u(k)$  irteera  $k$  aldiune bakoitzean:

$$\underline{u}(k) = -[K_\infty] \underline{x}(k)$$

---

# 16

## Kontrol estokastikoa eta iragartze-kontrola

Liburuko atal honetan, kontrol estokastikoa eta iragartze-kontrola azalduko ditugu. Kontrolatu beharreko sistemaren sarreran prozesu estokastikoak ditugunean, teknika bereziak erabili beharra daukagu. Kontrolatu beharreko sistemaren irteerako bariantza ahalik eta txikiena egitean oinarritzen dira teknika horiek. Bariantza txikieneko kontrola, ia beti, kontsigna nuluentzat erabili ohi da.

Kontrolatu beharreko sistemaren jarrera aldeztu aurretik kalkulatzeko da iragartze-kontrola. Iragartze-kontrolaren ahalegina izaten da gastu-funtzio bat ahalik eta txikiena egitea. Beraz, iragartze-kontrola eta hobetze-kontrola nahiko antzekoak dira.

### 16.1 KONTROL ESTOKASTIKOA, BARIANTZA TXIKIENEO KONTROLA

Sarritan, kontrolatu beharreko sistemak perturbazio ugari izaten dituzte. Perturbazio horien jarrera ez denez ezaguna izaten denboran zehar, hau da, perturbazioen jarrera iragarri ezin daitekeenez denboraren zehar, prozesu estokastikoen bitartez deskriba ditzakegu. Horrelako perturbazioak dituzten sistemak kontrolatzeko, bariantza txikieneko kontrola erabiliko dugu. Bariantza txikieneko kontrola azaltzeko, lehenik iragarpen onena aztertuko dugu.

### 16.1.1 $d$ aurrerapeneko iragarpen onena

Demagun ondorengo transferentzia-funtzioa duen sistema egonkor batek  $\{e(k)\}$  prozesu estokastiko gausstar bat duela sarreratzat. Sistema honen izendatzailea eta zenbakitzailea  $n$ -garren mailako polinomioak dira.

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} E(z) \quad (16.1)$$

$$\text{maila}(A(z)) = \text{maila}(B(z)) = n$$

Geroago ikusiko dugunez,  $B(z)$  polinomioaren erroek egonkorak izan behar dute. Horren zergatia 16.1.1. atalaren bukaeran aztertuko dugu. Azken batean,  $d$  aurrerapeneko iragarpena lortzeko erabiltzen dugun iragazkia egonkorra izan dadin,  $B(z)$  polinomioaren erroek ere egonkorak izan behar dute. Dena dela, muga hori ez da batere garrantzitsua prozesu estokastiko bat deskribatzean,  $B(z)$  polinomioaren erroak beti egin daitezkeelako egonkorak.

$\{e(k)\}$  prozesu gausstar batek ezaugarri hauek ditu:

$$\begin{aligned} e(k) : N(0, \sigma^2) &\Rightarrow \begin{cases} E(e(k)) = 0 \\ E(e^2(k)) = \sigma^2 \end{cases} \\ \forall k_1, k_2 \in \mathbb{N} : E(e(k_1)e(k_2)) &= \begin{cases} \sigma^2 : k_1 = k_2 \\ 0 : k_1 \neq k_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (16.2)$$

Bariantza txikieneko kontrola ulertzeko baliagarria denez,  $d$  aurrerapeneko iragarpen onena kalkulatu dugu. Beraz, iragarpen hori lortzeko, (16.1) ekuazioaren ezkerreko aldea eta eskuineko aldea  $z^d$ -z biderkatuko ditugu.

$$z^d Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^d E(z)$$

$Z(y(k+d)) = z^d Y(z) = Y_d(z)$  eta  $Z(e(k+d)) = z^d E(z) = E_d(z)$  berdintzak betetzen direla jakinda, honela idatz dezakegu (16.2) berdintza:

$$Y_d(z) = \frac{B(z)}{A(z)} E_d(z) \quad (16.3)$$

(16.3) berdintzan oinarriturik,  $y(k+d)$  aldagaiaren iragarpen onena lortuko dugu,  $k$  aldiunera arte dugun informazioarekin, hau da,  $y(k)$ ,  $y(k-1)$ ,  $y(k-2)$  ... aldagaiak erabiliz. Azken hori lortzeko, honela idatziko dugu (16.3) ekuazioa:

$$Y_d(z) = f_0 E_d(z) + \frac{f_1}{z} E_d(z) + \dots + \frac{f_{d-1}}{z^{d-1}} E_d(z) + \frac{R(z)}{A(z)} E_d(z) \quad (16.4)$$

$$Y_d(z) = \frac{f_0 z^{d-1} + f_1 z^{d-2} + \dots + f_{d-1}}{z^{d-1}} E_d(z) + \frac{R(z)}{A(z)} E_d(z) \Rightarrow$$

$$Y_d(z) = \frac{F(z)}{z^{d-1}} E_d(z) + \frac{R(z)}{A(z)} E_d(z)$$

Non  $R(z)$ ,  $B(z)$  eta  $A(z)$  baitira polinomioen arteko zatiketaren hondarra. Gogoan izan behar dugu  $R(z)$  hondarra  $z$  eta  $z^{-1}$  gaien berreturaren mende dagoela.  $R(z)$  hondarrak duen  $z$  gaiaren berreturarik handiena  $n-d$  da, eta  $n$  da  $A(z)$  eta  $B(z)$  polinomioen maila.

$$\begin{array}{l} B(z) \\ R(z) \end{array} \frac{A(z)}{F(z) / z^{d-1}} \Rightarrow F(z) A(z) + z^{d-1} R(z) = z^{d-1} B(z) \quad (16.5)$$

Ekuazio horretan,  $\text{maila}(F(z)) = d-1$  berdintza betetzen da.

$G(z)$  polinomioa honela definituz gero:

$$G(z) = z^{d-1} R(z) \quad (16.6)$$

honela geratuko da (16.5) ekuazioa:

$$F(z) A(z) + G(z) = z^{d-1} B(z) \quad (16.7)$$

$G(z)$  polinomioaren maila  $R(z)$  hondarraren mailaren bitartez kalkula dezakegu.

$$\text{maila}(G(z)) = \text{maila}(z^{d-1} R(z)) \Rightarrow$$

$$\text{maila}(G(z)) = d-1 + n-d = n-1 \quad (16.8)$$

$$\text{maila}(G(z)) = n-1$$

(16.4) ekuazioa gehikuntza-ekuazio gisa idatziz gero,  $y(k+d)$  aldagaiak zer erlazio dituen ikusi ahal izango dugu. Gehikuntza-ekuazio horretan oinarrituta,  $d$  aurrerapeneko iragarpena egin ahal izango dugu. Gehikuntza-ekuazioa lortzeko urrats hauek egingo ditugu:

$$Y_d(z) = f_0 E_d(z) + \frac{f_1}{z} E_d(z) + \dots + \frac{f_{d-1}}{z^{d-1}} E_d(z) + \frac{R(z)}{A(z)} E_d(z) \Rightarrow$$

$$Y_d(z) = f_0 E_d(z) + \frac{f_1}{z} E_d(z) + \dots + \frac{f_{d-1}}{z^{d-1}} E_d(z) + \frac{R(z)}{A(z)} z^d E(z) \Rightarrow$$

$$Y_d(z) = f_0 E_d(z) + \frac{f_1}{z} E_d(z) + \dots + \frac{f_{d-1}}{z^{d-1}} E_d(z) + \frac{z \cdot G(z)}{A(z)} E(z) \quad (16.9)$$

$\frac{z \cdot G(z)}{A(z)} E(z)$  gaia  $e(k)$ ,  $e(k-1)$ ,  $e(k-2)$ ,... sarrerako prozesuaren aldagaien mende dago,  $z \cdot G(z)$  eta  $A(z)$  polinomioen mailak berdinak direlako.  $\frac{z \cdot G(z)}{A(z)}$  transferentzia-funtzio gisa idatziz gero,  $\frac{z \cdot G(z)}{A(z)} E(z)$  gaia konboluzio moduan idatz daiteke.

$$\frac{z \cdot G(z)}{A(z)} = H(z) \quad (16.10)$$

$$\frac{z \cdot G(z)}{A(z)} E(z) = H(z) E(z)$$

$$Z^{-1} \left( \frac{z \cdot G(z)}{A(z)} E(z) \right) = \sum_{l=0}^{l=k} h(l) e(k-l) \quad (16.11)$$

(16.9) berdintzaren eskuineko beste gaia  $e(k+d)$ ,  $e(k+d-1)$ ,... eta  $e(k+1)$  sarrerako prozesuaren aldagaien mende dago. Beraz, (16.9) ekuazioari alderantzizko  $Z$  transformatua aplikatuz gero eta (16.11) ekuazioa erabiliz, honako hau lortuko dugu:

$$Y_d(z) = f_0 E_d(z) + f_1 E_{d-1}(z) + \dots + f_{m-1} E_1(z) + \frac{zG(z)}{A(z)} E(z) \Rightarrow$$

$$y(k+d) = f_0 e(k+d) + f_1 e(k+d-1) + \dots + f_{m-1} e(k+1) + \sum_{l=0}^{l=k} h(l) e(k-l) \quad (16.12)$$

Ikusirik  $\frac{z \cdot G(z)}{A(z)} E(z)$  gaia  $e(k)$ ,  $e(k-1)$ , ... sarrera-aldagaien mende dagoela, (16.9) ekuazioaren gehikuntza-ekuazioa lortzeko,  $\frac{z \cdot G(z)}{A(z)} E(z)$  gaia beste era batera berridatziko dugu.

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} E(z) \Rightarrow \frac{Y(z)}{B(z)} = \frac{E(z)}{A(z)} \Rightarrow$$

$$\frac{zG(z)}{A(z)} E(z) = \frac{zG(z)}{B(z)} Y(z) \Rightarrow$$

$$Y_d(z) = f_0 E_d(z) + f_1 E_{d-1}(z) + \dots + f_{m-1} E_1(z) + \frac{zG(z)}{B(z)} Y(z) \quad (16.13)$$

$$M(z) = \frac{zG(z)}{B(z)} \Rightarrow m(k) = Z^{-1}(M(z)) \quad (16.14)$$

$$y(k+d) = f_0 e(k+d) + f_1 e(k+d-1) + \dots + f_{m-1} e(k+1) + \sum_{l=0}^{l=k} m(l) y(k-l) \quad (16.15)$$

Sistemaren  $\hat{y}(k+d/k)$  irteeraren  $d$  aurrerapeneko iragarpena kalkulatzeko, gogoan izan behar dugu  $k$  aldiunera arte dugun informazioa erabil dezakegula.  $\hat{y}(k+d/k)$  iragarpena egiteko,  $y(k)$ ,  $y(k-1)$ ,  $y(k-2)$ , ... aldagaietan oinarrituko gara.  $\hat{y}(k+d/k)$  iragarpenaren errorearen bariantza ahalik eta txikiena egiten duen iragarpena kalkulatuko dugu.

$$\tilde{y}(k+d/k) = y(k+d) - \hat{y}(k+d/k) \Rightarrow$$

$$E\left(\left(\tilde{y}(k+d/k)\right)^2\right) = E\left(\left(y(k+d) - \hat{y}(k+d/k)\right)^2\right) \Rightarrow$$

Iragarpenaren errorearen bariantza kalkulatzera, aurreko berdintza garatu behar dugu honela:

$$E\left(\left(\tilde{y}(k+d/k)\right)^2\right) = E\left(y^2(k+d)\right) - 2\hat{y}(k+d/k)E\left(y(k+d)\right) + \hat{y}^2(k+d/k) \quad (16.16)$$

$k$  aldiunera arte irteeraren  $y(k)$ ,  $y(k-1)$ ,  $y(k-2)$  balioak ezagunak direnez,  $y(k+d)$  balioaren batezbestekoak itxura hau du:

$$E(y(k+d)) = f_0 E(e(k+d)) + f_1 E(e(k+d-1)) + \dots + f_{m-1} E(e(k+1)) + E\left(\sum_{l=0}^{l=k} m(l) y(k-l)\right)$$

$$E(y(k+d)) = E\left(\sum_{l=0}^{l=k} m(l) y(k-l)\right) = \sum_{l=0}^{l=k} m(l) y(k-l) \quad (16.17)$$

(16.16) berdintzaren eskuineko lehen gaia honela idatz daiteke:

$$E(y^2(k+d)) = f_0^2 \sigma^2 + f_1^2 \sigma^2 + \dots + f_{d-1}^2 \sigma^2 + \left(\sum_{l=0}^{l=k} m(l) y(k-l)\right)^2 \quad (16.18)$$

(16.16) berdintzan (16.17) eta (16.18) berdintzak ordezkatzuz gero, honako hau lortuko dugu:

$$E\left(\left(\tilde{y}(k+d/k)\right)^2\right) = f_0^2 \sigma^2 + f_1^2 \sigma^2 + \dots + f_{d-1}^2 \sigma^2 + \left(\sum_{l=0}^{l=k} m(l) y(k-l)\right)^2 +$$

$$+ \left(\hat{y}(k+d/k) - 2 \sum_{l=0}^{l=k} m(l) y(k-l)\right) \hat{y}(k+d/k)$$

Azken berdintza hori beste era batera berridatz daiteke.

$$E\left(\left(\tilde{y}(k+d/k)\right)^2\right) =$$

$$= f_0^2 \sigma^2 + f_1^2 \sigma^2 + \dots + f_{d-1}^2 \sigma^2 + \left(\left(\sum_{l=0}^{l=k} m(l) y(k-l)\right) - \hat{y}(k+d/k)\right)^2 \quad (16.19)$$

Beraz, honela idatz daiteke iragarpenaren errorearen bariantza txikiena egiten duen iragarpenaren adierazpena.

$$\hat{y}(k+d/k) = \sum_{l=0}^{l=k} m(l) y(k-l) \quad (16.20)$$

Iragarpena horrela kalkulatzuz gero, iragarpenaren errorearen bariantzak balio hau du.

$$E_{txiki}\left(\left(\tilde{y}(k+d/k)\right)^2\right) = (f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_{d-1}^2) \sigma^2 \quad (16.21)$$

(16.20) ekuazioari  $Z$  transformatua aplikatuz gero, honela defini daiteke iragarpenaren transferentzia-funtzioa.

$$\hat{Y}(z) = M(z)Y(z)$$

$$\hat{Y}(z) = \frac{zG(z)}{B(z)}Y(z) \quad (16.22)$$

Beraz, laburbilduz,  $d$  aurrerapeneko iragarpena ematen duen iragazkiaren transferentzia (16.22) ekuaziotik lor dezakegu.  $G(z)$  polinomioa lortzeko, berriz, (16.7) ekuazioa erabili behar dugu. Bestalde, (16.22) iragazkiaren bitartez lortzen dugun  $d$  aurrerapeneko iragarpena egonkorra izan dadin, nahitaezkoa da  $B(z)$  polinomioaren erroen moduluak 1 baino txikiagoak izatea. Beste era batera esanda,  $B(z)$  polinomioaren erroek egonkorrak izan behar dute.

### 16.1.2 Bariantza txikieneko kontrola

Demagun honela defini daitekeela kontrolatu beharreko sistemaren irteera:

$$Y(z) = \frac{C(z)}{A(z)}E(z) + \frac{B(z)}{A(z)}U(z) \quad (16.23)$$

$U(z)$  da kontrola dezakegun aldagaia.  $E(z)$  da perturbazio estokastiko baten  $Z$  transformatua. Berez, prozesu estokastiko baten  $Z$  transformatua ezin daiteke kalkulatu  $\{e(k)\}$  ez delako determinatua. Beraz,  $E(z)$  da prozesu estokastiko baten gauzatzearen  $Z$  transformatua. Jo dezagun hau dela  $\{e(k)\}$  prozesu estokastikoaren deskribapen estatistikoa:

$$e(k) : N(0, \sigma^2) \Rightarrow \begin{cases} E(e(k)) = 0 \\ E(e^2(k)) = \sigma^2 \end{cases} \quad (16.24)$$

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N} : E(e(k_1)e(k_2)) = \begin{cases} \sigma^2 : k_1 = k_2 \\ 0 : k_1 \neq k_2 \end{cases}$$

$A(z)$ ,  $B(z)$  eta  $C(z)$  polinomioen mailak honelakoak direla joko dugu.

$$\begin{aligned} \text{maila}(C(z)) &= \text{maila}(A(z)) = n \\ \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B(z)) &= d \end{aligned} \quad (16.25)$$

Bestalde, suposatuko dugu  $B(z)$  polinomioaren erroak egonkorak direla, hau da,  $B(z)$  polinomioaren erroen moduluak 1 baino txikiagoak direla.

$$B(z) = 0 : |z| < 1 \quad (16.26)$$

Azken kondizio hori da sistemaren begizta itxiko kontrola egonkorra izan dadin bete behar dugun kondizioa. Geroago azalduko dugu kondizio horren zergatia.

Bestalde, joko dugu  $C(z)$  polinomioaren erroak egonkorak direla, hau da,  $C(z)$  polinomioaren erroen moduluak 1 baino txikiagoak direla.

$$C(z) = 0 : |z| < 1$$

Azken kondizio horren zergatia 16.1.3 atalean aztertuko dugu. Atal horretan, (16.82) formulatik (16.88) formulara, bariantza txikieneko kontrol orokortuaren egonkortasuna aztertzerakoan, ondorio honetara heltzen gara: Sistema begizta itxian egonkorra izan dadin,  $C(z)$  polinomioaren erroek egonkorak izan behar dute nahitaez.

Lehenik, bariantza txikieneko kontrolaren garapena eta azalpena deskribatuko ditugu.

Kontrol mota horren helburua da sistemaren  $y(k)$  irteera ahalik eta txikiena izatea. Irteera perturbazio estokastiko baten mende dagoenez,  $y(k)$  irteera ahalik eta txikiena egiteko, irteerako bariantza ahalik eta txikiena egiten duen kontrol-legea erabili behar dugu. Beraz, hau izan daiteke kontrolaren helburua:

$$txikiena \left( E \left( y^2(k) \right) \right)_{u(k)=f(\{y(k)\})} \quad (16.27)$$

### *Frogapena*

Has gaitezen, lehenik, (16.23) ereduaren ezaugarri bat ongi aztertuz. Badakigu  $B(z)$  polinomioaren mailaren eta  $A(z)$  polinomioaren mailaren arteko aldea  $d$  dela. Bestalde, badakigu  $C(z)$  eta  $A(z)$  polinomioek maila bera dutela. Bi kondizio horien ondorioz, aldagaia hauek eragiten diote  $y(k+d)$  aldagaiari:

- Kontrola daitekeen  $u(k), u(k-1), \dots$ , sarreraren aldagaiak.
- $e(k+d), e(k+d-1), \dots, e(k+1), e(k), e(k-1), \dots$ , perturbazio prozesu estokastikoa osatzen duten aldagaiak.

Argi dago  $d$  aurrerapeneko kontrol bat egin behar dugula iteera-aldagaiaren bariantza txikitzeko, zeren eta  $y(k+d)$  aldagaiari eragin diezaiokeen sarrera-aldagai gertuena  $u(k)$  baita. Gogoan izan behar dugu  $u(k+d)$ ,  $u(k+d-1)$ ,  $u(k+d-2)$ , ...,  $u(k+1)$  aldagaiek ez dutela eraginik  $y(k+d)$  aldagaian. Horregatik, (16.30) Diofantosen ekuazioa proposatzerakoan,  $F(z)$  polinomioa  $d-1$  mailakoa da, eta  $G(z)$  polinomioaren maila,  $n-1$ .

Bariantza txikieneko kontrola aztertzeko, lehenik,  $y(k+d)$  aldagaiaren  $Z$  transformatua kalkulatu dugu.

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U(z) + \frac{C(z)}{A(z)}E(z) \quad (16.28)$$

$$Z(y(k+d)) = z^d Y(z)$$

$$Z(u(k+d)) = z^d U(z)$$

$$Z(e(k+d)) = z^d E(z)$$

$$Y_d(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U_d(z) + \frac{C(z)}{A(z)}E_d(z) \quad (16.29)$$

(16.29) ekuazioa Diofantosen ekuazioaren bitartez eraldatu dugu.

$$F(z)A(z) + G(z) = z^{d-1}C(z) \quad (16.30)$$

$$\text{maila}(F(z)) = d-1$$

$$\text{maila}(A(z)) = n$$

$$\text{maila}(C(z)) = n$$

$$\text{maila}(G(z)) = n-1$$

(16.31)

$\text{maila}(G(z)) = n-1$  da, Diofantosen ekuazioa ebazterakoan ditugun ezezagun eta berdintza kopurua berdina izan dadin. Hortaz,  $G(z)$  eta  $F(z)$  polinomioak bakarrik izango dira.

(16.30) ekuazioa (16.29) ekuazioan ordezkatu dugu.

$$Y_d(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U_d(z) + \frac{F(z)A(z) + G(z)}{z^{d-1}A(z)}E_d(z)$$

$$Y_d(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U_d(z) + \frac{F(z)}{z^{d-1}} E_d(z) + \frac{zG(z)}{A(z)} E(z) \quad (16.32)$$

(16.28) ekuaziotik  $E(z)$  bakartuz eta (16.32) ekuazioan ordezkatzuz,

$$\frac{A(z)Y(z) - B(z)U(z)}{C(z)} = E(z) \Rightarrow$$

$$Y_d(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U_d(z) + \frac{F(z)}{z^{d-1}} E_d(z) + \frac{zG(z)}{A(z)} \left( \frac{A(z)Y(z) - B(z)U(z)}{C(z)} \right)$$

Aurreko berdintza apur bat landuz,

$$Y_d(z) = \frac{z^d B(z)}{A(z)} U(z) + \frac{F(z)}{z^{d-1}} E_d(z) + \frac{zG(z)}{C(z)} Y(z) - \frac{zG(z)B(z)}{A(z)C(z)} U(z) \quad (16.33)$$

(16.33) berdintzari buruz zenbait gauza azaldu behar ditugu. Eskuineko lehen atala –hau da,  $\frac{z^d B(z)}{A(z)} U(z)$  atala–  $u(k)$ ,  $u(k-1)$ ,  $u(k-2)$ , ... aldagaien mende dago,  $A(z)$  eta  $z^d B(z)$  polinomioak maila berekoak direlako. Eskuineko bigarren atala –hau da,  $\frac{F(z)}{z^{d-1}} E_d(z)$  atala–  $e(k+d)$ ,  $e(k+d-1)$ ,  $e(k+d-2)$ , ...,  $e(k+2)$ ,  $e(k+1)$  aldagaien mende dago,  $F(z)$  polinomioa  $d-1$  mailakoa delako.  $\frac{zG(z)}{C(z)} Y(z)$  atala, berriz,  $y(k)$ ,  $y(k-1)$ ,  $y(k-2)$ , ... irteera-aldagaien mende dago,  $zG(z)$  polinomioa eta  $C(z)$  polinomioa maila berekoak direlako.  $\frac{zG(z)B(z)}{A(z)C(z)} U(z)$  atala  $u(k)$ ,  $u(k-1)$ ,  $u(k-2)$ , ... aldagaien mende dago,  $zG(z)B(z)$  polinomioaren maila eta  $A(z)C(z)$  polinomioaren maila berdinak direlako.

Irteerako  $y(k+d)$  aldagaiaren bariantza lortzeko, (16.33) ekuazioari alderantzizko  $Z$  transformatua aplikatu behar zaio. Alderantzizko  $Z$  transformatua aplikatu baino lehen, transferentzia-funtzio hauek erabiliko ditugu:

$$H_1(z) = \frac{z^d B(z)}{A(z)} - \frac{zG(z)B(z)}{A(z)C(z)}$$

$$H_1(z) = \frac{z^d B(z)C(z) - zG(z)B(z)}{A(z)C(z)} \quad (16.34)$$

$$H_2(z) = \frac{zG(z)}{C(z)} \quad (16.35)$$

$$Y_d(z) = H_1(z)U(z) + H_2(z)Y(z) + \frac{F(z)}{z^{d-1}}E_d(z) \quad (16.36)$$

$$y(k+d) = \sum_{l=0}^{l=k} h_1(l)u(k-l) + \sum_{l=0}^{l=k} h_2(l)y(k-l) + \sum_{i=0}^{i=d-1} f_i e(k+d-i) \quad (16.37)$$

$y(k+d)$  aldagaiaren bariantza kalkulatzeko, lehenik, gogoan izan behar dugu  $k$  aldiunera arte  $y(k)$  irteeraren balioak eta  $u(k)$  sarreraren balioak ezagunak direla. Beraz, honela idatz dezakegu  $y(k+d)$  aldagaiaren batezbestekoa,  $k$  aldiunera arteko informazio guztia baldin badugu:

$$E(y(k+d)/k) = \sum_{l=0}^{l=k} h_1(l)u(k-l) + \sum_{l=0}^{l=k} h_2(l)y(k-l) \quad (16.38)$$

Honela defini dezakegu irteeraren karratuaren batezbestekoa:

$$E(y^2(k+d)/k) = E\left(\left(\sum_{l=0}^{l=k} h_1(l)u(k-l) + \sum_{l=0}^{l=k} h_2(l)y(k-l)\right)^2\right) + \sum_{i=0}^{i=d-1} f_i^2 \sigma^2 \quad (16.39)$$

Irteeraren karratuaren batezbestekoa ahalik eta txikiena egiteko, eskuineko lehen gaia 0 bilakatu behar dugu. Horretarako, ondorengo berdintza hau bete behar dugu. Berdintza honetatik bariantza txikieneko kontrolaren legea aurki dezakegu.

$$\sum_{l=0}^{l=k} h_1(l)u(k-l) = -\sum_{l=0}^{l=k} h_2(l)y(k-l) \quad (16.40)$$

Kontrol-lege hori erabiliz gero lortzen dugun irteerako bariantzak itxura hau izango du:

$$E(y^2(k+d)/k)_{\text{txikiena}} = \sum_{i=0}^{i=d-1} f_i^2 \sigma^2 \quad (16.41)$$

Bariantza txikieneko kontrola hobeto adierazteko, (16.40) ekuazioaren  $Z$  transformatua aztertuko dugu.

$$\begin{aligned} H_1(z)U(z) &= -H_2(z)Y(z) \Rightarrow \\ U(z) &= -\frac{H_2(z)}{H_1(z)}Y(z) \Rightarrow \end{aligned} \quad (16.42)$$

$$U(z) = -\frac{zG(z)}{C(z)} \frac{(A(z)C(z))}{(C(z)B(z)z^d - zG(z)B(z))} Y(z) \Rightarrow$$

$$U(z) = -\frac{G(z)A(z)}{(C(z)z^{d-1} - G(z))B(z)} Y(z) \quad (16.43)$$

(16.43) ekuazioan (16.30) ekuazioa ordezkatzuz,

$$U(z) = -\frac{A(z)G(z)}{F(z)A(z)B(z)} Y(z) \Rightarrow$$

$$U(z) = -\frac{G(z)}{F(z)B(z)} Y(z) \quad (16.44)$$

Erreguladorearen transferentzia-funtzioa (16.28) ekuazioan ordezkatzuz gero, sistemaren begizta itxiko transferentzia-funtzioa lortuko dugu.

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \left( -\frac{G(z)}{F(z)B(z)} Y(z) \right) + \frac{C(z)}{A(z)} E(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) \left( 1 + \frac{G(z)}{A(z)F(z)} \right) = \frac{C(z)}{A(z)} E(z) \Rightarrow$$

$$Y(z)(A(z)F(z) + G(z)) = C(z)F(z)E(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{C(z)F(z)}{A(z)F(z) + G(z)} E(z) \quad (16.45)$$

(16.30) ekuazioa aurreko berdintzan ordezkatzuz gero, honela idatz dezakegu begizta itxiko transferentzia-funtzioa.

$$Y(z) = \frac{F(z)}{z^{d-1}} E(z) \quad (16.46)$$

Beraz, hau da begizta itxiko transferentzia-funtzioari dagokion gehikuntza-ekuazioa:

$$y(k) = f_0 e(k) + f_1 e(k-1) + \dots + f_{d-1} e(k-d+1) \quad (16.47)$$

Dena dela, kontu handiz ibili behar dugu bariantza txikieneko kontrolarekin. Izan ere,  $B(z)$  polinomioaren erroak egonkorak izan behar dute, hau da,  $B(z)$

polinomioaren erroen moduluak 1 baino txikiagoak izan behar dute. Orain ikusiko dugunez  $B(z)$  polinomioaren erroak egonkorak ez badira, bariantza txikieneko kontrola ez da egonkorra izango, kontrola daitekeen  $u(k)$  aldagaiak gero eta balio handiagoak hartzen dituelako  $B(z)$  polinomioaren erroak egonkorak ez izateagatik. Izan ere, bariantza txikieneko kontrolak  $y(k)$  aldagaiaren egonkortasuna ziurtatzen du  $e(k)$  sarrera estokastikoarekiko, baina ez du ziurtatzen  $u(k)$  aldagaiaren egonkortasuna  $e(k)$  sarrera estokastikoarekiko. Hori hobeto ikusteko, (16.44) ekuazioan (16.46) ekuazioa ordezkatzeko dugu.

$$\begin{aligned} U(z) &= -\frac{G(z)}{F(z)B(z)} Y(z) \Rightarrow \\ U(z) &= -\frac{G(z)}{F(z)B(z)} \frac{F(z)}{z^{d-1}} E(z) \Rightarrow \\ U(z) &= -\frac{G(z)}{z^{d-1}B(z)} E(z) \end{aligned} \quad (16.48)$$

(16.48) ekuazioan ikus daitekeenez  $u(k)$  ez da egonkorra izango,  $B(z)$  erroak ez direlako egonkorak. Beraz,  $u(k)$  egonkorra izan dadin, nahitaez  $B(z)$  polinomioak erro egonkorak izan behar ditu. Beraz, bariantza txikieneko kontrola erabiltzerakoan,  $B(z)$  polinomioaren erroek egonkorak izan behar dute. Arazo hori konpontzeko, bariantza txikieneko kontrol orokortua aztertuko dugu.

### 16.1.3 Bariantza txikieneko kontrol orokortua

Bariantza txikieneko kontrola aztertzean konturatu gara honelako erreguladoreek egonkortasun-arazoak izaten dituztela kontrolatu beharreko sistemaren izendatzaileak egonkorak ez diren erroak dituenen. Horrelako sistemak oso ugariak ez izan arren errealitate praktikokoan ageri diren sistemak dira. Horrenbestez, horrelako sistema baten bariantza txikieneko kontrola egiteko, bestelako azterketa bat garatuko dugu:  $k$  aldiune bakoitzeko bariantza txikiena lortu beharrean, egoera egonkorrean lortuko dugun bariantza txikiena sortzen duen kontrol-legia erabiliko dugu. Dena dela, kontrol mota hori garatu ahal izateko, oinarritzko teorema bat frogatuko dugu.

### 16.1 teorema

Sistema lineal batean sarreraren denborarekin aldatzen ez den prozesu estokastiko bat sartuz gero, sarrerako eta irteerako prozesuen autokorrelazioek berdintza hau beteko dute:

$$\Phi_y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})\Phi_x(e^{j\omega}) \quad (16.49)$$

Aurreko berdintzan agertzen diren gaiek definizio hauek dituzte:

1. Irteerako prozesuaren autokorrelazioaren Fourierren transformatua.

$$\Phi_y(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} R_{yy}(l) e^{-j\omega l} \quad (16.50)$$

Gogoan izan behar dugu sarrerako eta irteerako prozesuak ez direla denborarekin aldatzen; beraz, honelako prozesuen autokorrelazioa  $k_1$  eta  $k_2$ aldiuneen arteko aldearen mende dago soilik.

$$R_{yy}(l) = E(y(k_1)y(k_2)) : l = k_1 - k_2 \quad (16.51)$$

2. Sarrerako prozesuaren autokorrelazioaren Fourierren transformatua.

$$\Phi_x(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} R_{xx}(l) e^{-j\omega l} \quad (16.52)$$

$$R_{xx}(l) = E(x(k_1)x(k_2)) : l = k_1 - k_2 \quad (16.53)$$

3. Sistemaren transferentzia-funtzio harmonikoa, eta bere konjugatua.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} h(n) e^{-j\omega n} \quad (16.54)$$

$$H^*(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} h(n) e^{j\omega n}$$

### Frogapena

Lehenik, sistemaren irteera  $k_1$  eta  $k_2$ aldiuneetan lortzeko, konboluzioa erabiliko dugu.

$$y(k_1) = \sum_{l_1=-\infty}^{l_1=\infty} h(l_1)x(k_1-l_1)$$

$$y(k_2) = \sum_{l_2=-\infty}^{l_2=\infty} h(l_2)x(k_2-l_2)$$

Irteerako prozesuaren autokorrelazioa kalkulatu dugu orain.

$$R_{yy} = E(y(k_1)y(k_2)) = \sum_{l_1=-\infty}^{l_1=\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{l_2=\infty} h(l_1)h(l_2)E(x(k_1-l_1)x(k_2-l_2)) \quad (16.55)$$

$$R_{yy} = \sum_{l_1=-\infty}^{l_1=\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{l_2=\infty} h(l_1)h(l_2)R_{xx}(k_1-l_1-k_2+l_2)$$

Sarrerako prozesua denborarekin aldatzen ez bada, irteerako prozesua ez da denborarekin aldatuko. Beraz, honela idatz daiteke (16.55) berdintza:

$$\tau = k_1 - k_2$$

$$R_{yy}(\tau) = \sum_{l_1=-\infty}^{l_1=\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{l_2=\infty} h(l_1)h(l_2)R_{xx}(\tau+l_2-l_1) \quad (16.56)$$

Irteerako prozesuaren autokorrelazioaren Fourierren transformatua kalkulatu dugu.

$$\Phi_y(e^{j\omega}) = \sum_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} \sum_{l_1=-\infty}^{l_1=\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{l_2=\infty} h(l_1)h(l_2)R_{xx}(\tau+l_2-l_1)e^{-j\omega\tau} \quad (16.57)$$

$\tau$  aldagaia eta  $m$  aldagaia lekuz aldatuta, honela geratuko da (16.57) berdintza:

$$\begin{aligned} m &= \tau + l_2 - l_1 \Rightarrow \\ \tau &= m - l_2 + l_1 \end{aligned}$$

$$\Phi_y(e^{j\omega}) = \sum_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} \sum_{l_1=-\infty}^{l_1=\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{l_2=\infty} h(l_1)h(l_2)R_{xx}(m)e^{-j\omega(m-l_2+l_1)}$$

$$\Phi_y(e^{j\omega}) = \sum_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} \left( R_{xx}(m)e^{-j\omega m} \sum_{l_1=-\infty}^{l_1=\infty} h(l_1)e^{-j\omega l_1} \left( \sum_{l_2=-\infty}^{l_2=\infty} h(l_2)e^{j\omega l_2} \right) \right)$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} h(l)e^{-j\omega l}$$

$$\Phi_y(e^{j\omega}) = \sum_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} \left( R_{xx}(m)e^{-j\omega m} \sum_{l_1=-\infty}^{l_1=\infty} h(l_1)e^{-j\omega l_1} \left( \sum_{l_2=-\infty}^{l_2=\infty} h(l_2)e^{j\omega l_2} \right) \right) \Rightarrow$$

$$\Phi_y(e^{j\omega}) = \sum_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} \left( R_{xx}(m)e^{-j\omega m} H(e^{j\omega}) H^*(e^{j\omega}) \right) \Rightarrow$$

$$\Phi_y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})\Phi_x(e^{j\omega}) \quad (16.58)$$

Beraz, (16.58) berdintzaren bitartez, 16.1 teorema frogatu dugu.

16.1. teorema frogatu eta gero, autokorrelazio-funtziotik bariantza lortzeko erabili beharreko formula frogatuko dugu. Demagun  $p(n)$  dela prozesu estokastiko baten autokorrelazio-funtzioa. Autokorrelazio-funtzio horri Fourierren transformatua aplikatuz gero, berdintza hau lortuko dugu.

$$\Phi_{p(n)}(e^{j\omega}) = \sum_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} R_{pp}(\tau) e^{-j\omega\tau} \quad (16.59)$$

$$R_{pp}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(e^{j\omega}) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$R_{pp}(0) = E(p^2(n)) = \sigma_n^2$$

Horrenbestez, (16.60) berdintzaren bitartez lor dezakegu bariantza.

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(e^{j\omega}) d\omega \quad (16.60)$$

16.1 teorema eta (16.60) berdintza erabiliz, irteerako prozesuaren bariantza lortuko dugu.

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})\Phi_x(e^{j\omega})d\omega \Rightarrow \\ \sigma_y^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_x(e^{j\omega})d\omega \end{aligned} \quad (16.61)$$

Demagun sistema baten  $H(e^{j\omega})$  transferentzia-funtzio baten modulua 1 dela. Ondorioz, irteerako prozesuaren bariantza eta sarrerako prozesuaren bariantza berdinak dira.

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \Rightarrow$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_x(e^{j\omega})d\omega \Rightarrow$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_x(e^{jw}) dw \Rightarrow$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \quad (16.62)$$

16.1 teorema, (16.60) eta (16.62) berdintzak aztertu eta gero, bariantza txikieneko kontrol orokortua aztertuko dugu.

### Bariantza txikieneko kontrol orokortuaren frogapena

Demagun ondorengo sistema kontrolatu nahi dugula. Kontrol mota honen helburua da irteera ahalik eta txikiena egitea. Sistema honek bi sarrera mota ditu:

1.  $\{e(k)\}$  prozesu estokastiko bat da. Hona prozesu estokastiko honen deskribapena:

$$e(k) : N(0, \sigma^2) \Rightarrow \begin{cases} E(e(k)) = 0 \\ E(e^2(k)) = \sigma^2 \end{cases} \quad (16.63)$$

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N} : E(e(k_1)e(k_2)) = \begin{cases} \sigma^2 : k_1 = k_2 \\ 0 : k_1 \neq k_2 \end{cases}$$

2.  $\{u(k)\}$  kontrola dezakegun sarrera.

Kontrolatu beharreko sistemak eredu hau betetzen du:

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U(z) + \frac{C(z)}{A(z)} E(z) \quad (16.64)$$

$B(z)$  polinomioak egonkorak ez diren erroak dituela joko dugu, erro guztiak egonkorak izango balira bariantza txikieneko kontrol arrunta erabiliko genukeelako.  $B(z)$  polinomioa, beraz, erro egonkorak eta ezegonkorak dituzten bi polinomioren arteko biderketa gisa idatz dezakegu.  $B^-(z)$  polinomioaren erroak ez dira egonkorak. Eskuarki, joko dugu  $B^-(z)$  polinomioaren berretura handieneko gaiaren koefizientea 1 dela.

$$B(z) = B^+(z)B^-(z) \quad (16.65)$$

$$B^-(z) = 0 : |z| \geq 1$$

$$B^+(z) = 0 : |z| < 1$$

Polinomioen mailak balio hauek dituzte:

$$\begin{aligned}
 \text{maila}(F(z)) &= \text{maila}(B^-(z)) + d - 1 \\
 \text{maila}(A(z)) &= n \\
 \text{maila}(C(z)) &= n \\
 \text{maila}(G(z)) &= n - 1 \\
 \text{maila}(B(z)) &= n - d
 \end{aligned} \tag{16.66}$$

Geroago ikus ahal izango dugun bezala, suposatuko dugu  $A(z)$  eta  $B^-(z)$  polinomioek ez dutela erro komunik. Bestalde,  $C(z)$  polinomioaren erroak egonkorak direla joko dugu, kontrol-legea egonkorra izan dadin beharrezko kondizioa delako, geroago ikusiko dugun bezala. Kondizio hori ez da oso muga garrantzitsua zeren eta prozesu estokastikoari lotutako transferentzia-funtzioaren izendatzailea baita. Eskuarki, transferentzia-funtzio hori identifikatzea prozesuaren autokorrelazioaren bitartez egiten denez,  $C(z)$  polinomioak egonkorak ez diren erroak baditu, bere  $C(z^{-1})$  polinomio konjugatuaz ordezkatu daiteke.

$$C(z) = 0 : |z| < 1$$

Bariantza txikieneko kontrol orokortuaren oinarria, orduan,  $\{w(k)\}$  aldagai berri baten bariantza ahalik eta txikiena egitea da. Honela defini dezakegu  $\{w(k)\}$  aldagai berri hori:

$$W(z) = \frac{B_-(z)}{B^-(z)} Y(z) \tag{16.67}$$

Non  $B_-(z)$  polinomioa  $B^-(z)$  polinomioaren polinomio lotua baita. Honela lor daiteke polinomio jakin baten polinomio lotua.

$$B^-(z) = z^l + b_{l-1}^- z^{l-1} + b_{l-2}^- z^{l-2} + \dots + b_1^- z + b_0^- \Rightarrow \tag{16.68}$$

$$B_-(z) = z^l (z^{-l} + b_{l-1}^- z^{-l+1} + b_{l-2}^- z^{-l+2} + \dots + b_1^- z^{-1} + b_0^-) \Rightarrow$$

$$B_-(z) = 1 + b_{l-1}^- z + b_{l-2}^- z^2 + \dots + b_1^- z^{l-1} + b_0^- z^l \tag{16.69}$$

Egoera egonkortuan,  $\{w(k)\}$  aldagai berri horren bariantza eta irteera-aldagaiaren bariantza berdinak dira,  $\left| \frac{B^-(e^{jw})}{B^-(e^{jw})} \right| = 1$  delako. Gogoan izan behar dugu  $B^-(z)$  polinomioaren erroen alderantzizkoak  $B^-(z)$  polinomioaren erroak direla.

$$z_d : B^-(z_d) = 0 \Rightarrow z_q = \frac{1}{z_d} \Rightarrow B^-(z_q) = 0$$

Beraz, egoera egonkortuan, esan dezakegu  $\{w(k)\}$  bariantza eta irteerako bariantza berdinak direla, (16.62) berdintzan oinarritzen bagara.

$$\begin{aligned} \left| \frac{B^-(e^{jw})}{B^-(e^{jw})} \right| &= 1 \Rightarrow \\ \sigma_w^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{B^-(e^{jw})}{B^-(e^{jw})} \right|^2 \Phi_y(e^{jw}) dw \Rightarrow \\ \sigma_w^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_y(e^{jw}) dw \Rightarrow \\ \sigma_w^2 &= \sigma_y^2 \end{aligned} \quad (16.70)$$

Beraz,  $\{w(k)\}$  prozesuaren bariantza ahalik eta txikiena egiten badugu, irteerako bariantza, egoera egonkortuan, gero eta txikiagoa izango da.

Bestalde, (16.67) berdintzan definitu dugun transferentzia-funtzioan zerbait argitu behar dugu.  $B^-(z)$  polinomioaren erroak ez dira egonkorak, baldin eta (16.67)

formula era kausal batean ulertzen bada. Baina, berez,  $W(z) = \frac{B^-(z)}{B^-(z)} Y(z)$

iragazki hau kausala ez dela suposatu behar dugu. Beraz, (16.67) berdintzan definitu dugun iragazkia egonkorra izango da. Azter dezagun orain  $W(z)$  aldagai berri horren eredua.

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} U(z) + \frac{C(z)}{A(z)} E(z) \Rightarrow \\ W(z) &= \frac{B^-(z)}{B^-(z)} Y(z) = \frac{B^-(z)}{B^-(z)} \left( \frac{B(z)}{A(z)} U(z) + \frac{C(z)}{A(z)} E(z) \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$W(z) = \frac{B^-(z)B^+(z)}{A(z)}U(z) + \frac{B^-(z)C(z)}{B^-(z)A(z)}E(z) \quad (16.71)$$

$W(z)$  kalkulatu eta gero, lor dezagun aldagai horren  $d$  aurrerapeneko aldagaiaren  $Z$  transformatua.

$$\begin{aligned} Z(w(k+d)) &= W_d(z) = z^d W(z) = \\ &= \frac{z^d B^-(z)B^+(z)}{A(z)}U(z) + \frac{B^-(z)C(z)z^d}{B^-(z)A(z)}E(z) \end{aligned} \quad (16.72)$$

Ondoren, eskuineko gaia eraldatuko dugu Diofantosen ekuazioaren bitartez.

$$C(z)B^-(z)z^{d-1} = A(z)F(z) + G(z)B^-(z) \quad (16.73)$$

Non  $F(z)$  polinomioaren mailak eta  $G(z)$  polinomioaren mailak berdintza hauek betetzen baitituzte.

$$maila(F(z)) = d - 1 + maila(B^-(z)) \quad (16.74)$$

$$maila(G(z)) = n - 1 \quad (16.75)$$

Diofantosen ekuazio horretatik emaitza lortzeko, eta 10. atalean ikasi dugun bezala, nahitaez,  $A(z)$  polinomioek eta  $B^-(z)$  polinomioek komunean dituzten erroek  $C(z)B^-(z)z^{d-1}$  polinomioaren erroak izan behar dute. Beraz, horrelako arazorik izan ez dezagun, suposatuko dugu  $A(z)$  eta  $B^-(z)$  polinomioek ez dutela inolako erro komunik.

(16.72) ekuazioan (16.73) ekuazioa ordezkatzuz gero  $W(z)$  honela berridatz daiteke:

$$W_d(z) = \frac{z^d B^-(z)B^+(z)}{A(z)}U(z) + \left( \frac{A(z)F(z) + G(z)B^-(z)}{B^-(z)A(z)} \right) zE(z) \quad (16.76)$$

Aurreko ekuazioa apur laburbilduz, berdintza hau lortuko dugu.

$$W_d(z) = \frac{z^d B^-(z)B^+(z)}{A(z)}U(z) + \frac{zF(z)}{B^-(z)}E(z) + \frac{zG(z)}{A(z)}E(z) \quad (16.77)$$

(16.77) berdintzaren eskuineko gaiak aztertuko ditugu orain.  $\frac{z^d B^-(z) B^+(z)}{A(z)} U(z)$

gaiaren alderantzizko Z transformatua kalkulatu gero, konturatuko gara gai hori sarreraren  $u(k)$ ,  $u(k-1)$ ,  $u(k-2)$ , ... aldagaien mendekoa dela,  $z^d B^-(z) B^+(z)$

polinomioa eta  $A(z)$  olinomioa maila berekoak direlako.  $\frac{zG(z)}{A(z)} E(z)$  gaiaren

alderantzizko Z transformatua eginez gero, hirugarren gai hori  $e(k)$ ,  $e(k-1)$ ,  $e(k-2)$ , ... aldagaien mendekoa izango da,  $zG(z)$  eta  $A(z)$  polinomioak maila berekoak direlako. Azkenik, eskuineko bigarren gaia aztertuz gero, konturatuko gara  $zF(z)$  polinomioaren maila  $B^-(z)$  polinomioaren maila baino handiagoa dela. Beraz, gai hori  $e(k+1)$ ,  $e(k+2)$ ,  $e(k+3)$  ... aldagaien mendekoa da.

Beraz,  $w(k+d)$  aldagaia  $u(k)$ ,  $u(k-1)$ ,  $u(k-2)$ , ...,  $e(k)$ ,  $e(k-1)$ ,  $e(k-2)$ , ... eta  $e(k+1)$ ,  $e(k+2)$ ,  $e(k+3)$ , ... aldagaien mendekoa da. Dena dela,  $k$  aldiunera arte informazio guztia badugu –hau da,  $y(k)$ ,  $y(k-1)$ ,  $y(k-2)$ , ... aldagaiak ezegunak badira–,  $u(k)$ ,  $u(k-1)$ ,  $u(k-2)$ , ...,  $e(k)$ ,  $e(k-1)$ ,  $e(k-2)$  aldagaiak lor ditzakegu. Horrenbestez,  $w(k+d)$  aldagaiaren karratuaren batezbestekoa ahalik eta txikiena egiteko, (16.77) ekuazioko eskuineko lehen eta hirugarren gaiak berdinak baina aurkako zeinukoak izan behar dute. Hala,  $w(k+d)$  aldagaia  $e(k+1)$ ,  $e(k+2)$ ,  $e(k+3)$  ... aldagaien mendekoa soilik izango da. Gogoan izan behar dugu aldagai horiek  $k$  aldiunean ezezagunak direnez ezin dugula ezer egin aldagai horien balioei buruz, eta, beraz, ezin ditugula erabili kontrol-legea lortzeko. Horrenbestez, honela idatz dezakegu kontrol-legea:

$$\frac{z^d B^-(z) B^+(z)}{A(z)} U(z) = -\frac{zG(z)}{A(z)} E(z) \Rightarrow$$

$$z^d B^-(z) B^+(z) U(z) = -zG(z) E(z) \Rightarrow$$

$$U(z) = -\frac{zG(z)}{z^d B^-(z) B^+(z)} E(z) \Rightarrow$$

$$U(z) = -\frac{G(z)}{z^{d-1} B^-(z) B^+(z)} E(z) \quad (16.78)$$

Dena dela, guk eskuragarri dugun aldagaia  $Y(z)$  aldagaia denez, (16.78) ekuazioa  $E(z)$  aldagaiaren mende idatzi beharrean,  $Y(z)$  aldagaiaren mende idatziko dugu. Horretarako, (16.77) ekuazioa laburtuko dugu (16.78) berdintza erabiliz.

$$\begin{aligned}
 W_d(z) &= \frac{zF(z)}{B^-(z)} E(z) \Rightarrow \\
 z^d \frac{B^-(z)}{B^-(z)} Y(z) &= \frac{zF(z)}{B^-(z)} E(z) \Rightarrow \\
 Y(z) &= \frac{F(z)}{z^{d-1}B^-(z)} E(z) \Rightarrow \\
 E(z) &= \frac{z^{d-1}B^-(z)}{F(z)} Y(z) \quad (16.79)
 \end{aligned}$$

(16.79) ekuazioa (16.78) ekuazioan ordezkatzuz, honela defini dezakegu kontrol-legea.

$$U(z) = -\frac{G(z)}{F(z)B^+(z)} Y(z) \quad (16.80)$$

Eta kontrol-lege hori erabilia, honela eratuko litzateke sistemaren begizta itxiko transferentzia-funtzioa:

$$Y(z) = \frac{F(z)}{z^{d-1}B^-(z)} E(z) \quad (16.81)$$

Hor ikus daiteke  $y(k)$  irteera-aldagaia  $e(k)$ ,  $e(k-1)$ ,  $e(k-2)$  ... aldagaien mende egongo dela, eta sistema horren erro guztiak egonkorak izango direla. Bestalde, kontrol-legea egonkorra dela frogatzeko, begizta itxian sistema definitzen duten (16.80) eta (16.64) ekuazioak matrize gisa idatziko ditugu, eta egonkortasuna aztertuko dugu.

$$\begin{bmatrix} A(z) & -B(z) \\ G(z) & F(z)B^+(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(z) \\ U(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(z) \\ 0 \end{bmatrix} E(z) \quad (16.82)$$

$$\begin{bmatrix} A(z) & -B(z) \\ G(z) & F(z)B^+(z) \end{bmatrix} = [M(z)] \quad (16.83)$$

$$[M(z)] \begin{bmatrix} Y(z) \\ U(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(z) \\ 0 \end{bmatrix} E(z) \quad (16.84)$$

Ekuazio horretatik  $Y(z)$  eta  $U(z)$  aldagaiak bakartuz gero,  $[M(z)]$  matrizearen alderantzizkoa lortuko dugu. Alderantzizko matrizea lortzeko,  $[M(z)]$  matrizearen adjuntua eta determinante kalkulatu behar ditugu

$$\begin{bmatrix} Y(z) \\ U(z) \end{bmatrix} = [M(z)]^{-1} \begin{bmatrix} C(z) \\ 0 \end{bmatrix} E(z) \quad (16.85)$$

$$\begin{bmatrix} Y(z) \\ U(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\det([M(z)])} [M_d(z)] \begin{bmatrix} C(z) \\ 0 \end{bmatrix} E(z) \quad (16.86)$$

Ikus daitekeenez,  $[M(z)]$  matrizearen determinantearen erroak sistemaren begizta itxiko erroak dira. Beraz, erro horiek egonkorak badira, sistema begizta itxian ere egonkorra izango da.

$$\det([M(z)]) = A(z)F(z)B^+(z) + B^+(z)B^-(z)G(z) = 0 \quad (16.87)$$

(16.73) ekuazioa erabiliz, honela berridatz daiteke aurreko berdintza.

$$C(z)B^-(z)z^{d-1} = A(z)F(z) + G(z)B^-(z)$$

$$\begin{aligned} \det([M(z)]) &= B^+(z)(A(z)F(z) + B^-(z)G(z)) = 0 \Rightarrow \\ \det([M(z)]) &= B^+(z)B^-(z)C(z)z^{d-1} = 0 \end{aligned} \quad (16.88)$$

Beraz,  $C(z)$  polinomioaren erroak egonkorak badira, sistemaren aldagai guztiak egonkorak izango dira. Horrenbestez,  $U(z)$  aldagaia ere egonkorra izango denez, kontrol-legea ere egonkorra izango da.

## 16.2 IRAGARTZE-KONTROLA

Mota honetako kontrolaren helburua da denbora -tarte jakin batean gastu-funtzioa ahalik eta txikiena egitea. Gastu-funtzio horiek proportzionalak dira sistemak denbora-tarte horretan jarraitu behar lukeen ibilbidearekiko duen errorearen karratuarekiko. Bestalde, gastu-funtzio horiek kontuan izaten dute sarrera-aldagaien karratua ere, sistema kontrolatzen duten eragingailuak aseta gera ez daitezen. Iragartze-kontrol deritzogu, denbora-tarte horretan kontroladoreak sistemaren irteera iragartzen duelako, eta, iragapen horietan oinarrituta, kontroladoreak sistemari denbora-tarte horretarako eman behar dizkion sarrerak kalkulatzeko. Sarrera-aldagaiak denbora-tarte horretan hartu behar dituen balioek izan behar dute gastu-funtzioa ahalik eta txikiena egiten duten balioak. Beraz, kontroladoreak sistemaren

irteera neurtzen du laginketa-periodo bakoitzean, eta denbora-tarte baterako gastu-funtzioa txikiena egiten duen sarrera kalkulatzeko. Sarrera-aldagaiarentzat kalkulaturako lehen balioa D/A bihurgailutik ateratzen du; hurrengo laginketa-periodora arte itxarongo du, eta, orduan, prozesua errepikatzen du berriro.

Kontrol mota hau, kontrol estokastikoa bezala, sistemaren irteeraren iragarpenetan oinarritzen da. hainbat teknika daude iragartze-kontrol bat gauzatzeko. GPC motako iragartze-kontrola da garrantzitsua edo ezagunena.

### 16.2.1 Iragartze-kontrol orokortua, GPC (*Generalized Predictive Control*)

Lehendabizi, kontrolatu beharreko sistema azalduko dugu. Kontrol honetan, transferentzia-funtzioak  $z$  aldagaiaren berretura negatiboen bidez adieraziko ditugu, horrela frogatzea errazagoa delako.  $\{e(k)\}$  prozesu estokastikoa zarata zuri bat da, batezbesteko nulua du.

$$A(z^{-1})Y(z) = z^{-(d+1)}B(z^{-1})U(z) + C(z^{-1})\frac{E(z)}{\Delta} \quad (16.89)$$

Ekuazio horretan,  $Y(z)$  da sistemaren irteera,  $U(z)$  da kontrola daitekeen sistemaren sarrera, eta  $E(z)$ , prozesu estokastiko baten gauzatze zehatz baten  $Z$  transformatua.  $A(z^{-1})$ ,  $B(z^{-1})$ ,  $C(z^{-1})$  eta  $\Delta$  berretura negatiboko polinomioak dira, eta itxura hau dute. Sistemaren sarreraren atzerapena sarrerarekiko  $d$  laginketa-periodokoa da.

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a} \quad (16.90)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + a_{n_b} z^{-n_b} \quad (16.91)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c} \quad (16.92)$$

$$\Delta = 1 - z^{-1} \quad (16.93)$$

Ingeniaritzan sarritan gertatzen denez, joko dugu  $E(z)$  prozesu estokastikoak integratzaile bat duela; horregatik,  $E(z)$  prozesuari lotutako transferentzia-funtzioak  $\Delta$  gaia du.

Gauzak errazteko, lehenik,  $C(z^{-1}) = 1$  dela joko dugu. Ondoren, egoera orokorrago bat aztertuko dugu.

Frogapena  $C(z^{-1}) = 1$  denean:

Demagun gastu-funtzio hau definitzen dugula, sistemaren errorearen karratua eta sarrera-aldagaiaren karratua kontuan hartzen dituen funtzioa, hain zuzen:

$$J(N_1, N_2, N_u) = \sum_{j=N_1}^{j=N_2} \gamma_j (\hat{y}(k+j/k) - w(k+j))^2 + \sum_{j=1}^{j=N_u} \lambda_j (u(k+j-1) - u(k+j-2))^2 \quad (16.94)$$

Berdintza horretan agertzen diren gaiak esanahi hau dute:

1.  $\hat{y}(k+j/k)$  da,  $k$  aldiunera arteko informazio guztia izanda,  $k+j$  aldiuneko irteeraren iragarpenik onena.
2.  $\gamma_j$  da  $k+j$  aldiuneko errorearen karratuaren indartze-koefiziente. Koefiziente horiek beti positiboak dira.
3.  $\lambda_j$  da  $k+j$  aldiuneko sarreraren karratuaren indartze-koefiziente. Koefiziente horiek beti positiboak dira.
4.  $w(k+j)$  da  $k+j$  aldiunean guk irteeran izan nahi dugun balioa. Azken batean, sistemari ematen zaion kontsigna da.
5.  $J(N_1, N_2, N_u)$  da ahalik eta txikiena egin nahi dugun funtzioa.
6.  $N_1$  eta  $N_2$  aldiuneen arteko irteeraren balioak kontuan hartuko ditugu. Bi balio horiek osatzen dute iragartze-kontrolaren denbora-tartea.
7.  $N_u$  balioa da kontrolak kontuan hartzen dituen sarrera-aldagaiaren lagin kopurua.
8.  $d+1$  da sistemaren atzerapen kopurua.

(16.94) berdintza aztertu eta gero, jarrai dezagun iragartze-kontrolaren frogapenarekin. (16.94) funtzioa ahalik eta txikiena egiteko, erregresio gisa idatziko dugu; baina hori egiteko, lehenik,  $\hat{y}(k+j/k)$  iragarpena azaldu behar dugu. Horretarako, 16.1.1. atalean egin ditugun urratsen antzekoak egingo ditugu. Lehendabizi, Diofantosen ekuazioa idatziko dugu.

$$1 = Q_j(z^{-1}) \Delta A(z^{-1}) + z^{-d} F_j(z^{-1}) \quad (16.95)$$

Non  $Q_j(z^{-1})$  eta  $F_j(z^{-1})$  polinomioen mailak balio hauek baitituzte.

$$maila(Q_j(z^{-1})) = j - 1 \quad maila(F_j(z^{-1})) = n_a \quad (16.96)$$

(16.89) berdintza  $z^j \Delta Q_j(z^{-1})$  gaiaz biderkatuz,

$$\begin{aligned} z^j \Delta Q_j(z^{-1}) A(z^{-1}) Y(z) &= z^j \Delta Q_j(z^{-1}) z^{-(d+1)} B(z^{-1}) U(z) + \\ &+ z^j \Delta Q_j(z^{-1}) C(z^{-1}) \frac{E(z)}{\Delta} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Delta Q_j(z^{-1}) A(z^{-1}) Y_j(z) = Q_j(z^{-1}) B(z^{-1}) \Delta U_{j-d-1}(z) + Q_j(z^{-1}) C(z^{-1}) E_j(z) \quad (16.97)$$

Non

$$Z(y(k+j)) = Y_j(z)$$

$$Z(u(k+j-d-1)) = U_{j-d-1}(z)$$

$$Z(e(k+j)) = E_j(z)$$

(16.97) ekuazioan (16.95) ekuazioa ordezkatzuz,

$$\begin{aligned} 1 - z^{-j} F_j(z^{-1}) &= Q_j(z^{-1}) \Delta A(z^{-1}) \Rightarrow \\ (1 - z^{-j} F_j(z^{-1})) Y_j(z) &= Q_j(z^{-1}) B(z^{-1}) \Delta U_{j-d-1}(z) + Q_j(z^{-1}) E_j(z) \end{aligned}$$

Azken ekuazio hori, beste era honetara idatziko dugu,  $Y_j(z)$  aldagaia bakartuz:

$$Y_j(z) = F_j(z^{-1}) Y(z) + Q_j(z^{-1}) B(z^{-1}) \Delta U_{j-d-1}(z) + Q_j(z^{-1}) E_j(z) \quad (16.98)$$

Ikus daitekeenez,  $k$  aldiunea baino lehenagoko informazio guztia izanda,  $Y_j(z)$  transformatuaren batezbestekoa da sistemaren irteeraren iragarpenik onena.

$$\begin{aligned} \hat{Y}_j(z) &= E(Y_j(z)/k) \\ E(Y_j(z)/k) &= F_j(z^{-1}) Y(z) + Q_j(z^{-1}) B(z^{-1}) \Delta U_{j-d-1}(z) \Rightarrow \\ \hat{Y}_j(z) &= F_j(z^{-1}) Y(z) + Q_j(z^{-1}) B(z^{-1}) \Delta U_{j-d-1}(z) \end{aligned} \quad (16.99)$$

$G_j(z^{-1}) = Q_j(z^{-1})B(z^{-1})$  definituz gero, (16.99) ekuazioa honela berridatz daiteke:

$$\hat{Y}_j(z) = F_j(z^{-1})Y(z) + G_j(z^{-1})\Delta U_{j-d-1}(z) \quad (16.100)$$

Sarrera-aldagaia, orain, beste sarrerako beste aldagai hauez ordezkatzuz gero (16.100) ekuazioan,  $J$  funtzioa matrize gisa idatz daiteke.

$$u'(k) = u(k) - u(k-1)$$

$$U'(z) = (1 - z^{-1})U(z)$$

$$\hat{Y}_j(z) = F_j(z^{-1})Y(z) + G_j(z^{-1})U'_{j-d-1}(z) \quad (16.101)$$

$J$  funtzioa matrize gisa idatz ahal izateko,  $y(k+d+1)$  aldagaia bakartu behar dugu. Gogoan izan behar dugu  $N_1 = d+1$ ,  $N_2 = N+d$  eta  $N_u = N$  egingo dugula. Zeren eta  $y(k+d+1)$  aldagaian eragin dezaketen aldagaiak sarreraren  $u(k)$ ,  $u(k-1)$ ,  $u(k-2)$ , ... balioak baitira. Beraz, sarrera-aldagaiaren  $N$  balio kalkulatu nahi baditugu –hau da,  $u(k)$ ,  $u(k+1)$ , ...  $u(k+N-1)$  balioak–, kontuan hartu behar ditugu  $y(k+d+1)$  aldagaitik  $y(k+d+N)$  aldagaira sortzen ditugun erroreak. Horretarako, (16.101) ekuazioa gehikuntza-ekuazio gisa idatziko dugu.

$$\hat{Y}_j(z) = F_j(z^{-1})Y(z) + G_j(z^{-1})U'_{j-d-1}(z) \Rightarrow$$

$$\hat{Y}_j(z) = (f_{j,0} + f_{j,1}z^{-1} + \dots + f_{j,n_a}z^{-n_a})Y(z) +$$

$$+ (g_{j,0} + g_{j,1}z^{-1} + \dots + g_{j,n_b+j-1}z^{-(j-1+n_b)})U'_{j-d-1}(z)$$

$$\hat{y}(k+j) = f_{j,0}y(k) + f_{j,1}y(k-1) + \dots + f_{j,n_a}y(k-n_a) + \quad (16.102)$$

$$+ g_{j,0}u'(k+j-d-1) + g_{j,1}u'(k+j-d-2) + \dots + g_{j,n_b+j-1}u'(k-d-n_b)$$

(16.102) ekuazioan,  $j$  aldagaia  $j = d+1$  baliotik  $j = N+d$  baliora bitarteko balioak emanaz gero,

$$j = d+1:$$

$$\hat{y}(k+d+1) = f_{d+1,0}y(k) + f_{d+1,1}y(k-1) + \dots + f_{d+1,n_a}y(k-n_a) +$$

$$+ g_{d+1,0}u'(k) + g_{d+1,1}u'(k-1) + \dots + g_{d+1,n_b+d}u'(k-d-n_b)$$

$$j = d + 2:$$

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+d+2) &= f_{d+2,0}y(k) + f_{d+2,1}y(k-1) + \dots + f_{d+2,n_a}y(k-n_a) + \\ &+ g_{d+2,0}u'(k+1) + g_{d+2,1}u'(k) + g_{d+2,2}u'(k-1) + \dots \\ &+ g_{d+2,n_b+d}u'(k-d-n_b+1) + g_{d+2,n_b+d+1}u'(k-d-n_b) \\ &\dots\end{aligned}$$

$$j = N + d$$

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+N+d) &= f_{N+d,0}y(k) + f_{N+d,1}y(k-1) + \dots + f_{N+d,n_a}y(k-n_a) + \\ &+ g_{N+d,0}u'(k+N-1) + g_{N+d,1}u'(k+N-2) + \dots + g_{N+d,n_b+N+d-1}u'(k-d-n_b)\end{aligned}$$

$N$  ekuazio horien eskuineko aldea aztertuz gero, konturaturako gara  $k$  aldiunean ezagutzen ditugun aldagaiak ditugula: irteeraren  $y(k)$ ,  $y(k-1)$ , ...  $y(k-n_a)$  balioak eta sarreraren

$u(k-1)$ ,  $u(k-2)$ , ...  $u(k-d-n_b)$  balioak. Lortu beharreko aldagaiak sarreraren  $u(k)$ ,  $u(k+1)$  ... eta  $u(k+N-1)$  balioak dira. Ekuazio horiek honela idatz daitezke matrize gisa:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \hat{y}(k+d+1) \\ \hat{y}(k+d+2) \\ \dots \\ \hat{y}(k+d+N) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} g_{d+1,0} & 0 & \dots & 0 \\ g_{d+2,1} & g_{d+2,0} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N+d,N-1} & g_{N+d,N-2} & \dots & g_{N+d,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(k) \\ u'(k+1) \\ \dots \\ u'(k+N-1) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{l=n_b+d} g_{d+1,l}u'(k-l) + \sum_{l=0}^{l=n_a} f_{d+1,l}y(k-l) \\ \sum_{l=2}^{l=n_b+d+1} g_{d+2,l}u'(k+1-l) + \sum_{l=0}^{l=n_a} f_{d+2,l}y(k-l) \\ \dots \\ \sum_{l=N}^{l=n_b+d+N-1} g_{N+d,l}u'(k+N-1-l) + \sum_{l=0}^{l=n_a} f_{N+d,l}y(k-l) \end{bmatrix} \quad (16.103)\end{aligned}$$

(16.103) ekuazioa laburbil daiteke, definizio hauek emanez:

$$\begin{aligned}
 [\hat{y}] &= \begin{bmatrix} \hat{y}(k+d+1) \\ \hat{y}(k+d+2) \\ \dots \\ \hat{y}(k+d+N) \end{bmatrix} \\
 [G] &= \begin{bmatrix} g_{d+1,0} & 0 & \dots & 0 \\ g_{d+2,1} & g_{d+2,0} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N+d,N-1} & g_{N+d,N-2} & \dots & g_{N+d,0} \end{bmatrix} \\
 [u'] &= \begin{bmatrix} u'(k) \\ u'(k+1) \\ \dots \\ u'(k+N-1) \end{bmatrix} \\
 [f] &= \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{l=n_b+d} g_{d+1,l} u'(k-l) + \sum_{l=0}^{l=n_a} f_{d+1,l} y(k-l) \\ \sum_{l=2}^{l=n_b+d+1} g_{d+2,l} u'(k+1-l) + \sum_{l=0}^{l=n_a} f_{d+2,l} y(k-l) \\ \dots \\ \sum_{l=N}^{l=n_b+d+N-1} g_{N+d,l} u'(k+N-1-l) + \sum_{l=0}^{l=n_a} f_{N+d,l} y(k-l) \end{bmatrix} \\
 [\hat{y}] &= [G][u'] + [f] \tag{16.104}
 \end{aligned}$$

J funtzioa matrize gisa idazten badugu, berdintza hau lortuko dugu:

$$J = ([\hat{y}] - [w])^T ([\hat{y}] - [w]) + \lambda [u']^T [u'] \tag{16.105}$$

Non  $[w]^T = [w(k+d+1) \ w(k+d+2) \ \dots \ w(k+d+N)]$  baita kontsignaren balioez osatutako bektorea. Gogoan izan behar dugu  $\gamma_j = 1$  egin dugula eta  $\lambda_j$  parametro guztiak berdinak direla.

$$\forall j \in \{1, \dots, N\} \lambda_j = \lambda > 0$$

(16.104) ekuazioa (16.105) ekuazioan ordezkatzuz,

$$J = ([G][u'] + [f] - [w])^T ([G][u'] + [f] - [w]) + \lambda [u']^T [u'] \quad (16.106)$$

Eta hori honela berridatz daiteke:

$$J = \frac{1}{2} [u']^T [H] [u'] + [b]^T [u'] + [f_0] \quad (16.107)$$

$$[H] = 2([G]^T [G] + \lambda [I]) \quad (16.108)$$

$$[b]^T = 2([f] - [w])^T [G] \quad (16.109)$$

$$[f_0] = ([f] - [w])^T ([f] - [w]) \quad (16.110)$$

J funtzioa  $[u']$  bektorearekiko deribatuz eta zerora berdinduz, kontrol egokiena lortuko dugu, J txikiena egiten duen  $[u']$  bektorea lortuz.

$$[u'] = -([G]^T [G] + \lambda [I])^{-1} [G]^T ([w] - [f]) \quad (16.111)$$

Kontrol-legea irabazi-matrize baten bitartez adieraz daiteke.

$$[u'] = -[K]([w] - [f]) \quad (16.112)$$

$$[K] = ([G]^T [G] + \lambda [I])^{-1} [G]^T \quad (16.113)$$

Gogoan izan  $[I]_{N \times N}$  unitate-matrizea dela.

Beraz, laburbilduz, mota honetako kontrol baten exekuzioa honela adieraz daiteke hitz gutxitan: hasieran, sistemaren eredu finkatu behar dugu; ondoren, J funtzioa definitu behar dugu  $N_1 = d+1$ ,  $N_2 = N+d$  eta  $N_u = N$  eginez ( $N$  guk aukeratutako denbora-tarte bat da, eta gogoan izan,  $d$  sistemaren ereduaren parametro bat dela), eta, azkenik, mikroprozesadorearen denbora-etenen bitartez. Urrats hauek exekutatuko ditugu laginketa-periodo bakoitzeko:

1. Lehenik,  $y(k)$  aldagaiaren laginketa.
2. Ondoren,  $j$  aldagaiari  $d+1$ -etik  $N+d$ -rako balioak emanez, Diofantosen ekuazioak ebartziko ditugu, eta  $F_j(z^{-1})$  eta  $G_j(z^{-1})$  polinomioak lortuko ditugu.

$$1 = Q_j(z^{-1}) \Delta A(z^{-1}) + z^{-j} F_j(z^{-1})$$

Non balio hauek baitituzte  $Q_j(z^{-1})$  eta  $F_j(z^{-1})$  polinomioen mailak:

$$\text{maila}(Q_j(z^{-1})) = j - 1 \quad \text{maila}(F_j(z^{-1})) = n_a$$

3. Ondoren,  $[f]$  eta  $[G]$  matrizeak lortuko ditugu.

$$[G] = \begin{bmatrix} g_{d+1,0} & 0 & \dots & 0 \\ g_{d+2,1} & g_{d+2,0} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N+d,N-1} & g_{N+d,N-2} & \dots & g_{N+d,0} \end{bmatrix}$$

$$[f] = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{l=n_b+d} g_{d+1,l} u'(k-l) + \sum_{l=0}^{l=n_a} f_{d+1,l} y(k-l) \\ \sum_{l=2}^{l=n_b+d+1} g_{d+2,l} u'(k+1-l) + \sum_{l=0}^{l=n_a} f_{d+2,l} y(k-l) \\ \dots \\ \sum_{l=N}^{l=n_b+d+N-1} g_{N+d,l} u'(k+N-1-l) + \sum_{l=0}^{l=n_a} f_{N+d,l} y(k-l) \end{bmatrix}$$

4. Kontsignaren bektorea eraiki.

$$[w]^T = [w(k+d+1) \quad w(k+d+2) \quad \dots \quad w(k+d+N)]$$

5.  $[H]$ ,  $[b]^T$  eta  $[f_0]$  matrizeak lortu, ekuazio hauek erabiliz.

$$[H] = 2([G]^T [G] + \lambda [I])$$

$$[b]^T = 2([f] - [w])^T [G]$$

$$[f_0] = ([f] - [w])^T ([f] - [w])$$

6. Sarrera bektorea kalkulatu eta D/A bihurgailuetara bidali.

$$[u'] = -[K]([w] - [f])$$

$$[K] = ([G]^T [G] + \lambda [I])^{-1} [G]^T$$

7. Aldagaiak eguneratu behar ditugu laginketa-periodo honetan,  $[f]$  eta  $[G]$  matrizeak eguneratuak egon daitezen.

$$\begin{aligned} y(k - n_a) &\Leftarrow y(k - n_a + 1) \\ y(k - n_a + 1) &\Leftarrow y(k - n_a + 2) \\ &\dots \\ y(k - 1) &\Leftarrow y(k) \end{aligned}$$

$y(k)$  aldagaia hurrengo laginketa-periodoaren hasieran neurtuko dugu.

$$\begin{aligned} u(k - n_b - d) &\Leftarrow u(k - n_b - d + 1) \\ u(k - n_b - d + 1) &\Leftarrow u(k - n_b - d + 2) \\ &\dots \\ u(k - 1) &\Leftarrow u(k) \end{aligned}$$

8.-Etena bukatu eta hurrengo laginketa-periodoan 1. urratsetik hasiko gara.

*Frogapena*  $C(z^{-1}) \neq 1$  *denean*:

Egoera horretan, joko dugu  $C(z^{-1})$  polinomioaren erroak egonkorak direla. Beraz,  $C(z^{-1}) = 0 : |z| > 1$  izan behar dute. Gogoan izan behar dugu  $z$  aldagaiaren berretura negatiboetako polinomio bat dela  $C(z^{-1})$ . Kondizio hori ezartzen ez badugu, egonkortasun-arazoak izango ditugu, bariantza txikieneko kontrolean gertatzen zitzaigun bezala.

$$A(z^{-1})Y(z) = z^{-(d+1)}B(z^{-1})U(z) + C(z^{-1})\frac{E(z)}{\Delta} \quad (16.114)$$

Atal honetan,  $\hat{y}(k + j/k)$  iragarpena bakarrik frogatuko dugu.

Beraz, iragarpena kalkulatzeko, lehenik, Diofantosen ekuazio hau ebatziko dugu:

$$C(z^{-1}) = Q_j(z^{-1})\Delta A(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}) \quad (16.115)$$

$$\text{maila}(F_j(z^{-1})) = n_a$$

$$\text{maila}(Q_j(z^{-1})) = j - 1$$

(16.114) ekuazioa  $\Delta \cdot Q_j(z^{-1})z^j$  polinomioaz biderkatuz,

$$\begin{aligned} A(z^{-1})Y(z) &= z^{-(d+1)}B(z^{-1})U(z) + C(z^{-1})\frac{E(z)}{\Delta} \Rightarrow \\ \Delta \cdot Q_j(z^{-1})z^j A(z^{-1})Y(z) &= \Delta \cdot Q_j(z^{-1})z^j \left( z^{-(d+1)}B(z^{-1})U(z) + C(z^{-1})\frac{E(z)}{\Delta} \right) \Rightarrow \\ \Delta \cdot Q_j(z^{-1})A(z^{-1})Y_j(z) &= \Delta \cdot Q_j(z^{-1})B(z^{-1})U_{j-(d+1)}(z) + Q_j(z^{-1})C(z^{-1})E_j(z) \end{aligned}$$

(16.115) ekuazioa aurreko ekuazioan ordezkatzuz gero, laburtzea lortuko dugu.

$$\begin{aligned} (C(z^{-1}) - z^{-j}F_j(z^{-1}))Y_j(z) &= \Delta \cdot Q_j(z^{-1})B(z^{-1})U_{j-(d+1)}(z) + Q_j(z^{-1})C(z^{-1})E_j(z) \\ C(z^{-1})Y_j(z) &= \Delta \cdot Q_j(z^{-1})B(z^{-1})U_{j-(d+1)}(z) + Q_j(z^{-1})C(z^{-1})E_j(z) + F_j(z^{-1})Y_j(z) \quad (16.116) \end{aligned}$$

(16.116) ekuaziotik,  $\hat{y}(k+j/k)$  iragarpena kalkulatu dugu, ekuazio horren batezbestekoa eginez. Gogoan izan behar dugu (16.116) ekuazioko eskuineko bigarren atalaren batezbestekoa nulua dela,  $\{e(k)\}$  prozesu estokastikoaren batezbestekoa nulua delako. Bestalde,  $\hat{y}(k+j/k) = E(y(k+j)/k)$  eginez gero, bariantza txikieneko iragarpena lortuko dugu. Horrez gain,  $k$  aldiunera arteko informazioak ezagunak direnez, konstantetzat jotzen dira.

$$C(z^{-1})\hat{Y}_j(z) = Q_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta U_{j-(d+1)}(z) + F_j(z^{-1})Y_j(z) \quad (16.117)$$

(16.117) ekuazioa era egokiago batean utzi ahal izateko, Diofantosen ekuazioa ebatziko dugu.

$$1 = C(z^{-1})M_j(z^{-1}) + z^{-j}N_j(z^{-1}) \quad (16.118)$$

$$\begin{aligned} \text{maila}(M_j(z^{-1})) &= j-1 \\ \text{maila}(N_j(z^{-1})) &= \text{maila}(C(z^{-1})) - 1 \end{aligned}$$

(16.117) ekuazioa  $M_j(z^{-1})$  polinomioaz biderkatuz gero,

$$\begin{aligned} M_j(z^{-1})C(z^{-1})\hat{Y}_j(z) &= M_j(z^{-1})Q_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta U_{j-(d+1)}(z) + M_j(z^{-1})F_j(z^{-1})Y_j(z) \\ (1 - z^{-j}N_j(z^{-1}))\hat{Y}_j(z) &= M_j(z^{-1})Q_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta U_{j-(d+1)}(z) + M_j(z^{-1})F_j(z^{-1})Y_j(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{Y}_j(z) = & M_j(z^{-1})Q_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta U_{j-(d+1)}(z) + \\ & + (M_j(z^{-1})F_j(z^{-1}) + N_j(z^{-1}))Y(z)\end{aligned}\quad (16.119)$$

$\hat{y}(k+j/k)$  iragarpena kalkulatu eta gero, (16.102) ekuaziotik (16.113) ekuaziora bitarteko urratsak errepikatu besterik ez dugu egin behar.

## 16.1 ariketa

**16.1.1** Demagun kontrolatu beharreko sistemak itxura hau duela. Lor ezazu sistema horrentzako bariantza txikieneko kontroladorea.

*Sistemaren eredua:*

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U(z) + \frac{C(z)}{A(z)}E(z)$$

Non ereduaren polinomioek balio hauek baitituzte:

$$A(z) = z\left(z - \frac{1}{2}\right) = z^2 - \frac{z}{2}$$

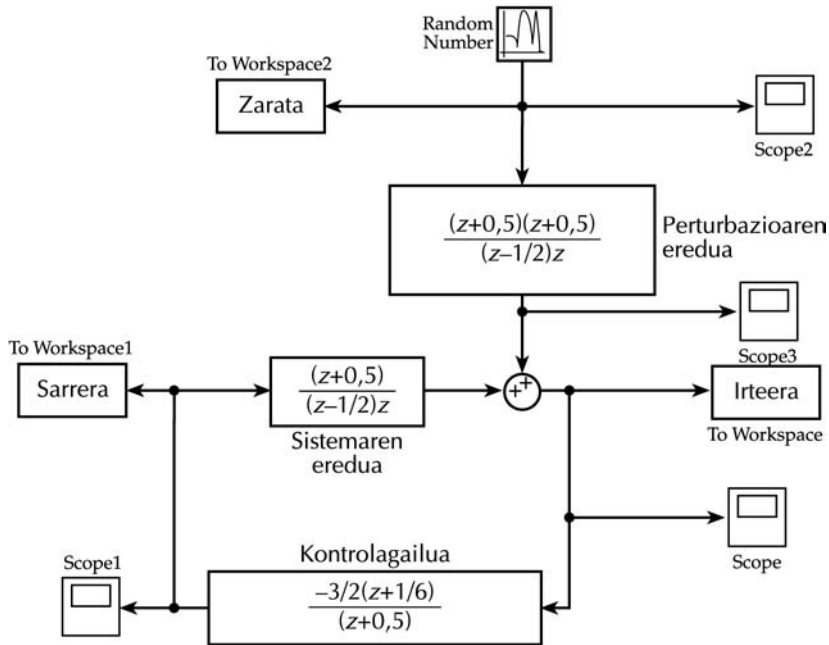
$$B(z) = z + \frac{1}{2}$$

$$C(z) = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = z^2 + z + \frac{1}{4}$$

*Honela deskribatuko dugu  $\{e(k)\}$  prozesu estokastikoa:*

$$e(k) : N(0, \sigma^2) \Rightarrow \begin{cases} E(e(k)) = 0 \\ E(e^2(k)) = \sigma^2 = 0.1 \end{cases}$$

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N} : E(e(k_1)e(k_2)) = \begin{cases} \sigma^2 = 0.1 : k_1 = k_2 \\ 0 : k_1 \neq k_2 \end{cases}$$



### 16.1. irudia. Bariantza txikieneko kontrola

Lehendabizi frogatu behar dugu  $d > 0$  dela,  $B(z)$  polinomioaren erroak egonkorak direla,  $C(z)$  eta  $A(z)$  polinomioen mailak berdinak direla, eta  $C(z)$  polinomioen erroek egonkorrak izan behar dutela.

1.  $d = \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B(z))$   
 $d = 2 - 1 = 1 > 0$
2.  $B(z) = z + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$
3.  $\text{maila}(C(z)) = \text{maila}(A(z)) = 2$
4.  $C(z) = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$

Hori frogatu eta gero, bariantza txikieneko kontrola erabil daitekeela,  $F(z)$  eta  $G(z)$  polinomioen mailak kalkulatu ditugu.

$$maila(F(z)) = d - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$F(z) = f_0$$

$$maila(G(z)) = n - 1 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow$$

$$G(z) = g_0 + g_1 z$$

Orduan, Diofantosen ekuazioa ebatzi behar dugu.

$$F(z)A(z) + G(z) = z^{d-1}C(z) \Rightarrow$$

$$f_0 \left( z^2 - \frac{z}{2} \right) + (g_0 + g_1 z) = z^{1-1} \left( z^2 + z + \frac{1}{4} \right) \Rightarrow$$

$$f_0 \left( z^2 - \frac{z}{2} \right) + (g_0 + g_1 z) = z^2 + z + \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$z^2(f_0) + z \left( -\frac{f_0}{2} + g_1 \right) + g_0 = z^2 + z + \frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} f_0 = 1 \\ -\frac{f_0}{2} + g_1 = 1 \\ g_0 = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_0 = 1 \\ g_1 = \frac{3}{2} \\ g_0 = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

$$F(z) = 1$$

$$G(z) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}z$$

Ondoren, kontroladorearen transferentzia-funtzioa lortuko dugu, bai eta dagokion kontroladorea ere.

$$U(z) = -\frac{G(z)}{B(z)F(z)} Y(z)$$

$$U(z) = -\frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{2}z}{\left(z + \frac{1}{2}\right)} Y(z) \Rightarrow U$$

$$U(z) = -\frac{-\frac{1}{4} - \frac{3}{2}z}{z + \frac{1}{2}} Y(z)$$

$$U(z) = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{3}{2}z}{z + \frac{1}{2}} Y(z) \Rightarrow$$

$$zU(z) + \frac{1}{2}U(z) = -\frac{3}{2}zY(z) - \frac{1}{4}Y(z) \Rightarrow$$

$$U(z) + \frac{z^{-1}}{2}U(z) = -\frac{3}{2}Y(z) - \frac{z^{-1}}{4}Y(z) \Rightarrow$$

$$u(k) = -\frac{u(k-1)}{2} - \frac{3}{2}y(k) - \frac{y(k-1)}{4}$$

Argi dago kontrol-lege hori egonkorra dela,  $U(z)$  aldagaiak  $E(z)$  aldagairekiko duen transferentzia-funtzioa egonkorra delako.

$$U(z) = -\frac{G(z)}{z^{d-1}B(z)}E(z) \Rightarrow$$

$$U(z) = -\frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{2}z}{z + \frac{1}{2}}E(z) = -\frac{\frac{3}{2}z - \frac{1}{4}}{z + \frac{1}{2}}E(z)$$

Ziurtatzearen, sistemaren begizta itxiko transferentzia-funtzioa kalkulatu dugu.

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U(z) + \frac{C(z)}{A(z)}E(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{z + \frac{1}{2}}{z^2 - \frac{1}{2}z} - \frac{\frac{3}{2}z - \frac{1}{4}}{z + \frac{1}{2}}Y(z) + \frac{z^2 + z + \frac{1}{4}}{z^2 - \frac{1}{2}z}E(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{-\frac{3}{2}z - \frac{1}{4}}{z^2 - \frac{1}{2}z}Y(z) + \frac{z^2 + z + \frac{1}{4}}{z^2 - \frac{1}{2}z}E(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) \left( 1 + \frac{\frac{3}{2}z + \frac{1}{4}}{z^2 - \frac{1}{2}z} \right) = \frac{z^2 + z + \frac{1}{4}}{z^2 - \frac{1}{2}z}E(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) \left( \frac{z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}z + \frac{1}{4}}{z^2 - \frac{1}{2}z} \right) = \frac{z^2 + z + \frac{1}{4}}{z^2 - \frac{1}{2}z} E(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) \left( z^2 + z + \frac{1}{4} \right) = \left( z^2 + z + \frac{1}{4} \right) E(z) \Rightarrow Y(z) = E(z) \Rightarrow y(k) = e(k)$$

Irteerako bariantza kalkulatzeko, begizta itxiko gehikuntza-ekuazioan oinarrituko gara.

$$\sigma_{y(k)}^2 = \sigma_{e(k)}^2 = 0,1$$

**16.1.2 Demagun kontrolatu beharreko sistemak itxura hau duela. Lor ezazu bariantza txikieneko kontroladore orokortua sistema honentzat.**

Sistemaren eredua:

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U(z) + \frac{C(z)}{A(z)} E(z)$$

Non eredua polinomioek balio hauek baitituzte.

$$A(z) = z^3$$

$$B(z) = 2(z+3) \left( z + \frac{1}{3} \right) = 2 \left( z^2 + \frac{10}{3}z + 1 \right)$$

$$C(z) = \left( z - \frac{1}{2} \right) \left( z + \frac{1}{2} \right)^2$$

*Honela deskribatuko dugu  $\{e(k)\}$  prozesu estokastikoa.*

$$e(k) : N(0, \sigma^2) \Rightarrow \begin{cases} E(e(k)) = 0 \\ E(e^2(k)) = \sigma^2 = 0.1 \end{cases}$$

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N} : E(e(k_1)e(k_2)) = \begin{cases} \sigma^2 = 0.1 : k_1 = k_2 \\ 0 : k_1 \neq k_2 \end{cases}$$

Gogoan izan behar dugu sistema horri bariantza txikieneko kontrola egitean  $B(z)$  polinomioaren erro guztiak ez direla egonkorak; beraz, bariantza txikieneko kontrol orokortua erabili beharko dugu.

$$B(z) = 2\left(z + 3\right)\left(z + \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow z = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -3 \end{cases}$$

$B(z)$  polinomioaren bigarren erroaren modulua 3 da, beraz, ez da egonkorra.

Lehenik eta behin frogatu behar dugu  $d > 0$  dela,  $C(z)$  eta  $A(z)$  polinomioen mailak berdinak direla,  $C(z)$  polinomioen erroek egonkorak izan behar dutela eta  $C(z)$  eta  $A(z)$  polinomioek ez dutela erro komunik.

$$1. \quad d = \text{maila}(A(z)) - \text{maila}(B(z)) \\ d = 3 - 2 = 1 > 0$$

$$2. \quad \text{maila}(C(z)) = \text{maila}(A(z)) = 3$$

$$3. \quad C(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow z = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$4. \quad C(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow z = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A(z) = z^3 = 0 \Rightarrow z = 0$$

Hori frogatu eta gero, bariantza txikieneko kontrola erabil daitekeela,  $F(z)$  eta  $G(z)$  polinomioen mailak kalkulatu ditugu. Horretarako, lehenik,  $B(z)$  polinomioa erro egonkorretan eta erro ezegonkorretan bereiziko dugu.

$$B(z) = B^-(z)B^+(z) \Rightarrow$$

$$B^-(z) = z + 3$$

$$B^+(z) = 2\left(z + \frac{1}{3}\right)$$

$$maila(F(z)) = d - 1 + maila(B^-(z)) = 1 - 1 + 1 = 1 \Rightarrow$$

$$F(z) = f_0 + f_1 z$$

$$maila(G(z)) = n - 1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow$$

$$G(z) = g_0 + g_1 z + g_2 z^2$$

Orain, Diofantosen ekuazioa ebatzi behar dugu.

$$F(z)A(z) + B^-(z)G(z) = z^{d-1}C(z)B^-(z) \Rightarrow$$

$$(f_0 + f_1 z)z^3 + (z+3)(g_0 + g_1 z + g_2 z^2) = z^{1-1} \left( z - \frac{1}{2} \right) \left( z + \frac{1}{2} \right)^2 (3z+1) \Rightarrow$$

$$(f_0 + f_1 z)z^3 + (z+3)(g_0 + g_1 z + g_2 z^2) = \left( z - \frac{1}{2} \right) \left( z + \frac{1}{2} \right)^2 (3z+1) \Rightarrow$$

$$3z^4 + 2,5z^3 - 0,25z^2 - 0,625z - 0,125 = (f_0 + f_1 z)z^3 + (z+3)(g_0 + g_1 z + g_2 z^2) \Rightarrow$$

$$3z^4 + 2,5z^3 - 0,25z^2 - 0,625z - 0,125 =$$

$$f_1 z^4 + (f_0 + g_2)z^3 + (g_1 + 3g_2)z^2 +$$

$$+z(g_0 + 3g_1) + 3g_0$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 = f_1 \\ 2,5 = f_0 + g_2 \\ -0,25 = g_1 + 3g_2 \\ -0,625 = g_0 + 3g_1 \\ -0,125 = 3g_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_1 = 3 \\ f_0 = 2,5 - g_2 \\ g_2 = \frac{1}{3}(-0,25 - g_1) \\ g_1 = \frac{1}{3}(-0,625 - g_0) \\ g_0 = -\frac{0,125}{3} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_1 = 3 \\ f_0 = 2,51852 \\ g_2 = -0,01852 \\ g_1 = -0,19\hat{4} \\ g_0 = -0,041\hat{6} \end{array} \right.$$

$$F(z) = 2,51852 + 3z$$

$$G(z) = -0,041\hat{6} - 0,19\hat{4}z - 0,01852z^2$$

Ondoren, kontroladorearen transferentzia-funtzioa lortuko dugu, bai eta dagokion kontroladorea ere.

$$U(z) = -\frac{G(z)}{F(z)B^+(z)} Y(z)$$

$$U(z) = \frac{0,041\hat{6} + 0,194\hat{z} + 0,01852z^2}{2(2,51852 + 3z)\left(z + \frac{1}{3}\right)} Y(z)$$

Kontrol-lege hori egonkorra da, lortu dugun transferentzia-funtzioaren erroak egonkorrak direlako.

Ziurtatzearen, sistemaren begizta itxiko transferentzia-funtzioa kalkulatu dugu.

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U(z) + \frac{C(z)}{A(z)} E(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) = -\frac{B^-(z)}{A(z)} \frac{G(z)}{F(z)} Y(z) + \frac{C(z)}{A(z)} E(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) \left( 1 + \frac{B^-(z)}{A(z)} \frac{G(z)}{F(z)} \right) = \frac{C(z)}{A(z)} E(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{F(z)C(z)}{A(z)F(z) + B^-(z)G(z)} E(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{F(z)}{z^d - B^-(z)} E(z) \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{2,51852 + 3z}{3z + 1} E(z)$$

Irteerako bariantza kalkulatzeko, begizta itxiko gehikuntza-ekuazioan oinarrituko gara.

$$3zY(z) + Y(z) = 3zE(z) + 2,51852E(z)$$

$$3Y(z) + z^{-1}Y(z) = 3E(z) + 2,51852z^{-1}E(z)$$

$$3y(k) + y(k-1) = 3e(k) + 2,51852e(k-1)$$

$$y(k) + \frac{1}{3}y(k-1) = e(k) + \frac{2,51852}{3}e(k-1)$$

$$\sigma_{y(k)}^2 + \frac{1}{3}\sigma_{y(k-1)}^2 = \sigma_{e(k)}^2 + \left(\frac{2,51852}{3}\right)^2 \sigma_{e(k-1)}^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_{y(k)}^2 + \frac{1}{3}\sigma_{y(k-1)}^2 = \sigma^2 + \left(\frac{2,51852}{3}\right)^2 \sigma^2 \Rightarrow$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{y(k)}^2 = \sigma_{y(\infty)}^2$$

$$\sigma_{y(\infty)}^2 + \frac{1}{3}\sigma_{y(\infty)}^2 = \left(1 + \left(\frac{2,51852}{3}\right)^2\right) \sigma^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_{y(\infty)}^2 = \frac{3 \left(1 + \left(\frac{2,51852}{3}\right)^2\right)}{4} \sigma^2$$

Behar adina denbora igaro eta gero, aurreko ekuazioa egonkortu egingo da, eta irteerako bariantzak balio hau hartuko du:

$$\sigma_{y(\infty)}^2 = 1,278578 \sigma^2$$



# ELHUYAR Edizioak

## Unibertsitateko gaiak

- Enpresa-zientziak
- Giza zientziak
- Ingeniaritza
- Kimika
- Matematika
- Osasuna
- Teknologia elektrikoa
- Teknologia mekanikoa



ELHUYAR  
edizioak