



ELHUYAR
edizioak

Arantza Tapia Otaegi
Julian Florez Esnal
Gerardo Tapia Otaegi

KONTROL DIGITALAREN OINARRIAK

Unibertsitatea



KONTROL DIGITALAREN OINARRIAK

Arantza Tapia Otaegi¹
Julian Florez Esnal²
Gerardo Tapia Otaegi¹

Irudiak: **Ana Susperregui Burguete**



ELHUYAR
edizioak

¹ Donostiako Unibertsitate Eskola Politeknikoko irakaslea. UPV/EHU

² TECNUN Ingeniarien Goi-Eskolako irakaslea. Nafarroako Unibertsitatea



HEZKUNTZA, UNIBERTSITATE
ETA IKERKETA SAILA

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN,
UNIVERSIDADES E INVESTIGACIÓN

Hezkuntza, Unibertsitate eta Ikerketa Sailaren laguntzaz argitaratu da.

Debekatuta dago liburu hau osorik edo honen zati bat erreproduzitzea, sistema informatiko batean biltegitratzea eta edonola edo edozein euskarritan –elektronikoa, mekanikoa, fotokopia edo bestelakoa– transmititzea, Elhuyar Fundazioaren aldez aurretiko idatzizko baimenik gabe.

© Egileak: Arantza Tapia Otaegi, Julian Florez Esnal eta Gerardo Tapia Otaegi (2007)

© Edizio honena: Elhuyar Fundazioa. Zelai Haundi, 3. Osinalde industrialdea.

20170 USURBIL (Gip.) (2007)

elhuyar@elhuyar.com - www.elhuyar.org

Irudiak: Ana Susperregui Burguete

Koordinazioa eta maketa: Elhuyar Edizioak

Zuzentzailea: Elhuyar Hizkuntza Zerbitzuak

Azalaren diseinua: Olatz Goenaga

ISBN: 978-84-92457--41-0

Aurkibidea

1	SARRERA	1
1.1	OROKORTASUN GARRANTZITSUAK	3
1.2	KONPUTAGAILU DIGITALA KONTROL-BEGIZTAN	5
2	SISTEMA LAGINDUEN TRATAMENDU MATEMATIKOA	11
2.1	LAGINKETA-PROZESUAREN ANALISIA	13
2.2	LAGINKETA IDEALA	24
2.3	LAGINGAILUAREN IRTEERAKO SEINALEAREN LAPLACEREN TRANSFORMATUAREN EZAUGARRIAK	27
2.4	JATORRIZKO SEINALEAREN BERREGITURAKETA	30
2.4.1	Zero ordenako euskailua	32
2.4.2	Lehen ordenako euskailua	34
2.5	LABURPENA	37
2.6	ARIKETAK	39
3	KONTROL-SISTEMA DIGITALAK	43
3.1	SARRERA	45

3.2	S ETA Z PLANOEN ARTEKO ERLAZIOA	51
3.2.1	σ konstanteko zuzenak	52
3.2.2	ω konstante duten zuzenak	53
3.3	Z TRANSFORMATUAREN TOREMAK	54
3.3.1	Gainezarpenaren teorema	54
3.3.2	Linealtasunaren teorema	54
3.3.3	Denbora-desplazamenduaren teorema	54
3.3.4	Hasierako balioaren teorema	55
3.3.5	Azken balioaren teorema	55
3.3.6	Konboluzioaren teorema	55
3.4	Z-REN ALDERANTZIZKO TRANSFORMATUA	55
3.4.1	Zatiketa partzialen metodoa	56
3.4.2	Berreturatan zabaltzearen metodoa	57
3.5	BLOKE-DIAGRAMAK	59
3.6	JAUIZ ERAN KOKATUTAKO OSAGAIEN Z TRANSFORMATUAK...	61
3.6.1	Tartean lagingailua duten jauzi eran kokatutako osagaiak	61
3.6.2	Lagingailurik gabeko jauzi eran kokatutako osagaiak	62
3.7	BLOKE-DIAGRAMEN ALJEBRA	63
3.8	Z TRANSFORMATUAREN METODOAREN MUGAK	69
3.9	LABURPENA	69
3.10	ARIKETAK	71
4	SISTEMA DISKRETIEN ANALISIA	79
4.1	SARRERA	81
4.2	SISTEMA DISKRETIEN EGONKORTASUN ABSOLUTUA	81
4.2.1	z planoan agertzen den egonkortasunerako eremua .	82
4.2.2	Routh-Hurwitz irizpidea: transformazio bilineala	82
4.3	EGONKORTASUN ERLATIBOA, ERANTZUN IRAGANKORRA ETA POLOEN KOKALEKUA Z ETA S PLANOETAN	87
4.4	SISTEMA DISKRETIEN ERANTZUN FREKUENTZIALA	93
4.5	ERROEN LEKU GEOMETRIKOAREN DIAGRAMA SISTEMA DISKRETIETAN	105
4.6	SISTEMA DIGITALEN EGOERA IRAUNKORREKO ERROREAREN ANALISIA	112

4.6.1	Sarrera gisa maila erako funtzioa erabilitakoan lortutako egoera iraunkorreko errorea.....	113
4.6.2	Sarrera gisa arrapala erako funtzioa erabilitakoan lortutako egoera iraunkorreko errorea.....	114
4.6.3	Sarrera gisa funtzio parabolikoa erabilitakoan lortutako egoera iraunkorreko errorea.....	115
4.6.4	Laginketak egoera iraunkorreko errorean duen eragina	116
4.7	LABURPENA	120
4.8	ARIKETAK	121
5	KONTROL-SISTEMA DIGITALEN DISEINUA	135
5.1	SARRERA.....	137
5.1.1	Diferentzia-ekuazio linealak.....	137
5.1.2	Z transformatuak eta diferentzia-ekuazio linealak.....	139
5.2	LAGINKETA-PERIDOAREN HAUTAKETA.....	140
5.2.1	Laginketa-periodoa hautatzeko arau empirikoak	141
5.3	DISEINU-TEKNIKA JARRAITUAK	142
5.3.1	Digitalizazio-prozedurak	142
5.4	KONTROL-SISTEMA DISKRETUEN DISEINU DISKRETUA.....	157
5.4.1	Analisirako arauak.....	157
5.4.2	Kontroladoreen diseinua	158
5.5	LABURPENA	183
5.6	ARIKETAK	184
6	KONTROL-BEGIZTAREN OSAGIAK	195
6.1	SARRERA.....	197
6.2	SARRERAKO ZIRKUITUEN DISEINUA	198
6.2.1	Sarrerako neurketa arruntak	198
6.3	ERAGINGAILUAK.....	203
6.3.1	Kontrol-egituraren hautaketa	203
6.3.2	Abiadura-mugak eragingailuetan.....	204
6.4	INTERFAZE ANALOGIKOA	205
6.4.1	A/D eta D/A bihurketa-prozesuak.....	205
6.4.2	D/A bihurketa.....	206
6.4.3	Irteera analogikoko egiturak.....	208
6.4.4	A/D bihurketa-prozesua	209

6.4.5	Lagingailu-euskailuak	211
6.4.6	A/D bihurgailua lagingailu-euskailu batez.....	213
6.4.7	Sarrerako multiplexazioa	214
6.4.8	Aplikazioaren araberako multiplexadorearen hautaketa	216
6.4.9	Multiplexadorearen kronograma	218
6.4.10	Bihurgailuen zehaztasun tipikoak	220
6.5	INTERFAZE DIGITALA	221
6.5.1	Sarrera	221
6.5.2	Serie interfazea	222
6.5.3	Interfaze paraleloa.....	223
6.6	LABURPENA:	
	MIKROPROZESADOREAK KONTROL-APLIKAZIOETAN	225
7	KASU PRAKTIKOEN AZTERKETA	227
7.1	SARRERA.....	229
7.2	KORRONTE ZUZENeko SERBOMOTOR BATEN ARDATZAREN POSIZIONATZEA.....	229
7.2.1	Begizta irekiko sistemaren ereduztapena.....	230
7.2.2	Aurreratze-kompentsadore jarraitu digitalizatua.....	240
7.2.3	Atzeratze-kompentsadore digitala	248
7.2.4	Programatu beharreko kontrol-algoritmoaren bizkarrezurra	260
7.2.5	Proposaturiko kontrol-sistemak baliozkotzea.....	265
7.2.6	Ondorioak.....	274
7.3	MATERIAL-SAIAKUNTZAKO LABE BATEN TEMPERATURA-KONTROLA.....	275
7.3.1	Labearen deskribapen fisikoa.....	275
7.3.2	Hardwarea	276
7.3.3	Kontrol-begiztaren eginkizunak	278
7.3.4	Labearen ereduztapien matematikoa.....	278
7.3.5	Kontrol-legearen diseinua.....	283
7.3.6	Laginketa-periodoaren hautaketa	286
7.3.7	Emaitzak	290
7.3.8	Ondorioak.....	297
	BIBLIOGRAFIA.....	299

Hitzaurrea

Liburu honetan, konputagailu digitalak nahiz mikrokontroladoreak kontrol-sistemetan erabiltzeko beharrezkoak diren oinarriak finkatzen saiatuko gara. Prestatu den materiala ulertzeko, lagungarria izango da Laplace-ren transformatua ezagutzea, eta, noski, kontrol-sistema jarraitu eta linealen tratamenduari eta kontrolari buruzko ikastaroa egina izatea. Arreta berezia eskaini diogu lagindutako datu eta sistemen erabilerari, Z transformatuari, eta Z eta Laplace-ren transformatuen arteko lotura eta erlazioei.

Hala ere, liburuaren helburua da erantzun dinamiko egokia eta errore txikiak izango dituen sistema lortzeko nahitaezkoa den kontrol digitalaren diseinua egitea, betiere kontuan izanik lagindutako datuak eta anplitude mugatuak dituzten seinaleak erabiliko direla. Erroen leku geometrikoaren metodoa nahiz metodo frekuentziala hartuko dira oinarri kontrolagailuen diseinuari ekiterakoan; azken metodo horretan, hau da, Bode-ren metodoa aztertzerakoan, w planoaren kontzeptua sartu delarik, lagungarri izan dadin.

Liburuaren azken kapitulu gisa, Donostiako Unibertsitate Eskola Politeknikoko laborategietan dauden bi tresnaren adibideak hartu ditugu kontroladore digitalak diseinatu eta haien portaera frogatzeko. Alde batetik,

.....

korronte zuzeneko serbomotor komertzial baten ardatzaren posizio angeluarra kontrolatzen da, eta, bestetik, material-saiakuntzako labe baten tenperatura-kontrola azaltzen da.

Beraz, liburu honek kontrol digitalaren oinarriak ezagutaraztea du helburu, eta, gainera, Ingeniaritzako Graduako prestaketan eta kurtso batean zehar barnera daitekeela pentsatuz gertatu da.

Azkenik, eskerrak eman nahi genizkioke bereziki Ana Susperreguiri liburu hau prestatzeko irudiekin egindako lanagatik. Mila esker, bestalde, gure amari, Ane Mireni eta Arantzazuri ere gure igandeko bazkalondoetan izandako pazientziagatik. Bukatzeko, eskerrak eman beharrea gaudela Eusko Jaurlaritzari ere liburua argitaratzeko emandako laguntzagatik.

Donostia, 2007ko martxoa

1

Sarrera

1.1(b) irudia. Kontroladore digitala duen kontrol-begizta.

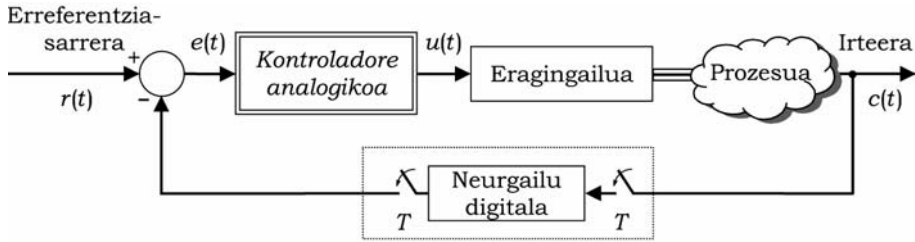
1.1(a) irudian kontroladore analogikoa da erreferentziako seinalea eta prozesutik hartutako neurriaren arteko diferentzia —errore-seinalea, $e(t)$ — aztertzen duena, eta, horren ondorioz, eragingailuak behar duen seinalea sortzen duena.

1.1(b) irudian, berriz, prozesadore digitala dagoenez, era sekuentzialean egiten da lan; errorearen seinalea une jakin batzutan baino ez da neurtzen, eta balio hori da kontrol-algoritmoari eramaten zaiona. Balio hori prozesatutakoan, hau da, denbora-tarte bat igaro ondoren, kontroladore digitalak seinalea bidaliko dio eragingailuari. Eskuarki, errorearen neurriak une erregularretan hartu ohi dira. Kontrol-seinalea eragingailuari bidaltzeko erabiltzen den maiztasuna berdina izaten da oro har, nahiz eta kasu batzutan errorearen neurria hartzeko denboraren anizkoitza den. 1.1(b) irudian ikus daiteke errorea T segundotik behin neurtzen dela, eta kontroladoretik eragingailura doan seinalea nT segundotik behin bidaltzen dela.

Kontrol-begiztako beste osagai guztiak denboran zehar jarraituak izan daitezkeen arren, prozesadore digitalaren erabilerak kontrol-begiztaren *diskretizazioa* ekarri du. Neurriak hartzeko maiztasuna izaten da kasu honetako arazo nagusia.

Dena den, kontrol-begiztaren beste zatiak ere diskretuak izan daitezke. Irteerako aldagaien neurketak —adibidez, gasen kromatografoak, oxigeno neurgailuak, etab.— laginketa-periodoak behar baditu, kontrol-begiztan eragina izan dezake. Aldagai horien neurketaren laginketa-periodoa eta kontroladore digitalarena sinkronizatuta edota sinkronizatu gabe egon daitezke; edo neurri horien laginketa izan daiteke kontrol-begiztako osagai diskretu bakarra, 1.2 irudian ikusten den bezala.

Kontroladore analogikoen analisisian eta diseinuan erabili diren tekniken aldaketa dakar prozesu digitalaren izate diskretuak. Kasu batzutan, aldaketak baino ez dira izango, baina, bestetan, kontzeptu berrien erabilera ere ekarriko du; guztien artean kontrol digitalaren teoria osatzen dute.



1.2 irudia. Kontroladore analogikoa eta irteerako aldagaiaren neurketa diskretua duen kontrol-begizta.

Kontrol-sistema digitalak oinarrian duen prozesua denboran zehar jarraitua da, eta begizta itxian diskretuki lan egiten duen konputazioa nahiz kontrola egiten dituzten elementuekin lotuta dago.

Kontrol-begizta digitalen diseinu egokia egitearren, ezinbestekoa da sistema diskretuak eta jarraituak ulertzea. Adibide gisa, motor elektriko baten kontrola aztertuko dugu konputagailu digitala erabiliz.

1.2 KONPUTAGAILU DIGITALA KONTROL-BEGIZTAN

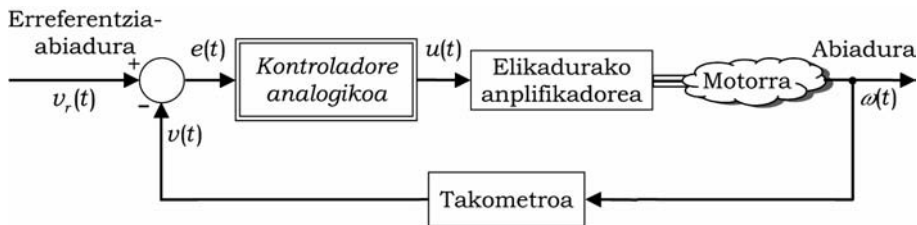
1.3 irudian, abiadura-kontrolako sistema analogikoa agertzen da. Bertan, motor elektrikoaren berrelikadura-begizta batez kontrolatzen da, $v(t)$ tentsioaren erreferentziako seinalari jarrai diezaion.

1.4 irudian, sistema bera dago, baina kontrol-begiztan konputagailu digitala sartuta. Konputagailuaren aurretik A/D bihurgailua behar da; atzetik berriz, D/A bihurgailua agertzen da.

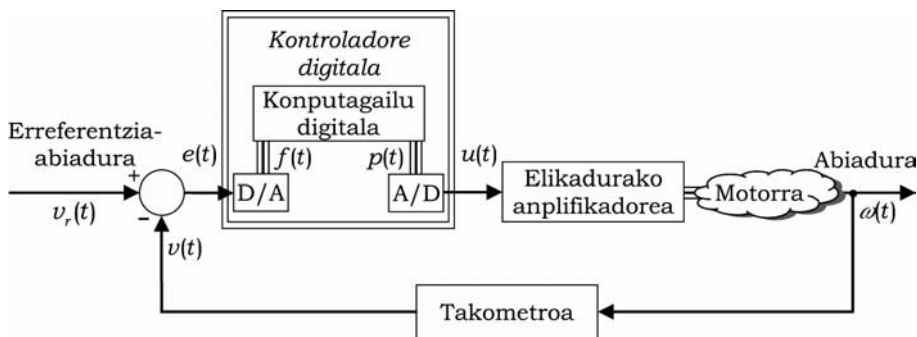
Konputagailu digitalei esker, errazago lortzen dira konpentsazioa eta kontrolaren hobekuntza; baina konputagailu horrek sartzen dituen jarraitutasunik eza, erroreak eta atzerapenak ere aztertu beharrekoak dira.

Lehenbizi, A/D bihurgailuaren eragina aztertuko dugu. Bihurgailuen ezaugarriak dira *bitx digital* batean agertzen den bit kopuru zehatza,

bihurketa-denbora eta $e(t)$ errorea lagintzeko erabilitako T denbora —segundotan—. 1.5 irudian, A/D bihurgailuak laginketa egiteko erabilitako prozesua ikusten da. Bihurgailuak seinalearen laginketa egin, hurbilen duen bita esangura txikieneko bitera (LSB) biribildu eta $f(t)$ sekuentzia sortzen du, bihurketa-denbora igarotakoan.



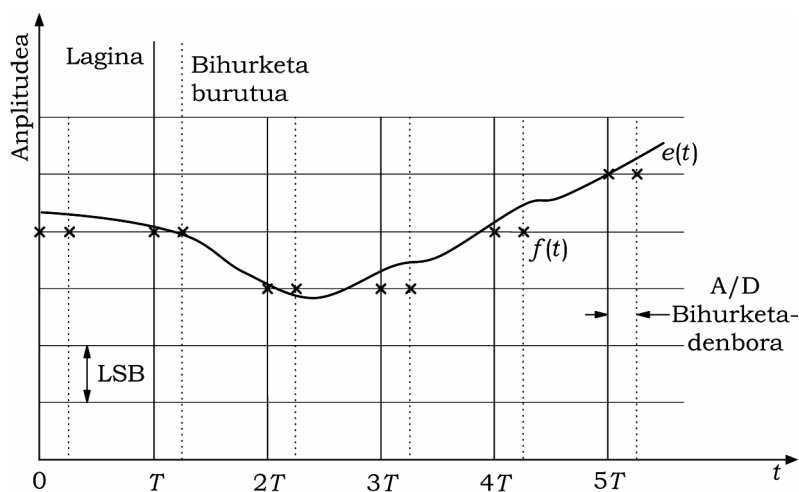
1.3 irudia. Abiadurako kontrol-begizta analogikoa.



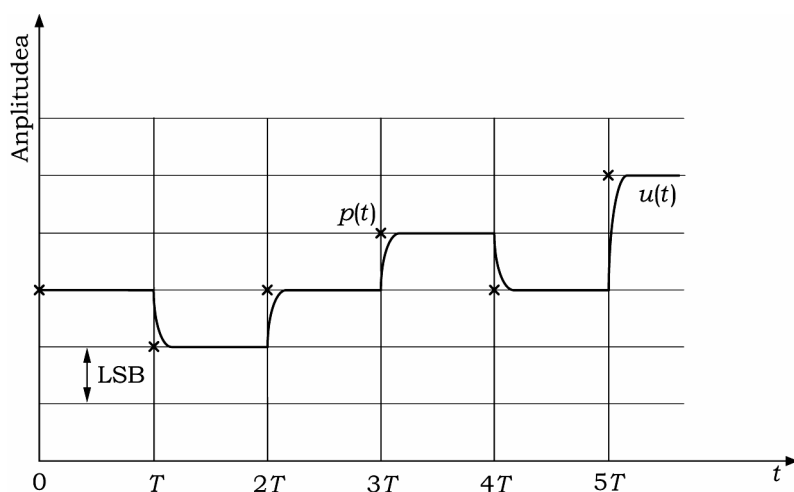
1.4 irudia. Abiadurako kontrola konputagailu digitala erabiliz.

Konputagailuak $f(t)$ sekuentzia irakurri, eta hitz-luzeran oinarritutako zehaztasuna duten algoritmoak erabiliz, $p(t)$ seinale digitala sortzen du, konputazioa egiteko beharrezkoa den atzerapen-denbora batez. Kontuan hartu behar da, adibidez, biderketa egiteko biribilketa egin beharko dela —zenbaki osoak ez badira, behintzat—.

1.6 irudian, D/A bihurgailuaren funtzionamendua agertzen da; $p(t)$ sekuentziak $u(t)$ seinale jarraitua osatzen du. Ikus daitekeenez, bihurgailu horrek sortzen duen seinalea konstante mantentzen da laginketa-uneen tartetean. Azkenik, 1.7 irudian, aurrean aipatutako ezaugarri guztiak aurkezten dira.



1.5 irudia. Seinale analogikoa seinale digital bihurtzeko modua.

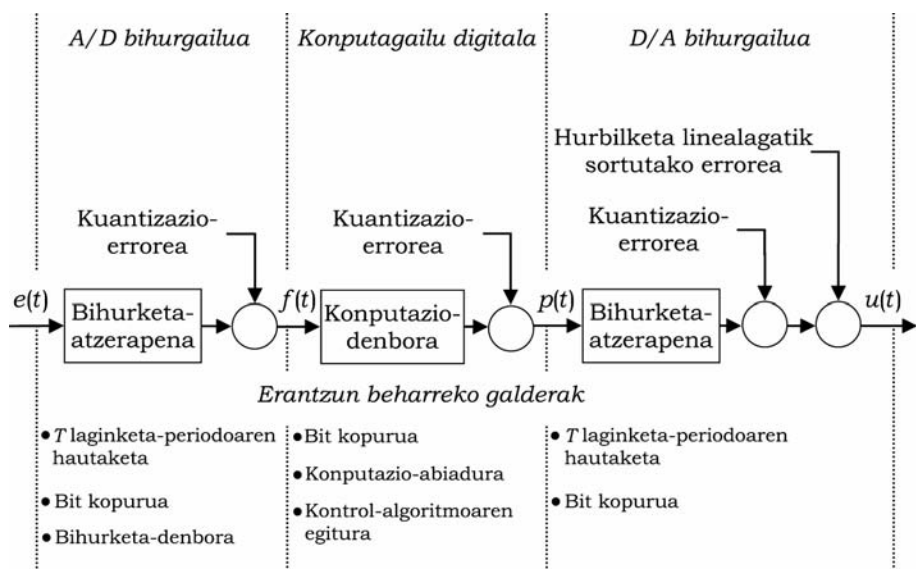


1.6 irudia. D/A bihurgailuak $u(t)$ seinale jarraitua sortzen du $p(t)$ seinale digitaletik.

Dena den, erantzun beharreko galdera batzuk ere agertzen dira:

1. Kontrol-begiztak gailu jarraituak eta diskretuak baditu, zer tresna erabili beharko dira begizta horretan lortutako erantzun frekuentziala eta denboran zehar ematen den portaera karakterizatzen dituzten ezaugarriak finkatzeko?

2. Kontrol-algoritmo digitalak lortzeko, algoritmo analogiko ezagunak diskretu bihurtu edota hasieratik teknika digitalak erabili behar dira. Lehenbiziko kasuan, nola egin behar da bihurketa diskretua? Bigarre-nean, zer teknika erabili behar da?
3. Kontrol-sistemaren portaerak oso zehatza izan behar badu, T laginketa-periodoak txikia behar du. Laginketa azkarra konputazio handiaren beharra sortzen du. Nola finkatu behar da T , sistemaren gainerako parametroak kontuan hartuz?
4. Gailu digitalek atzerapenak eta kuantizazio-zaratak sartzen dituzte. Hardwarea gehituz txikiago daitezke biak. Zer eragin dute bi efektu horiek sistemaren portaeran?
5. Praktikoki eta kostuak kontuan hartuz, zer estrategia —seinaleen multiplexazioaren antzekoak— erabil daitezke aplikazio jakin bakoitzean?



1.7 irudia. Kontroladore gisa konputagailu digitala erabiltzen denean erantzun beharreko galderen eta sor daitezkeen arazoen laburpena.

Dagoeneko aipatu diren arazoak konpontzeko erabiltzen den tresna matematikorik ezagunena Z transformatuarena da. Laburtuz, begizta digitalekin lan egin ahal izateko, honako hauek lortu behar dira:

1. Laginketa-prozesua nahiz lagindutako seinaleen esanahia ulertu.
2. Z transformatua ulertu eta horrekin egin beharreko eragiketak menderatu.
3. Begizta batean osagai analogikoak eta digitalak nahasten direnean izaten den portaera ulertu.
4. Kontroladore analogikoen diseinu-metodoak ezagutu: diseinu digitala diseinu analogikoaren laginketaz edota zuzenean metodo digitalak erabiliz egin daiteke.
5. Kontrol-sistema digitalen ezarpen-metodoak ezagutu.

Hurrengo kapituluetan, beharrezko teknika guztien azterketa sakona egingo dugu.

2

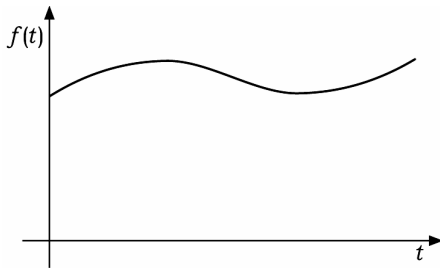
Sistema laginduen tratamendu matematikoa

2.1 LAGINKETA-PROZESUAREN ANALISIA

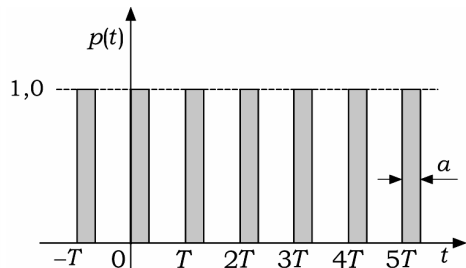
Aldagai jarraitua aldi diskretuetan lagintzen denean, seinale jarraituari pultsuak aplikatzen zaizkio, eta une horietan hartzen dituen balioak balitu bezala adierazten da neurtutako aldagaia. Matematikaren arazoari garrantzi handiegia ez ematearren, pentsatuko dugu prozesu honetan laginketa erregularri egiten dela. Beraz, laginketaren prozesua neurtzen ari den sarrerako seinalearen modulaziotzat hartzen da. Lagingailuaren sarrera seinale jarraitua da eta unitateko anplitudea duen pultsuen sekuentzia batez modulatzten da —2.1 irudia—.



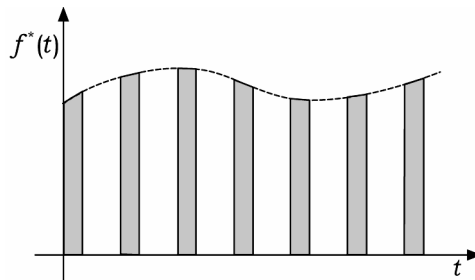
2.1(a) irudia. Neurketa diskretuaren bloke-diagrama.



2.1(b) irudia. $f(t)$ seinale jarraitua.



2.1(c) irudia. Unitateko anplitudea duen pultsuen sekuentzia.



2.1(d) irudia. Pultsuen bidez modulaturatutako seinalea $f^*(t) = f(t)p(t)$.

$p(t)$ seinala periodikoa denez gero, Fourier-en serie gisa adieraz daiteke,

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \quad (2.1)$$

$$\text{non } \omega_s = \text{laginketaren maiztasuna (rad/s)} = 2\pi/T, \text{ eta} \quad (2.2)$$

$T = \text{laginketa-periodoa baitira.}$

Gainera, Fourierren C_n koefizienteak honela adierazten dira:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) e^{-jn\omega_s t} dt \quad (2.3)$$

Bestalde,

$$\begin{cases} p(t) = 1 & (0 \leq t < a) \\ p(t) = 0 & (a \leq t < T) \end{cases}$$

eta, horren ondorioz,

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^a e^{-jn\omega_s t} dt = \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{T} \left[-\frac{1}{jn\omega_s} e^{-jn\omega_s t} \right]_0^a = \frac{1 - e^{-jn\omega_s a}}{jn\omega_s T} \quad (2.5)$$

Eta

$$\sin \alpha = \frac{1}{2j} (e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})$$

ekuazioa erabiliz frogatu daiteke hauek direla C_n koefizienteen balioak:

$$C_n = \frac{\sin(n\omega_s a/2)}{n\omega_s T/2} e^{-jn\omega_s a/2} \quad (2.6)$$

Frogapena

(2.5) ekuaziotik hau aterako da:

$$C_n = \frac{1 - e^{-jn\omega_s a}}{jn\omega_s T} = \frac{a}{T} \frac{1 - e^{-jn\omega_s a}}{jn\omega_s a}$$

$$C_n = \frac{a}{T} \frac{1 - e^{-j\alpha}}{j\alpha}$$

Non $\alpha = n\omega_s a$ baita; eta $e^{-j\alpha/2}$ biderkagai komuna dela kontuan izanik,

$$C_n = \frac{a}{T} \frac{e^{j\alpha/2} - e^{-j\alpha/2}}{j\alpha} e^{-j\alpha/2}$$

Gainera,

$$\sin \alpha = \frac{1}{2j} (e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})$$

adierazpenetik badakigu $e^{j\alpha/2} - e^{-j\alpha/2} = 2j \sin(\alpha/2)$ betetzen dela; horren ondorioz,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{a}{T} \frac{2j}{j\alpha} \sin(\alpha/2) e^{-j\alpha/2} = \frac{a}{T} \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha/2} e^{-j\alpha/2} = \\ &= \frac{a}{T} \frac{\sin(n\omega_s a/2)}{n\omega_s a/2} e^{-jn\omega_s a/2} \quad (\text{frogatu nahi zena}) \end{aligned}$$

(2.1) eta (2.6) ekuazioetatik beste hau lortzen da:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\omega_s a/2)}{n\omega_s T/2} e^{-jn\omega_s a/2} e^{jn\omega_s t} \quad (2.7)$$

eta (2.6) ekuaziotik, berriz,

$$C_n = \frac{a}{T} \frac{\sin(n\omega_s a/2)}{n\omega_s a/2} e^{-jn\omega_s a/2} \quad (2.8)$$

Neurgailu diskretuaren irteeraren deskribapena

$$f^*(t) = p(t)f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n f^*(t) e^{jn\omega_s t} \quad (2.9)$$

izan daiteke, C_n (2.8) ekuazioan deskribatutakoa izanik.

Bestalde, $f^*(t)$ funtzioaren Fourierren transformatuaren definizioa

$$F^*(j\omega) = \mathcal{F}[f^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.10)$$

da; eta hor $\mathcal{F}$ -k Fourierren transformatua adierazten du. Fourierren transformazioaren *translazio konplexuaren teorema* erabiliz (Proakis eta Manolakis, 1998; Oppenheim *et al.*, 1999),

$$\mathcal{F}[e^{jn\omega_s t} f(t)] = F(j\omega - jn\omega_s)$$

(2.9) ekuazioa honela berridatz daiteke:

$$F^*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n F(j\omega - jn\omega_s) \quad (2.11)$$

Ekuazio hori beste era batera ipiniz gero,

$$F^*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n F(j\omega + jn\omega_s) \quad (2.12)$$

$n \rightarrow -\infty$ -tik $+\infty$ -raino baitoa.

$f^*(t)$ funtzioaren Laplaceren transformatua definituz (Oppenheim *et al.*, 1999),

$$F^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n F(s - jn\omega_s) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

Maiztasunaren aldetik laginketa-prozesuak duen garrantzia azter daiteke (2.12) ekuaziotik egindako hurrengo garapen honetatik.

Lehenbizi, (2.8) ekuazioko Fourierren koefizientearen limitea kalkulatu da $n \rightarrow 0$ doanean,

$$C_0 = \lim_{n \rightarrow 0} C_n = \frac{a}{T} \quad (2.13)$$

(2.12) ekuazioan $n = 0$ osagaia baino ez bada kontuan hartzen,

$$F^*(j\omega) \Big|_{n=0} = C_0 F(j\omega) = \frac{a}{T} F(j\omega) \quad (2.14)$$

Ekuazio horretan ikus daitekeenez, batetik, $f(t)$ jatorrizko seinalearen osagai frekuentzialak lagingailuaren irteerako $f^*(t)$ seinalean ere agertzen dira, eta, bestetik, irteeraren anplitudea sarrerakoarena a/T faktoreaz biderkatua da.

$n \neq 0$ denean, C_n zenbaki konplexuaren modulua honako hau izango da:

$$|C_n| = \frac{a}{T} \left| \frac{\sin(n\omega_s a/2)}{n\omega_s a/2} \right| \quad (2.15)$$

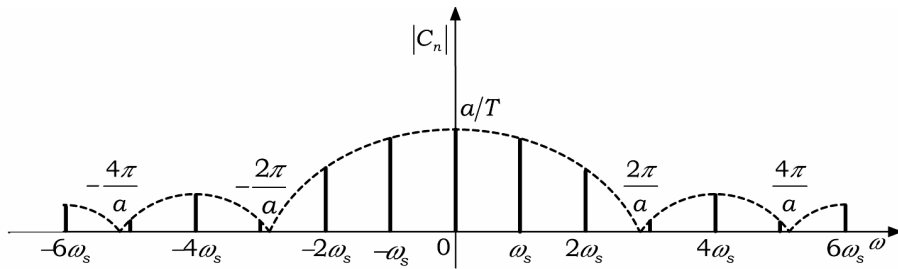
eta $F^*(j\omega)$ seinalearen anplitudea, berriz,

$$|F^*(j\omega)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n F(j\omega + jn\omega_s) \right| \quad (2.16)$$

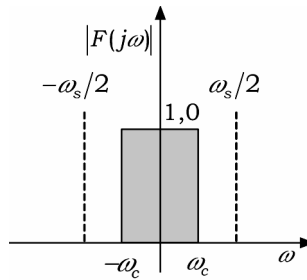
ω -ren funtzio izango diren Fourierren C_n koefizienteen deskribapena besterik ez da $p(t)$ pulsu unitarioen espektroa, n -ren balioak $-\infty$ -tik $+\infty$ -raino doazelarik. 2.2(a) irudian, C_n -ren anplitudeen espektroa agertzen da. Ikus daitekeenez, espektro hori ez da funtzio jarraitua, baizik eta ω -rekin aldatzen den funtzio diskretua; $\omega = n\omega_s$ da, eta $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Irteerako seinalearen maiztasun-espektroaren anplitudea (2.16) ekuazioak emandakoa izango da. Ekuazio hori beste era batera idatziz gero,

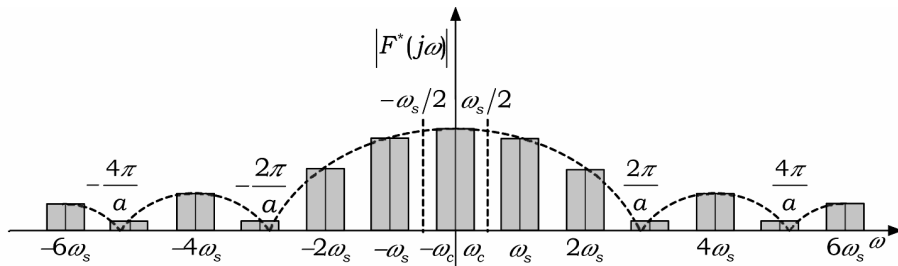
$$|F^*(j\omega)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| |F(j\omega + jn\omega_s)| \quad (2.17)$$



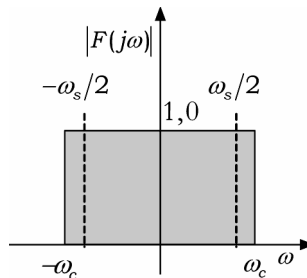
2.2(a) irudia. $p(t)$ sarrerako seinalearen amplitude-espektra.



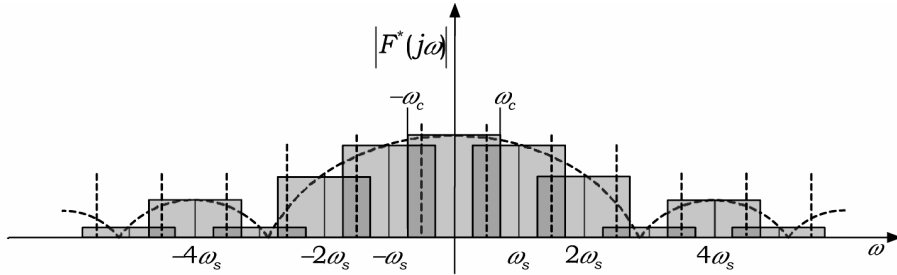
2.2(b) irudia. $f(t)$ jatorrizko seinalearen $|F(j\omega)|$ amplitudearen espektra ($\omega_s > 2\omega_c$).



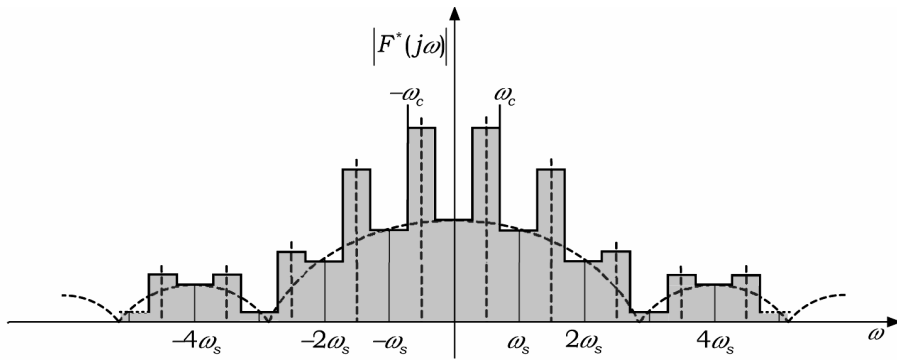
2.2(c) irudia. $F^*(j\omega)$ neurgailu digitalaren amplitude-espektra ($\omega_s > 2\omega_c$).



2.2(d) irudia. $f(t)$ jatorrizko seinalearen $|F(j\omega)|$ amplitudearen espektra ($\omega_s < 2\omega_c$).



2.2(e) irudia. Espektroaren gainezarpena ($\omega_s < 2\omega_0$).



2.2(f) irudia. $F^*(j\omega)$ neurgailu digitalaren anplitude-espektroa ($\omega_s < 2\omega_0$).

Beraz, $f(t)$ seinala jarraituaren espektroaren anplitudea 2.2(b) irudikoa dela onartzen bada, (2.17) ekuazioa erabiliz, $F^*(j\omega)$ funtzioaren espektroa 2.2(c) irudikoa izango da. Bestalde, azpimarratu behar da $F^*(j\omega)$ funtzioak, $F(j\omega)$ funtzioaren oinarritzko osagaiaz gain, badituela osagai osagarriak edo harmonikoak ere: $F(j\omega + jn\omega)$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Irteerako espektroaren n -garren osagaia lortzeko, $|F(j\omega)|$ funtzioa dagokion $|C_n|$ Fourierren koefizienteaz biderkatuko dugu eta $n\omega$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ mugituko dugu.

Ondorioz, lagingailua aurkez daiteke irteeran oinarritzko osagaia nahiz osagai osagarrien funtzio haztatuak dituen harmonikoen sorgailu gisa. Zero maiztasunaren inguruan, sarrerako funtzio jarraituaren informazio guztia dago; informazio bera errepikatuz doa maiztasunaren ardatzean, eta osagai bakoitzaren anplitudea Fourierren $|C_n|$ koefizienteaz haztatua dago. Bestetik, 2.2(c) irudian agertzen den maiztasunen espektroa marraztu behar dugunez, jo

dugu ω_s laginketa-maiztasuna $f(t)$ seinalan dagoen maiztasunik handienaren bikoitza baino handiagoa izango dela; hau da, $\omega_s > 2\omega_c$.

$\omega_s < 2\omega_c$ denean —2.2(d) irudia—, $|F^*(j\omega)|$ funtzioaren maiztasunen espektroaren distortsioa agertzen da osagai harmonikoen gainezarpena dela eta; 2.2(e) irudia. Ikus daitekeenez, zero maiztasunaren inguruan agertzen den maiztasun-espektroak ez du zerikusirik jatorrizko seinalearenarekin. Beraz, teorian, 2.2(c) irudiko espektrotik, eta behe-maiztasunak baino igarotzen uzten ez dituen iragazki batez, jatorrizko seinalea berreskura daiteke; baina 2.2(f) irudiko espektrotik ezingo da jatorrizko seinalerik jaso, harmonikoen gainezarpenagatik.

Osagai harmonikoen maiztasunen gainezarpenaren fenomenoari *aliasing* deritzo. Bestalde, **‘Laginketaren teorema’** edo **‘Nyquist-Shannon-en laginketaren teorema’** izenez ezagutzen da (Nyquist, 1928; Shannon, 1972) ω_s maiztasunak $f(t)$ jatorrizko seinalearen maiztasunik handienaren bikoitza baino handiago izan behar duela dioen teorema.

Teorema horrek zera dio: “Baldin $f(t)$ seinale baten maiztasun-espektroaren ω_c banda mugatuta badago, eta laginketa-maiztasuna $\omega_s \geq 2\omega_c$ bada, $f(t)$ seinale jarraitua zeharo definituta geratzen da $f^*(t)$ seinale laginduz. Ondorioz, teorian behintzat, seinale lagindutik jatorrizko seinalea berreskura daiteke.”

2.1 adibidea. Seinale baten aliasingaren eragina

Demagun seinale sinusoidal hau lagintzen dela:

$$f_1(t) = e^{j\omega_c t}$$

Baldin laginketa-periodoa T bada, hartutako lakinak honako hauek dira:

$$f_1(nT) = e^{j\omega_c nT} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

baina

$$e^{j\omega_c nT} = e^{j\omega_c nT} e^{j2\pi nk} = e^{jnT(\omega_c + 2\pi k/T)} = e^{jnT(\omega_c + k\omega_s)}$$

$\omega_s = 2\pi/T$ laginketa-maiztasuna izanik. Ondorioz,

$$f_2(t) = e^{j(\omega_c + k\omega_s)t} \quad \text{eta} \quad f_1(t) = e^{j\omega_c t}$$

funtzioek lugin berak dituzte.

Demagun orain parametroak ordezkatzan ditugula; hau da, $\omega_c = 1$, $\omega_s = 3$ eta $k = 1$ direla. Orduan,

$$\sin(t) = \Im[f_1(t)] \quad \text{eta} \quad \sin(4t) = \Im[f_2(t)]$$

funtzioek lugin berak dituzte, 2.3 irudian ikusten den bezala.

2.2 adibidea

Demagun seinale analogiko hau dugula:

$$f_1(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

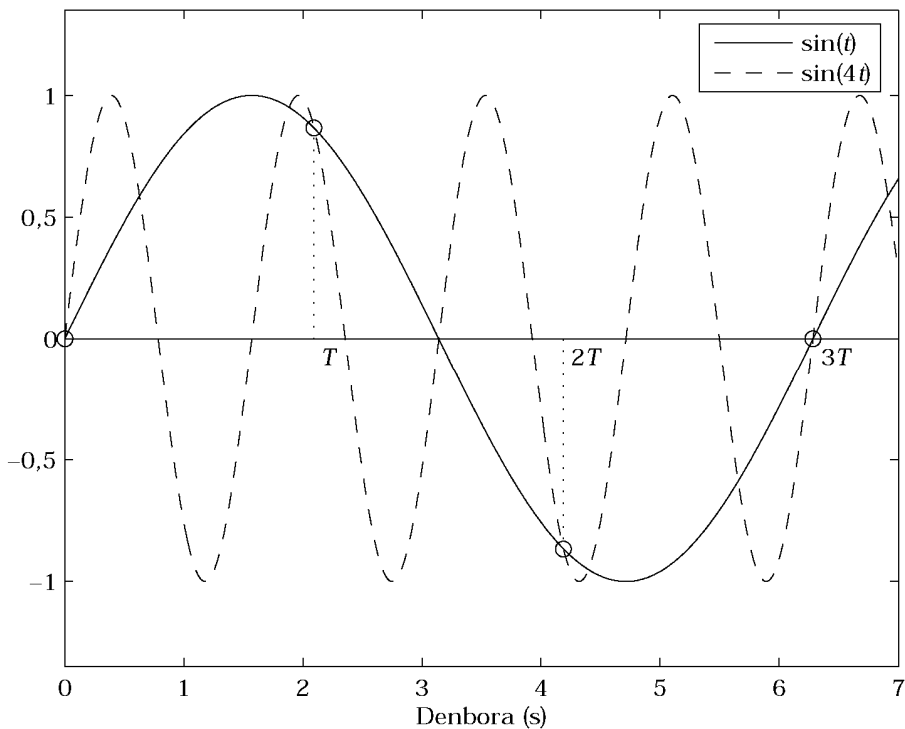
ω (rad/s) maiztasun angeluarra erabili ordez, f (Hz) maiztasuna erabiltzen bada, $\omega = 2\pi f$ denez, $f_1(t)$ funtzioa honela ager daiteke:

$$f_1(t) = A \cos(2\pi f t + \theta)$$

Azterketa egiteko, aldizkako laginketa periodikoa edo laginketa uniforme hartuko da aintzat, praktikan horixe baita erabiliena. Laginketa hori honela adierazten da:

$$f_1(n) \equiv f_1(nT) \quad -\infty < n < \infty$$

Adierazpide horretan, seinale analogikoa T segundotik behin laginduz lortutako seinale diskretua da $f_1(n)$. Lehen aipatu den bezala, elkarren segidako bi laginen artean igarotzen den T denbora *laginketa-periodoa* edo *laginketa-tartea* da, eta horren alderantzizkoa, $1/T = F_s$, *laginketa-abiadura* (lagin/segundo) edo *laginketa-maiztasun* (hertz) gisa ezagutzen da.



2.3 irudia. $\sin(t)$ eta $\sin(4t)$ funtzioen laginak.

Argi dago aldizkako laginketak t eta n denbora jarraitu eta diskretuko aldagaien arteko erlazioa ezartzen duela. Hau da, aldagaiak T laginketa-periodoaz linealki erlazionatzen dira edo, beste era batera esanda, $1/T = F_s$ laginketa-abiaduraz.

$$t = nT = \frac{n}{F_s}$$

eta ω_s (rad/s) laginketa-maiztasuna honela adierazten da:

$$\omega_s = 2\pi F_s$$

Beraz, seinale analogikoen f maiztasuna eta $F_s = 1/T$ laginketa-abiaduraren arteko erlazioa agertzen da, eta seinale lagindua beste era honetara adieraz daiteke:

$$f_1(n) \equiv f_1(nT) = A \cos(2\pi f n T + \theta) = A \cos\left(\frac{2\pi f}{F_s} n + \theta\right)$$

eta laginketaren teorema aplikatzen bada, $f_{\max} < F_s/2$. Horrek esan nahi du laginketak anbiguotasuna sortzen duela; izan ere, seinale jarraitu bat $F_s = 1/T$ abiaduran lagintzen bada, seinale hori era bakarrean adierazi ahal izateko, $f_{\max} = F_s/2$ edo $\omega_{\max} = \pi F_s$ -ko maiztasuna izan beharko du gehienez.

Demagun bi seinale analogiko ezberdin ditugula,

$$x_1(t) = \cos(2\pi 10t),$$

$$x_2(t) = \cos(2\pi 50t)$$

eta $F_s = 40$ Hz abiaduran lagintzen direla. Seinale analogikoen baliokide diskretuak honako hauek izango dira:

$$x_1(n) = \cos\left(2\pi \frac{10}{40} n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

$$x_2(n) = \cos\left(2\pi \frac{50}{40} n\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2} n\right)$$

Baina $\cos(5\pi n/2) = \cos(2\pi n + \pi n/2) = \cos(\pi n/2)$ da, eta, beraz, $x_2(n) = x_1(n)$. Hau da, seinale sinusoidalak berdinak dira, eta, horren ondorioz, bereiztezinak. $\cos(\pi n/2)$ seinalearen laginak baditugu, ezin da jakin $x_1(t)$ edo $x_2(t)$ funtzioarenak diren. Bi seinaleek lagin berak sortzen dituzte $F_s = 40$ lagin segundoko abiaduran lagintzen direnean; horren ondorioz, esaten da $f_2 = 50$ Hz maiztasuna $f_1 = 10$ Hz maiztasunaren **alias** bat dela $F_s = 40$ laginketa-abiadurarekiko.

f_2 ez da f_1 maiztasunaren alias bakarra. Hau da, $F_s = 40$ laginketa-abiadura erabiliz, $f_3 = 90$ Hz ere f_1 -en alia da, $f_4 = 130$ Hz eta $f_5 = 170$ Hz bezala. Gainera, $\cos[2\pi(f_1 + 40k)t]$; $k = 1, 2, 3, \dots$, seinale sinusoidal guztiek balio berak ematen dituzte 40 Hz-ean lagintzen direnean.

2.2 LAGINKETA IDEALA

Laginketa-prozesuaren analisi matematikoa zeharo errazten da laginketa ideala dela jotzen badugu. Hori lortzeko, aurreko atalean aipatu den $p(t)$ pultsuen sekuentziatzat azalera unitatea duten pultsuen sekuentzia hartuko dugu. Adibidez, Dirac-en delta funtzioak erabiliz,

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.18)$$

eta seinale lagindua,

$$f^*(t) = p(t)f(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - nT) \quad (2.19)$$

dira, eta, aurrerantzean, ‘*’ ikurra laginketa idealen irteerak adierazteko erabiliko dugu; hau da, $\delta(t - nT)$ funtzioa zero izango da puntu guztietan, $t = nT$ denean izan ezik. Orduan, (2.19) ekuazioa beste era honetara ager daiteke:

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) \quad (2.20)$$

Bestalde, (2.3) ekuazioa erabiliz,

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) e^{-jn\omega_s t} dt$$

eta $0 \leq t < T$ tartean $p(t) = \delta(t)$ denez gero,

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{T} \quad (2.22)$$

(2.11) eta (2.22) ekuazioak erabiliz, hau izango da $f^*(t)$ funtzioaren Fourierren transformatua:

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega - jn\omega_s) \quad (2.23)$$

eta Laplaceren transformatua, berriz,

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s - jn\omega_s) \quad (2.24)$$

Bestalde, (2.20) ekuazioaren Fourierren transformatua honako hau da:

$$F^*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-j\omega nT} \quad (2.25)$$

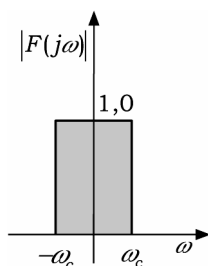
eta horren Laplaceren transformatua, berriz, beste hau:

$$F^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-snT} \quad (2.26)$$

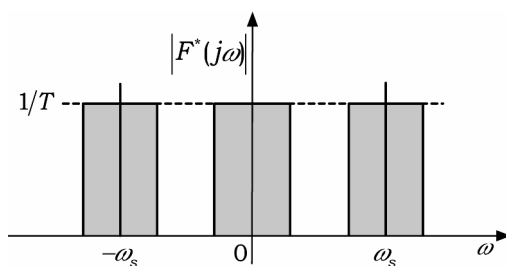
Ondorioz, seinale laginduaren transformatua aurkitzeko bi metodo izango ditugu.

(2.23) ekuaziotik ondorioztatzen da pultsuak erabiltzen dituen lagingailuaren $F^*(j\omega)$ irteerako funtzioari dagokion espektrikoaren anplitudea, jatorrizkoaren anplitudea $1/T$ faktoreaz biderkatuta lortzen dela —2.4 irudia—.

Kontuan izan behar da, batetik, (2.25) eta (2.26) ekuazioak eskuarki analisi matematikorako erabiltzen direla, eta, bestetik, laginketaren teorema eragin bera duela laginketa idealean eta aurreko atalean aurkeztu den laginketan.



2.4(a) irudia. Jatorrizko seinalearen espektrua.



2.4(b) irudia. Irteerako seinalearen espektrua.

$t < 0$ denean $f(t) = 0$ dela jotzen bada, (2.20) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) \quad (2.27)$$

eta transformatu hauek ditu:

$$F^*(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-j\omega nT} \quad (\text{Fourier}) \quad (2.28)$$

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-snT} \quad (\text{Laplace}) \quad (2.29)$$

$f^*(t)$ seinale laginduren $F^*(s)$ Laplaceren transformatua serie infinitua da benetan. Dena den, oro har, $f(t)$ seinalearen $F(s)$ Laplaceren transformatua funtzio arrazionala da, eta, horrenbestez, $F^*(s)$ serie konbergente baten bitartez adieraz daiteke.

2.3 adibidea

Demagun maila unitarioaren laginketa ideala lortu nahi dela, T laginketa-periodoa izanik.

$$f(t) = u(t)$$

(2.27) ekuaziotik,

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

eta (2.29) ekuaziotik, berriz,

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} = 1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

$|e^{-sT}| < 1$ dela ziurta badaiteke.

2.3 LAGINGAILUAREN IRTEERAKO SEINALEAREN LAPLACEREN TRANSFORMATUAREN EZAUGARRIAK

(2.24) ekuaziotik, ezaugarri hauek lortzen dira:

1. $F^*(s)$ funtzioa periodikoa da eta $j\omega_s$ periodoa du.

2.4(b) irudian ikusten den bezala, (2.29) ekuazioan s -ren ordez $s + jm\omega_s$ ipiniz gero m zenbaki osoa da—,

$$F^*(s + jm\omega_s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nT(s + jm\omega_s)} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} \quad (2.30)$$

izan ere,

$$e^{-jm\omega_s T} = e^{-jm2\pi} = 1$$

Ondorioz,

$$F^*(s + jm\omega_s) = F^*(s) \quad (2.31)$$

$F^*(s)$ funtzioak s planoaren $s = s_1$ puntuan, edozeinetan, duen balio bera hartzen du $s = s_1 + jm\omega_s$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) puntu periodiko guztietan.

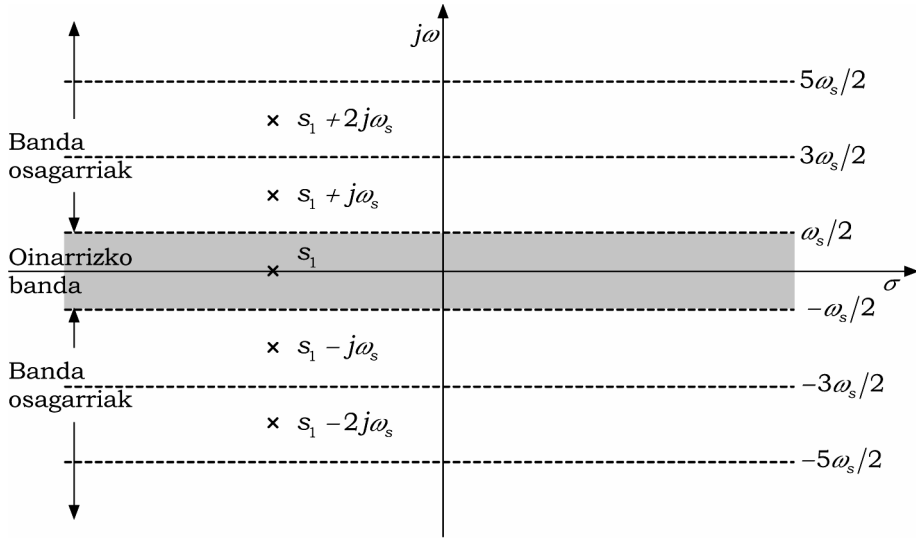
2.5 irudian ezaugarri hori agertzen da. Ikusten denez, s planoaren banda periodiko infinitutan bana daiteke. $-\omega_s/2$ eta $+\omega_s/2$ tarteko bandari **oinarrizko banda** deritzen. Gainerako banda guztiak **banda osagarriak** izango dira.

2. Baldin $F(s)$ funtzioak $s = s_1$ puntuan poloa badu, orduan $F^*(s)$ funtzioak $s = s_1 + jm\omega_s$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) puntuetan izango ditu poloak.

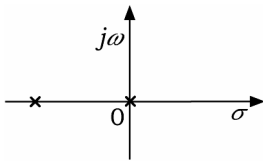
Ezaugarri hori (2.24) ekuaziotik azter daiteke eta 2.6 irudian ikus daiteke.

Oro har,

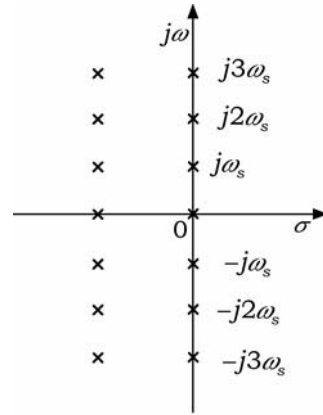
$$f(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \theta) \quad (2.32)$$



2.5 irudia. s planoko banda periodikoak.



2.6(a) irudia. $F(s)$ funtzioaren poloak.



2.6(b) irudia. $F^*(s)$ funtzioaren poloak.

seinale sinusoidal jarraitu baten laginketa egiteko $F_s = 1/T$ abiadura erabiltzen bada, seinale diskretu hau lortzen da:

$$f(n) \equiv f(nT) = A \sin \left(2\pi \frac{f_0}{F_s} n + \theta \right) \quad (2.33)$$

Bestalde, seinale sinusoidal hauek:

$$f(t) = A \sin(2\pi f_k t + \theta) \quad (2.34)$$

non

$$f_k = f_0 + kF_s \quad (k = \pm 1, \pm 2 \dots) \quad (2.35)$$

baita, F_s abiaduran lagintzen badira, argi dago f_k maiztasuna oinarritzko banda honetatik kanpo dagoela:

$$-F_s/2 < f < F_s/2 \quad (2.36)$$

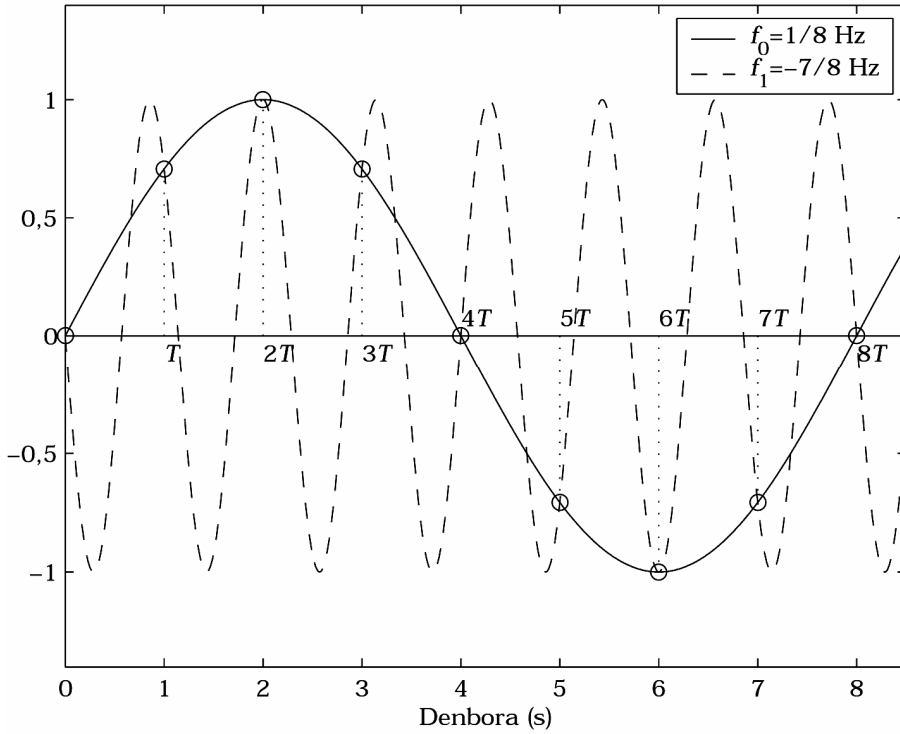
eta seinale lagindua honako hau da:

$$\begin{aligned} f(n) \equiv f(nT) &= A \sin \left(2\pi \frac{f_0 + kF_s}{F_s} n + \theta \right) = \\ &= A \sin \left(2\pi \frac{f_0}{F_s} n + \theta + 2\pi kn \right) = \\ &= A \sin \left(2\pi \frac{f_0}{F_s} n + \theta \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Argi dago (2.37) adierazpena eta (2.33) ekuazioan agertzen dena, (2.32) funtzioa laginduz lortutakoa alegia, berdinak direla.

Beraz, seinale jarraituen kopuru infinitua laginketa-talde berdinarekin adieraz daiteke, eta $f(n)$ laginetatik ezin da aurrean zein den $f(t)$ jatorrizko seinale jarraitua.

Ondoko 2.7 irudian *aliasing* efektuaren adibidea agertzen da: $f_0 = 1/8$ Hz eta $f_1 = -7/8$ Hz dituzten seinale sinusoidalek lakin berak sortzen dituzte laginketa-abiadura $F_s = 1$ Hz denean. Hau da, $k = -1$ baldin bada, $f_1 = f_0 - F_s = 1/8 - 1 = -7/8$.

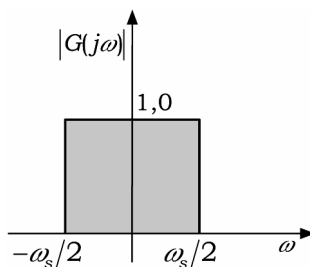


2.7 irudia. Aliasing efektua.

2.4 JATORRIZKO SEINALEAREN BERREGITURAKETA

$f^*(t)$ seinale lagindua hartu eta $f(t)$ jatorrizko seinalearen berregituraketa egin ahal izateko, laginketa-operazioan sartutako goi-maiztasuneko bandak kendu behar dira. 2.8 irudian agertzen den iragazki ideala erabiliz, goi-maiztasuneko banda horiek desagertu egingo dira, behe-maiztasuneko seinaleak baino ez direlako igaroko.

Iragazki idealaren hauste-maiztasuna seinale laginduen ω_c gehienezko maiztasunarena izango da, eta horren irabazia unitatea izango da $-\omega_c$ -tik ω_c -ra doan maiztasun-tartean. Gainera, laginketaren teorema bete dadin, $\omega_c = \omega_s/2$.



2.8 irudia. Iragezki idealaren ezaugarriak.

Iragazki ideala ezin da praktikan eraiki ordea, eta, ondorioz, seinale lagindutik hasi eta jatorrizkoari ahalik eta gehien hurbiltzea izango da egokiena (Proakis eta Manolakis, 1998). Iragezki idealaren hurbilketa egiteko, ‘karrakatzeko-prozesu’ baten antzeko zerbait egiten da. Bertan, seinale laginduaren iraganeko balioak hartu eta ondorengo balioak aurrekoekin dirak, jatorrizko seinalea berregituratzeko. Iraganeko informazioa erabiltzeak eskatzen du lortzen diren balioen nolabaiteko batezbestekoa egin behar izatea.

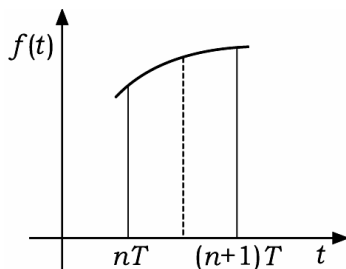
Ekuazio diferentzialen integrazio numerikoarekin egiten den bezala, ondorengo urratseko emaitza aurreko balioetan oinarrituz sortzea lortu nahi da. Hori egiteko modu orokorra Taylor-en serieak erabiltzea da —2.9 irudia—.

$$f_n(t) = f(nT) + f'(nT)(t - nT) + \frac{f''(nT)}{2!}(t - nT)^2 + \dots \quad (2.38)$$

non

$$f_n(t) = f(t); \quad nT \leq t < (n+1)T \quad (2.39)$$

baita.



2.9 irudia. Taylorren seriea.

Bestalde, $t = nT$ denean kalkulaturako $f(t)$ seinalearen lehen, bigarren... deribatuak dira $f'(nT)$, $f''(nT)$, etab. Laginketa egiten denean, ezin da jakin zein diren $f(t)$ -ren deribatuak; horren ondorioz, iraganeko balioetan oinarritutako hurbilketak egiten dira.

$$f'(nT) = \frac{f(nT) - f((n-1)T)}{T} \quad (2.40)$$

$$f''(nT) = \frac{f(nT) - 2f((n-1)T) + f((n-2)T)}{T^2} \quad (2.41)$$

etab.

Taylorren bidez egindako garapenean kontuan hartutako batugaien kopurua zenbat eta handiago izan, orduan eta handiagoa izango da erabili behar diren iraganeko balioen kopurua; horren ondorioz, berregituratutako seinalearen hurrengo balioa kalkulatzeko beharrezkoa den denbora-tartea luzeagoa izango da. Zenbat eta atzerapen handiagoa izan, orduan eta ezegonkortasun handiagoa sortzen da; hori saihestearren, Taylorren seriea moztu egiten da.

Ondoren, bi kasu aztertuko ditugu, orokorrenak direlako.

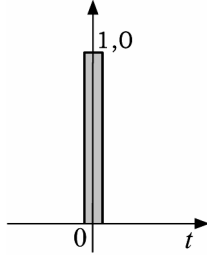
- a) Lehen batugaiaren ondoren egiten den mozketa —deribaturik gabe, zero ordenakoa—
- b) Lehen deribatuaren ondoren egindako mozketa —lehen ordenako euskailua—

2.4.1 ZERO ORDENAKO EUSKAILUA

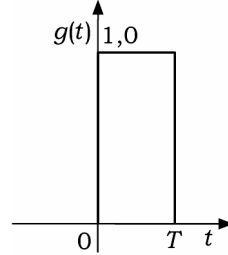
(2.38) ekuazioko lehen batugaia baino erabiltzen ez denean, zero ordenako polinomioa lortzen da, eta, horrenbestez, zero ordenako euskailua agertzen —*Zero Order Hold* (ZOH)—.

$$f_n(t) = f(nT) \quad (nT \leq t < (n+1)T) \quad (2.42)$$

2.10 irudian, sarrera gisa pultsu unitarioa aplikatuz gero, zero ordenako euskailuak emandako erantzuna agertzen da.



(a) Pultsu unitarioa.



(b) Euskailuaren erantzuna.

2.10 irudia. Zero ordenako euskailuaren erantzuna.

Denboran zehar agertzen den erantzuna aurkezten du irudi honek, eta bi seinaleren konbinaketa da:

- a) Maila unitarioaren igoera, $u(t)$
- b) Maila unitarioaren jaitsiera, baina pultsua aplikatu eta T laginketa-periodo baten atzerapenarekin, $-u(t - T)$

Beraz, honela adieraz daiteke denboran zehar agertzen den erantzuna:

$$g(t) = u(t) - u(t - T) \quad (2.43)$$

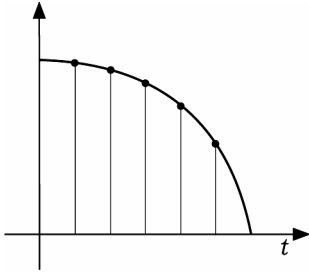
eta Laplaceren transformatua aplikatuz,

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} = G_{H_0}(s) \quad (2.44)$$

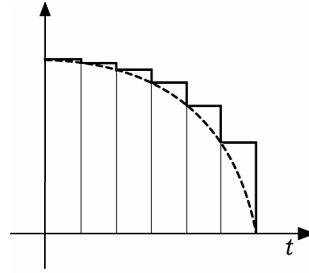
2.11 irudian, denboran zehar jarraitua den seinale baten zero ordenako euskailu batez egindako hurbilketa ikusten da.

(2.44) ekuazioan s -ren ordez $j\omega$ ipiniz gero,

$$G_{H_0}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}$$



2.11(a) irudia. $f(t)$ seinale jarraitua eta $f^*(t)$ seinale lagindua.



2.11(b) irudia. Zero ordenako euskailuaren irteera.

edo beste era honetara,

$$G_{H_0}(j\omega) = \frac{2e^{-j\omega T/2} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{2j\omega} = \frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega} e^{-j\omega T/2}$$

Hau da,

$$G_{H_0}(j\omega) = T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2}$$

eta $T = 2\pi/\omega_s$ denez gero,

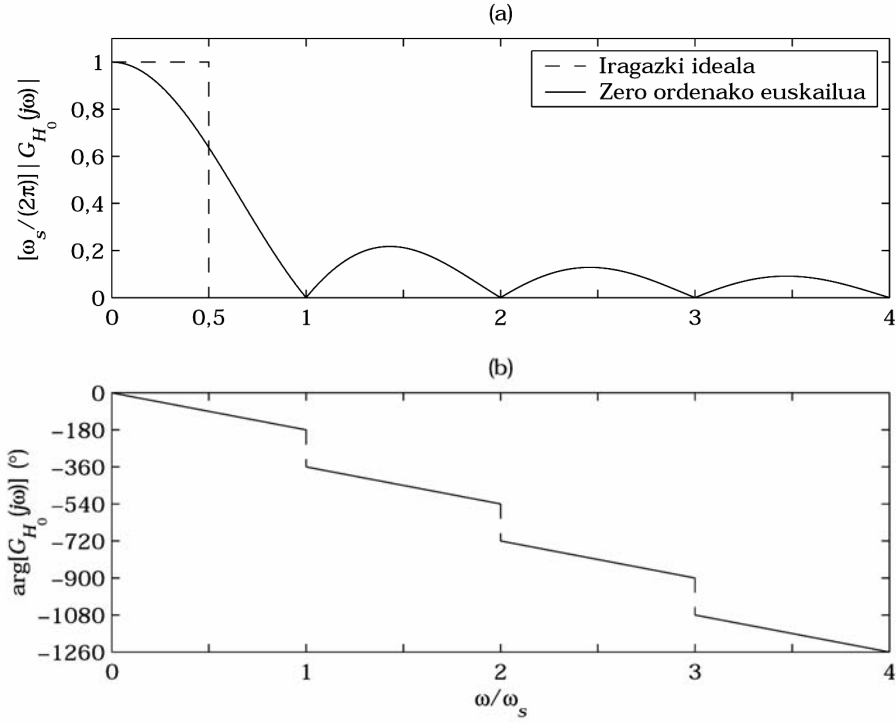
$$G_{H_0}(j\omega) = \frac{2\pi}{\omega_s} \frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s} e^{-j\pi\omega/\omega_s}$$

2.12 irudian, zero ordenako euskailuaren irabaziaren eta fasearen grafikoak agertzen dira.

2.12 iruditik ondorioztatzen da zero ordenako euskailuak pasa-baxu iragazki gisa jokatzeko duela.

2.4.2 LEHEN ORDENAKO EUSKAILUA

(2.38) ekuazioan lehen bi batugaiak aukeratzen badira, lehen ordenako euskailua lortzen da.



2.12 irudia. Zero ordenako euskailuaren erantzun frekuentziala.

(a) Irabazia. **(b)** Fasea.

$$f_n(t) = f(nT) + \frac{f(nT) - f((n-1)T)}{T}(t - nT) \quad (2.45)$$

Pultsu unitarioa aplikatutakoan lortzen den erantzuna ondorioztatzeko, joko dugu pultsua $t = 0$ denean aplikatuko dela, eta, (2.45) ekuaziotik, $n = 0$ dela kontuan hartuz,

$$f_0(t) = f(0) + \frac{f(0) - f(-T)}{T}t \quad (2.46)$$

$f(0) = 1$ eta $f(-T) = 0$ direnez, $0 \leq t < T$ tartean erantzun hau lortuko da:

$$g_{h_1}(t) = f_0(t) = 1 + \frac{t}{T} \quad (2.47)$$

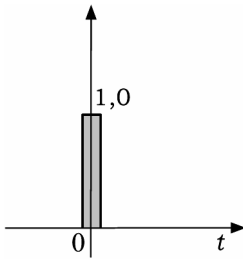
$T \leq t < 2T$ denean erantzuna lortzeko, berriz, $n = 1$ ipiniko da (2.45) ekuazioan,

$$f_1(t) = f(T) + \frac{f(T) - f(0)}{T}(t - T) \quad (2.48)$$

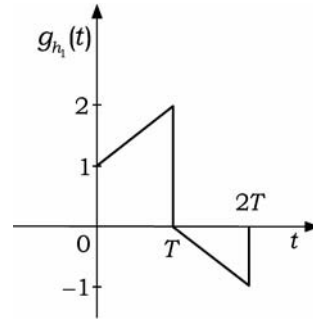
eta berriro $f(0) = 1, f(T) = 0$ direnez gero, erantzun hau izango dugu:

$$g_{h_1}(t) = f_1(t) = 0 + \frac{0 - 1}{T}(t - T) = 1 - \frac{t}{T} \quad (2.49)$$

$t \geq 2T$ denean, erantzuna zero da, eta, horren ondorioz, lehen ordenako euskailuaren erantzun osoa 2.13(b) irudikoa da.



2.13(a) irudia. Pultsu unitarioa.



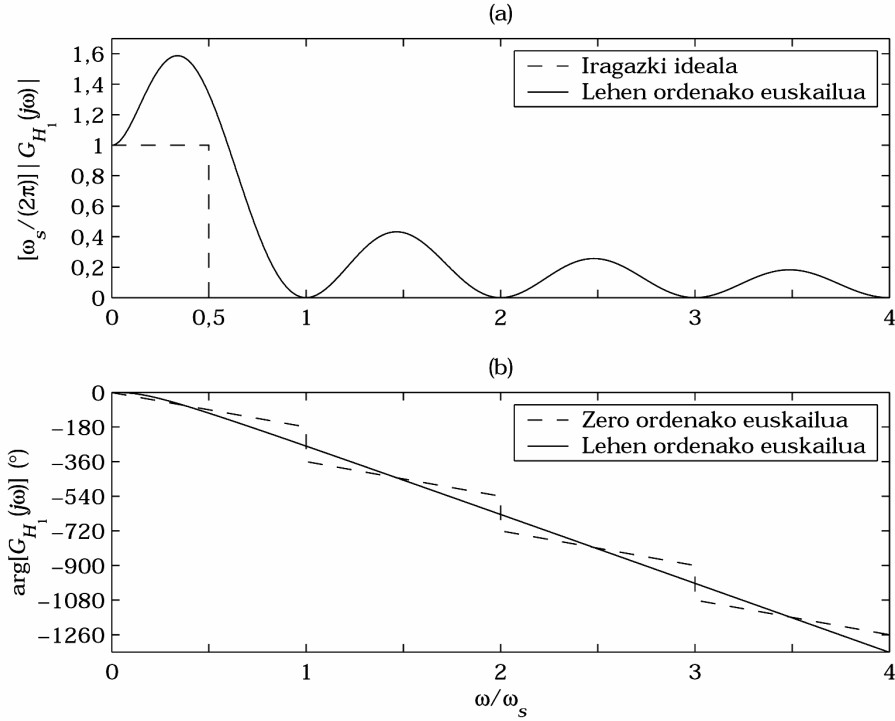
2.13(b) irudia. Lehen ordenako euskailuaren erantzuna.

Hortaz, lehen ordenako euskailuaren transferentzia-funtzioa honako hau izango dela frogatu daiteke:

$$G_{H_1}(s) = \left(\frac{1 + Ts}{T} \right) \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right)^2 = \quad (2.50)$$

$$= \frac{1 + Ts}{T} G_{H_0}^2(s) \quad (2.51)$$

2.14 irudian, lehen ordenako euskailuaren irabaziaren eta fasearen grafikoak erakusten dira. Kasu honetan, fasean agertzen den atzerapenak ezegonkortasunak sorraraz ditzake sisteman.



2.14 irudia. Lehen ordenako euskailuaren erantzun frekuentziala.

(a) Irabazia. (b) Fasea.

Azkenik, sistema laginduak erabiltzean egin beharreko azterketen artean honako hau dago: seinaleen prozesadore digitalak erabiltzen direnez, prozesadore horiekin batera zero ordenako euskailua erabiltzen da sinpletasunagatik. Eskuarki, *'lagingailu-euskailu'* izenez ezagutzen da, eta bihurgailu analogiko/digitalaren forma hartzen du. Teorian, zero ordenako euskailua adierazteko, bihurgailu analogiko/digitala eta bihurgailu digital/analogikoa beharko dira.

2.5 LABURPENEA

Kapitulu honetan, laginketa-prozesuaren azterketa zehatza egin da lehenik, eta horrek dakartzan ondorio nagusiak —*aliasing* fenomeno, besteak beste—

maiztasunaren alorretik interpretatu dira. Hurrengo kapituluetan laginketa-prozesua ideala dela joko denez, aurreko analisisia laginketa ideala den kasurako ere zehaztu da, eta frogatu da kasu orokorrarentzat atera diren oinarrizko ondorioak aplikagarriak izaten jarraitzen dutela. Amaitzeko, seinale laginduaren Laplaceren transformatuaren garrantzi handiko zenbait ezaugarriak jabetu ostean, lagingailu irteerako seinaletik abiatuz jatorrizko seinalea berregituratzeko erabil daitezkeen bi euskailuren analisi frekuentziala egin da.

2.6 ARIKETAK

2.1 Demagun $f(t) = 3\cos(50\pi t) + 10\sin(300\pi t) - \cos(100\pi t)$ seinale analogikoa dugula. Kalkula ezazu zein den laginketa-maiztasun minimoa, seinale hori berreraiki egin ahal izan dadin.

2.2 Har dezagun kontuan seinale jarraitu hau:

$$f(t) = \sin(2\pi f_0 t); \quad -\infty < t < \infty$$

eta jo dezagun modu diskretuan beste era honetara agertzen dela:

$$f(n) \equiv f(nT) = \sin\left(2\pi \frac{f_0}{F_s} n\right); \quad -\infty < n < \infty$$

non $F_s = 1/T$ laginketa-maiztasuna baita.

a) Osa ezazu $f(n)$ funtzioaren marrazkia, $0 \leq n \leq 99$, $F_s = 5$ kHz eta $f_0 = 0,5; 2; 3; 4,5$ kHz direnean.

b) Azter itzazu lortutako irudien arteko antzekotasunak eta ezberdintasunak.

2.3 Aurreko kasuan, jo ezazu $f_0 = 2$ kHz eta $F_s = 50$ kHz direla.

a) Marraz ezazu $f(n)$ seinalea. Zein da $f(n)$ funtzioaren f_0 maiztasuna?

b) Marraz ezazu $f(n)$ funtzioaren lagin bikoitiak hartuz lortzen den $g(n)$ seinalea. Seinale hori sinusoidala al da? Zergatik? Sinusoidala bada, zer maiztasun du?

2.4 Har dezagun kontuan seinale analogiko hau: $f(t) = 3\cos(100\pi t)$.

a) Kalkula ezazu F_s laginketa-abiadura minimoa *aliasing* efektua ekiditeko, $F_s = \frac{\omega_s}{2\pi}$ izanik.

- b) Demagun seinalea $F_s = 400$ Hz-eko abiaduran lagintzen dela. Zein izango da laginketa ondoren lortutako seinale diskretua?

2.5 Aurreko ariketako kasu bera hartuz, erantzun galdera hauei:

- a) Laginketa-abiadura $F_s = 75$ Hz bada, zein izango da laginketa ondoren lortutako seinale diskretua?
- b) Zein izango da seinale sinusoidal orokor batek izan beharreko f maiztasuna, $0 < f < F_s/2$ izanik, aurreko ataleko lagin berak lortu nahi badira?

2.6 Seinale analogiko hau izanik:

$$f(t) = 3\cos(2000\pi t) + 5\cos(6000\pi t) + 10\cos(12000\pi t)$$

- a) Kalkula ezazu behar den F_s laginketa-abiadura minimoa, seinalea berregituratzeko.
- b) Demagun seinalea $F_s = 5000$ lagin/segundoko abiaduran lagintzen dela. Zein izango da laginketa ondoren lortutako seinale diskretua?

2.7 Seinale analogiko sinusoidal hau izanik:

$$f(t) = 3\sin(100\pi t)$$

- a) Marraz ezazu $f(t)$ seinalea $0 \leq t < 30$ ms tartean.
- b) $f(t)$ seinalea $F_s = 300$ lagin/segundoko abiaduran lagintzen da. Kalkula ezazu $f(n) \equiv f(nT)$ seinale diskretuaren maiztasuna, $T = 1/F_s$ izanik, eta froga ezazu funtzio periodikoa dela.
- c) Kalkula itzazu $f(n)$ -ren periodo bateko laginen balioak. Marraz ezazu $f(n)$ funtzioa $f(t)$ -ren diagramaren gainean.

2.8 Errepika ezazu aurreko ariketako **b)** atala,

a) Baldin $F_s = 325$ lagin/segundo bada.

b) Baldin $F_s = 444$ lagin/segundo bada.

2.9 $f(t)$ seinale sinusoidal jarraituak $T_p = 1/f_0$ periodo nagusia du. Seinale hori $F_s = 1/T$ abiaduran lagintzen da, $f(n) \equiv f(nT)$ seinale sinusoidal diskretua lortzeko.

a) Baldin $f_0/F_s = K/N$ bada, K nahiz N zenbaki osoak izanik, frogatu $f(n)$ funtzio periodikoa dela.

b) Baldin $f(n)$ funtzio periodikoa bada, zein da periodo nagusia segundotan?

c) Azal ezazu baieztapen hau: $f(n)$ funtzio periodikoa izango da, seinalearen periodo nagusia, segundotan, $f(t)$ funtzioaren periodoaren multiploa bada.

2.10 Seinale analogiko batek 10 kHz arteko maiztasunak ditu.

a) Zein da jatorrizko seinalea berregituratzea ahalbidetuko duen laginketa-periodoen tartea?

b) Demagun seinale hori $F_s = 8$ kHz-eko abiaduran lagintzen dela. Azter ezazu zer gertatzen den $F_1 = 5$ kHz-eko maiztasunarekin.

2.11 Errepika ezazu aurreko ariketako **b)** atala, maiztasuna $F_2 = 9$ kHz dela kontuan hartuz.

2.12 Elektrokardiograma (ECG) analogikoak 100 Hz arteko maiztasun erabilgarriak ditu.

a) Zein da Nyquisten abiadura seinale horrentzat?

- b) Demagun seinalea 250 lagin/segundoko abiaduran lagintzen dela. Zein da abiadura hori erabiliz era bakarrean ager daitekeen maiztasunik altuena?

2.13 $f(t) = \sin(480\pi t) + 3\sin(720\pi t)$ seinale analogikoa segundoko 600 aldiz lagintzen da.

- a) Zein da Nyquisten abiadura seinale horrentzat?
- b) Kalkulatu lortzen den $f(n)$ seinalearen maiztasuna (radianetan).
-

3

Kontrol-sistema digitalak

3.1 SARRERA

Sistema diskretuen analisia egiterakoan erabiltzen den erreminta matematikoetako bat da $\mathcal{Z}$ transformatua. Laplaceren transformatuak sistema jarraitutan duen egitekoaren antzekoa du transformatu horrek sistema digitaletan. Nahiz eta egoera-ekuazioen bidez egindako sistemen analisiak gero eta garrantzi handiagoa izan, $\mathcal{Z}$ transformatuaren bitartez egindako sistema digitalen azterketa klasikoa oso erabilia da oraindik ere. Transformatuaren bitartez lor daitezke sistemen aurkezpen sinplea, erabilera errazeko funtzioak eta erantzun tenporala, eta, horren ondorioz, $\mathcal{Z}$ transformatuak sistemen analisi eta diseinu sinpleak helbideratzen ditu.

$\mathcal{Z}$ transformatuaren azterketari ekin aurretik gogoratu behar da aurreko kapituluari, eta, laginketaren teoriaraino oinarrituta, pulstuen bidez lagindutako prozesuei dagozkien ekuazio hauek lortu direla:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) \quad (3.1)$$

eta horren Laplaceren transformatua,

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} \quad (3.2)$$

non

$f(t)$	jatorrizko seinalea,
$f^*(t)$	jatorrizkoaren seinale lagindua,
$\delta(t - nT)$	T segundotik behin gertatzen den pulsu unitarioen trena, eta
T	laginketa-periodoa.

baitira.

(3.2) ekuazioan e^{-nTs} biderkagaia agertzen denez, arrazionalak ez diren funtzioei lotutako zailtasunak sor daitezke. Beraz, egokia dirudi arrazionala ez den $F^*(s)$ funtzioa arrazionala den beste batean transformatzea, modu aljebraikoan lan egin ahal izateko.

Transformazioa egiteko, erlazio hau erabiliko dugu:

$$\mathfrak{z} = e^{Ts} \quad (3.3)$$

hau da,

$$s = \frac{1}{T} \ln \mathfrak{z} \quad (3.4)$$

$\mathfrak{z}$ aldagai konplexua da. Beraz, (3.2) ekuazioa funtzio arrazional batez ordezkatu daiteke,

$$F^* \left(s = \frac{1}{T} \ln \mathfrak{z} \right) = F(\mathfrak{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \mathfrak{z}^{-n} \quad (3.5)$$

non $F(\mathfrak{z})$ funtzioa $f(t)$ funtzioaren ***Z transformatu*** gisa ezagutzen baita. Beste eratan adierazterik ere badago; hala nola,

$$F(\mathfrak{z}) = \mathcal{Z}[f(t)] \quad (3.6)$$

edo

$$F(\mathfrak{z}) = F^*(s) \Big|_{s=(1/T) \ln \mathfrak{z}} \quad (3.7)$$

$f(t)$ seinale jarraitu baten $\mathcal{Z}$ transformatua lortzeko egin beharreko urratsak hauek dira:

1. $f(t)$ lagindu, $f^*(t)$ lortzeko
2. $f^*(t)$ funtzioari Laplaceren transformatua aplikatu, honako hau lortzearen:

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs}$$

3. e^{Ts} -ren ordezkari, $\mathfrak{z}$ ipini

$$F(\mathfrak{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \mathfrak{z}^{-n}$$

3.1 adibidea

Kalkula ezazu $f(t) = u(t)$ maila unitarioaren Z transformatua.

Pultsu bidezko laginketa ideala erabiliz, $f^*(t)$ honako hau da:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

eta, (3.2) ekuazioa aplikatuz,

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \end{aligned}$$

$|e^{-Ts}| < 1,0$ dela suposatuz.

e^{Ts} -ren ordeztuz, z ipiniz gero,

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}; \quad |z^{-1}| < 1,0 \text{ denean.}$$

3.2 adibidea

Kalkula ezazu $f(t) = e^{-at}$ funtzioaren Z transformatua — a konstante erreala da—.

Seinale lagindua ondoko hau da:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} \delta(t - nT)$$

eta, Laplaceren transformatua aplikatuz,

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(s+a)nT} = \frac{1}{1 - e^{-(s+a)T}}$$

$$\left| e^{-(s+a)T} \right| < 1, 0 \text{ dela onartuz.}$$

e^{Ts} -ren ordezt z ipiniz,

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad \left(\left| e^{-aT} z^{-1} \right| < 1, 0 \right)$$

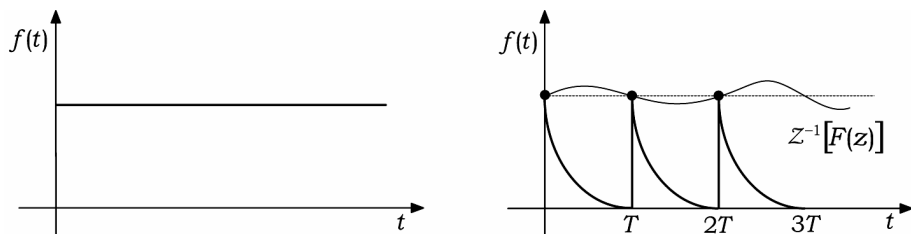
Adibide hauen bitartez frogatuta geratzen da Laplaceren transformatuak egin ezin zuen bihurteta arrazionala **Z transformatuaren** bidez lor daitekeela. Gainera, beste hainbat funtzioaren kasuan berdin jokatuz, 3.1 taulako emaitzak lortzen dira.

Bi transformatuaren artean badago beste alde bat: Laplaceren transformatua eta bere alderantzizkoa bakarrik dira; Z transformatuaren kasuan, berriz, alderantzizko transformatua ez da bakarra. Baldin $f(t)$ funtzioaren Z transformatua $F(z)$ bada, alderantzizko transformatuak ez du zertan $f(t)$ izan.

Adibidez, baldin $f(t) = u(t)$ bada,

$$F(z) = \frac{z}{z - 1}$$

da; baina, 3.1 irudian ikus daitekeenez, $t = 0, T, 2T, \dots$ uneetan 1 balioa duen edozein funtzio izan daiteke $z/(z - 1)$ funtzioaren alderantzizkoa. Ezaugarri horrek arazoak ekar ditzake Z transformatua erabiltzean, eta kontuan hartu beharko da funtzioaren balioek laginketa-uneetan besterik ez dutela balio.



3.1 irudia. $F(z)$ funtzioaren bi alderantzizko transformatu.

3.1 taula. Laplace eta z transformatuak (...).

	$F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$f(nT) = f_n$	$Z[f_n] = F(z)$
1	$\frac{1}{s}$	1	1	$\frac{z}{z-1}$
2	$\frac{1}{s^2}$	t	nT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{2}(nT)^2$	$\frac{T^2}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
4	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$c^n, \quad c = e^{-aT}$	$\frac{z}{z-c}$
5	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$(nT)c^n, \quad c = e^{-aT}$	$\frac{cTz}{(z-c)^2}$
6	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$	$\frac{1}{2}(nT)^2c^n, \quad c = e^{-aT}$	$\frac{T^2}{2} \frac{cz(z+c)}{(z-c)^3}$
7	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$1 - c^n, \quad c = e^{-aT}$	$\frac{(1-c)z}{(z-1)(z-c)}$
8	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}[at - (1 - e^{-at})]$	$\frac{1}{a}(naT - 1 + c^n), \quad c = e^{-aT}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-c)z}{a(z-1)(z-c)}$
9	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$(1-naT)c^n, \quad c = e^{-aT}$	$\frac{z^2 - c(1+aT)z}{(z-c)^2}$
10	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1 - (1+at)e^{-at}$	$1 - (1+naT)c^n, \quad c = e^{-aT}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-c} - \frac{caTz}{(z-c)^2}$

3.1 taula. Laplace eta z transformatuak (jarraipena).

	$F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$f(nT) = f_n$	$Z[f_n] = F(z)$
11	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$c^n - d^n,$ $c = e^{-aT},$ $d = e^{-bT}$	$\frac{(c-d)z}{(z-c)(z-d)}$
12	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$-ae^{-at} + be^{-bt}$	$-ac^n + bd^n,$ $c = e^{-aT},$ $d = e^{-bT}$	$\frac{(b-a)z^2 - (bc-ad)z}{(z-c)(z-d)}$
13	$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$1 + \frac{be^{-at} - ae^{-bt}}{a-b}$	$1 + \frac{bc^n - ad^n}{a-b},$ $c = e^{-aT},$ $d = e^{-bT}$	$\frac{z}{z-1} + \frac{b}{a-b} \frac{z}{z-c} - \frac{a}{a-b} \frac{z}{z-d}$
14	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$\sin(\beta t)$	$\sin(n\beta T)$	$\frac{z \sin(\beta T)}{z^2 - 2z \cos(\beta T) + 1}$
15	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$\cos(\beta t)$	$\cos(n\beta T)$	$\frac{z^2 - z \cos(\beta T)}{z^2 - 2z \cos(\beta T) + 1}$
16	$\frac{\beta}{s^2 - \beta^2}$	$\sinh(\beta t)$	$\sinh(n\beta T)$	$\frac{z \sinh(\beta T)}{z^2 - 2z \cosh(\beta T) + 1}$
17	$\frac{s}{s^2 - \beta^2}$	$\cosh(\beta t)$	$\cosh(n\beta T)$	$\frac{z^2 - z \cosh(\beta T)}{z^2 - 2z \cosh(\beta T) + 1}$
18	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha t} \cos(\beta t)$	$c^n \cos(n\beta T),$ $c = e^{-\alpha T}$	$\frac{z^2 - cz \cos(\beta T)}{z^2 - 2cz \cos(\beta T) + c^2}$
19	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \left(\frac{\pi}{T}\right)^2}$	$e^{-\alpha t} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)$	$(-c)^n,$ $c = e^{-\alpha T}$	$\frac{z}{z+c}$
20	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$	$c^n \sin(n\beta T),$ $c = e^{-\alpha T}$	$\frac{cz \sin(\beta T)}{z^2 - 2cz \cos(\beta T) + c^2}$

3.2 s ETA z PLANOEN ARTEKO ERLAZIOA

Ekuazio honek z eta s aldagai konplexuen arteko erlazioa definitzen du:

$$z = e^{Ts}$$

Beraz, s planoan agertzen den s -ren funtzio batek, edozeinek, bere funtzio baliokidea izango du z planoan.

Sistema laginduak aztertu eta diseinatzeko, funtzioaren Z transformatuaren poloen eta zeroen konfigurazioek kontrol-sistema jarraituak aztertu eta diseinatzeko poloen eta zeroen konfigurazioek duten garrantzi bera izango dute. Bestalde, kontrol-sistemen ezaugarriak aztertu ahal izateko, interesgarria izan daiteke s planoko edozein ingurune z planoan duen ingurune baliokidea ezagutzea ere.

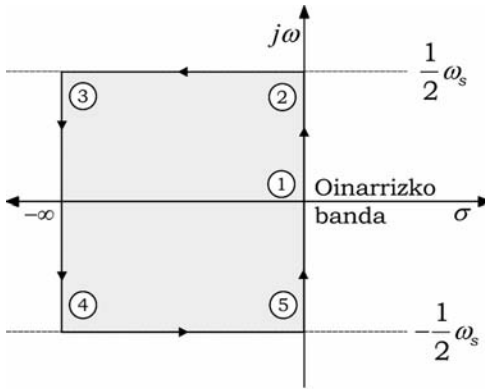
Horretarako, s planoan bi zatitan —bandatan— banatuko da, oinarritzko banda eta banda osagarriak. Oinarritzkoa $-\omega_s/2$ eta $\omega_s/2$ tartean dago; osagarriak, berriz, $-\omega_s/2$ tik $-3\omega_s/2$ ra, $-3\omega_s/2$ tik $-5\omega_s/2$ ra, etab. maiztasun negatiboak hartuz, eta $\omega_s/2$ tik $3\omega_s/2$ ra, $3\omega_s/2$ tik $5\omega_s/2$ ra, etab. maiztasun positiboak kontsideratuz. Bandak ardatz erreala negatiboan kokatzen direla suposatuko da, 0 eta $-\infty$ artean.

s eta z planoen arteko erlazioa aztertzeko, 3.2(a) irudiko banda hartuko da. s planoaren ezker aldean ikusten den bideari jarraituz, eta $z = e^{Ts}$ transformatua erabiliz, 1 erradioko zirkulua lortzen da z planoan, 3.2(b) irudian ikusten den bezala.

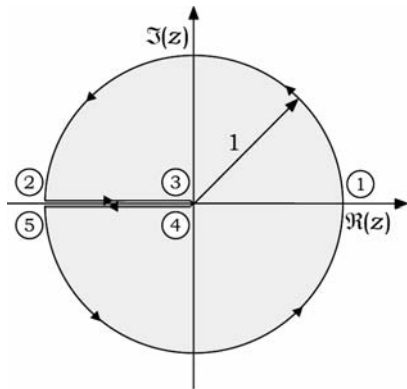
Ekuazio hau betetzen denez,

$$e^{T(s + jm\omega_s)} = e^{Ts} = z \quad (3.8)$$

non m zenbaki osoa baita, s planoko ezker aldeko banda osagarri guztiak z planoko 1 erradioko zirkulu berean transformatzen dira. Beraz, s planoko ezker aldeko puntu guztiak zirkulu unitarioaren barnean daude z planoan; s planoko eskuinaldeko puntu guztiak, berriz, zirkulutik kanpo.



3.2(a) irudia. s planoan eta oinarritzko bandan egindako bidea.



3.2(b) irudia. Oinarritzko banda zirkulu unitario bihurtzen da z planoan.

Aipatutako bihurtzeta frogatzeko, $z = e^{Ts}$ ordezkatzen da bideko hainbat puntutan:

①	$s = 0$	$z = 1$
②	$s = j \frac{\omega_s}{2}$	$z = e^{(j\omega_s/2)T} = e^{(j\omega_s/2)(2\pi/\omega_s)} = e^{j\pi} = 1 \angle 180^\circ$
③	$s = \alpha + j \frac{\omega_s}{2}$	$z = e^{\alpha T} e^{(j\omega_s/2)T} = e^{\alpha T} e^{j\pi} \xrightarrow{\alpha \rightarrow -\infty} 0 \angle 180^\circ$
④	$s = \alpha - j \frac{\omega_s}{2}$	$z = e^{\alpha T} e^{(-j\omega_s/2)T} = e^{\alpha T} e^{-j\pi} \xrightarrow{\alpha \rightarrow -\infty} 0 \angle -180^\circ$
⑤	$s = -j \frac{\omega_s}{2}$	$z = e^{(-j\omega_s/2)T} = e^{-j\pi} = 1 \angle -180^\circ$

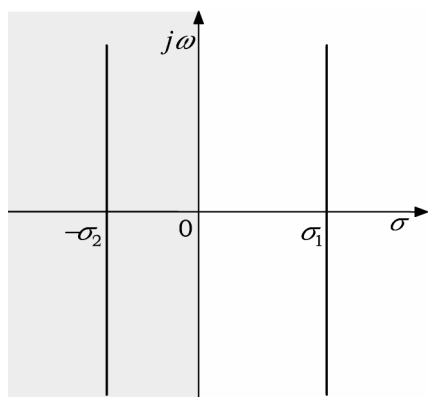
Ondoren, s planoko hainbat inguruneren transformatuak aztertuko dira.

3.2.1 σ KONSTANTEKO ZUZENAK

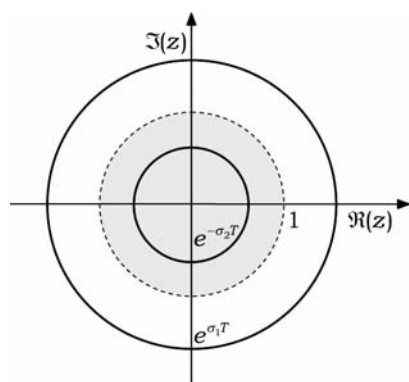
s planoan σ balio erreal konstantea duten puntuen leku geometrikoek z planoan jasaten duten transformazioa aztertuko dugu. s planoko ardatz irudikariarekiko

paralelo den $\sigma = \sigma_1$ zuzena hartuko da abiapuntutzat, eta z planoan zirkulu unitariotik kanpo egongo da. Zentroa z planoko jatorrian duen $z = e^{\sigma_1 T}$ erradioko zirkulua izango da z planoan agertzen den ingurunea.

s planoko ardatz irudikariarekiko paralelo den $\sigma = -\sigma_2$ zuzena hartuz gero, ondoriozta daiteke z planoko zirkulu unitarioaren barruan kokatuko dela. Oraingoan, zentroa jatorrian duen $z = e^{-\sigma_2 T}$ erradioko zirkulua izango da z planoan sorturiko leku geometrikoa, 3.3 irudiak erakusten duen bezala.



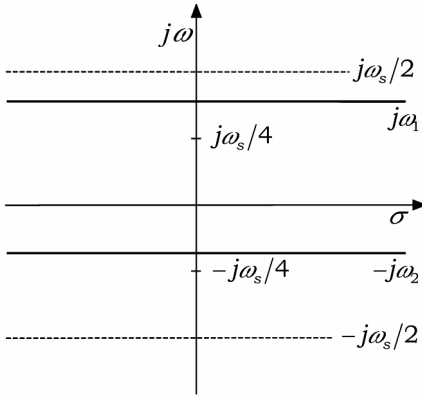
3.3(a) irudia. $\sigma =$ konstante duten zuzenak s planoan.



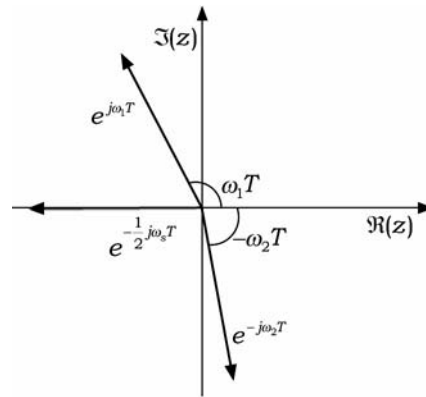
3.3(b) irudia. $\sigma =$ konstante duten zirkuluak z planoan.

3.2.2 ω KONSTANTE DUTEN ZUZENAK

s planoan agertzen den ω konstanteko edozein zuzenek, $\omega = \omega_1$ zuzenak adibidez, z planoan duen baliokidea zuzen erradiala da. Zuzen erradial hori jatorrian hasten da eta $\theta = \omega_1 T$ angelua osatzen du ardatz erreale positiboarekiko —3.4 irudia—. Antzeko zerbeit gertatuko da s planoan $\omega = -\omega_2$ duen zuzena aztertuz gero.



3.4(a) irudia. ω konstanteko zuzenak s planoan.



3.4(b) irudia. z planoan agertzen diren zuzen erradial baliokideak.

3.3 Z TRANSFORMATUAREN TEOREMAK

Baldin $f(t)$ funtzioaren Z transformatua $F(z)$ bada, teorema hauek betetzen direla frogatu daiteke (Kuo, 1995):

3.3.1 GAINEZARPENAREN TEOREMA

$$Z[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(z) \pm F_2(z) \quad (3.9)$$

3.3.2 LINEALTASUNAREN TEOREMA

$$Z[af(t)] = aZ[f(t)] = aF(z) \quad (3.10)$$

3.3.3 DENBORA-DESPLAZAMENDUAREN TEOREMA

$$\left. \begin{aligned} Z[f(t - nT)] &= z^{-n} F(z) \\ \text{eta} \\ Z[f(t + nT)] &= z^n \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

3.3.4 HASIERAKO BALIOAREN TEOREMA

$$\lim_{n \rightarrow 0} f(nT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (3.12)$$

baldin $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ existitzen bada.

3.3.5 AZKEN BALIOAREN TEOREMA

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z) \quad (3.13)$$

baldin $(1 - z^{-1}) F(z)$ funtzioak z planoko zirkulu unitarioaren gainean edo kanpoan polorik ez badu.

3.3.6 KONBOLUZIOAREN TEOREMA

$f_1(t)$ eta $f_2(t)$ funtzioen $\mathcal{Z}$ transformatuak $F_1(z)$ eta $F_2(z)$ badira, eta $t < 0$ denean $f_1(t) = 0 = f_2(t)$ bada,

$$F_1(z) F_2(z) = \mathcal{Z} \left[\sum_{n=0}^k f_1(nT) f_2(kT - nT) \right] \quad (3.14)$$

3.4 $\mathcal{Z}$ -REN ALDERANTZIZKO TRANSFORMATUA

Aipatu den bezala, $\mathcal{Z}$ -ren alderantzizko transformatua laginketa-puntuetan soilik da bakarra. $F(z)$ transformatua funtzio bakarra da $t = nT$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) puntuetan, eta, horren ondorioz, $\mathcal{Z}$ -ren alderantzizko transformatuak serie bat sortuko du. Serie horrek $t = 0, T, 2T, \dots$ denean besterik ez ditu ematen $f(t)$ -ren balioak, eta ezin da ezer jakin $f(t)$ funtzioak puntu horien tartetean hartzen dituen balioei buruz. Dena den, laginketaren teorema betetzen bada, $f(t)$ funtzioa $f(nT)$ funtzioaren gainetik egindako kurba fin batez aurkez daiteke. Hori kontuan izanik, $\mathcal{Z}$ transformatuaren alderantzizkoa kalkulatzeko bi metodo aipatuko dira.

3.4.1 ZATIKETA PARTZIALEN METODOA

Laplaceren alderantzizko transformatua kalkulatzeko egiten den bezala, zatiketa partzialen metodoa erabiliko da $\mathcal{Z}$ transformatuaren funtzio konplexua gai sinpleen batuketa gisa aurkezteko. Orduan, alderantzizko transformatua $\mathcal{Z}$ transformatuaren tauletatik —3.1 taula— ondoriozta daiteke.

s planoan zatiketa partzialen metodoa erabiliz lortu nahi diren osagaiak $A/(s+a)$ itxurakoak izaten dira, eta Ae^{-at} da alderantzizko transformatua. z planoan ez dago $A/(z+a)$ funtzio baliokiderik, eta, haren ordez, Ae^{-at} funtzioaren $\mathcal{Z}$ transformatua erabiliko da.

$$\mathcal{Z}[Ae^{-at}] = \frac{Az}{z-b}, \quad b = e^{-aT} \text{ izanik.}$$

Beraz, z planoan agertzen den $F(z)$ transferentzia-funtzioak z planoko jatorrian zerorik ez badu, zatiketa partzialen metodoa erabilia lortzen den funtzioa honelakoa izango da:

$$F(z) = \frac{A}{z+a} + \frac{B}{z+b} + \dots \quad (3.15)$$

eta baldin $F(z)$ funtzioaren ordez $F_1(z)$ erabiltzen bada,

$$F_1(z) = zF(z) = \frac{Az}{z+a} + \frac{Bz}{z+b} + \dots \quad (3.16)$$

orduan $F_1(z)$ funtzioaren alderantzizko transformatua, $f_1(nT)$, $\mathcal{Z}$ transformatuaren tauletatik lor daiteke. Ondorioz, 3.3.3 denbora-desplazamenduaren teoremari esker, $F(z)$ funtzioaren alderantzizko transformatua

$$f(nT) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \mathcal{Z}^{-1}[z^{-1}F_1(z)] = f_1((n-1)T) \quad (3.17)$$

izango dela ondorioztatzen da; $\mathcal{Z}$ -ren alderantzizko transformatua da $\mathcal{Z}^{-1}$.

Laburtuz, honelako kasutan ezin da $F(z)$ -ren alderantzizko transformatua zuzenean kalkulatu, eta $F_1(z)$ bezalako funtzioak erabili behar dira hori lortu ahal izateko.

3.3 adibidea

Demagun funtzio honen alderantzizko transformatua lortu nahi dela:

$$F(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$$

a konstantea eta T laginketa-periodoa dira.

Zatiketa partzialen metodoa erabiltzeko $F(\tilde{z})$ funtzioa beste era honetara adierazten da:

$$\frac{F(\tilde{z})}{\tilde{z}} = \frac{1 - e^{-aT}}{(\tilde{z} - 1)(\tilde{z} - e^{-aT})} = \frac{1}{\tilde{z} - 1} - \frac{1}{\tilde{z} - e^{-aT}}$$

eta, horren ondorioz,

$$F(\tilde{z}) = \frac{\tilde{z}}{\tilde{z} - 1} - \frac{\tilde{z}}{\tilde{z} - e^{-aT}}$$

Azkenik, Z transformatuaren taulak aplikatuz,

$$f(nT) = 1 - e^{-anT}$$

lortzen da. Ondorioz,

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-anT}) \delta(t - nT)$$

aurkitu nahi den alderantzizko transformatua izango da.

3.4.2 BERRETURATAN ZABALTZEAREN METODOA

Funtzio hau zabalduz:

$$F(\tilde{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \tilde{z}^{-n}$$

beste hau lortzen da:

$$F(\mathfrak{z}) = f(0) + f(T)\mathfrak{z}^{-1} + f(2T)\mathfrak{z}^{-2} + \dots + f(nT)\mathfrak{z}^{-n} + \dots \quad (3.18)$$

Horrek adierazten du $F(\mathfrak{z})$ zabaldu ondoren lortutako funtzioaren batugaien koefizienteak bat datozela laginketa-uneetan $f(t)$ funtzioak hartzen dituen balioekin.

$F(\mathfrak{z})$ funtzioa era arrazionalan aurkeztuz gero,

$$F(\mathfrak{z}) = \frac{a_p \mathfrak{z}^p + a_{p-1} \mathfrak{z}^{p-1} + \dots + a_1 \mathfrak{z} + a_0}{b_q \mathfrak{z}^q + b_{q-1} \mathfrak{z}^{q-1} + \dots + b_1 \mathfrak{z} + b_0} \quad (3.19)$$

eta zenbakitzailea izendatzaileaz zatituta,

$$F(\mathfrak{z}) = A_0 \mathfrak{z}^{p-q} + A_1 \mathfrak{z}^{p-q-1} + \dots \quad (3.20)$$

Beraz, (3.18) eta (3.20) ekuazioak konparatuz gero,

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= f((q-p)T) \\ A_1 &= f((q-p+1)T) \\ &\text{etab.} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Sistema fisikoetan $f(nT) = 0$ izaten da $n < 0$ denean, eta, horren ondorioz, $q > p$. Metodo honi esker, laginketa-uneetan $f(t)$ funtzioak hartzen dituen balioak kalkula daitezke.

3.4 adibidea

Kalkula ezazu $\mathbb{Z}$ -ren alderantzizko transformatua, funtzio hau abiapuntutzat hartuta:

$$F(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$$

Izendatzailea garatuz,

$$F(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z}{z^2 - (1 + e^{-aT})z + e^{-aT}}$$

Orain, zenbakitzailea izendatzaileaz zatitzen da,

$$F(z) = (1 - e^{-aT})z^{-1} + (1 - e^{-2aT})z^{-2} + (1 - e^{-3aT})z^{-3} + \dots$$

eta, (3.18) ekuazioa kontuan hartuz, zatiketa partzialen metodoa erabilita lortutako emaitza bera erdiesten da:

$$f(nT) = 1 - e^{-anT}$$

eta, horrenbestez,

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-anT})\delta(t - nT)$$

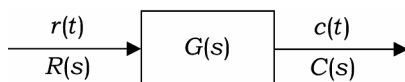
3.5 BLOKE-DIAGRAMAK

3.5 irudian agertzen den sisteman ekuazio hauek betetzen dira:

$$C(s) = R(s)G(s) \quad (3.22)$$

$$G(s) = C(s)/R(s) \quad (3.23)$$

Sistemaren transferentzia-funtzioa da $G(s)$; hau da, s planoan gertatzen den sistemaren irteeraren eta sarreraren arteko erlazioa.

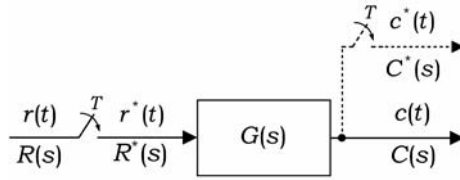


3.5 irudia. Sistema lineal jarraitua.

Baldin $G(s)$ funtzioari aplikatzen zaion seinalea lagindutakoa bada —3.6 irudikoa bezalakoa—, irteeraren eta sarreraren arteko erlazioa honako hau izango da:

$$C(s) = R^*(s)G(s) \quad (3.24)$$

$r^*(t)$ seinalearen Laplaceren transformazioa da $R^*(s)$ funtzioa.



3.6 irudia. Lagindutako datuak erabiltzen dituen sistema lineala.

Laginketaren teoria erabiliz,

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s)$$

$$C^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(s + jn\omega_s) = \quad (3.25)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R^*(s + jn\omega_s) G(s + jn\omega_s) \quad (3.26)$$

eta $R^*(s + jn\omega_s) = R^*(s)$ denez gero,

$$C^*(s) = R^*(s) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \quad (3.27)$$

beteko da. Gainera, (3.25) ekuazioan bezala,

$$G^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \quad (3.28)$$

eta, ondorioz, (3.27) ekuazioa beste era honetara ipin daiteke:

$$C^*(s) = R^*(s)G^*(s) \quad (3.29)$$

Ekuazio horri $\mathcal{Z}$ transformatua aplikatuz gero,

$$C(z) = R(z)G(z) \quad (3.30)$$

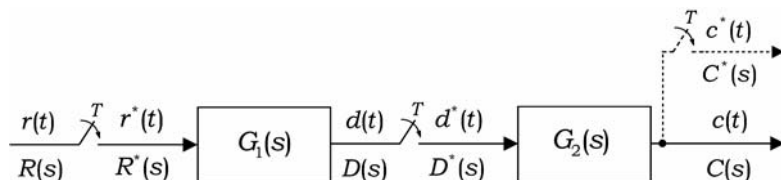
Sistemaren irteerako seinalea jarraitua izan daiteke, baina (3.30) ekuazioak laginketa-uneetan irteerak dituen balioak besterik ez ditu adierazten.

3.6 JAUZI ERAN KOKATUTAKO OSAGAIEN $\mathcal{Z}$ TRANSFORMATUAK

Ondoren, jauzi eran kokatutako osagaien $\mathcal{Z}$ transformatuak kalkulatu dira, lagingailua leku ezberdinetan kokatuz.

3.6.1 TARTEAN LAGINGAILUA DUTEN JAUZI ERAN KOKATUTAKO OSAGAIAK

Har dezagun 3.7 irudian agertzen den sistema.



3.7 irudia. Tartean lagingailua duten jauzi eran ipinitako osagaiak.

3.5 atalean ondorioztatu berri denaren arabera, bertan,

$$D(z) = G_1(z)R(z) \quad (3.31)$$

eta

$$C(z) = G_2(z)D(z) \quad (3.32)$$

erlazioak betetzen dira.

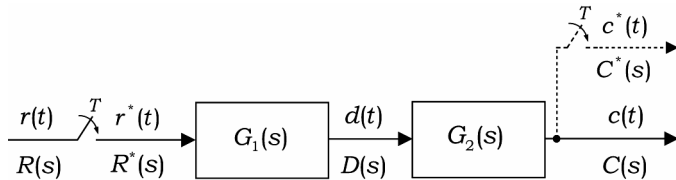
Bi ekuazioak konbinatuz gero,

$$C(z) = G_1(z)G_2(z)R(z) \quad (3.33)$$

Horrenbestez, tartean lagingailua duten bi sistema linealen $\mathcal{Z}$ transformatua, sistema lineal biei dagozkien $\mathcal{Z}$ transformatuen arteko biderketa burutuz lortzen da.

3.6.2 LAGINGAILURIK GABEKO JAUZI ERAN KOKATUTAKO OSAGAIK

3.8 irudiko sistema aztertuko da orain.



3.8 irudia. Tartean lagingailurik ez duten osagaiz osatutako sistema.

Irteera jarraituaren Laplaceren transformatua hau da:

$$C(s) = G_1(s)G_2(s)R^*(s) \quad (3.34)$$

eta ekuazioaren bi aldeetan laginketaren teoria aplikatuz gero,

$$C^*(s) = [G_1(s)G_2(s)]^* R^*(s) \quad (3.35)$$

(3.35) ekuazioaren $\mathcal{Z}$ transformatua hartuz,

$$C(z) = G_1(z)G_2(z)R(z) \quad (3.36)$$

non

$$G_1G_2(z) = \mathcal{Z} \left[(G_1(s)G_2(s))^* \right] = G_2G_1(z) \quad (3.37)$$

baita.

Azkenik, ondoren frogatuko den bezala, kontuan izan behar da eskuarki $G_1 G_2(z) \neq G_1(z) G_2(z)$ dela. Izan ere,

$$G_1 G_2(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_1(s) G_2(s) \right] \quad (3.38)$$

eta

$$G_1(z) G_2(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_1(s) \right] Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_2(s) \right] \quad (3.39)$$

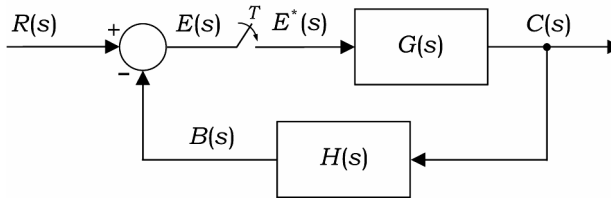
dira. Horrenbestez, argi ikusten da $G_1 G_2(z) \neq G_1(z) G_2(z)$ dela.

3.7 BLOKE-DIAGRAMEN ALJEBRA

Aurreko ataletan analizatu diren bloke-diagramen Z transformatuak ikusi ondoren, zenbait adibide aztertuko da.

3.5 adibidea

3.9 irudiko sistemaren analisia egin nahi da.



3.9 irudia. Sistema digital baten bloke-diagrama.

Lehendabizi, diagraman agertzen diren transferentzia-funtzioak aintzat hartuz, irteera-, errore- nahiz berrelikadura-seinaleen adierazpen zehatzak aterako dira,

$$C(s) = G(s)E^*(s)$$

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$B(s) = G(s)H(s)E^*(s)$$

eta, horrenbestez,

$$E^*(s) = R^*(s) - B^*(s)$$

$$B^*(s) = [G(s)H(s)]^* E^*(s)$$

$$E^*(s) = R^*(s) - GH^*(s)E^*(s)$$

$$E^*(s) = \frac{1}{1 + GH^*(s)} R^*(s)$$

$$C^*(s) = G^*(s)E^*(s)$$

$$C^*(s) = \frac{G^*(s)}{1 + GH^*(s)} R^*(s)$$

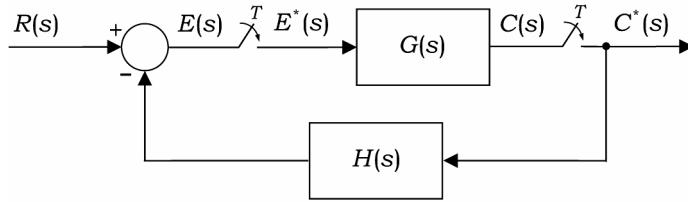
Azken adierazpenetik abiatuta, bistakoa da honako hau litzatekeela 3.9 irudiko sistema aurkeztuko lukeen $\mathcal{Z}$ transformatua:

$$C(z) = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} R(z)$$

Era berean, beste hainbat kasu ere proposatzen da, dagozkien $\mathcal{Z}$ transformatuak lortzeko.

3.6 adibidea

3.10 irudiko sistemaren transferentzia-funtzio diskretua kalkulatu nahi da.



3.10 irudia. Sistema diskretu baten bloke-diagrama.

Aurreko kasuan egin den bezala, bloke-diagraman jasotako irteera- eta errore-seinaleen adierazpenari ekingo zaio lehen urrats gisa,

$$C(s) = G(s)E^*(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s)C^*(s)$$

eta, ondorioz,

$$E^*(s) = R^*(s) - H^*(s)C^*(s)$$

$$C^*(s) = G^*(s)E^*(s)$$

$$C^*(s) = G^*(s)R^*(s) - G^*(s)H^*(s)C^*(s)$$

$$[1 + G^*(s)H^*(s)]C^*(s) = G^*(s)R^*(s)$$

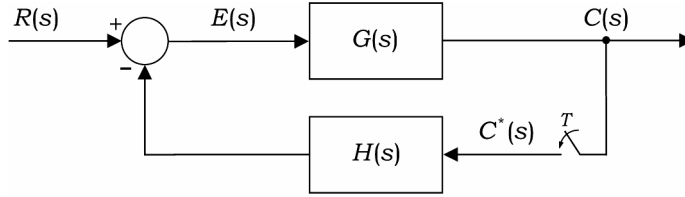
$$C^*(s) = \frac{G^*(s)}{1 + G^*(s)H^*(s)} R^*(s)$$

Beraz, 3.10 irudian ageri den sistemaren Z transformatua hau da:

$$C(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} R(z)$$

3.7 adibidea

3.11 irudian aurkeztutako sistemaren Z transformatua kalkulatu nahi da.



3.11 irudia. Sistema digital bati dagokion bloke-diagrama.

Bloke-diagraman islatzen diren irteera- eta errore-seinaleak aztertuz, adierazpen hauek atera daitezke:

$$C(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s)C^*(s)$$

$$C(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C^*(s)$$

eta, horrenbestez,

$$C^*(s) = [G(s)R(s)]^* - [G(s)H(s)]^* C^*(s)$$

$$[1 + GH^*(s)]C^*(s) = GR^*(s)$$

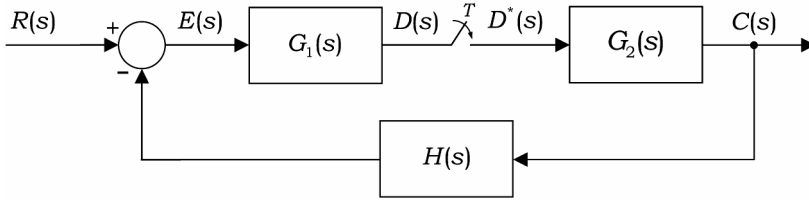
$$C^*(s) = \frac{GR^*(s)}{1 + GH^*(s)}$$

Azkenik, hau da sistemaren Z transformatua:

$$C(z) = \frac{GR(z)}{1 + GH(z)}$$

3.8 adibidea

Kalkula ezazu 3.12 irudiko sistemaren Z transformatua.



3.12 irudia. Sistema diskretu bati dagokion bloke-diagrama.

Kasu honetan, irteerako seinalearen adierazpena ondorioztatu ahal izateko, errore-seinaleaz gain, tarteko $D(s)$ seinalea ere erabiliko da,

$$C(s) = G_2(s) D^*(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s) C(s)$$

$$D(s) = G_1(s) E(s)$$

$$E(s) = R(s) - G_2(s) H(s) D^*(s)$$

$$D(s) = G_1(s) R(s) - G_1(s) G_2(s) H(s) D^*(s)$$

eta, ondorioz,

$$D^*(s) = [G_1(s) R(s)]^* - [G_1(s) G_2(s) H(s)]^* D^*(s)$$

$$D^*(s) = \frac{G_1 R^*(s)}{1 + G_1 G_2 H^*(s)}$$

$$C^*(s) = G_2^*(s) D^*(s)$$

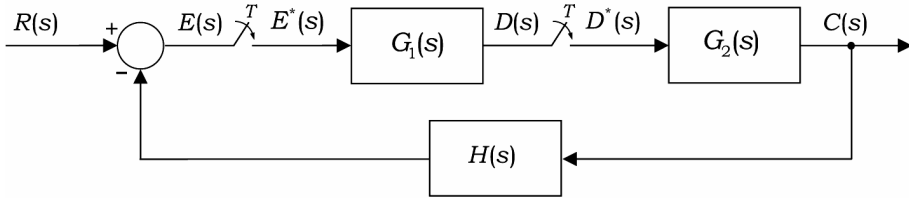
$$C^*(s) = G_2^*(s) \frac{G_1 R^*(s)}{1 + G_1 G_2 H^*(s)}$$

Sistemaren Z transformatua honako hau da:

$$C(z) = \frac{G_2(z) G_1 R(z)}{1 + G_1 G_2 H(z)}$$

3.9 adibidea

3.13 irudiko sistemaren Z transformatua lortu nahi da.



3.13 irudia. Sistema digital baten bloke-diagrama.

Kasu honetan ere, aurrekoan egin den bezala, irteerako seinalea kalkulatu ahal izateko, errore-seinalea eta tarteko $D(s)$ seinalea erabiltzen dira,

$$C(s) = G_2(s) D^*(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s) C(s)$$

$$D(s) = G_1(s) E^*(s)$$

$$E(s) = R(s) - G_2(s) H(s) D^*(s)$$

eta, horrenbestez,

$$E^*(s) = R^*(s) - [G_2(s) H(s)]^* D^*(s)$$

$$D(s) = G_1(s) [R^*(s) - G_2 H^*(s) D^*(s)]$$

$$D^*(s) = G_1^*(s) R^*(s) - G_1^*(s) G_2 H^*(s) D^*(s)$$

$$D^*(s) = \frac{G_1^*(s)}{1 + G_1^*(s) G_2 H^*(s)} R^*(s)$$

$$C^*(s) = G_2^*(s) D^*(s)$$

$$C^*(s) = G_2^*(s) \frac{G_1^*(s)}{1 + G_1^*(s)G_2H^*(s)} R^*(s)$$

Beraz, sistemaren Z transformatua honako hau izango da:

$$C(z) = \frac{G_2(z)G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2H(z)} R(z)$$

3.8 Z TRANSFORMATUAREN METODOAREN MUGAK

Z transformatuaren metodoa erabiltzen hasi aurretik, badira ezagutu beharreko muga batzuk.

1. Erraztasun matematikoak direla eta, pultsu-segida gisa aurkezten da seinale lagindua; pultsu horien balioak bat datoz une zehatz horietan seinale jarraituak hartzen dituen balioekin. Hala ere, laginketaren iraupena sistemaren gainerako denbora-konstanteekin konparatuta oso txikia baldin bada baino ez du balioko hurbilketa horrek.
2. Sistema linealaren irteeraren $C(z)$ Z transformatuak laginketa-uneetan $c(t)$ funtzio jarraituak dituen balioak aurkezten ditu. Ezin izango da ezer esan beste edozein unetan $c(t)$ funtzioak hartzen dituen balioez.
3. Sistemaren jatorrizko $G(s)$ transferentzia-funtzioaren heina 2 baino txikiagoa bada, Z transformatuaren bitartez lortzen den sistemaren irteera okerra izan daiteke, laginketa-uneetan gertatzen diren ez-jarraitutasunak direla eta.

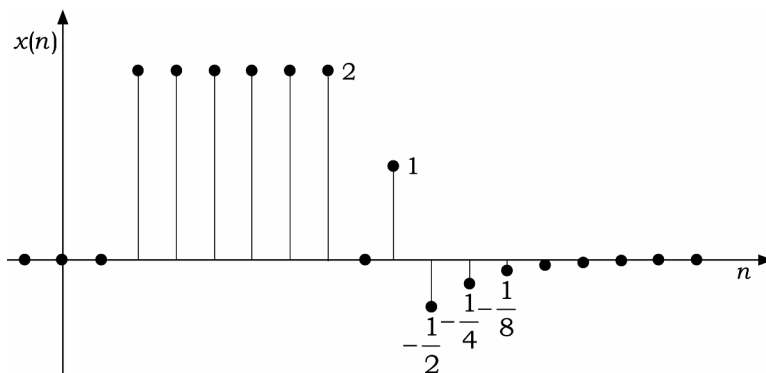
3.9 LABURPENA

Kapitulu hasieran, seinale jarraituen Z transformatua lortzeko metodo sistematiko bat ezartzeaz gain, kontrol-alorrean agertu ohi diren funtzio adieraz-

garrien Laplace eta Z transformatuak taula batean laburbildu dira. Ondoren, s eta z planoen arteko erlazioa aztertu da, s planoko oinarritzko leku geometrikoak z planora transformatzean eragiten dituzten leku geometriko baliokideak ondorioztatuz. Jarraian, Z transformatuaren funtsezko propietateak enuntziatu ostean, Z -ren alderantzizko transformatua aurkitzeko bi metodo alternatibo azaldu dira. Kapituluia amaitzeko, sistema diskretuen bloke-diagrametatik abiatuz berauen irteera-seinaleei dagozkien Z transformatuak —eta, posible balitz, baita transferentzia-funtzio diskretuak ere— lortzeko modua landu eta, azkenik, Z transformatuak aurkezten dituen mugei buruzko hausnarketa labur bat burutu da.

3.10 ARIKETAK

- 3.1 3.14 irudian agertzen den seinalearen Z transformatua aztertzea eskatzen da.



3.14 irudia. x seinale lagindua.

- 3.2 Sarrera gisa arrapala unitarioa aplikatzen zaionean, sistema batek erakusten duen erantzuna 3.2 taulan jasotakoa da. Kalkula ezazu sistemaren transferentzia-funtzio diskretua.

3.2 taula. Arrapala unitarioko sarrerari emandako erantzunaren laginak.

t	$c(t)$
0	0
1	0
2	1
3	2
4	4
5	5
6	6
7	7
...	...
n	n
...	...

- 3.3** $G(z)$ sistemari sarrera gisa pultsu unitarioa aplikatzen zaionean, erantzun hau lortzen da:

$$c(nT) = 3 \left(2^{-nT} \right) \cos \left(\frac{\pi nT}{6} + \frac{\pi}{12} \right); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Kalkula ezazu $c(nT)$ erantzun diskretua, sistema horri maila unitarioa aplikatzen zaionean ($T = 1$ s).

- 3.4** Kalkula ezazu funtzio jarraitu hauen Z transformatua:

a) $\frac{1}{s(s+3)}$

b) $\frac{k}{(s+1)(s+5)}$

c) $\frac{1}{s(s+15)^2}$

d) $\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$

e) $\frac{1}{s^2 + 2s + 5}$

f) $\frac{10}{s^2(s+2)}$

g) $\frac{1}{s(s^2 + 5)}$

- 3.5** Kalkula itzazu funtzio hauen alderantzizko transformatuak, dagozkien denbora-funtzioak lortzearren:

a) $\frac{z(z-2)}{z^2 - 4z + 16}$

b) $\frac{z^2}{z^2 - 4z + 3}$

c) $\frac{7z}{(z-10)(z-3)}$

d) $\frac{z(z+1)}{(z-1)(z^2 - z + 1)}$

e) $\frac{z}{z^2 + 1}$

f) $\frac{10z}{z^2 - 1}$

3.6 Sistema baten transferentzia-funtzioa $G(s) = \frac{1}{s+a}$ da.

a) Kalkula ezazu $G(z)$ transformatua.

b) Sistema horren aurretik zero ordenako lagingailu-euskailua (ZOH) jarri gero, kalkula ezazu lortutako $G'(s)$ funtzioaren Z transformatua.

c) Aurki ezazu $\frac{G'(s)}{1+G'(s)}$ funtzioaren Z transformatua.

3.7 Sistema baten portaera transferentzia-funtzio jarraitu honen bitartez aurkeztu da:

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

eta segundo bateko maiztasunarekin lagintzen da ZOH bat erabiliz. Kalkula ezazu $G(z)$ transferentzia-funtzioa, eta aztertu transformatu horren portaera laginketa-periodoa txikiagotzen den heinean ($T \rightarrow 0$).

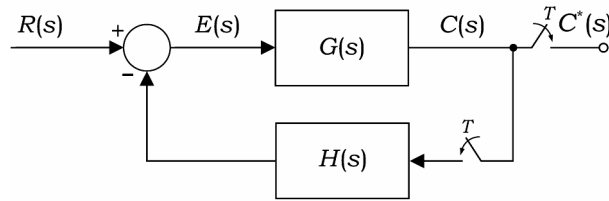
3.8 $f_1(t) = t^2 u(t)$ eta $f_2(t) = e^{-2t} u(t)$ izanik, kalkula ezazu $f(t) = f_1(t) f_2(t)$ funtzioaren $\mathcal{Z}$ transformatua.

3.9 Baldin $g(t)$ funtzioaren $\mathcal{Z}$ transformatua

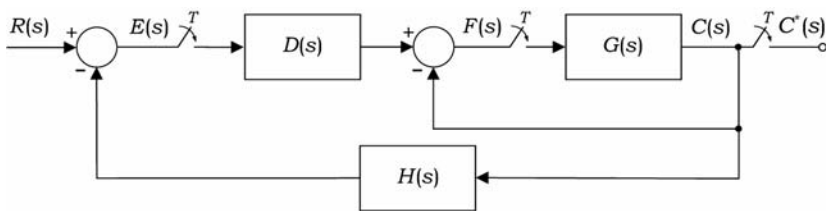
$$G(z) = \frac{1 - 3z^{-1} + 3z^{-2}}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,8z^{-1})}$$

bada, eta $T = 1$ segundo dela onartuta, kalkula itzazu $g(nT)$ funtzioaren lehen 10 balioak.

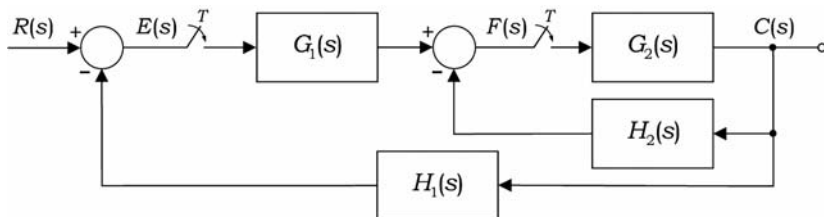
3.10 Kalkula itzazu 3.15 irudian agertzen diren sistemen transferentzia-funtzio diskretuak. Transferentzia-funtzioa definitzerik ez badago, lor ezazu irteeraren $\mathcal{Z}$ transformatua.



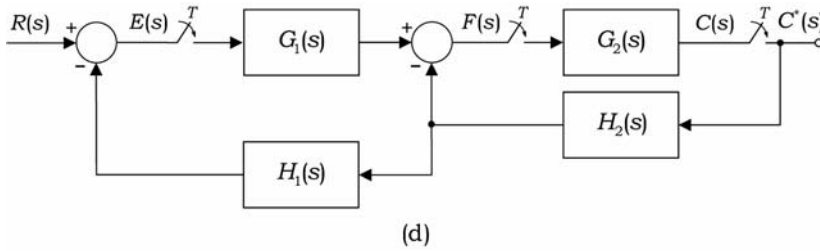
(a)



(b)

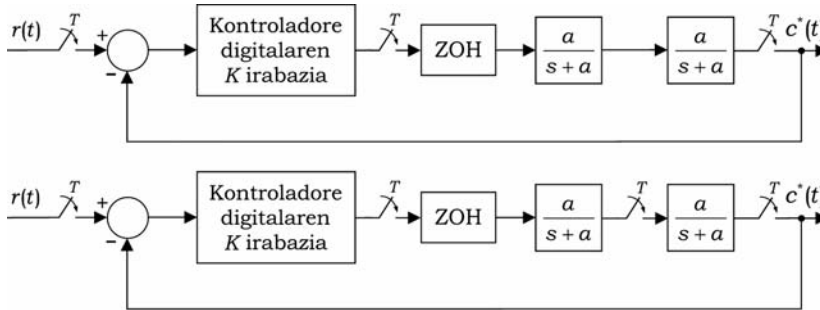


(c)



3.15 irudia. Sistema diskretu ezberdinen bloke-diagramak.

- 3.11** Kalkula itzazu 3.16 irudian ageri diren bi sistemen $\mathcal{Z}$ transferentzia-funtzioak, $a = 1$ eta laginketa-periodoa $T = 0,693$ segundo direnean.



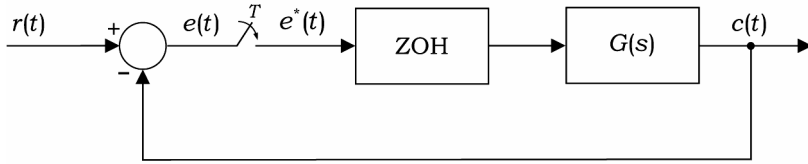
3.16 irudia. Kontrol-sistema digital bi.

- 3.12** 3.17 irudian, sistema diskretu baten bloke-diagrama erakusten da.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+0,2)},$$

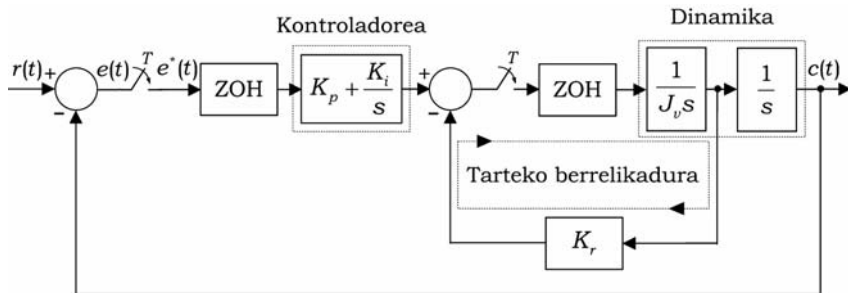
$T = 0,2$ segundo eta $r(t)$ maila unitarioa direla suposatuz, kalkula itzazu:

- Irteeraren $C(z)$ $\mathcal{Z}$ transformatua.
- Sistemaren erantzunaren balioa laginketa-une bakoitzean.
- $c(nT)$ irteeraren azken balioa.



3.17 irudia. Sistema diskretu baten bloke-diagrama.

3.13 Espazio-teleskopio handi baten bloke-diagrama digitala 3.18 irudian erakutsitakoa da. Kontrolak ekintza proportzional eta integrala ditu, eta tarteko proportziozko berrelikadura. Aurki itzazu begizta ireki nahiz itxiko $C(z)/E(z)$ eta $C(z)/R(z)$ transferentzia-funtzioak. Sistema diskretuari dagozkionak abiapuntutzat harturik, ondorioztatu sistema jarraituaren begizta ireki eta itxiko transferentzia-funtzioak, laginketa-periodoa $T \rightarrow 0$ eginez.



3.18 irudia. Espazio-teleskopio baten bloke-diagrama digitala.

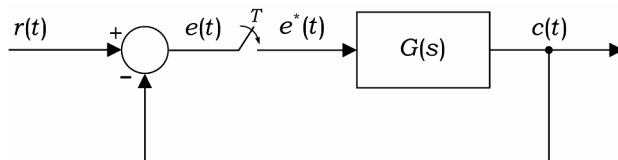
3.14 Hona hemen 3.19 irudiko kontrol-sistema digitalaren begizta irekiko transferentzia-funtzioa:

$$G(s) = \frac{27,8(s+1)}{s(s^2 + 6s + 48,6)}$$

Kontsidera ezazu laginketa-periodoa segundo batekoa dela.

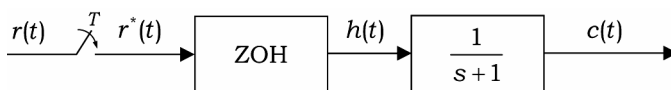
a) Sarrera gisa maila unitarioa hartuz, kalkula ezazu sistemaren $C(z)$ irteera.

- b) Kalkula ezazu sistemaren irteerak egoera iraunkorrean hartuko duen balioa.



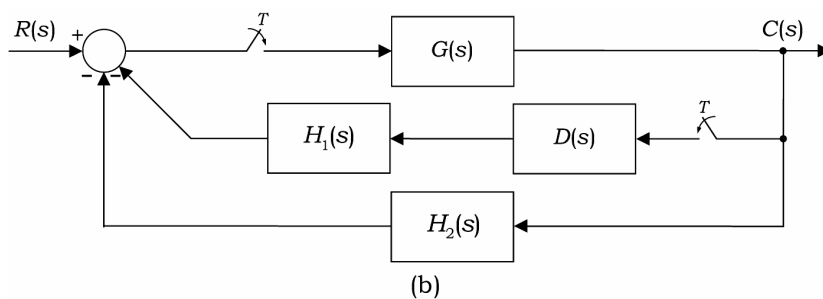
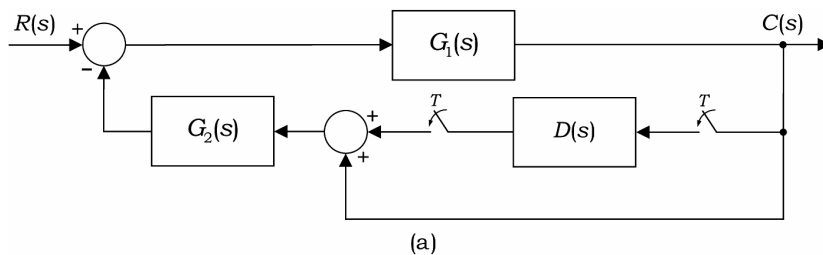
3.19 irudia. Kontrol-sistema digitala.

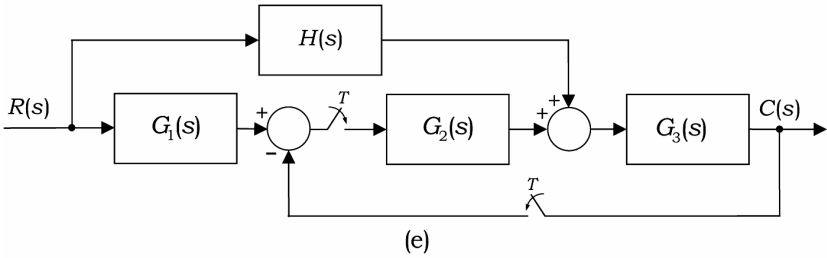
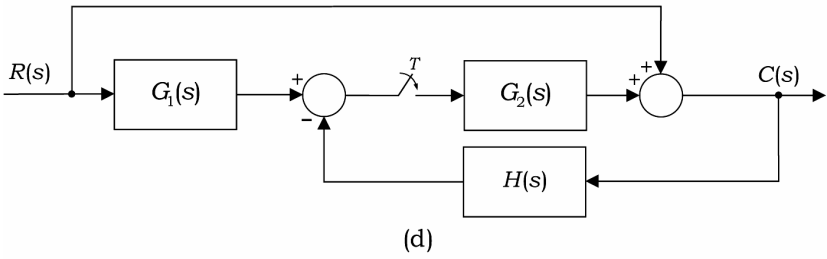
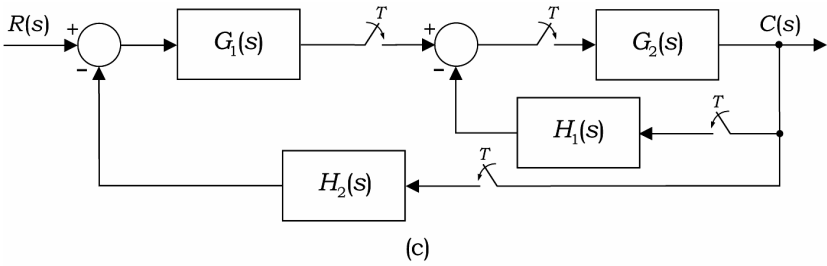
- 3.15** 3.20 irudian islatutako sistema hartuta, kalkula ezazu irteerak laginketa-uneetan izango dituen balioak. Sarrera maila unitarioa da eta, laginketa-periodoa, berriz, segundo batekoa.



3.20 irudia. Sistema diskretua.

- 3.16** Kalkula itzazu 3.21 irudiko sistema digitalen erantzunei dagozkien $\mathcal{Z}$ transformatuaren espresioak.





3.21 irudia. Sistema digital ezberdinak.

4

Sistema diskretuen analisia

4.1 SARRERA

Kapitulu honetan, sarrera eta irteera bakarreko sistema diskretuen analisia eta kontrol-diseinua egiteko beharrezkoak diren baliabideak aztertuko ditugu. Nahiz eta guztiak Z transformatuaren erabileran oinarrituta egon —bereziki egonkortasuna—, erroen leku geometrikoaren metodoa eta erantzun frekuentziala aztertuko ditugu, bai eskaintzen duten informazioagatik, bai eta hurrengo kapituluetan diseinatu behar diren kontrol-algoritmoak osatzeko duten garrantziagatik.

Sistema lineal jarraituen analisia eta kontrola egitean, begizta itxiko kontrola erabiltzeko jakin beharreko irizpideak hauek dira:

1. Egonkortasunaren irizpidea
2. Erantzun iragankorraren irizpidea
3. Erantzun frekuentzialaren irizpidea

Eta, gainera, kapitulu honetan, egonkortasuna egonkortasun absolutuari lotuta ere aztertuko dugu.

4.2 SISTEMA DISKRETUEN EGONKORTASUN ABSOLUTUA

Sistema lineal jarraituen egonkortasuna aztertzeko, begizta itxian nahiz irekian, sistemak begizta itxian edo irekian s planoaren eskuinaldean dituen poloak aztertzen dira. Hori egiteko metodo bat baino gehiago dago, baina begizta itxiko egonkortasuna aztertzeraz bideratuta daude gehienak.

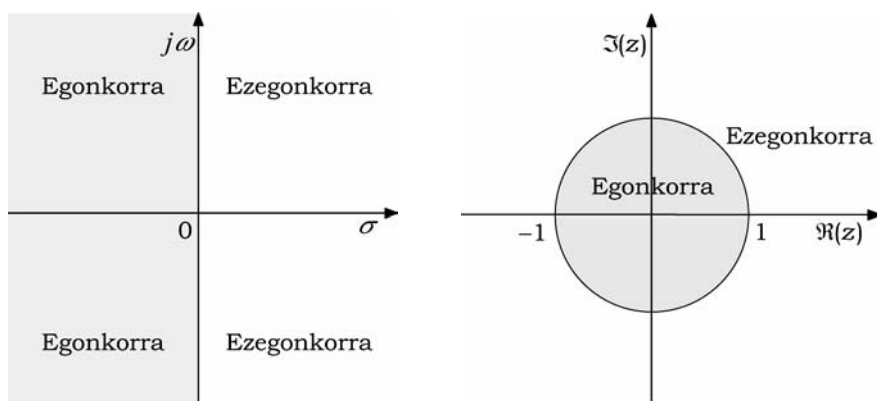
1. Routh-Hurwitz metodoa. s planoko eskuinaldean dauden begizta itxiko edo irekiko polinomio karakteristikoaren erroak aztertzen ditu.
2. Begizta itxiko egonkortasuna aztertzeko,
 - a) Nyquist diagrama

- b) Bode diagrama
- c) Nichols-en grafikoa
- d) Erroen leku geometrikoaren metodoa

Metodo hauek guztiek s planoan poloek duten kokalekua aztertzen dute. Z transformatuaren kasuan, s planoko poloen baliokideek z planoan dituzten kokalekuak aztertu beharko ditugu.

4.2.1 Z PLANOAN AGERTZEN DEN EGONKORTASUNERAKO EREMUA

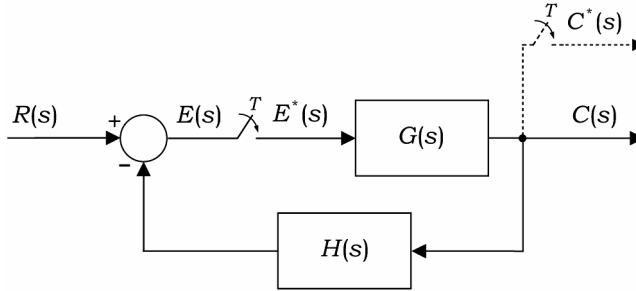
Aurreko kapituluan ikusi den bezala, s planoaren ezkerrekoa z planoko zirkulu unitario bihurtzen da Z transformatua aplikatutakoan. Ondorioz, s planoko ardatz irudikariko puntu guztiak z planoko zirkuluko zirkunferentzian agertzen dira, 4.1 irudian erakusten den bezala.



4.1 irudia. Egonkortasun-eremuak s eta z planoetan.

4.2.2 ROUTH-HURWITZ IRIZPIDEA: TRANSFORMAZIO BILINEALA

4.2 irudian agertzen den sistema diskretua aztertu nahi dugu, sistemaren begizta itxiko poloen kokalekutik abiatuz.



4.2 irudia. Sistema diskretua.

Beraz, sistemaren begizta itxiko transferentzia-funtzioa kalkulatzeko izango da lehen urratsa.

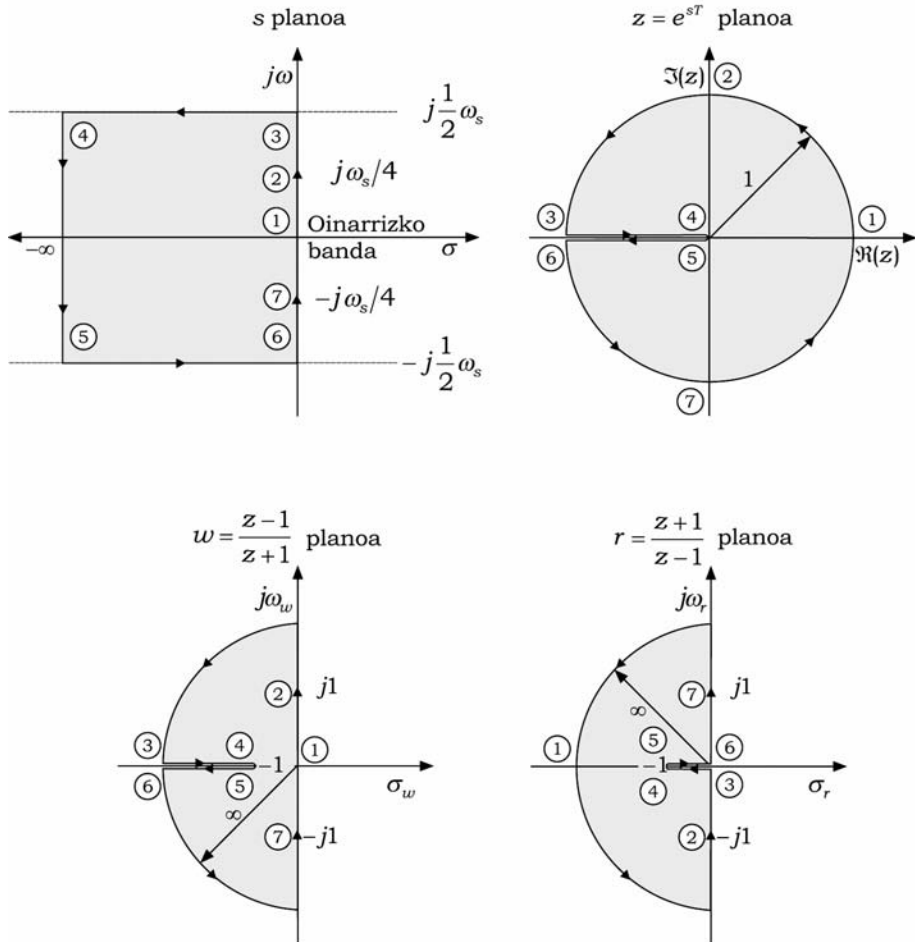
$$C(z) = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} R(z)$$

Sistemaren egonkortasuna z planoan aztertzean, $1 + GH(z)$ polinomio karakteristikoak zirkulu unitariotik kanpo errorik ba ote duen jakin nahi dugu. Routh-Hurwitz egonkortasun-irizpideak egonkortasun-muga ardatz irudikarian dagoela suposatuz lan egiten duenez, ez du balioko z planoaren kasuan, egonkortasun-muga zirkunferentzia unitarioan baitago. Berrito ere funtzioa s planora eramateko transformatu balitz —hau da, $1 + GH^*(s)$ —, funtzioa ez litzateke arrazionala izango, e^{-nT_s} itxurako batugaiak agertuko liratekeelako. z transformatuaren bidez lortutako arrazionaltasunari eutsiz, egonkortasun-muga ardatz irudikaria izango lukeen plano konplexua lortzea izango litzateke gauzarik egokiena. Transformazio hori egin ahal izango balitz, transformazio bilineala alegia, Routh-Hurwitz irizpidea baliagarria izango litzateke berrito ere.

Orduan, transformazio orokor hau suposatzen dugu:

$$z = \frac{au + b}{cu + d} \quad (4.1)$$

Ekuazio horretan, aldagai konplexua u da, eta a , b , c eta d , berriz, konstanteak.



4.3 irudia. s planoa z plano bihurtzen da; z planoa, berriz, r eta w planoetara eramaten da.

(4.1) ekuazioan oinarritutako egitura bilineal erabilienak hauek dira:

$$\tilde{\kappa} = \frac{r+1}{r-1} \quad (4.2)$$

eta horren alderantzizko hau:

$$r = \frac{\tilde{\kappa}+1}{\tilde{\kappa}-1} \quad (\mathcal{R}\text{transformatua}) \quad (4.3)$$

eta

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad (4.4)$$

eta horren alderantzizko hau:

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad (\mathcal{W} \text{ transformatua}) \quad (4.5)$$

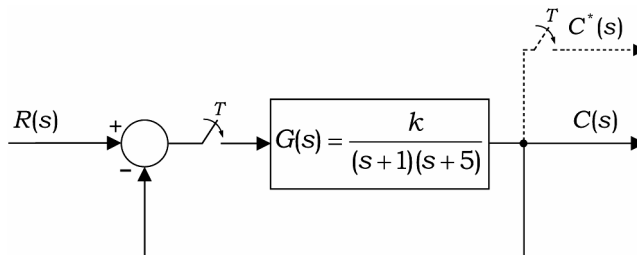
(4.3) eta (4.5) ekuazioen bidez, z planoko zirkulu unitarioaren barnealdea r eta w planoen ezkerraldeetan transformatzen da, nahiz eta transformazio bien emaitzak puntuz puntu bat ez datozen —4.3 irudia—.

Routh-Hurwitz irizpideari dagokionez, ez dago alderik transformazio bilineal bat edo bestea erabiltzean. r eta w planoen egonkortasun-muga ardatz irudikaria denez gero, Routh-Hurwitz irizpidea zuzenean erabil daiteke z planoan lortutako ekuazio karakteristikoan.

4.1 adibidea

4.4 irudiko sistema aztertu nahi dugu. Horretarako, $T=1$ izanik, kalkulatu k -ren gehienezko balioa, sistema egonkorra mantentzeko.

Lehenbizi, 4.4 irudian agertzen den sistemaren transferentzia-funtzioa kalkulatu behar da.



4.4 irudia. Sistema digitala.

$$\frac{C(\mathcal{Z})}{R(\mathcal{Z})} = \frac{G(\mathcal{Z})}{1+G(\mathcal{Z})}$$

Hor, $1+G(\mathcal{Z})=0$ da ekuazio karakteristikoa.

$G(\mathcal{Z})$ kalkulatzeko, lehenik $G(s)$ zatiketa partzialetan zabalduko dugu,

$$G(s) = \frac{k}{(s+1)(s+5)} = \frac{k}{4} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+5} \right)$$

$G(\mathcal{Z})$ era honetan ondorioztatu ahal izateko:

$$\begin{aligned} G(\mathcal{Z}) &= \mathcal{Z} \left[G^*(s) \right] = \mathcal{Z} \left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} G(s) \right] = \frac{k}{4} (1-\mathcal{Z}^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s(s+1)} - \frac{1}{s(s+5)} \right] = \\ &= \frac{k}{20} \frac{(4-5e^{-T}+e^{-5T})\mathcal{Z}+e^{-T}-5e^{-5T}+4e^{-6T}}{(\mathcal{Z}-e^{-T})(\mathcal{Z}-e^{-5T})} \end{aligned}$$

$T=1$ segundo denez,

$$G(\mathcal{Z}) = k \frac{0,1084\mathcal{Z}+0,0172}{(\mathcal{Z}-0,3679)(\mathcal{Z}-0,0067)}$$

Ekuazio karakteristikoa $\mathcal{Z}$ planoan eta begizta itxian osatuko dugu:

$$1+G(\mathcal{Z})=0$$

$$1+k \frac{0,1084\mathcal{Z}+0,0172}{(\mathcal{Z}-0,3679)(\mathcal{Z}-0,0067)}=0$$

$$\mathcal{Z}^2 + (0,1084k-0,3746)\mathcal{Z} + 0,00246 + 0,0172k = 0$$

Ekuazio karakteristikoari transformazio bilineala aplikatzen bazaio, orduan,

$$\mathcal{Z} = \frac{r+1}{r-1}$$

$$\left(\frac{r+1}{r-1} \right)^2 + (0,1084k-0,3746) \frac{r+1}{r-1} + 0,00246 + 0,0172k = 0$$

$$(0,6279 + 0,1256k)r^2 + (1,9951 - 0,0344k)r + 1,3771 - 0,0912k = 0$$

Azkenik, Routh-Hurwitz irizpidea aplikatuz,

$$\begin{array}{l|ll} r^2 & 0,6279 + 0,1256k & 1,3771 - 0,0912k \\ r^1 & 1,9951 - 0,0344k & \Rightarrow k < 58 \\ r^0 & 1,3771 - 0,0912k & \Rightarrow k < 15,1 \end{array}$$

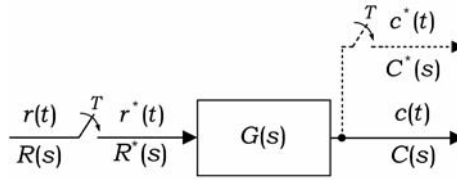
Baldin $1,3771 - 0,0912k < 0$ bada gertatuko da zeinu-aldaketa, eta, ondorioz, egonkortasuna ziurtatzeko $k < 15,1$ izan behar du.

Ebatzi berri dugun adibideari dagokionez, aipatu beharra dago ez dela ezinbestekoa azken urratseko taula eraikitzea. Izan ere, emaitza lortzeko, nahikoa da gogoan izatea r -ren menpeko ekuazio karakteristikoaren koefiziente guztiek zeinu bera behar dutela egonkortasuna ziurtatzearren.

4.3 EGONKORTASUN ERLATIBOA, ERANTZUN IRAGANKORRA ETA POLOEN KOKALEKUA Z ETA S PLANOETAN

Routh-Hurwitz irizpideak egonkortasun absolutua besterik ez du aztertzen; ez du egonkortasun erlatiboari buruzko informaziorik ematen. Egonkorra den sistemari pultsu-erako sarrera aplikatzen zaionean lortzen den irteerak denbora zehatza behar du egoera iraunkorra lortzeko; eta erantzun hori oszilakorra izan daiteke, edo ez. Erantzun iragankorrari buruzko informazioa, berriz, sistemaren poloen kokalekuak aztertuz ondoriozta daiteke; s planoan sistema jarraituentzat eta z planoan sistema diskretuen kasuan.

Sistema jarraituen kasuan, s planoko sistemaren poloen kokalekuek erantzunaren gaineko eraginak islatzen dituzte. Sistema diskretuetan, berriz, kokalekuak ez dira hain argiak, eta analisia zerbait zailagoa da. Demagun 4.5 irudiko sistema aztertu nahi dela.



4.5 irudia. Sistema diskretua.

Bertan,

$$C^*(s) = G^*(s)R^*(s) \quad (4.6)$$

eta

$$C(z) = G(z)R(z) \quad (4.7)$$

erlazioak betetzen dira.

Pultsu unitarioa aplikatzen den kasuan, $R^*(s) = 1$ eta $R(z) = 1$; beraz,

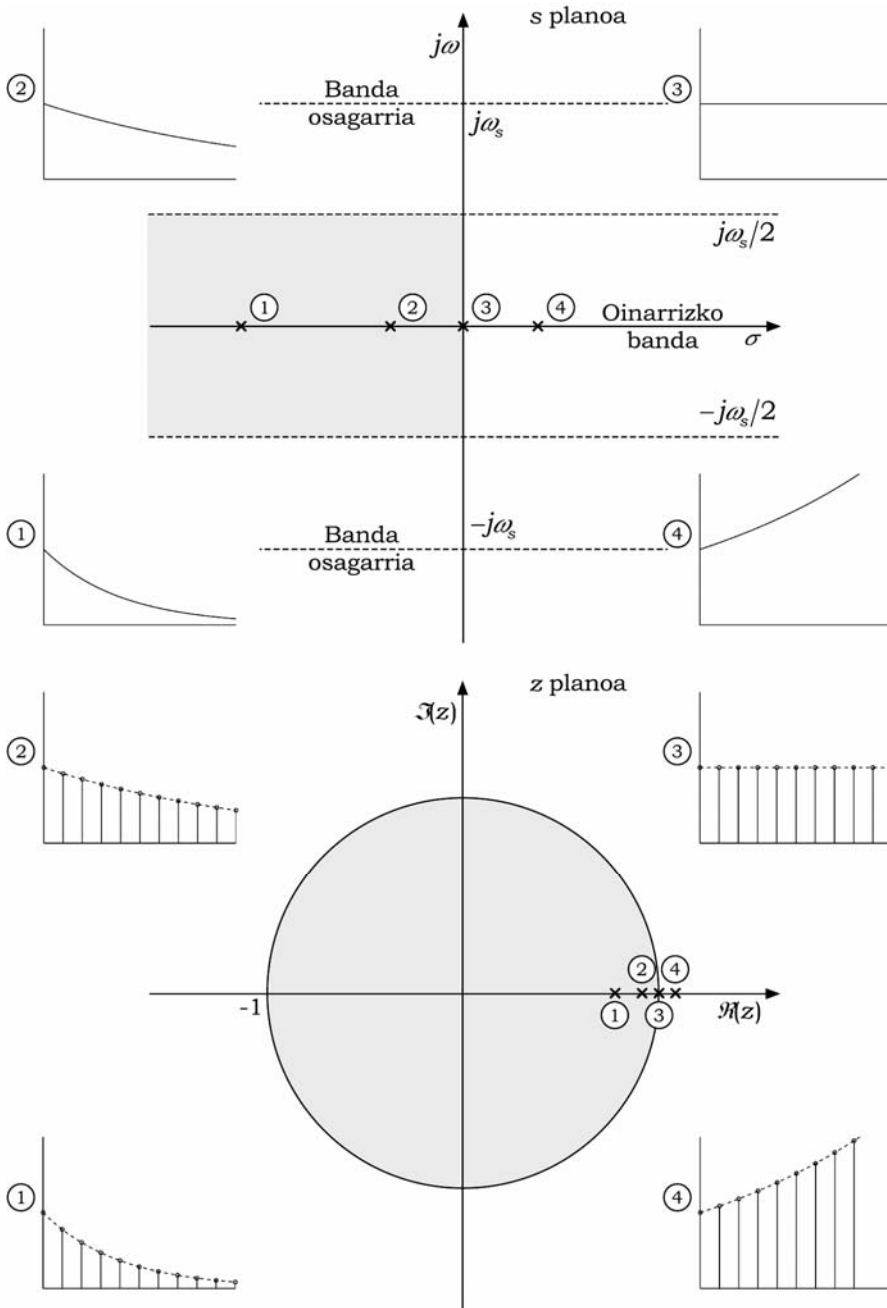
$$\therefore C^*(s) = G^*(s) \quad (4.8)$$

$$C(z) = G(z) \quad (4.9)$$

$C^*(s)$, lagindutako irteeraren Laplaceren transformatuaren eta $C(z)$, Z transformatuaren egiturak lotuta daude s planoan $G^*(s)$ funtzioak eta z planoan $G(z)$ funtzioak dituzten polo eta zeroen konfigurazioei. Sistemaren erantzun analitikoa osatzen duten batugaietako bakoitzak duen eragina adierazten du poloen konfigurazioak; zeroenak, berriz, eragin horietako bakoitzaren garrantzi erlatiboa.

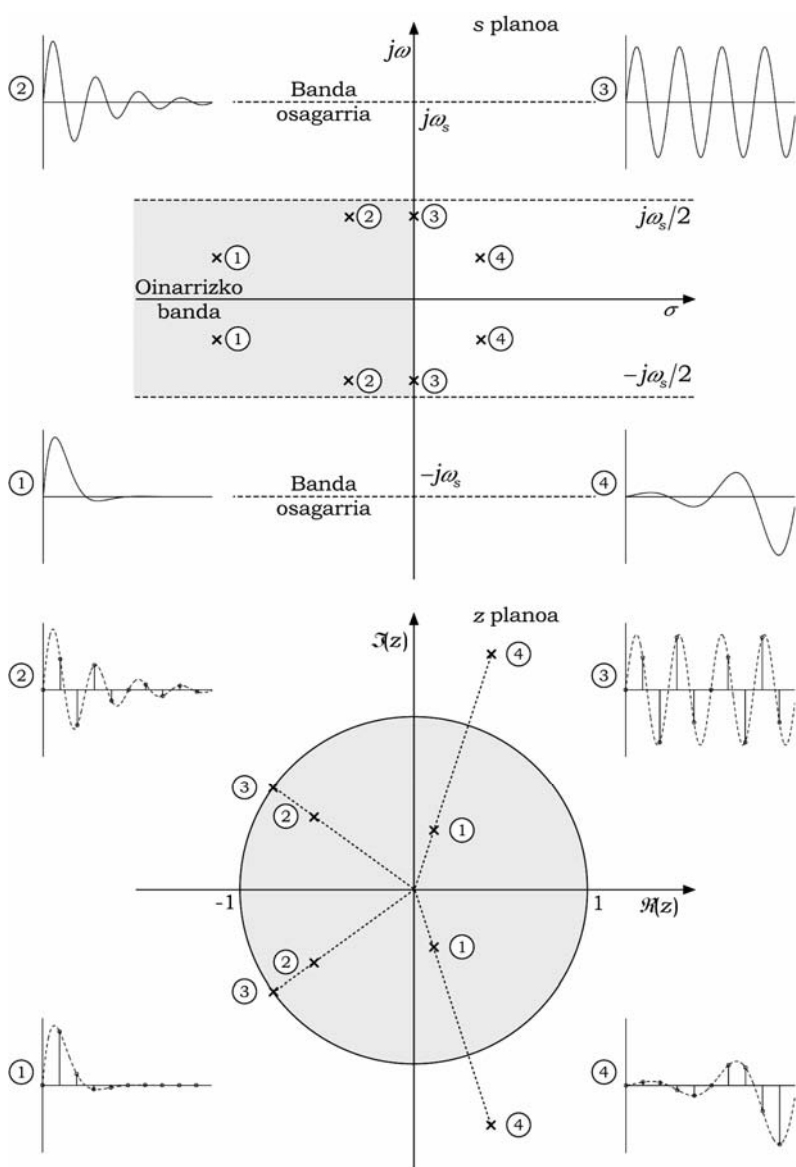
Transformazioaren ondoren s planoko $G^*(s)$ funtzioaren poloak z planoan $G(z)$ funtzioaren poloetan transformatzen direnean gertatzen dena bereziki interesgarria da aztertuko ditugun hiru kasutan.

4.6 irudian, s planoan dauden polo errealeen transformazioa erakusten da; z planoaren eskuinaldean agertzen dira. Polo horiek eragiten dituzten sistemen erantzunak ere agertzen dira sarrera gisa pultsu unitarioa aplikatzen denean, sistema jarraitu nahiz diskretuetan.



4.6 irudia. s eta z planoen arteko polo errealeen transformazioak.

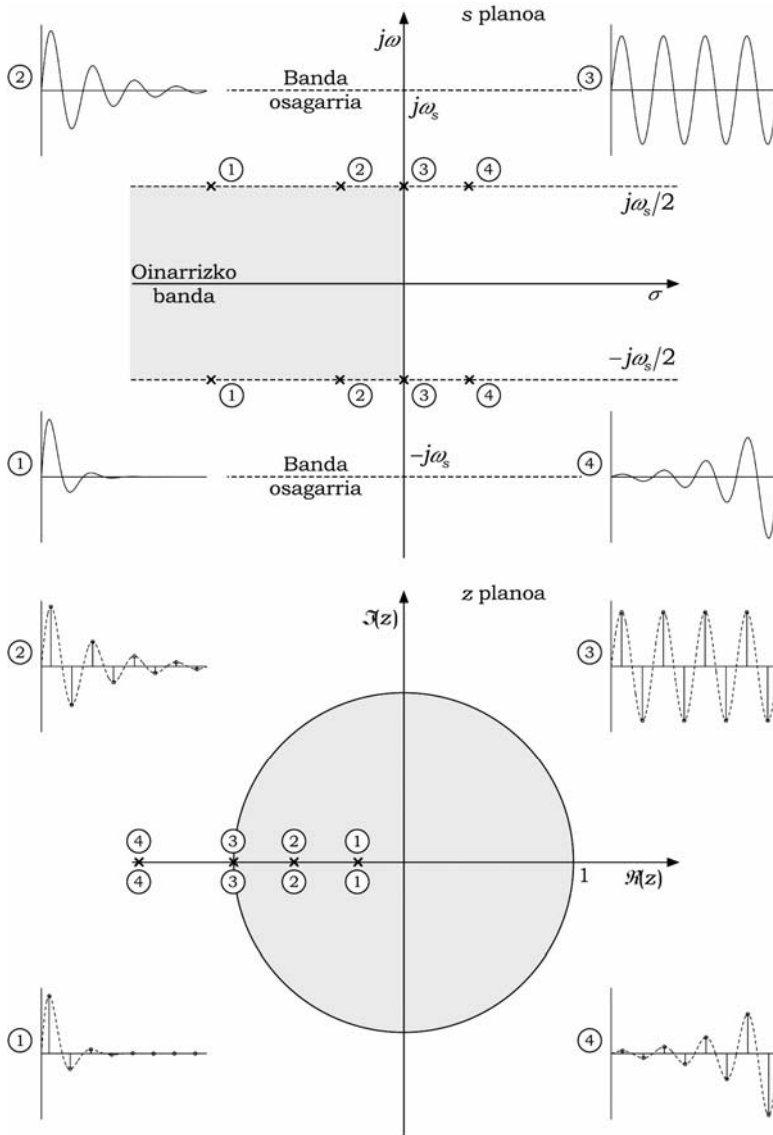
4.7 irudian, s planoko oinarritzko bandako $G^*(j)$ funtzioaren polo konplexu konjugatuen taldea agertzen da, z planoan dituzten baliokideekin batera. Aldi berean, sistema horien erantzunak ere agertzen dira sarrera gisa pultsu unitarioa erabiltzen denean.



4.7 irudia. s planoko oinarritzko bandan kokatutako hainbat poloren kokalekua z planoan.

4.8 irudian, s planoko oinarritzko bandako mugan agertzen diren poloen kasua islatzen da. s planoko $s = -\sigma \pm j\omega_s/2$ poloek z planoan dituzten baliokideak hauek dira:

$$\tilde{z} = e^{-\sigma T} e^{\pm j\omega_s T/2} = e^{-\sigma T} \angle 180^\circ = -e^{-\sigma T}$$



4.8 irudia. s planoko oinarritzko bandaren mugetan kokatutako hainbat poloen kokalekua z planoan.

s planoaren oinarritzko bandako mugetan agertzen diren poloak, hain zuzen, $\mathbb{C}$ planoaren ardatz errearen ezker aldeko puntu berean kokatzen dira. s planoko moteldutako maiztasuna laginketa-maiztasunaren erdia da beti, eta, ondorioz, irteerako pultsuen segidak periodo-erdi bakoitzeko laginketa aurkezten du, lagin positiboak eta negatiboak lortuz. 4.8 irudian kasurik aldekoena aurkeztu den arren —irteeraren maximo eta minimoak laginketa-uneetan gertatzen direnekoa, alegia—, aipatu beharra dago kasurik aurkakoenean laginketa-uneak irteera zero denean suertatzea ere gerta litekeela.

s planoak $\mathbb{C}$ plano bihurtzen denean lortzen diren emaitzak 4.1 taulan daude jasota.

4.1 taula. s eta z planoetako poloen konfigurazioak eta erantzunean duten eragina.

$C^*(s)$ funtzioaren poloen kokalekua s planoko oinarritzko bandan	$C(z)$ funtzioaren poloen kokalekua z planoan	$c^*(t)$ irteeraren portaera iragankorra
Poloak s planoaren ezker aldean	Poloak zirkulu unitarioaren barnean z planoan	Erantzun egonkorra
Poloak s planoaren eskuinaldean	Poloak zirkulu unitariotik kanpo z planoan	Erantzun ezegonkorra
Poloak s planoko ardatz irudikariaren gainean	Poloak zirkunferentzia unitarioaren gainean z planoan	Anplitude konstanteko irteera oszilakorra
Polo konplexu konjugatuak s planoan	Polo konplexu konjugatuak z planoan	Irteera oszilakorra, gorakorra edo beherakorra
Polo konplexu konjugatuak s planoko banden mugetan	Polo bikoitzak z planoko ardatz errearen ezker aldean	Sekuentzia handituz edo txikiagotuz, magnitude positibo eta negatiboak txandakatzen ditu
Poloak s planoko ardatz errean	Poloak z planoko ardatz erreal positiboan	Irteera esponentziala, handituz edo txikiagotuz

4.4 SISTEMA DISKRETUEN ERANTZUN FREKUENTZIALA

Erantzun frekuentzialeko metodoak oso baliagarriak dira sistema jarraituen analisia eta kontrolaren diseinua egitean. Orain, $G(z)$ transferentzia-funtzioen bitartez adierazitako sistema diskretuen kasua aztertuko dugu.

Sistema baten erantzun frekuentzialarekin adierazten da sistema horrek sarre-ra sinusoidal baten aurrean izango duen egoera iraunkorreko erantzuna. Sistema lineal jarraitu bati sarrera sinusoidala aplikatuz gero, maiztasun bera duen irteera izango du; magnitudea eta faseko angelua baino ez dira aldatuko. Bi aldagai horiek maiztasunarekin aldatzen dira, eta sistemaren erantzun frekuentziala definitzen dute.

Sistema diskretuen erantzun frekuentziala aztertzean, hurrengo bi ezaugarri hauek aipatu behar dira:

- a) ω maiztasuna $\omega/2$ baino handiagoa egiten bada, sarrerako laginketak ez du zeharo definituko sarrerako $a\sin(\omega t)$ seinalea.
- b) $G(z)$ -ren irteera pultsuen segida da, eta harmonikoen espektro infinitua eragiten du.

4.2 atalean, z planoko egonkortasunari buruzko analisia egitean, transformazio bilinealaren erabilera aztertu dugu. Adibidez, $\mathcal{W}$ transformazioak z planoaren beste plano konplexu batean transformatzen du; ondorioz, z planoko zirkulu unitarioa w planoaren ezkerreko zati bihurtzen da, eta Routh-Hurwitz irizpidea erabili ahal da.

Kontrol-sistema jarraituen analisia egitean, s planoaren erabilerak erantzun frekuentzialeko metodo estandarren aplikazioa ahalbidetzen du, eta metodo berak w planoan baliagarriak izatea espero da. Transformazioaren bitartez, bi planoetako puntuen arteko erlazioa adierazten da. 4.3 irudian, bi planoetako ardatz irudikarien arteko baliokidetasun partziala behintzat ikus daiteke. s planoko $j\omega_s/4$ kokalekuan dagoen ② puntua z planoko $j1,0$ kokalekuan dagoen ② puntuan eraldatzen da. Dena den, transformazioa laginketa-maiztasunarekin aldatzen da.

Planoen arteko transformazio hori aztertzeko, w planotik abiatuko da analisia.

$$\tilde{x} = e^{sT} = \frac{1+w}{1-w} \quad (4.10)$$

non $T = 2\pi/\omega_s$ laginketa-periodoa eta ω_s laginketa-maiztasuna (rad/s) baitira. (4.10) adierazpena alderantziz jarriz gero,

$$w = \frac{\tilde{x} - 1}{\tilde{x} + 1} = \frac{e^{sT} - 1}{e^{sT} + 1} = \frac{e^{sT/2} - e^{-sT/2}}{e^{sT/2} + e^{-sT/2}} = \tanh(sT/2) \quad (4.11)$$

Bestalde, s nahiz w planoetako $s = \sigma + j\omega$ eta $w = \rho + j\eta$ puntuak, edozein, hartuz gero, haiei dagozkien erantzun frekuentzialak $s = j\omega$ eta $w = j\eta$ eginez ondorioztatuko ditugu. Horrenbestez, (4.11) ekuaziotik,

$$\therefore j\eta = \tanh(j\omega T/2) = j \tan(\omega T/2) \quad (4.12)$$

eta

$$\therefore \eta = \tan(\omega T/2) = \tan\left(\pi \frac{\omega}{\omega_s}\right) \quad (4.13)$$

ateratzen da, eta transformazioan laginketa-maiztasunak duen eragina ikusten da. Horretaz gain,

$$\omega T/2 \rightarrow 0; \tan(\omega T/2) \rightarrow \omega T/2$$

Horrenbestez, T laginketa-periodoa nahiko txikia bada, $T \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow \omega T/2$, eta w planoan definituriko 'itxurazko' maiztasuna izango da η . Itxurazko maiztasun hori laginketa-periodoarekiko independente izatea interesgarria litzateke, $T \rightarrow 0$; $\eta \rightarrow \omega$ gertatzeko.

Horiek horrela, η maiztasuna honela birdefinituz gero:

$$\eta \triangleq \frac{2}{T} \tan(\omega T/2) \quad (4.14)$$

oraingoa, $T \rightarrow 0$; $\eta \rightarrow \omega$ beteko da. Hala,

$$w \triangleq j\eta = j \frac{2}{T} \tan(\omega T/2) \quad (4.15)$$

eta honako hau lortzen da:

$$w = \rho + j\eta = \frac{2}{T} \tanh(sT/2) = \quad (4.16)$$

$$= \frac{2}{T} \frac{e^{sT} - 1}{e^{sT} + 1} \quad (4.17)$$

Ondorioz,

$$\therefore w \triangleq \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (4.18)$$

Aurrerago ikusiko dugunez, honela aurkez daiteke (4.10) ekuazioko $z = e^{sT}$ transformazioa, Padé-ren lehen ordenako hurbilketa edo Tustin-en arau gisa ezagutzen den hurbilketa:

$$z = \frac{1 + Ts/2}{1 - Ts/2} \quad (4.19)$$

eta, ondorioz,

$$s = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (4.20)$$

(4.18) eta (4.20) ekuazioak konparatuz, ikus daiteke transformazio bilinealak w eta s planoen arteko puntuen erlazioa —hobea T -ren balio txikientzat— definitzen duela. Horrek, noski, ω eta η maiztasunen arteko erlazioa ere adierazten du.

4.2 adibidea

4.9 irudiko sistemaren erantzun frekuentziala aztertu nahi dugu, $T=1/15$ segundo eta $T=1/3$ segundo denean,

$$G(s) = \frac{1,8}{1 + 0,2s}$$

izanik.



4.9 irudia. Sistema diskretua.

Kontrol-sistema digital gehienetan, $G(s)$ transferentzia-funtzioaren aurretik lagingailua egongo da, eta han aplikatuko da kontrol-algoritmoaren irteera. Eskuarki, lagingailu hori zero ordenako euskailu batez adierazten da, 4.10 irudian ageri den bezala.



4.10 irudia. 4.9 irudiko sistema diskretuaren aurkezpen baliokidea.

Beraz, $\mathcal{W}$ transformatua lortzeko lehen urratsa da sistema osoaren transferentzia-funtzioa ezartzea.

$$G'(s) = G_{H_0}(s)G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{1,8}{1 + 0,2s}$$

Ondoren, sistema osoaren $\mathcal{Z}$ transformatua aurkitu beharko da.

$$\begin{aligned} G'(\mathcal{Z}) &= \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{1,8}{1 + 0,2s} \right] = \\ &= (1 - \mathcal{Z}^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1,8}{s(1 + 0,2s)} \right] \end{aligned}$$

Eta beste era batera idatziz gero,

$$G'(\mathcal{Z}) = 1,8(1 - \mathcal{Z}^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{5}{s(s + 5)} \right]$$

Z transformatuen taulak erabiliz,

$$\begin{aligned} G'(\tilde{z}) &= 1,8(1 - \tilde{z}^{-1}) \frac{\tilde{z}(1 - e^{-5T})}{(\tilde{z} - 1)(\tilde{z} - e^{-5T})} = \\ &= 1,8 \frac{1 - e^{-5T}}{\tilde{z} - e^{-5T}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Bestalde, (4.18) ekuaziotik hau ondorioztatzen da:

$$\tilde{z} = \frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2} \quad (4.22)$$

eta, horrenbestez,

$$G'(w) = \frac{1,8(1 - e^{-5T})}{\frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2} - e^{-5T}} = \frac{1,8(1 - e^{-5T})(1 - Tw/2)}{1 + Tw/2 - e^{-5T}(1 - Tw/2)}$$

$T = 1/15$ segundo denean,

$$G'(w) = 1,8 \frac{1 - w/30}{1 + w/4,9542} = 1,8 \frac{1 - 0,0333w}{1 + 0,2018w}$$

eta $T = 1/3$ denean, berriz,

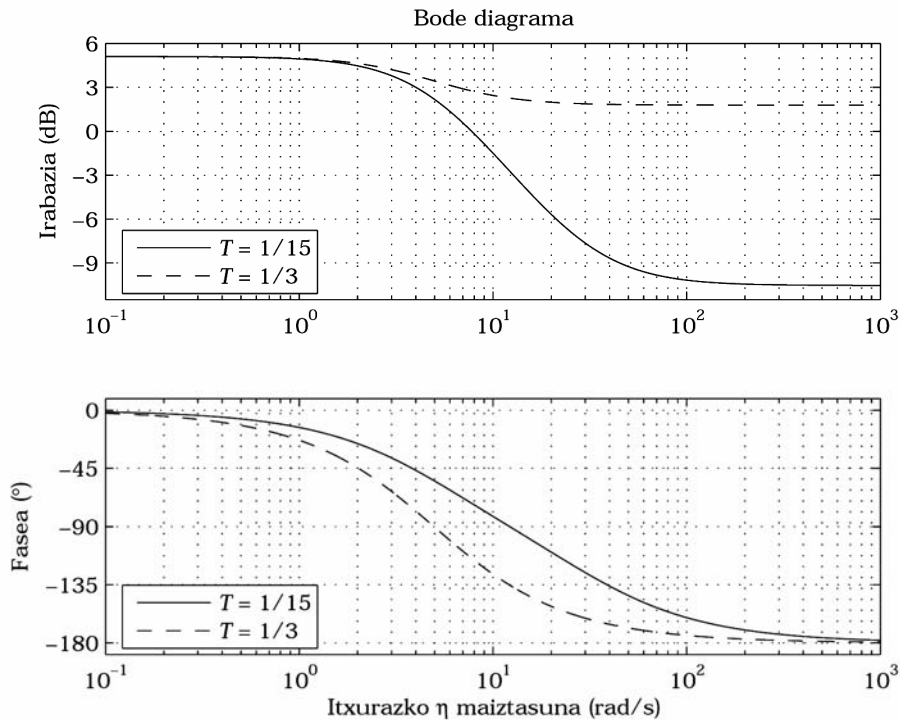
$$G'(w) = 1,8 \frac{1 - w/6}{1 + w/4,0936} = 1,8 \frac{1 - 0,1667w}{1 + 0,2443w}$$

Behin w planoko transformatuak lortutakoan, ondorio hauek atera daitezke:

- w planoko transformazioa erabiliz, transferentzia-funtzioko irabaziari konstante eusten zaio, 1,8 balioarekin.
- w eta s planoetako poloak ia berdinak dira, eta, zenbat eta laginketa-periodo txikiagoa erabili, hainbat eta hurbilago egongo dira elkarrengandik.

- c) s planoan ez zegoen zeroa agertzen da w planoan. Normala da zero bat edo bi agertzea; lagingailu-euskailuaren eraginez sortzen dira. Zero berri horien balioak laginketa-periodoari lotuta daude.
- d) Agertu den zeroa w planoaren eskuinaldean egoteak garrantzi handia du, transferentzia-funtzioa fase ez-minimokoa izango delako.

4.11 irudia, hortaz, w planoan gertatzen den erantzun frekuentzialaren Bode diagrama da, eta $T = 1/15$ eta $T = 1/3$ segundoetako laginketa-periodoen grafikoak adierazten ditu.



4.11 irudia. $G(w)$ transferentzia-funtzioaren Bode diagrama.

Bode diagrama aztertuz defini daiteke w planoan sortu den fase ez-minimoko transferentzia-funtzioaren irabazi-tartea. Lortzen den diagrama logaritmikoa poloa eta zeroa dituen sistemaren ohiko diagrama bada ere, goi-maiztasunetan

irabazia konstante mantentzeaz gain, fasearen balioa -180° -koa denez gero, irabazi-tartea defini daiteke maiztasun horietan.

$T = 1/15$ segundo denean, sistema egonkorra da eta 10,5 dB-eko irabazi-tartea du —irabazi absolutua = 3,35—. $T = 1/3$ segundo denean, berriz, sistema ezeگونkorra da eta $-1,8$ dB-eko irabazi-tartea du —irabazi absolutua = 0,813—.

4.12 irudiko Nyquist diagrama eginez gero ikus daiteke puntu kritikoa inguratzen dela laginketa-periodoa handitzen doan heinean.

Laburtuz, w planoko erantzun frekuentzuala aztertuz ikusten da jatorrian zeharo egonkorra zen sistema ezeگونkor bihurtzeko daitekeela, lagingailu-euskailuaren sarreragatik, irabazi handia izateagatik edota laginketa-periodo handiegia erabiltzeagatik. Aipatu den transformazio bilineala erabiliz, jatorrizko s planoaren ezaugarri asko mantentzen dira, eta, zenbat eta laginketa-maiztasun handiagoa erabili, orduan eta baliokidetasun hobea lortzen da s eta w planoen artean. Beraz, ohiko analisi frekuentzialeko metodoak w planoan ere erabil daitezke.

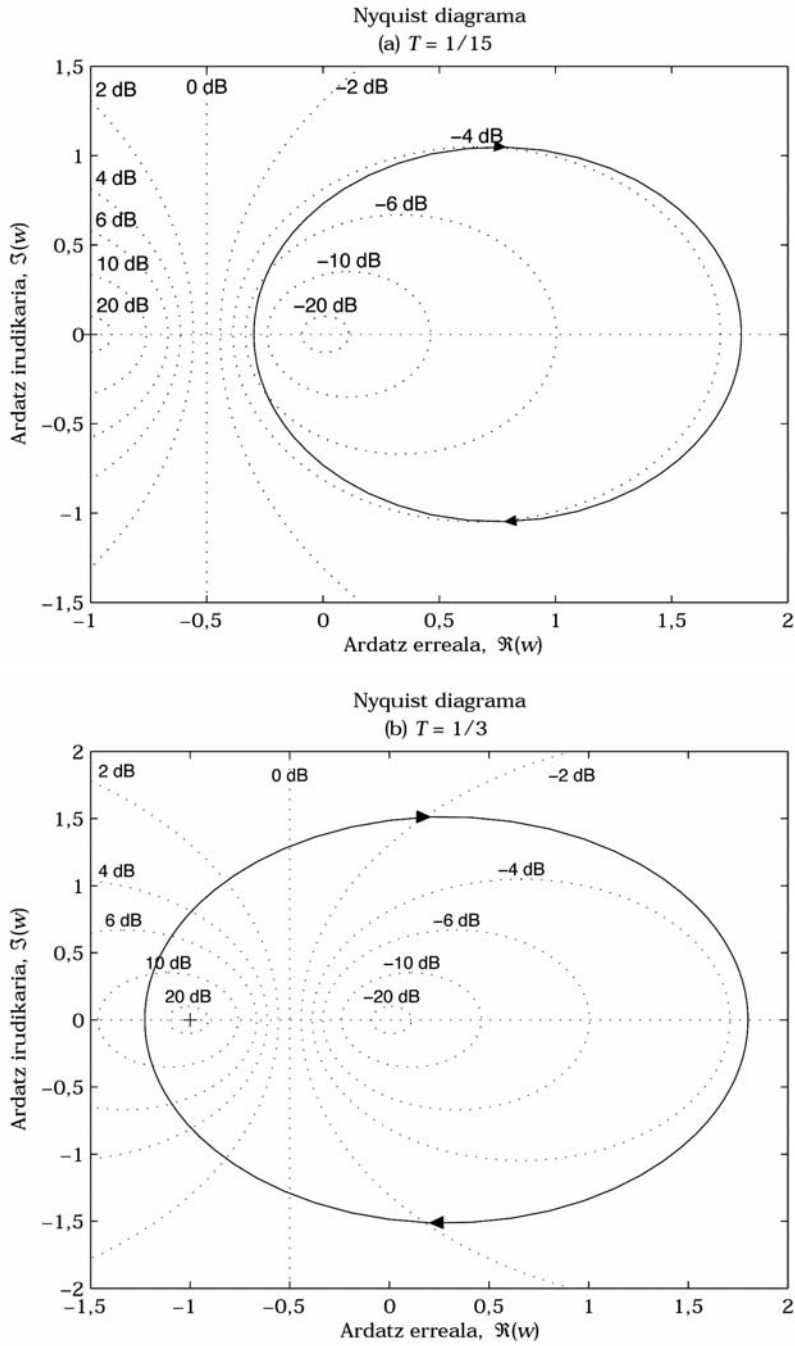
4.3 adibidea

Aztertu 4.2 adibideko sistemaren maiztasun-erantzuna zuzenean z planoan, w planoan egin beharrean.

Horretarako, abiatu (4.21) transferentzia-funtziotik, eta $z = e^{sT}$ dela kontuan izanik,

$$G^*(s) = 1,8 \frac{1 - e^{-5T}}{e^{sT} - e^{-5T}} \quad (4.23)$$

adierazpena lortzen da. Bistakoa denez, transferentzia-funtzio arrazionala ez duen (4.23) bezalako sistema baten Bode diagrama hurbildua —asintotikoa, alegia— ezin da aurkeztu traza logaritmikoen metodo sistematiko ezaguna aplikatuz, eta, ondorioz, maiztasun-erantzunaren funtsezko kontzeptuetara jo beharra dago.



4.12 irudia. $G'(w)$ -ren Nyquist diagrama.

Horiek horrela, sistema jarraituekin egiten den bezala, erantzun frekuentziala ondorioztatzeko, (4.23) transferentzia-funtzioari Fourierren transformatua aplikatzen zaio, $s = j\omega$ eginez. Horrenbestez,

$$G^*(j\omega) = 1,8 \frac{1 - e^{-5T}}{e^{j\omega T} - e^{-5T}} = 1,8 \frac{1 - e^{-5T}}{\cos \omega T - e^{-5T} + j \sin \omega T} \quad (4.24)$$

eta Bode diagraman dB-etan aurkeztu beharreko irabaziaren kurbak ω maiztasunaren mendeko adierazpen honi jarraitzen dio:

$$20 \log |G^*(j\omega)| = 20 \log \left[\frac{1,8(1 - e^{-5T})}{\sqrt{(\cos \omega T - e^{-5T})^2 + (\sin \omega T)^2}} \right] \quad (4.25)$$

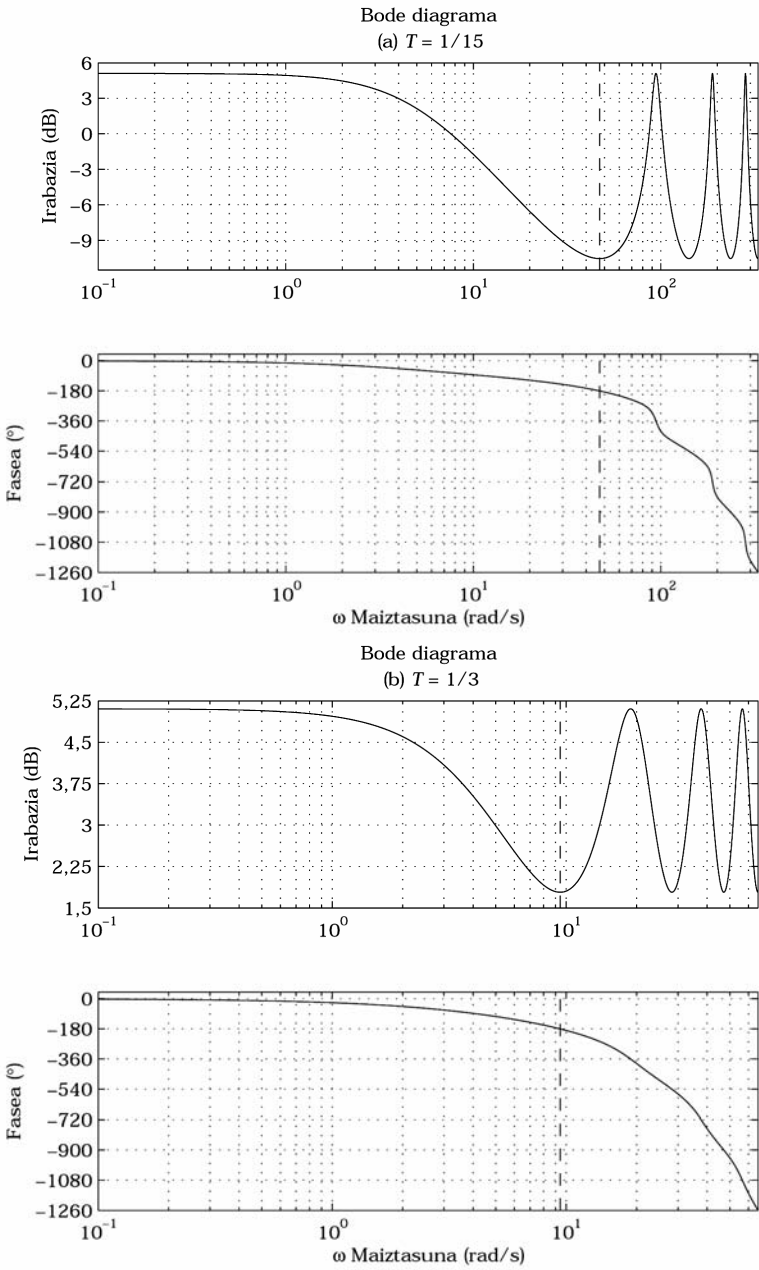
Fasearen kurbari dagokion adierazpen analitikoa, berriz, honako hau dela ondorioztatzen da:

$$\arg[G^*(j\omega)] = -\arctan \left(\frac{\sin \omega T}{\cos \omega T - e^{-5T}} \right) \quad (4.26)$$

(4.25) eta (4.26) adierazpenak ω -ren balio-tarte zabal batentzat grafikoki aurkeztuz gero, 4.13(a) — $T = 1/15$ — eta 4.13(b) — $T = 1/3$ — irudietako Bode diagramak lortzen dira. 2. kapituluari adierazitakoaren ildotik, irabaziaren diagrama biek agerian uzten dute $G'(z)$ transferentzia-funtzio diskretuaz aurkeztzen den sistema laginduaren erantzun frekuentziala periodikoa dela, maiztasunaren eskala logaritmikoak simetria zertxobait ezkutatzen duen arren. Horretaz gain, 4.13(a) eta (b) irudietan ageri diren lerro etenez osatutako linea bertikalak $\omega_s/2$ maiztasunari dagozkiola jakinik, periodoa ω_s laginketa-maiztasunarekin bat datorrela ere frogatzen da.

Fasearen periodikotasuna hautemateko, demagun fasearen kurba ω_s zabalerako tarteetan banatzen dela. Horietako edozein tarteren barruko fasearen balio bakoitzari tartearen hasierakoa kenduz gero, tarte horren baitan gehitutako desfasearen kurba lortzen da. Kontua da azken kurba hori berdin-berdina dela aipatutako tarte guztientzat. Periodikotasun hori, ordea, ez da irabaziaren diagraman islatzen dena bezain agerikoa; izan ere, fasearen diagrama osatzean, periodo

jakin baten baitan gehitutako desfaseari aurreko periodoaren bukaeran pilatutakoa eransten zaio.



4.13 irudia. $G'(z)$ -ren Bode diagrama.

Ondorioz, sistema laginduen erantzun frekuentzialak duen periodikotasun-propietate hori dela eta, gehienetan, sistema diskretuen Bode diagrama $\omega_s/2$ maiztasunetik behera besterik ez da marrazten.

4.13 irudiko $G'(z)$ -ren Bode diagrametan $\omega_s/2$ maiztasunetik behera biltzen den informazioa eta 4.11 irudiko $G'(w)$ -ren Bode diagrametan jasotakoa balioki-deak dira. Beste hitz batzuetan esanda, $G'(z)$ -ren Bode diagramak 0 eta $\omega_s/2$ arteko edozein ω maiztasunetan dituen irabazia eta fasea bat datoz $G'(w)$ -renak itxurazko η maiztasunean aurkezten dituenarekin, baldin eta, (4.14) adierazpenaren arabera,

$$\eta = \frac{2}{T} \tan(\omega T/2) \quad (4.27)$$

bada. Ondorioz, esate baterako, $G'(z)$ eta $G'(w)$ sistemei dagozkien Bode diagramak fase- eta irabazi-tarte berdin-berdinak dituzte. Fase- eta irabazi-tarte horiek kalkulatzeko diren benetako ω eta itxurazko η maiztasunak, ordea, ez datoz bat; (4.27) adierazpenaz erlazionaturik daude.

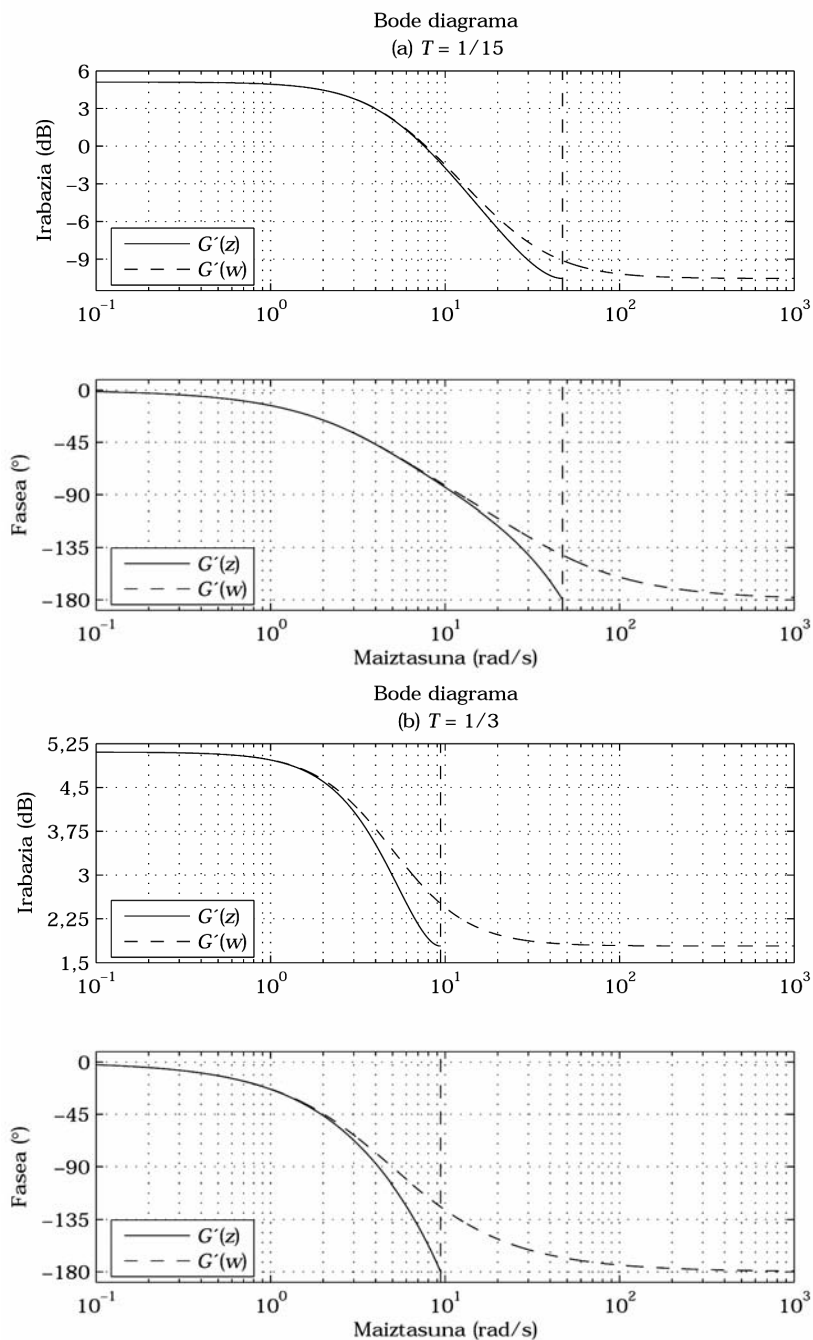
Horrenbestez, esan daiteke $G'(w)$ -ren Bode diagrama (4.27) erlazio ez-linealari jarraituz horizontalki deformatutako $G'(z)$ -ren diagrama baino ez dela. Hala, $\omega = 0$ eta $\omega = \omega_s/2$ arteko $G'(z)$ -ren Bode diagrama $\eta = 0$ baliotik $\eta = +\infty$ balio arte luzatzen da $G'(w)$ -ren kasuan; izan ere,

$$\omega = 0 \Rightarrow \eta = \frac{2}{T} \tan(0) = 0$$

eta

$$\omega = \omega_s/2 = \pi/T \Rightarrow \eta = \frac{2}{T} \tan(\pi/2) = +\infty$$

4.11 irudiko Bode diagramei 4.13 irudikoak gainjarriz gero, 4.14 irudia lortzen da. Periodikotasun-propietatea dela eta, bertan, $G'(z)$ -ri dagozkion Bode diagramak $\omega = \omega_s/2$ maiztasuna arte besterik ez dira aurkeztu. 4.14(a) nahiz (b) irudiei erreparatuz, agerian jartzen da $G'(w)$ -ren Bode diagramak horizontalki deformatutako $G'(z)$ -ren diagramatzat kontsidera daitezkeen ideia.



4.14 irudia. $G'(z)$ eta $G'(w)$ -ri dagozkien Bode diagramen arteko konparaketa.

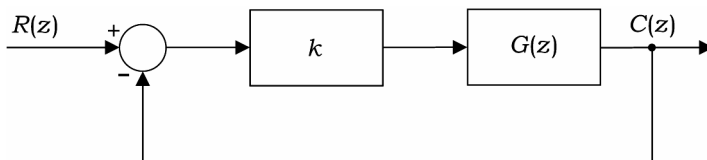
Gainera, espero zen bezala, behe-maiztasunetan, $G'(z)$ eta $G'(w)$ -ri dagozkien Bode diagramak ia bat datozela ere ikus daiteke; izan ere, ωT -ren —edo ω/ω_s -ren— balio txikientzat, $\tan(\omega T/2) \cong \omega T/2$ da, eta, ondorioz, $\eta \cong \omega$, eta (4.27) adierazpenak eragindako maiztasunen deformazioa apenas nabaritzen da.

Laburtuz, $G'(w)$ -ren Bode diagrama ezagutzen bada, ω maiztasun bati, edozeini, dagokion benetako erantzun frekuentziala itxurazko eta benetako maiztasunak erlazionatzen dituen (4.27) ekuazioa kontsideratuz ondoriozta daiteke. Eta erantzun frekuentziala w planotik abiatuz aztertzearen abantailak nabarmenak dira. Batetik, w planoan transferentzia-funtzio arrazionalak lortzen direnez, Bode diagrama asintotikoa eraiki daiteke sistema jarraituetan aplikatzen den traza logaritmikoen metodo bera erabiliz. Bestetik, arrazoi horrexegatik, sistema jarraituetan aplikatu ohi diren maiztasunaren arloko konpentsazio-metodoak inolako aldaketarik gabe jarrai daitezke w planoan.

4.5 ERROEN LEKU GEOMETRIKOAREN DIAGRAMA SISTEMA DISKRETUETAN

Demagun 4.15 irudiko sistema aztertu nahi dela. Sistemaren begizta itxiko poloak k -ren balioaren arabera aldatu egiten dira, eta erroen leku geometrikoaren diagrama polo horiek z planoan osatzen duten leku geometrikoa besterik ez da izango.

Argi dago sistema erabilgarri baten poloek zirkulu unitarioaren barnean egon behar dutela sistema egonkorra izan dadin. Gainera, sistemaren erantzunak hainbat ezaugarri bete behar ditu, maiztasun- eta moteltze-irizpideei jarraituz, eta poloen kokalekuak zirkulu unitarioaren barnean zeharo definituta geratuko dira.



4.15 irudia. Erroen leku geometrikoaren metodoa aztertzeko erabiltzen den sistema. k -ren balioa diseinuko aldagaitzat hartzen da.

Azkenik, laginketa-periodo egokiaren hautaketak ere eragina izango du sistemaren erantzunean, eta alderdi hori ere sistemaren poloek z planoan izango duten kokaleku gisa uler daiteke.

Guzti horiek kontuan hartuz, sistema diskretuen erroen leku geometrikoaren diagrama egitean, gogoratu behar da begizta itxiko sistema diskretuen aljebrak era honetako egiturak dituzten ekuazio karakteristikoetara daramala:

$$1 + G(z)H(z); \quad 1 + GH(z); \quad \text{etab.} \tag{4.28}$$

Dena den, erabiliko den egitura orokorra $1 + P(z)$ formakoa izango da — $P(z)$ begizta irekiko transferentzia-funtzioa da—; hau da, begizta barnean dauden lagingailuek sistemari ematen dioten egitura. Horrenbestez, z planoan lortzen diren ekuazioek itxura hau izango dute:

$$P(z) = -1 \tag{4.29}$$

eta s planoan egiten den bezala, erroen leku geometrikoaren diagramaren analisia egin daiteke. 4.2 taulan ikus daitekeenez, diagrama osatzeko arauak berak dira; ezberdintasun bakarra egonkortasun-mugaren definizioan dago. s planoan egonkortasun-muga ardatz irudikaria da; z planoan, berriz, zirkunferentzia unitarioa. z planoan sistema bat ezegonkorra izango da, baldin eta diagramaren adarretakoren bat zirkulu unitariotik erabat kanpo badago.

4.2 taula. Erroen leku geometrikoaren diagrama eraikitzeke arauak.

(1) Simetria	Koefiziente konstanteko transferentzia-funtzioei dagozkien erroen leku geometrikoaren diagramak simetrikoak dira z planoko ardatz erreala-errekiko.
(2) Adar kopurua	Adar kopurua = n_z , $n_z > n_p$ denean Adar kopurua = n_p , $n_p > n_z$ denean non n_p $P(z)$ funtzioaren polo kopurua baita, eta n_z $P(z)$ funtzioaren zero kopurua baita.
(3) Hasiera-puntuak ($k = 0$)	Erroen leku geometrikoaren hasiera-puntuak ($k = 0$), $P(z)$ funtzioaren poloak dira.

4.2 taula. Erroen leku geometrikoaren diagrama eraikitze arauak.
(Jarraipena)

(4) Bukaera-puntuak ($k = \infty$)	Diagramako bukaera-puntuak ($k = \infty$), $P(z)$ funtzioaren zeroak dira. $n_p > n_z$ denean, gainerako bukaera-puntuak infinituan daude.
(5) Ardatz errearen gainean dagoen diagrama	z planoko ardatz errearen puntu bat diagramakoa izango da, baldin eta puntu horretatik eskuinaldera dagoen polo eta zero kopurua bikoitia ez bada.
(6) Diagramako asintotak	$n_p > n_z$ denean, diagramako $n_p - n_z$ adar infinitura doaz asintota batzuei jarraituz. Asintota horiek ardatz errearekin osatzen dituzten angeluak hauek dira: $\theta_n = \frac{(2n+1)\pi}{n_p - n_z}, \text{ non } n = 0, 1, 2, 3 \dots n_p - n_z - 1 \text{ baita.}$
(7) Asintoten gurutzatze-puntua	Asintotek puntu honetan gurutzatzen dute ardatz erreala: $\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{j=1}^{n_z} z_j}{n_p - n_z}$ non p_i ($i = 1, 2, 3 \dots n_p$) $P(z)$ funtzioaren poloak baitira, eta z_j ($j = 1, 2, 3 \dots n_z$) $P(z)$ funtzioaren zeroak baitira.
(8) Banatze- eta elkartze-puntuak	Erroen leku geometrikoaren banatze- eta elkartze-puntuak $\frac{dk}{dz} = 0$ ekuazioako erroek zehazten dituzte.
(9) Irteerako eta sarrerako angeluak	Diagramak polo/zero konplexu batetik/batera irtetea/iristea horizontalarekiko osatzen duen angelua lortzeko, polo/zero horretatik oso hurbil dagoen z_0 puntua hartu behar da, eta horri ekuazio hau aplikatu: $\sum_{j=1}^{n_z} \arg[z_0 - z_j] - \sum_{i=1}^{n_p} \arg[z_0 - p_i] = -(2n+1)\pi$

4.2 taula. Erroen leku geometrikoaren diagrama eraikitze arauak.
(Jarraipena)

(10) Diagramak ardatz irudikaria gurutzatzen duen puntuak	Diagramak ardatz irudikaria gurutzatzen duen puntuak $1 + P(z) = 0$ ekuazioari Routh-Hurwitz metodoa zuzenean z -n aplikatuz lortzen dira.
(11) k-ren balioa diagrama erabiliz	Erroen leku geometrikoaren diagramako z_0 puntu batean, edozeinetan, k -ren balioa kalkulatzeko, adierazpen hau aplikatu daiteke: $k = \frac{\prod_{i=1}^{n_p} z_0 - p_i }{\prod_{j=1}^{n_z} z_0 - z_j }$

4.4 adibidea

Demagun 4.2 adibideko sistema aztertu nahi dugula. Kontrol-begizta berrelikadura unitarioz itxiz gero, begizta itxiko transferentzia-funtzio hau izango dugu:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G'(z)}{1 + G'(z)}$$

non $G'(z)$ transferentzia-funtzioa (4.21) ekuazioan definitutakoa baita.

$$G'(\tilde{z}) = 1,8 \frac{1 - e^{-5T}}{\tilde{z} - e^{-5T}} =$$

$$= \frac{k'}{\tilde{z} - e^{-5T}}$$

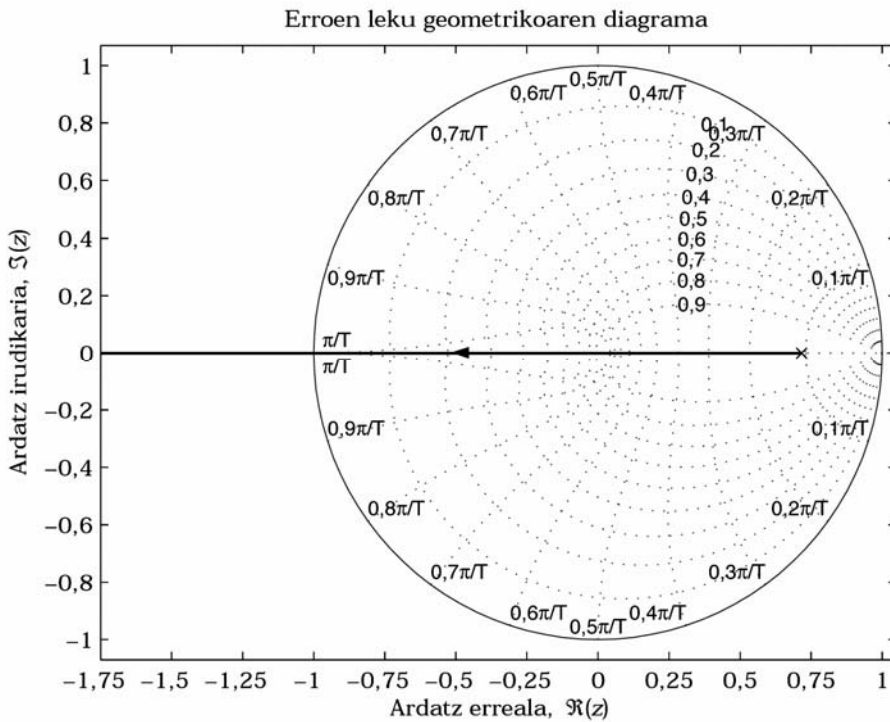
$k' = 1,8(1 - e^{-5T})$ izanik.

$G'(z)$ begizta irekiko transferentzia-funtzioa denez, erroen leku geometrikoaren diagrama egiteko abiapuntu gisa erabiliko dugu. Sistemaren polo bakarraren kokalekua laginketa-abiadurari lotuta dago. Zehazki, z planoaren eskuinaldeko erdian kokaturik dago, $z = e^{-5T}$ puntuan, eta $z = 1$ —abiadura oso handietarako— eta $z = 0$ —abiadura oso txikietarako— artean egon daiteke.

Baldin onartzen bada $T = 1/15$ segundo dela,

$$G'(z) = \frac{k'}{z - e^{-5T}} = \frac{0,5102}{z - 0,7165}$$

eta, z planoan, ardatz errearen gainean, 0,7165 poloaren ezkerraldera dagoen erroen leku geometrikoaren diagrama lortzen da —4.16 irudia—.



4.16 irudia. Sistemaren erroen leku geometrikoaren diagrama.

Bestalde,

$$G'(\mathfrak{z}) = \frac{k}{\mathfrak{z} - 0,7165}$$

baldin bada, begiztaren sentikortasuna k izanik, begizta itxiko transferentzia-funtzio hau lortzen da:

$$\frac{C(\mathfrak{z})}{R(\mathfrak{z})} = \frac{k}{\mathfrak{z} - 0,7165 + k}$$

Egonkortasunaren muga $\mathfrak{z} = -1$ denean suertatzen da, eta, ondorioz, $k = 1,7165$ izango da. Begizta irekiko irabazia, berriz, $k' = 0,5102$ denez, sistema ezegon-kortu ez dadin gehienez sar daitekeen irabazia $1,7165/0,5102 = 3,36$ da.

Balio horrek sistemaren irabazi-tartea adierazten du, eta metodo frekuentzia-lak erabilia lortzen dena bezalakoa da.

4.5 adibidea

$G(s) = \frac{5}{s(s+5)}$ transferentzia-funtzioa eta berrelikadura unitarioa duen sistema aztertu nahi dugu.

Aurretik lagingailu-euskailua baldin badu, honako hau izango da transferentzia-funtzio osoa:

$$\begin{aligned} G'(s) &= G_{H_0}(s)G(s) = \\ &= \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{5}{s(s+5)} \end{aligned}$$

eta horren $\mathcal{Z}$ transformatua, berriz,

$$G'(\mathfrak{z}) = (1 - \mathfrak{z}^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{5}{s^2(s+5)} \right]$$

ebatziz lortzen da.

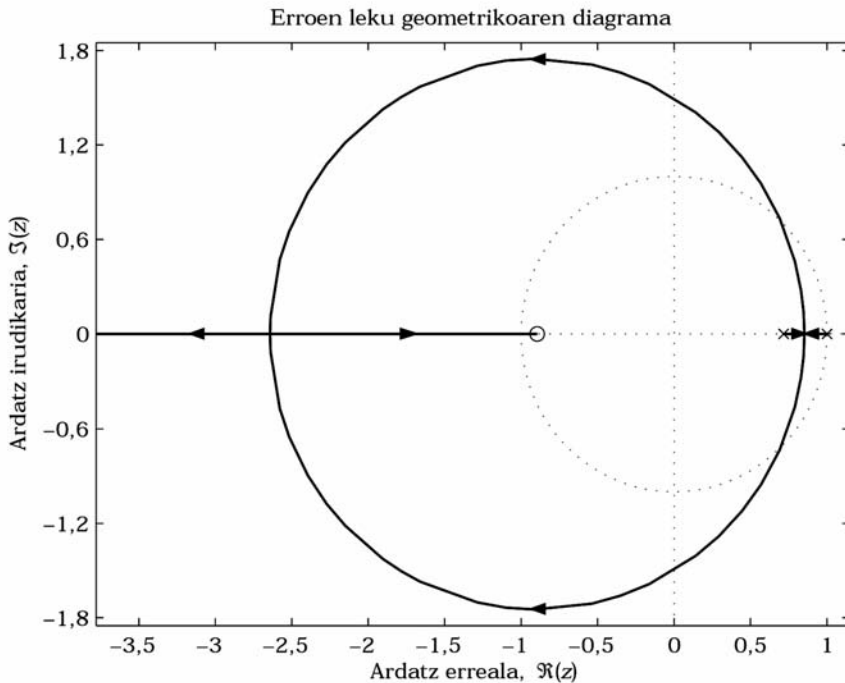
$\mathcal{Z}$ transformatuaren taulak erabiliz,

$$G'(z) = \frac{(5T - 1 + e^{-5T})z + 1 - (1 + 5T)e^{-5T}}{5(z - 1)(z - e^{-5T})}$$

eta $T = 1/15$ segundo dela kontsideratuz gero,

$$G'(z) = \frac{0,009972(z + 0,895)}{(z - 1)(z - 0,7165)}$$

4.17 irudian, sistemaren erroen leku geometrikoaren diagrama erakusten da. Zero bat eta bi polo dituen sistemaren ohiko diagrama da, eta egonkortasun-muga begizta itxiko poloak zirkulu unitariotik kanpo geratzen direnean ondorioztatzen da. Kasu honetan, muga hori begiztaren sentikortasuna $k = 0,317$ denean gertatzen da, eta, begizta irekiko irabazia 0,009972 denez gero, 31,8ko irabazi-tartea lortzen da.



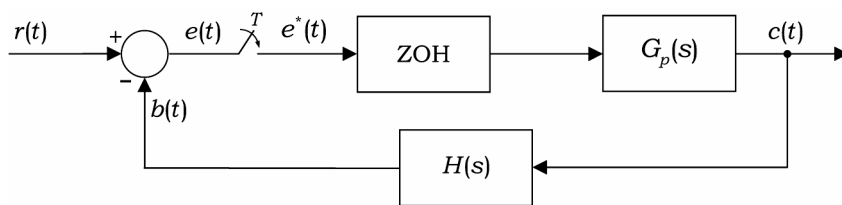
4.17 irudia. Sistemaren erroen leku geometrikoaren diagrama.

4.6 SISTEMA DIGITALEN EGOERA IRAUNKORREKO ERROREAREN ANALISIA

Kontrol-sistema baten errorea hainbat eratan ager daiteke. Eskuarki, ahalik eta azkarren zerora eraman beharreko seinalea izaten da, eta, batzuetan, ez da sarre-rako erreferentziaren eta irteeraren arteko diferentzia gisa definitzen.

Atal honetan egoera iraunkorreko errorearen analisia egiteko erabiliko den bloke-diagramaren egitura 4.18 irudian agertzen da; errore-seinalea, $e(t)$, honela definitzen da:

$$e(t) = r(t) - b(t) \quad (4.30)$$



4.18 irudia. Kontrol-sistema digitala.

Kontrol-sistema diskretu batean, $e(t)$ seinalea definitzea nahiko zaila gertatzen da, eta, oro har, $e^*(t)$ seinale lagindua erabiliko da. Beraz, honako hau da laginketa-uneetan gertatzen den egoera iraunkorreko errorea:

$$e_{ss}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) \quad (4.31)$$

$\mathcal{Z}$ transformatuaz baliatuz, azken balioaren teorema honako formula hau eskaintzen du egoera iraunkorreko errorearen balioa kalkulatzeko:

$$e_{ss}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) \quad (4.32)$$

betiere, baldin eta ziurtatzen bada $(1 - z^{-1})E(z)$ funtzioak z planoko $|z| = 1$ zirkunferentzia unitarioaren gainean edo kanpoaldean polorik ez duela. Horrek esan nahi du begizta itxiko sistema gutxienez asintotikoki egonkorra izango dela.

Sistema jarraitu eta linealak aztertzean, jakina da egoera iraunkorreko errorea aldatu egiten dela sistemari aplikatutako erreferentzia-sarrera eta sistemaren beraren ezaugarriekin. Bestalde, erroreak kalkulatzeko, aipatutako ezaugarriei loturiko errore-konstanteak erabiltzen dira. Atal honetan, frogatuko dugu errore-konstanteak sistema digitaletan ere aplika daitezkeela.

4.18 irudian agertzen den sistemaren erroreari dagokion $\mathcal{Z}$ transformatua hau da:

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + GH(z)} \quad (4.33)$$

eta ekuazio hori (4.32) adierazpenean ordezkatzuz gero, egoera iraunkorreko errorea beste era honetan agertzen da:

$$e_{ss}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + GH(z)} \quad (4.34)$$

Ekuazio horrek adierazten duenez, sistemaren egoera iraunkorreko errorea aldatu egiten da sarrera gisa aplikatutako $R(z)$ seinalearekin eta begizta irekiko $GH(z)$ transferentzia-funtzioarekin. Beraz, ondoren, erabilienak kontsidera daitezkeen hiru sarrera motak aztertuko ditugu: maila erako funtzioa, arrapala era-koa eta funtzio parabolikoa, alegia.

4.6.1 SARRERA GISA MAILA ERAKO FUNTZIOA ERABILITAKOAN LORTUTAKO EGOERA IRAUNKORREKO ERROREA

Demagun 4.18 irudiko kontsigna R magnitudeko maila seinalea dela. Honako hau da $r(t)$ seinalearen $\mathcal{Z}$ transformatua:

$$R(z) = \frac{Rz}{z - 1} \quad (4.35)$$

eta hori (4.34) ekuazioan ordezkatzuz gero,

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{R}{1 + GH(z)} = \frac{R}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)} \quad (4.36)$$

non

$$GH(z) = (1 - z^{-1})z \left[\frac{G_p(s)H(s)}{s} \right] \quad (4.37)$$

baita.

Mailako errore-konstantea honela definitzen bada:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z) \quad (4.38)$$

orduan, honako hau betetzen da:

$$e_{ss}^* = \frac{R}{1 + K_p} \quad (4.39)$$

Beraz, sarrera gisa maila erako seinalea aplikatzen denean egoera iraunkorreko errorea zero izatea nahi bada, K_p mailako errore-konstanteak infinitu izan behar du. Horrek adierazten du $GH(z)$ funtzioak gutxienez polo bat izan behar duela $z = 1$ kokalekuan.

4.6.2 SARRERA GISA ARRAPALA ERAKO FUNTZIOA ERABILITAKOAN LORTUTAKO EGOERA IRAUNKORREKO ERROREA

Sarrera arrapala erakoa denean, $r(t) = R\mathcal{U}(t)$, eta $\mathcal{Z}$ transformatu hau du:

$$R(z) = \frac{RTz}{(z-1)^2} \quad (4.40)$$

Horrenbestez, adierazpen hori (4.34) ekuazioan ordezkatzuz gero,

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{RT}{(z-1)[1 + GH(z)]} = \frac{R}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{T} GH(z)} \quad (4.41)$$

Arrapalako errore-konstantea honela definituz:

$$K_p = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)GH(z) \quad (4.42)$$

(4.41) ekuazioa beste era honetara ager daiteke:

$$e_{ss}^* = \frac{R}{K_p} \quad (4.43)$$

Berriro ere, (4.43) ekuazioa baliagarria izan dadin, ziurtatu behar da limitearen atzetik dagoen funtzioak z planoko $|z| = 1$ zirkunferentzia unitarioaren gainean edo kanpoaldean polorik ez duela.

Gainera, arrapala erako seinale baten aurrean egoera iraunkorreko errorea zero izateko, K_p konstanteak infinitu izan behar du. Ondorioz, $(z-1)GH(z)$ funtzioak gutxienez polo bat izan behar du $z=1$ kokalekuan, edo, beste era batera esanda, $GH(z)$ funtzioak bi polo $z=1$ kokalekuan.

4.6.3 SARRERA GISA FUNTZIO PARABOLIKOA ERABILITAKOAN LORTUTAKO EGOERA IRAUNKORREKO ERROREA

$r(t) = Rt^2 u(t)/2$ sarrera parabolikoaren $\mathcal{Z}$ transformatua hau da:

$$R(z) = \frac{RT^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \quad (4.44)$$

eta, ekuazio hori (4.34) adierazpenean ordezkatzuz gero, egoera iraunkorreko erroreak beste adierazpen hau lortzen da:

$$\begin{aligned} e_{ss}^* &= \frac{T^2}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{R(z+1)}{(z-1)^2 [1 + GH(z)]} = \\ &= \frac{R}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^2}{T^2} GH(z)} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Parabolako errore-konstantea honela definituz:

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 GH(z) \quad (4.46)$$

(4.45) ekuazioa beste honetan eraldatzen da:

$$\ell_{ss}^* = \frac{R}{K_a} \quad (4.47)$$

Aurreko arrazoiketen arabera, sistema digital baten erreferentzia-seinaleak maila, arrapala edo parabola erakoak direnean, sarrera horien ondorioz laginketa-uneetan agertzen den egoera iraunkorreko errorea K_p , K_v eta K_a konstanteen mendekoa da, hurrenez hurren.

Hona hemen errore-konstanteen adierazpenak laburbilduta:

$$\text{Mailako errore-konstantea} \quad K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)$$

$$\text{Arrapalako errore-konstantea} \quad K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)GH(z)$$

$$\text{Parabolako errore-konstantea} \quad K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 GH(z)$$

4.6.4 LAGINKETAK EGOERA IRAUNKORREKO ERROREAN DUEN ERAGINA

Eskuarki, laginketak eragin negatiboa izaten du sistemaren erantzun iraunkorraren eta egonkortasun erlatiboaren gain. Egoera iraunkorreko errorean duen eragina aztertzeko, sistema jarraitu batek berez duen errorea eta sistema horren aurretik lagingailu-euskailua ipinita lortutako sistema digitalak duen errorea konparatzen dira.

Hasteko, 4.18 irudiko sistema hartuko dugu aintzat lagingailu-euskailua kenduta. Bestalde, sistema jarraituen errore-konstanteen honako definizio hauek hartuko ditugu kontuan:

$$\text{Mailako errore-konstantea} \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_p(s)H(s) \quad (4.48)$$

$$\text{Arrapalako errore-konstantea} \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_p(s)H(s) \quad (4.49)$$

$$\text{Parabolako errore-konstantea} \quad K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G_p(s)H(s) \quad (4.50)$$

Gainera, sistema jarraituak sailkatzean, ohikoa da begizta irekiko transferentzia-funtzioa aztertzea eta $s = 0$ puntuko polo kopurua kontuan hartzea. Hau da, $G_p(s)H(s)$ honelakoa dela joko da:

$$G_p(s)H(s) = \frac{K(1+T_a s)(1+T_b s)\dots(1+T_m s)}{s^j(1+T_1 s)(1+T_2 s)\dots(1+T_n s)} \quad (4.51)$$

eta sistemak zero baino polo gehiago dituela kontsideratuko dugu. Ekuazio horretan, T guztiak konstante errealak edo konplexuak dira, zero ez direnak, eta j da *sistemaren tipoa*. Beraz, (4.48), (4.49) eta (4.50) ekuazioetan oinarrituz, esate baterako, hau ondoriozta daiteke: 0 tipoko sistema bateko egoera iraunkorreko errore konstantea izango du maila sarrera aplikatutakoan, eta errore infinitua beste edozein sarrera erabiliz gero. 1 tipoko sistemek ez dute errorerik izango maila sarrera aplikatutakoan; errorea konstantea izango da sarrera arrapala erakoa denean; eta infinitua, sarreraren ordena handiagoa denean. 4.3 taulan laburbiltzen dira sistemen tipok eta haiei dagozkien errore-konstanteak sistema jarraituen kasurako.

4.3 taula. Sistemen tipok eta errore-konstanteak.

Sistemaren tipoa	K_p	K_v	K_a
0	K	0	0
1	∞	K	0
2	∞	∞	K

Sistema digitalen kasuan, K_p nahiz K_a errore-konstanteak T laginketa-periodoaren mendekoak dira. Kontrol-sistema digitalek prozesu jarraituak gobernatu ohi

dituztenez, (4.51) ekuazioko $G_p(s)H(s)$ sistema bera kontsideratuko da, $j = 0, 1$ eta 2 denerako.

4.6.4.1 0 tipoko sistema

0 tipoko sistemetan $j = 0$ da (4.51) ekuazioan; ondorioz,

$$G_p(s)H(s) = \frac{K(1+T_a s)(1+T_b s)\dots(1+T_m s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)\dots(1+T_n s)} \quad (4.52)$$

Azken ekuazio hori (4.37) adierazpenean ordezkatzuz gero,

$$GH(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{K(1+T_a s)(1+T_b s)\dots(1+T_m s)}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)\dots(1+T_n s)} \right] \quad (4.53)$$

Zatiketa partzialen metodoa erabiliz, (4.53) ekuazioa beste era honetara idatz daiteke:

$$\begin{aligned} GH(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{K}{s} + \text{zero ez diren poloei dagozkien gaiak} \right] = \\ &= (1 - z^{-1}) \left(\frac{Kz}{z-1} + \text{zero ez diren poloei dagozkien gaiak} \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Gainera, zero ez diren poloei dagozkien gaiak ez dute $(z-1)$ gairik izendatzailean; hori dela eta, sarrera maila erakoa denean, dagozkion errore-konstantea hau da:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{Kz}{z-1} = K \quad (4.55)$$

Hau da, 0 tipoko prozesuetan eta zero ordenako lagingailu-euskailua erabiltzen denean, maila erako sarrera aplikatuz lortzen den egoera iraunkorreko errorea sistema jarraituaren kasuan lortzen dena bezalakoa da. Beraz, lagingailu-euskailuak ez du eraginik sistema mota horren egoera iraunkorreko portaeran.

(4.54) ekuazioa arrapalako errore-konstantearen definizioan erabiliz gero,

$$K_p = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)GH(z) = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)(1-z^{-1}) \frac{Kz}{z-1} = 0 \quad (4.56)$$

gertatzen da, eta, era berean jokatuz, frogatu daiteke 0 tipoko sistemetan $K_a = 0$ dela.

4.6.4.2 1 tipoko sistema

1 tipoko sistemetan, $j = 1$ da (4.51) ekuazioan; ondorioz,

$$\begin{aligned} GH(z) &= (1-z^{-1})z \left[\frac{K(1+T_a s)(1+T_b s) \dots (1+T_m s)}{s^2(1+T_1 s)(1+T_2 s) \dots (1+T_n s)} \right] = \\ &= (1-z^{-1})z \left[\frac{K}{s^2} + \frac{K_1}{s} + \text{zero ez diren poloei dagozkien gaiak} \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

Orduan, maila sarrerari dagokion errore-konstantea hau izango da:

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{z \rightarrow 1} GH(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \left[\frac{KTz}{(z-1)^2} + \frac{K_1 z}{z-1} + \text{zero ez diren poloei dagozkien gaiak} \right] = \infty \end{aligned} \quad (4.58)$$

eta arrapalako errore-konstantea, berriz,

$$\begin{aligned} K_v &= \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)GH(z) = \\ &= \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)(1-z^{-1}) \left[\frac{KTz}{(z-1)^2} + \frac{K_1 z}{z-1} + \text{zero ez diren poloei dagozkien gaiak} \right] = K \end{aligned} \quad (4.59)$$

Azkenik, arrazoibide berari jarraituz, argi dago $K_a = 0$ dela. Horren ondorioz, 1 tipoko sistemak aurretik lagingailu-euskailua duenean duen egoera iraunkorreko errorea sistema jarraituak duena bezalakoa da.

2 tipoko sistemen kasua aztertuz, ondoriozta daiteke sistema digitalaren errore-konstanteen balioak $K_p = K_v = \infty$ eta $K_a = K$ direla. Horiek horrela,

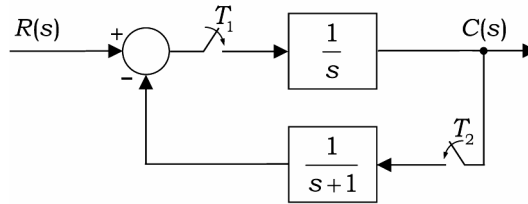
azpiatal honen ondorio nagusia da 4.3 taulan agertzen diren sistema jarraituen erlazioak 4.18 irudiko sistema digitalaren kasuan ere erabil daitezkeela.

4.7 LABURPENA

Kapitulu honetan, sistema diskretuen egonkortasunaren analisia egin dugu, s eta z planoen arteko erlazioak kontuan izanik. Gainera, transformazioak egiteko teknikak landu ditugu, analisi frekuentziala egitearren, Bode diagrama eraiki ahal izateko bereziki. Horretarako, hau da, bai egonkortasuna bai erantzun frekuentziala aztertzeke, w transformazio bilinealaren beharra ikusi dugu. Gero, erroen leku geometrikoaren diagramaren erabilera aztertu dugu z planoan. Aurkezpen grafikorako arauak bat datoz z eta s planoetan, baina egonkortasun-mugak ezberdinak direnez, betebeharrak eta interpretazioak ere ezberdinak izango dira. Amaitzeko, sistema diskretuen egoera iraunkorreko errorearen azterketa sakona egin dugu, eta frogatu dugu sistema jarraituentzat ondorioztatzen diren errore-konstanteak lagingailu-euskailua sartu ostean ere aplikagarriak izaten jarraitzen dutela.

4.8 ARIKETAK

- 4.1 $z = e^{sT}$ transformazio-funtzioa erabiliz, froga ezazu s planoko ξ moteltze-faktore konstanteko leku geometrikoek z planoan espiral logaritmikoak osatzen dituztela.
- 4.2 Egin 4.19 irudian ageri den bloke-diagramaren sinplifikazioa, eta kalkulatu $G(z) = C(z)/R(z)$ transferentzia-funtzio diskretua. $T_1 = T_2 = T$ segundo bada, aztertu sistemaren egonkortasuna T -ren balioaren arabera.



4.19 irudia. Sistema diskretu baten bloke-diagrama.

- 4.3 Satelite baten ibilbidea adierazten duen transferentzia-funtzioa hau da:

$$G(z) = K \frac{z + 1}{(z - 1)^2}$$

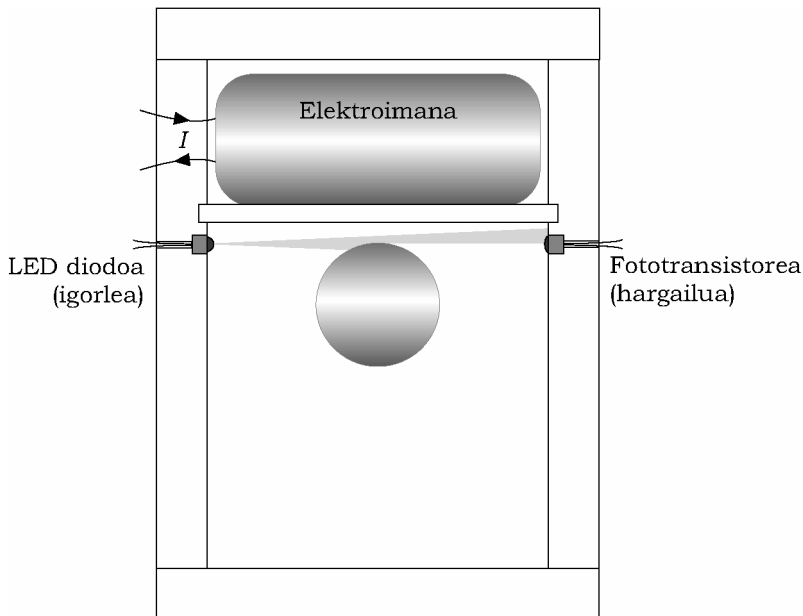
Berrelikadura unitarioa duela jota, marraztu K parametroaren arabera sistemaren erroen leku geometrikoaren diagrama.

- 4.4 4.20 irudiko eskemak adierazten duen bezala, material magnetikoz osatutako masa bat 'lebitatzen' jar daiteke, elektroimanaren korrontea masaren posizioaren funtzioan kontrolatuz (Woodson eta Melcher, 1968).

Mugimenduaren ekuazioa hau da:

$$m\ddot{x} = -mg + f(x, I)$$

eta, hor, elektroimanak bolaren gain eragiten duen indarra da $f(x, I)$. Orekan, indar magnetikoak grabitatearen indarra berdintzen du; eragite-



- 4.5** Aurkez ezazu grafikoki begizta irekiko transferentzia-funtzio digital hau duen sistemaren erroen leku geometrikoaren diagrama, k irabazia aldatzen den heinean:

$$G(z) = \frac{0,2(z+0,8)}{(z-1)(z-0,6)}$$

Berrelikadura unitarioa duela jota, aurki itzazu sistemaren begizta itxiko poloak $k = 0,2$ denean.

- 4.6** Transferentzia-funtzio honen bidez aurkezten den sistema hartzen da kontuan:

$$G(s) = \frac{3(s+10)}{s^2 + 2s + 2}$$

Kalkula ezazu sistema hori begizta itxian egonkorra izango dela ziurtatzeko erabili behar den laginketa-periodoa —jo ezazu berrelikadura unitarioa duela—.

- 4.7** Begizta irekiko transferentzia-funtzio hau duen prozesuak zero ordenako lagigailu-euskailua du aurretik:

$$G(s) = \frac{ke^{-T_1 s}}{1 + T_2 s}$$

$k = 1,63$, $T_1 = 270$ segundo eta $T_2 = 3480$ segundo direla jakinik, marraz ezazu dagokion Bode diagrama eta kalkulatu irabazi- nahiz fase-tartea, $T = 0,01$ segundoko laginketa-periodoa erabiltzen dela onartuz.

- 4.8** Sistema diskretu baten ekuazio karakteristikoaren adierazpena hau da:

$$F(z) = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

$$a_2 = 111,6T^2 + 16,74T - 3$$

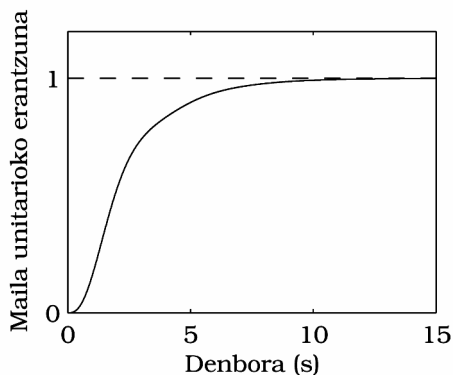
$$a_1 = 3 - 33,48T + 1,395 \cdot 10^{-4} KT^3$$

$$a_0 = 1,395 \cdot 10^{-4} KT^3 + 16,74T - 111,6T^2 - 1$$

non T laginketa-periodoa eta K irabazia baitira. Kalkula itzazu K eta T -ren balio-tarteak, sistema asintotikoki egonkorra izan dadin.

- 4.9** 4.21 irudiko denbora-erantzuna duen sistemaren transferentzia-funtzio zehatza hau da:

$$G(s) = \frac{2}{(s + 0,5)(s^2 + 2s + 4)}$$

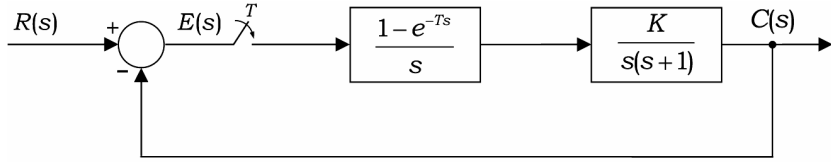


4.21 irudia. Sistema fisiko baten erantzuna.

Denbora-erantzun hori behar bezala aurkezteko moduko laginketa-periodoa hautatu ostean,

- Marraz ezazu sistemaren Bode diagrama digitala eta kalkulatu irabazitarteak.
- Berrelkadura unitarioa erabiltzen dela jota, aurkeztu grafikoki sistema diskretuaren erroen leku geometrikoaren diagrama, eta aurkitu begizta itxiko sistemaren poloak, $k = 10$ den kasurako.

4.10 Demagun 4.22 irudiko sistema dugula.



4.22 irudia. Sistema digitala.

Kalkula ezazu K -ren balioa, $T = 0,1$ segundo eta $T = 1$ segundo denean, lortutako sistema digitala egonkorra izan dadin.

4.11 $G(s) = \frac{1}{1+5s}$ transferentzia-funtzioa duen prozesu baten atzetik, $G_m(s)$ transferentzia-funtzioko neurgailu bat ezartzen da. Neurketak egiteko, bi neurgailu hauek daude eskuragarri:

a) $G_m(s) = e^{-0,1s}$

b) $G_m(s) = \frac{1}{1+s}$

Bode diagramaz baliatuz, eta $T = 0,01$ segundo izanik, azter ezazu sistemaren begizta itxiko egonkortasuna bi kasuetan.

4.12 Berrelikadura unitarioa duen sistema baten transferentzia-funtzioa hau da:

$$G(z) = \frac{0,736(z + 0,716)}{(z - 1)(z - 0,368)}$$

Marraztu Bode diagrama eta kalkulatu irabazi- nahiz fase-tarteak, laginketa-periodoa segundo batekoa dela suposatuz.

4.13 Laginketa-periodoa $0,1$ segundokoa dela kontsideratuz, azter ezazu begizta irekiko

$$G(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z^2-1,1z+0,3)}$$

transferentzia-funtzioa duen begizta itxiko sistemaren egonkortasuna, Bode diagrama eta erroen leku geometrikoaren diagrama erabiliz.

- 4.14** Jatorrizko berrelikadura unitarioko sistema jarraitu hauek aintzat hartuz, azter itzazu haiei dagozkien sistema diskretuen erroen leku geometrikoaren diagramak, ezaugarri ezberdinak frogatzeko asmoz. Jo ezazu kasu guztietan $T = 1$ segundokoa dela.

- a) Egin begizta zuzeneko

$$G(s) = K \frac{s+1}{s^2(s+p_1)}$$

transferentzia-funtzioa duen sistemaren diagramak, $p_1 = 5, 9$ eta 20 denean. Zer ondorio atera daitezke diagrama horietatik?

- b) Aurkeztu begizta zuzeneko

$$G(s) = K \frac{s-1}{s(s+1)[(s+a)^2+4]}$$

transferentzia-funtzioa duen sistemaren diagramak, $a = 0, -1$ eta -2 denean. Azter itzazu bereziki polo konplexuetatik abiatzen diren adarren irteera-angeluak.

- c) Egin begizta zuzeneko

$$G(s) = K \frac{(s+1)^2 + \omega^2}{s(s^2+4)}$$

transferentzia-funtzioko sistemaren diagramak, $\omega = 1$ eta $\omega = 3$ denean. Konpara itzazu lortutako diagramak.

d) Marraztu begizta zuzeneko

$$G(s) = K \frac{s}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

transferentzia-funtzioa duen sistemaren diagrama, eta froga ezazu jatorrian zentratutako $\sqrt{p_1 p_2}$ erradiodun zirkulua osatzen duela. Gauza bera esan al daiteke sistemak ardatz errealeko negatiboan kokaturiko bi polo eta zero bat dituenen?

4.15 Begizta zuzeneko transferentzia-funtzio hau duen sistema jarraitu batek zero ordenako lagin-gailu-euskailua du aurretik:

$$G(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)}$$

- Kalkula ezazu sistema osoaren begizta zuzeneko $G(z)$ transferentzia-funtzio digitala, $T = 0,1$ segundo denean.
- Aurki ezazu aurretik jarri beharreko $D(z) = K$ irabazia, berrelikadura unitarioa izanik, sistema hori egonkortasun-mugara eramateko.
- Froga-errorea metodoa erabiliz, ondoriozta ezazu zenbateko irabazia ipini behar den sistemaren begizta itxiko poloen moteltze-faktorea $\xi = 0,7$ izan dadin.

4.16 Sistema baten begizta irekiko transferentzia-funtzio digitala

$$G(z) = \frac{z+1}{z^2 - 1,6z + 0,89}$$

da. Aurretik K irabazia ezartzen zaiola jo, eta

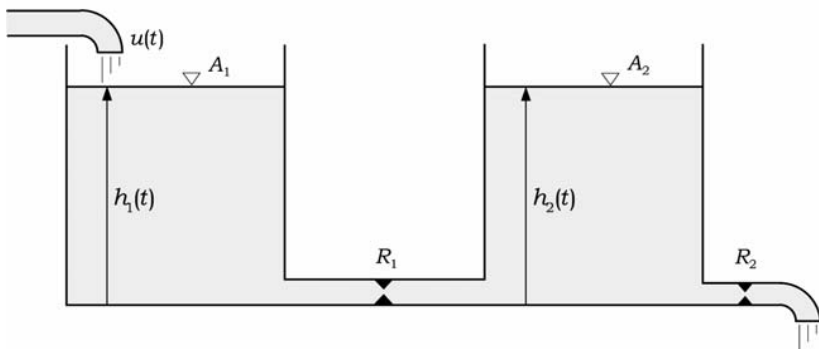
- Marraztu sistemaren erroen leku geometrikoaren diagrama.
- Kalkulatu sistema hori egonkortasun-mugara eramango duen K -ren balioa.

4.17 Kontrol-sistema digital baten begizta irekiko transferentzia-funtzioa hau da:

$$G(z) = \frac{0,758(z+1)}{(z-1)(z-0,242)}$$

Marraz ezazu sistema horren Bode diagrama, $T = 1$ segundo dela kontuan hartuz.

4.18 Industria kimiko batean erabiltzen den fluxu-sistema ageri da 4.23 irudian. $A_1 = A_2 = 1$, $R_1 = 1/2$ eta $R_2 = 1/3$ badira, eta tangen arteko fluxua bertako mailen arteko diferentziaren araberakoa dela kontuan izanik,



4.23 irudia. Sistema kimikoaren eredua.

- Kalkula ezazu $H_2(s)$ maila eta $U(s)$ sarrerako emariaren arteko transferentzia-funtzio jarraitua.
- Sarrerako emaria gobernatzen duen balbula D/A bihurgailu baten bidez kontrolatzen bada, eta $h_2(t)$ maila 10 Hz-etan $T = 0,1$ s lagintzen, froga ezazu funtzio hau dela lortzen den begizta irekiko transferentzia-funtzio digitala:

$$G(z) = \frac{0,008(z+0,790)}{z^2 - 1,4536z + 0,4966}$$

- K irabazia aurretik ezarriz, marraztu erroen leku geometrikoaren diagrama.

- d) Egin Bode diagrama, eta kalkulatu fase- nahiz irabazi-tartea. Ondorioztatu K -ren balioa, begizta itxiko sistema egonkortasun-mugara eramateko.

4.19 Kontrol-sistema digital baten transferentzia-funtzioa hau da:

$$G(z) = \frac{0,0952z}{(z-1)(z-0,905)}$$

$T = 0,1$ segundo dela jo da. Sistema horren Bode diagrama egitea eskatzen da.

4.20 $T = 0,2$ segundo dela suposatuz, azter ezazu berrelikadura unitarioa eta begizta zuzeneko

$$G(s) = \frac{K}{s+5}$$

transferentzia-funtzioa dituen sistemaren egonkortasun-ezaugarriak,

- a) Zero ordenako lagingailu-euskailua erabiliz.
- b) Zero ordenako lagingailu-euskailua erabili gabe.

4.21 Kontrol-sistema digital baten begizta irekiko transferentzia-funtzioa hau da:

$$GH(z) = \frac{K(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

Sistema horren erroen leku geometrikoaren diagrama grafikoki aurkeztea eskatzen da, $T = 0,1$ segundo eta $T = 1$ segundo denean.

4.22 Transferentzia-funtzio hau pasa-baxu iragazki bati dagokio:

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2}$$

- a) Aurki ezazu iragazkiaren adierazpen digitala.
- b) Azter ezazu zer kondizio bete behar diren iragazki hori egonkorra izan dadin.

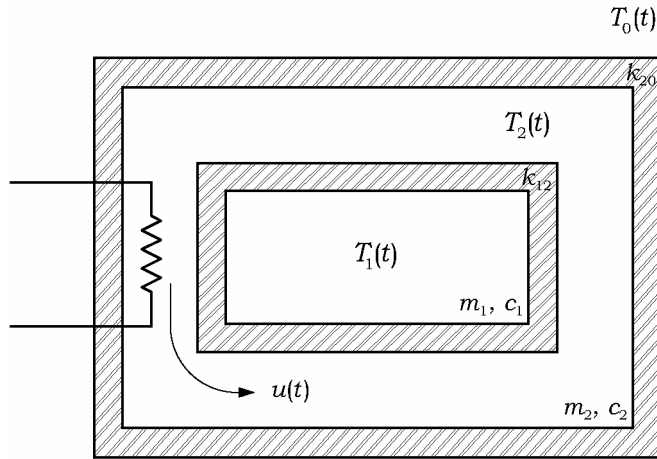
4.23 Demagun laugarren ordenako Butterworth iragazkia diseinatu dela, eta, pasatzen utzi behar dituen maiztasunen arabera, transferentzia-funtzio hau lortu dela:

$$H(s) = \frac{400s^2}{s^4 + 28,28s^3 + 20400s^2 + 282800s + 100}$$

- a) Laginketa-periodoa 0,01 segundo izanik, azter ezazu iragazkia bere adierazpen digitala lortzearren.
- b) Aztertu sistemaren begizta itxiko egonkortasuna Bode diagramaren bitartez.
- c) Aztertu analitikoki begizta itxiko sistemaren egonkortasuna, baldin eta K irabazi aldagarria $H(s)$ -ren aurrean ipini eta berrelikadura unitarioa erabiltzen bada.
- d) Egin erroen leku geometrikoaren diagrama eta gauzatu begizta itxiko egonkortasun-analisia.

4.24 Demagun 4.24 irudiko sistema termikoa aztertu behar dela, eta hauek direla parametroen balioak: $m_1c_1 = 0,5$, $m_2c_2 = 2$, $k_{12} = 1$ eta $k_{20} = 0,5$.

- a) Kalkula ezazu barnealdean lortzen den T_1 tenperaturaren eta sartzen den u beroaren arteko $G(s)$ transferentzia-funtzioa.
- b) Kalkulatu transferentzia-funtzio horren baliokide digitala, $T = 0,25$ segundoko laginketa-periodoa erabiliz.



4.24 irudia. Sistema termikoa.

- c) Aurretik K kontrolagailu proportzionala ezarriz gero, kalkula ezazu begizta itxiko sistemaren egonkortasun-muga, berrelikadura unitarioa dela kontuan hartuz.
- d) Aurkeztu erroen leku geometrikoaren diagrama.

4.25 Antena baten ibilbidea kontrolatu nahi dugu plano horizontalean. Antenak eta hori mugiarazteko behar den sistemak J inertzia-momentua eta B moteltze-koefizientea dituzte. Antenaren mugimendua adierazten duen ekuazio diferentziala hau da:

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = T_c + T_d$$

T_c pare eragilea da eta T_d haizearen pare.

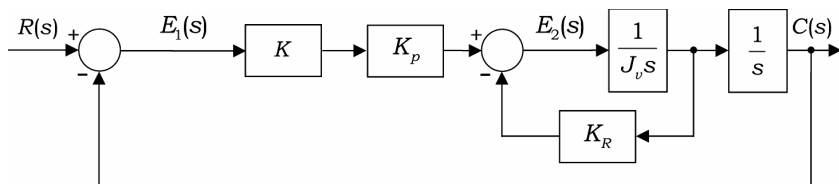
$$a = B/J, \quad u = T_c/B \quad \text{eta} \quad w_d = T_d/B$$

definitzen badira, kalkula itzazu:

- a) Sistemaren transferentzia-funtzio jarraitua, haizerik ez dagoela suposatuz.

- b) Transferentzia-funtzio diskretua.
- c) Sistemaren egonkortasuna, berrelikadura unitarioa erabiltzeaz gain, $T = 1$ segundo eta $a = 0,1$ direnean.

4.26 4.25 irudiko bloke-diagrama sinplifikatuak espazio-ibilgailu baten kontrol-sistema aurkezten du. Sistema horren helburua da espazio-ibilgailua dimentsio batean egonkor mantentzea. J_v inertzia duen egitura zurrun batez adierazten da ibilgailuaren eredu sinplea. Ibilgailua kontrolatzen duen motorrak K irabaziko anplifikadore batek elikatuta egiten du lan.



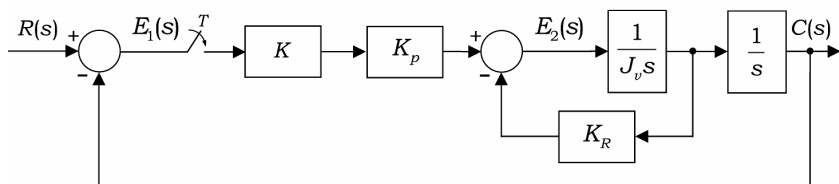
4.25 irudia. Espazio-ibilgailu baten kontrol-sistema.

Sistema jarraituaren parametroak hauek dira:

$$K_p = 1,65 \cdot 10^6, \quad K_R = 3,17 \cdot 10^5 \quad \text{eta} \quad J_v = 41822$$

Kalkula itzazu:

- a) Sistema jarraituaren transferentzia-funtzioa.
- b) Sistema diskretuaren transferentzia-funtzioa, 4.26 irudiko diagramaren arabera.



4.26 irudia. 4.25 irudiko kontrol-sistemaren laginketa.

- c) Egin sistema diskretuaren erroen leku geometrikoaren diagrama, $T = 0,1$ segundo eta $T = 0,5$ segundo denean.
- d) Aurkeztu erroen leku geometrikoaren diagrama, baldin eta, atzerapen puru bat existitzen dela onartzearen ondorioz, transferentzia-funtzio hau lortzen bada:

$$G(z) = \frac{0,15K(z + 0,7453)}{z(z - 1)(z - 0,4119)}$$

5

Kontrol-sistema digitalen diseinua

5.1 SARRERA

Sistema jarraitu bat kontrolatu nahi denean, sistema horretan behar diren neurgailu eta eragingailuak nahiz konputagailu digitala kokatzen dira. Kapitulu honetan zehar, sisteman ezarri beharreko kontroladorearen diseinua eta ezarpena hartuko ditugu gaitzat.

Esan daiteke sistema industrial gehienetan diseinu-prozedurak bi urratsi jarraitu behar diela, ereduztapenari eta kontroladorearen diseinuari. Eskuarki, lehendabizikoak bigarrenak baino ahalegin handiagoa behar du, ahalik eta eredu zehatzena lortzearen. Horrenbestez, kontroladorearen diseinua errazagoa izaten da, edozein dela ere erabilitako metodoa.

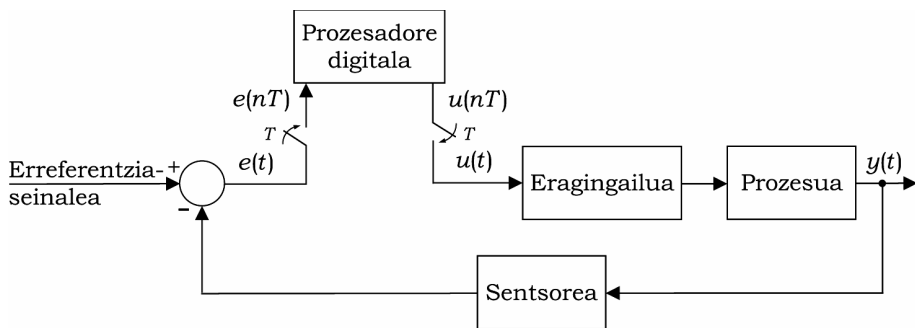
Ondorioz, eta, esan bezala, sistemaren ereduztapen zehatzetik abiatuta kontroladorearen diseinua egin ahal izateko, kapitulu honetan aztertuko diren bi metodo erabil daitezke:

- a) Sistemaren ereduztapen jarraitutik abiatu, dagokion $G(s)$ transferentzia-funtzio jarraitua lortu, eta haren $G(z)$ transformatu digitala kalkulatu. Ondoren, kontroladore digitala diseinatu eta ezarri.
- b) Sistemaren eredu jarraitutik abiatu, dagokion $G(s)$ transferentzia-funtzio jarraitua lortu, eta beharrezkoa den kontroladore jarraitua diseinatu. Azkenik, kontroladore jarraituaren transformatu digitala kalkulatu ezarpena egin ahal izateko.

Kapitulu honetan, kontroladore digitalen diseinuari ekingo diogu, egoera iraunkorreko erroreei aurre egingo diegu, eta, gainera, sistemaren erantzunaren abiadura egokia mantendu eta ibilbideen jarraipen zehatza bilatuko dugu.

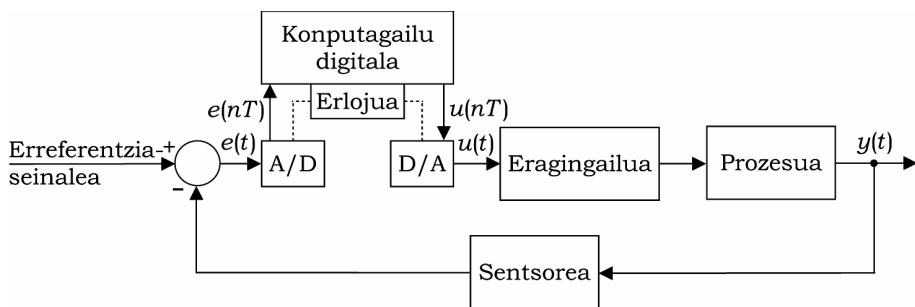
5.1.1 DIFERENTZIA-EKUAZIO LINEALAK

Kontroladoreak diseinatu ondoren, prozesadore digitaletan ezartzeko diferentzia-ekuazio linealak erabiliko ditugu. Demagun 5.1 irudiko berrelikadurako kontrol-begizta duen prozesadore digitala aztertu behar dela.



5.1 irudia. Prozesadore digitala.

Hardwarea besterik ez bada kontuan hartzen, konputagailu digitala 5.2 irudian agertzen den diagramaz aurkez daiteke.



5.2 irudia. Sistemaren hardwarea.

$e(t)$ errore seinalearen laginak T aldiz behin hartzen dira, n -garren lagina lortu arte: $e_0, e_1, e_2, e_3 \dots e_n$.

Era berean, sarrerako n -garren laginketa egin aurretik lortzen diren konputagailuaren irteerak, $u_0, u_1, u_2 \dots u_{n-1}$ izango dira. Beraz, konputagailuak eragiketa hau egin behar du hurrengo unean irteerak izango duen balioa kalkulatzeko:

$$u_n = f(e_0, e_1, e_2 \dots e_n, u_0, u_1, u_2 \dots u_{n-1}) \quad (5.1)$$

Funtzioa lineala dela jotzen bada, eta, gainera, aurreko balio kopuru jakin batzuen eragina besterik ez duela jotzen badugu, konputagailuaren irteera hau izan daiteke:

$$u_n = -a_1 u_{n-1} - a_2 u_{n-2} - \dots - a_k u_{n-k} + b_0 e_n + b_1 e_{n-1} + \dots + b_m e_{n-m} \quad (5.2)$$

Ekuazio horri koefiziente konstanteak dituen diferentzia-ekuazio lineal deritzo, eta kontroladoreak ezartzeko erabiltzen den oinarritzko ekuazioaren adierazpena izango da.

5.1.2 Z TRANSFORMATUAK ETA DIFERENTZIA-EKUAZIO LINEALAK

Aurreko kapituluetan aztertu den Z transformatuaren teoria kontuan hartuz,

$$Z[f(t)] = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \quad (5.3)$$

eta, gainera,

$$Z[f(t-T)] = z^{-1} F(z) \quad (\text{Denbora-desplazamenduaren teorema}) \quad (5.4)$$

$t = nT$ baldin bada, hau adieraz daiteke:

$$Z[f(nT)] \equiv Z[f_n] = F(z) \quad (5.5)$$

eta

$$Z[f(nT-T)] \equiv Z[f_{n-1}] = z^{-1} F(z) \quad (5.6)$$

(5.5) eta (5.6) adierazpenak (5.2) ekuazioan ordezkatzuz gero, beste adierazpen hau lortzen da:

$$\begin{aligned} U(z) = & (-a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_k z^{-k}) U(z) + \\ & + (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) E(z) \end{aligned} \quad (5.7)$$

eta dagokion transferentzia-funtzioa, berriz, beste hau izango da:

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_k z^{-k}} \quad (5.8)$$

Bestalde, $k > m$ baldin bada, beste era honetan ere ipin daiteke:

$$D(z) = \frac{b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + \dots + b_m z^{k-m}}{z^k + a_1 z^{k-1} + \dots + a_k} = \frac{b(z)}{a(z)} \quad (5.9)$$

Konputagailu digital bateko sarrerako eta irteerako laginak erlazionatzen dituen edozein diferentzia-ekuazio lineal z -ren mendeko transferentzia-funtzio gisa ager daiteke, eta, era berean, edozein transferentzia-funtziotatik denboran zehar eman behar den kontrol-ekintza baten diferentzia-ekuazio lineala lor daiteke.

Hala, T laginketa-periodoa finkatutakoan, arazoaren diseinu-alderdia a_i eta b_i parametroak hautatzean datza.

5.2 LAGINKETA-PERODOAREN HAUTAKETA

Kontrol-algoritmoa diseinatzen den bakoitzean egin beharreko ekintzetatik garrantzitsuenetako bat da laginketa-periodoaren hautaketa. Luzea hautatzen bada, konputazio-lana eta analogikotik digitalerako bihurtetaren abiadura eskakizuna jaitsi egiten dira, eta, ondorioz, proiektuko hardwarearen kostua ere txikiagoa gertatzen da. Dena den, behar baino laginketa-periodo luzeagoa aukeratzeak, kontrolaren ezinbesteko degradazioa ez ezik, kasurik okerreanean, *aliasing* efektu bera ere eragin dezake.

Bestalde, laginketa-periodoa txikiagotuz, lagin gehiago hartzen da denbora-unitateko, eta degradazioa sor dezakeen hainbat eragile ere handiago bihurtzen. Aplikazio jakin batentzat, degradazio horietako batek laginketa-abiaduraren goimuga ezar dezake.

Prozesuaren dinamika, algoritmo mota, kontrol-betebeharrak eta sarrera nahiz perturbazio-seinale motek ezartzen dute, oro har, T -ren balio egokia sistema bakoitzean.

5.2.1 LAGINKETA-PERODOA HAUTATZEKO ARAU ENPIRIKOAK

Esperientzia praktikoez nahiz simulazio-emaitzek hainbat arau enpiriko eta hurbilketa praktikoko ekarri dituzte prozesuen kontrol digitala egiteko beharrezkoak diren laginketa-periodoak finkatzean.

1. Baldin prozesu baten denbora-konstante dominantea T_{dom} bada, sistema horren begizta itxiko kontrol digitala ezartzeko erabili behar den laginketa-periodoa hau da:

$$T < T_{dom}/10$$

Praktikan arau oso erabilia den arren, arazoak ekar ditzake begizta irekiko prozesuaren portaera mantso eta malgu batetik abiatuz, begizta itxiko sistemaren portaera oso zehatza eta azkarra lortu nahi bada.

2. Baldin prozesu baten Ziegler-Nichols erako begizta irekiko ereduak itxura hau badu:

$$G(s) = \frac{Ke^{-T_1 s}}{1 + T_2 s}$$

T laginketa-periodoak $T < T_1/4$ edo $T/T_1 \approx 0,05 : 0,25$ izan behar du.

3. Demagun begizta itxiko sistemak t_s egonkortze-denbora, ω_n maiztasun naturala edo ω_c banda-zabalera dituela. Orduan,

- a) $T < t_s/10$

- b) $\omega_s > 10\omega_n$

- c) $\omega_s > 10\omega_c$

4. Laginketa-periodoak sistemaren begizta itxiko portaeraren arabera izan behar du.

- a) Begizta itxiko denbora-konstante dominantea aztertuz, denbora-tarte horretan 2 eta 4 lagin artean hartu behar dira.

- b) Begizta itxiko portaerako egonkortze-denbora kontsideratu, eta, denbora horretan zehar, 8 eta 16 lagin artean hartu behar dira.

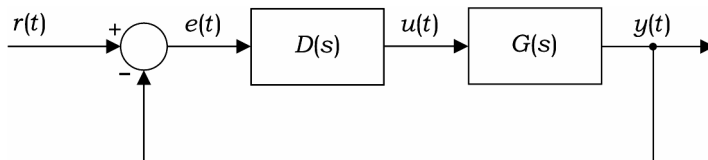
5.3 DISEINU-TEKNIKA JARRAITUAK

Diseinu-mota hau egiteko prozedurak honako bi urrats hauei jarraitzen die:

- Konpentsadorea kontrol-sistema jarraitua balitz bezala diseinatu behar da.
- Kontroladore jarraitu horren kontroladore digital baliokidea emango duen ezarpen digitala lortu nahi da. Urrats hori aztertuko dugu hemendik aurrera.

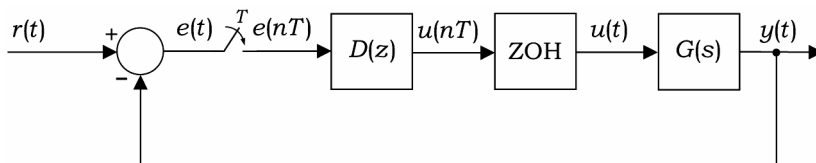
5.3.1 DIGITALIZAZIO-PROZEDURAK

5.3 irudiko kontrol-sistema suposatuz,



5.3 irudia. Kontrol-sistema jarraitua.

$D(s)$ kontroladore jarraituari dagokion $D(z)$ kontroladore digital egokiena bilatu behar da. Ezarpen digitala egitean, $y(t)$ irteeraren laginketa-abiadura jakin bat erabiltzeaz gain, konputagailuaren irteerako balioei eutsi behar zaie $u(t)$ seinale jarraitua lortzearen —lagingailu-euskailua erabiliz—. Hala, 5.4 irudian agertzen den diagrama lortzen da.



5.4 irudia. Sistema lagindua.

Arazoa, orain, $D(s)$ ordezkaturko duen $D(z)$ kontroladorerik egokiena bilatzea izango da; hau da, s eta z aldagaien arteko transformaziorik egokiena bilatzea. Egin daitezkeen hurbilketak zenbait irizpidetan oinarritzen dira. Horretarako, suposizio batzuk egiten dira lagindutako puntuen artean gertatzen denari buruz. Hiru hauek dira hurbilketarik erabilienak:

- a) Zenbakizko integrazioa
- b) Poloak eta zeroak parekatzea
- c) Euskailuaren baliokidetasuna

5.3.1.1 Zenbakizko integrazioa

Demagun $e(t)$ seinale jarraitua dugula eta haren integralaren hurbilketa egin nahi dugula $e(0)$, $e(T)$, $e(2T)$... $e(nT-T)$, $e(nT)$ balioak bakarrik erabiliz.

$$u(t) = \int_0^t e(t) dt \quad (5.10)$$

Laplaceren transformatua hartuz,

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s} \quad (5.11)$$

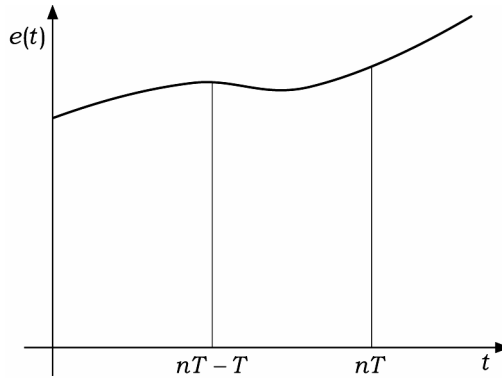
eta, integrazio hutsaren kasuan, laginketaren zenbakizko hurbilketak z -ren mendeko s -ren hurbilketa dakarrela frogatuko da.

5.5 irudian, integrazioaren hurbilketa $e(t)$ funtzioaren zein zatitan egitea nahi den azaltzen da.

(5.10) ekuazioko integrala banatzen bada, 0 eta $t = nT$ tartean integratuz, adierazpen hauek idatz daitezke:

$$u(nT) = \int_0^{nT-T} e(t) dt + \int_{nT-T}^{nT} e(t) dt \quad (5.12)$$

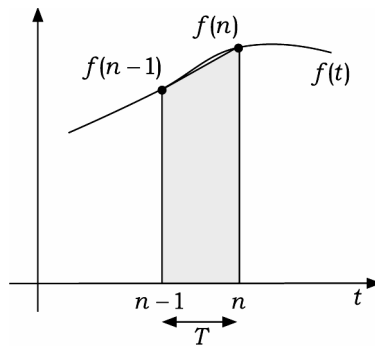
$$\therefore u(nT) = u(nT - T) + \int_{nT-T}^{nT} e(t) dt \quad (5.13)$$



5.5 irudia. $e(t)$ funtzioaren zatia.

$(nT - T)$ eta nT tartean dagoen azalera kalkulatzeko arau trapezoidala —5.6 irudia— erabiltzen bada,

$$\therefore u(nT) = u(nT - T) + \frac{T}{2} [e(nT - T) + e(nT)] \quad (5.14)$$



5.6 irudia. Hurbilketa trapezoidala.

Z transformatua aplikatuz gero,

$$U(z) = z^{-1}U(z) + \frac{T}{2} [z^{-1}E(z) + E(z)] \quad (5.15)$$

edo, beste era batean idatzita,

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (5.16)$$

$$D(z) = \frac{1}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (5.17)$$

Beraz, $D(s) = 1/s$ funtzioari arau trapezoidala aplikatuz gero, ekuazio hau lortzen dela ondorioztatzen da:

$$D(z) = \frac{1}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

eta horrek adierazten du $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ funtzio bihurtzen dela.

Horrenbestez, lehen ordenako

$$D(s) = \frac{a}{s+a} \quad (5.18)$$

iragazkiari arau trapezoidal bera aplikatzen baldin bazaio,

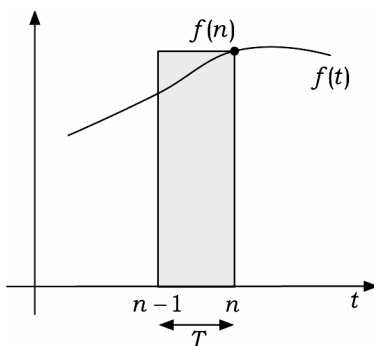
$$D(z) = \frac{a}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + a} \quad (5.19)$$

Horregatik, aipatutako

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

arau trapezoidala aplikatuz, edozein $D(s)$ funtzio $D(z)$ bihur daiteke. Hurbilketa horri ***Tustinen hurbilketa*** edo ***hurbilketa bilineal*** deritzen.

() * () *



5.8 irudia. Backward hurbilketa.

$\mathcal{Z}$ transformatua aplikatuz,

$$U(\mathcal{z}) = \mathcal{z}^{-1}U(\mathcal{z}) + TE(\mathcal{z}) \quad (5.25)$$

eta, ondorioz,

$$D(\mathcal{z}) = \frac{U(\mathcal{z})}{E(\mathcal{z})} = \frac{T}{1 - \mathcal{z}^{-1}} = \frac{1}{\frac{1 - \mathcal{z}^{-1}}{T}} \quad (5.26)$$

s -ren hurbilketa hau da:

$$s = \frac{1 - \mathcal{z}^{-1}}{T} = \frac{\mathcal{z} - 1}{T\mathcal{z}} \quad (5.27)$$

Hurbilketa horri **backward hurbilketa** deritzo.

5.3.1.2 Poloak eta zeroak parekatzea

s planoaren $\mathcal{Z}$ transformazioa egiteko ohiko formula hau da:

$$\mathcal{z} = e^{sT} \quad (T = \text{laginketa-periodoa})$$

poloak eta zeroak $\mathcal{z}$ planoan kokatzean ohiko teknikak erabiliz. Dena den, komenigarria izan daiteke aldaketaren bat egitea —zeroen gehikuntza—, azkenean lortzen den $\mathcal{Z}$ transformatua hertsiki propioa —polo kopurua, zero

kopurua baino handiagoa— baldin bada. Gehikuntza hori egiteko erabiltzen den metodoa azalduko dugu orain.

s planoan lan egiten denean, falta diren zeroak $s = \infty$ daudela jotzen da —erroen leku geometrikoaren diagramaren teknika— eta, ardatz irudikariaren gainean $s = \pm j\omega$ nahierara kokatzen badira, dagozkien z planoko baliokideak $z = -1 + j0$ izango dira. Hortaz, falta den zero bakoitzeko $(z + 1)$ edo $(1 + z^{-1})$ biderkagai bana jar daiteke, behar den zero kopurura iritsi arte.

Polo eta zero guztiak kokatutakoan, maiztasun baxuko edo egoera iraunkorreko irabaziak parekatzea ahalbidetzen duen irabaziaren biderkagaia sartu besterik ez da egin behar.

5.1 adibidea

$D(s) = \frac{s+a}{s+b}$ funtzioaren baliokide diskretua lortu behar dugu.

Poloak eta zeroak parekatzeko metodoa erabiliz,

$$\therefore D(z) = k \frac{z - e^{-aT}}{z - e^{-bT}}$$

Maiztasuna zero denean, $z = 1$ da, eta $s = 0$. Horiek horrela,

$$\lim_{s \rightarrow 0} D(s) = \frac{a}{b} = \lim_{z \rightarrow 1} D(z)$$

eta, ondorioz,

$$k = \frac{a}{b} \frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}}$$

5.2 adibidea

$D(s) = \frac{s+a}{s(s+b)}$ funtzioaren digitalizazioa egin behar dugu.

Poloak eta zeroak parekatzeko metodoa aplikatuz,

$$D(z) = k \frac{z - e^{-aT}}{(z-1)(z - e^{-bT})}$$

eta, maiztasun baxuko irabaziak bat etor daitezten, oraingoan

$$\lim_{s \rightarrow 0} sD(s) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)D(z) = \frac{a}{b}$$

adierazpena bete behar denez, k -ren balioak hau behar du:

$$k = \frac{a}{b} \frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}}$$

$D(z)$ funtzioan falta den zeroa ($z+1$) biderkagaia erabiliz gehi daiteke,

$$D(z) = k' \frac{(z+1)(z - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-bT})}$$

eta, kasu horretan ere maiztasun baxuko irabazia a/b izan dadin,

$$k' = \frac{a}{2b} \frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}}$$

behar du.

$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$ baldin bada, sarreraren eta irteeraren arteko erlazioa adierazten

duen diferentzia-ekuazioa hau lor daiteke:

$$u_n = (1 + e^{-bT})u_{n-1} - e^{-bT}u_{n-2} + k' \left[e_n + (1 - e^{-aT})e_{n-1} - e^{-aT}e_{n-2} \right]$$

Ekuazio horretan, u_n irteerak e_n sarrerarekiko duen mendekotasuna ikusten da. Konputagailuaren hardwareak erlazio hori onartzen ez badu, edo egin beharreko eragiketak luzeegiak badira, ezin izango dugu ekuazioa dagoen bezala ezarri, eta zertxobait aldatu egin beharko dugu. Polo eta zero kopurua parekatzeko erabili dugun $(z + 1)$ biderkagai kopurua erabili ordez, bat gutxiago erabiliko dugu (zero kopurua = polo kopurua $- 1$). Ondorioz,

$$D(z) = k \frac{z - e^{-aT}}{(z - 1)(z - e^{-bT})}$$

kontroladorearentzat diferentzia-ekuazio berri hau lortuko dugu:

$$u_n = (1 + e^{-bT})u_{n-1} - e^{-bT}u_{n-2} + k(e_{n-1} - e^{-aT}e_{n-2})$$

Une jakin batean kontuan hartzen diren erroreak aurreko uneko errorera arte besterik ez dira iristen. Metodo horri **poloak eta zeroak parekatzeko metodo aldatua** deritzo.

5.3.1.3 Euskailuaren baliokidetasuna

Zero ordenako euskailuak s planoan duen transferentzia-funtzioa hau da:

$$G_{H_0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

Funtzio hori lehen ordenako $G(s) = \frac{a}{s + a}$ iragazkiari jauzi eran ipiniz gero, beste funtzio hau lortzen da:

$$G_{H_0}(s)G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{a}{s + a}$$

$$G'(s) = (1 - e^{-Ts}) \frac{a}{s(s + a)} \quad (5.28)$$

eta $\mathcal{Z}$ transformatua aplikatuz,

$$G'(z) = Z \left[(1 - e^{-Ts}) \frac{a}{s(s+a)} \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{a}{s(s+a)} \right] \quad (5.29)$$

$$\therefore G'(z) = (1 - z^{-1}) \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}} \right) = \quad (5.30)$$

$$= \frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}} \quad (5.31)$$

5.3.1.4 Metodoen konparaketa

$D(s)$ konpentsadorearen hurbilketa diskretu egokia gauzatzeko, interesgarria izango litzateke hiru metodoen arteko konparazioa egitea. Demagun funtzio hau erabiltzen dela azterketa konparatiboa egiteko:

$$D(s) = \frac{5}{s+5} \quad (\text{lehen ordenako iragazkia}) \quad (5.32)$$

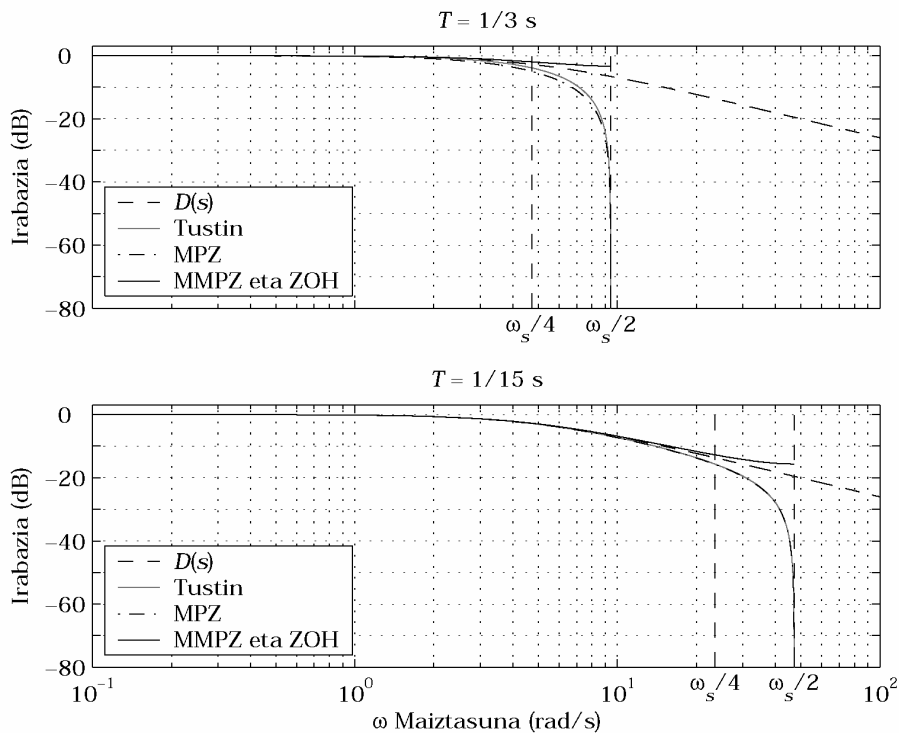
5.1 taulan ageri dira hiru metodoak erabiliz bi laginketa-abiadurarekin lan egiten denean lortzen diren iragazkiaren hurbilketa diskretuak.

5.1 taula. Hiru digitalizazio-metodoen konparaketa

$$D(s) = \frac{5}{s+5} \text{ funtzioarentzat.}$$

Metodoa	$F_s = 15 \text{ Hz}$	$F_s = 3 \text{ Hz}$
Poloak eta zeroak parekatzea (MPZ)	$0,1417 \frac{z+1}{z-0,7165}$	$0,4056 \frac{z+1}{z-0,1889}$
Poloak eta zeroak parekatzeko metodo aldatua (MMPZ)	$\frac{0,2835}{z-0,7165}$	$\frac{0,8112}{z-0,1889}$
Tustinen metodoa	$0,1429 \frac{z+1}{z-0,7143}$	$0,4545 \frac{z+1}{z-0,0909}$
Euskailuaren baliokidetasuna	$\frac{0,2835}{z-0,7165}$	$\frac{0,8112}{z-0,1889}$

5.9 irudian ikus daiteke laginketa-abiaduraren laurdena baino maiztasun txikiagoetan lortzen diren hurbilketak nahiko egokiak direla. $\omega_s/4$ iragazkiaren hauste-maiztasuna baino askoz handiagoa bada, laginketa azkarrak erabiliz, hauste-ezaugarriak nahiko ongi erreproduzitzen dira.



5.9 irudia. Hiru metodoen erantzun frekuentzialak

$$D(s) = \frac{5}{s+5} \text{ funtzioaren hurbilketarako.}$$

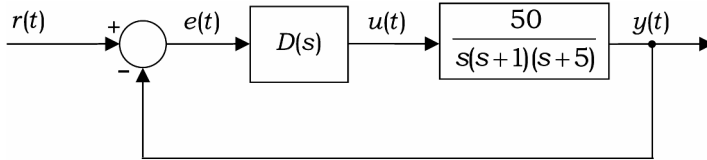
Tustin eta MPZ metodoekin kurbadura bat agertzen da $\omega_s/2$ maiztasunaren inguruan, $(\zeta + 1)$ gaiari dagokion zeroa dela eta. Ezberdintasun horiek alde batera utzita, hiru metodoen portaera antzekoa da. Dena den, orain artean MPZ metodoaren erabilera zabalagoa izan da, Tustinenaren aljebra zailagoa delako.

5.3.1.5 Diseinu-adibidea

Har dezagun transferentzia-funtzio honen bidez aurkeztutako sistema:

$$G(s) = \frac{50}{s(s+1)(s+5)}$$

Moteltze-faktorea $\xi = 0,45$ denean, konpentsatu gabeko begizta itxiko sistemaren polo dominanteen maiztasun naturala $\omega_n = 0,89$ rad/s da. Maiztasun hori $\omega_n = 3,5$ rad/s izan arte handitu nahi dugu, moteltze-faktorea aldatu gabe. Horretarako, diseinatu 5.10 irudian ageri den sistemaren $D(s)$ konpentsadorea.



5.10 irudia. Begizta itxiko sistema.

$D(s) = k \frac{s+a}{s+b}$ egitura duen aurreratze-kompentsadoreak aipatutako ezau-garriak lor ditzake, $a = 1$, $b = 10$ eta $k = 2,94$ balioak hartuz.

$$\therefore D(s) = 2,94 \frac{s+1}{s+10} = 2,94 \frac{s+a}{s+b}$$

Kompentsadore horren digitalizazioa egiteko MPZ metodoa erabiliz gero,

$$D(z) = k' \frac{z - e^{-aT}}{z - e^{-bT}} = k' \frac{z - e^{-T}}{z - e^{-10T}}$$

Sistemaren maiztasun naturala $\omega_n = 3,5$ rad/s bada, 20 aldiz handiago den laginketa-abiadura egokia izango litzateke. Beraz,

$$\omega_s = 20 \omega_n = 70 \text{ rad/s}$$

bada, laginketa-periodoa $T = 2\pi/\omega_s = 0,089$ segundo izango da.

Kalkulu horien ondorioz, $T = 1/15 \text{ s} \approx 0,06667 \text{ s}$ eta $T = 1/3 \text{ s} \approx 0,3333 \text{ s}$ laginketa-periodoak probatuko dira.

$T = 1/15 \text{ s}$ denean

Konpentsadorearen digitalizazio-ekuazioa hau da:

$$D(z) = k' \frac{z - 0,9355}{z - 0,5134}$$

eta, konpentsadore jarraituaren maiztasun baxuko irabazi bera mantentzearren

$\lim_{s \rightarrow 0} D(s) = \lim_{z \rightarrow 1} D(z)$ erlazioa bete behar denez, $k' = 2,22$ suertatzen da.

Beraz,

$$\begin{aligned} D(z) &= 2,22 \frac{z - 0,9355}{z - 0,5134} = 2,22 \frac{1 - 0,9355z^{-1}}{1 - 0,5134z^{-1}} = \\ &= \frac{2,22 - 2,0768z^{-1}}{1 - 0,5134z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)} \end{aligned}$$

eta lortzen den kontroladore digitalaren diferentzia-ekuazioa beste hau izango da:

$$u_n = 0,5134u_{n-1} + 2,22e_n - 2,0768e_{n-1}$$

non $e_n = r_n - y_n$ baita.

$T = 1/3 \text{ s}$ denean

$$D(z) = k' \frac{z - 0,7165}{z - 0,0357}$$

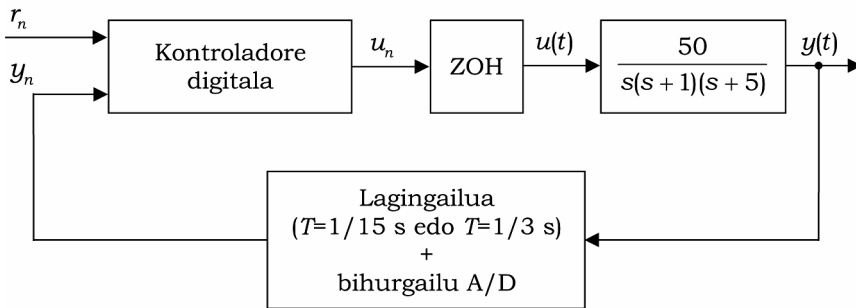
$k' = 1,0$ delarik. Horrenbestez,

$$D(z) = 1,0 \frac{z - 0,7165}{z - 0,0357} = \frac{1 - 0,7165z^{-1}}{1 - 0,0357z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

eta beste kontrol-algoritmo honetara iritsiko gara:

$$u_n = 0,0357u_{n-1} + e_n - 0,7165e_{n-1}$$

5.11 irudian islatzen da kontrol-sistema digital osoaren egitura.

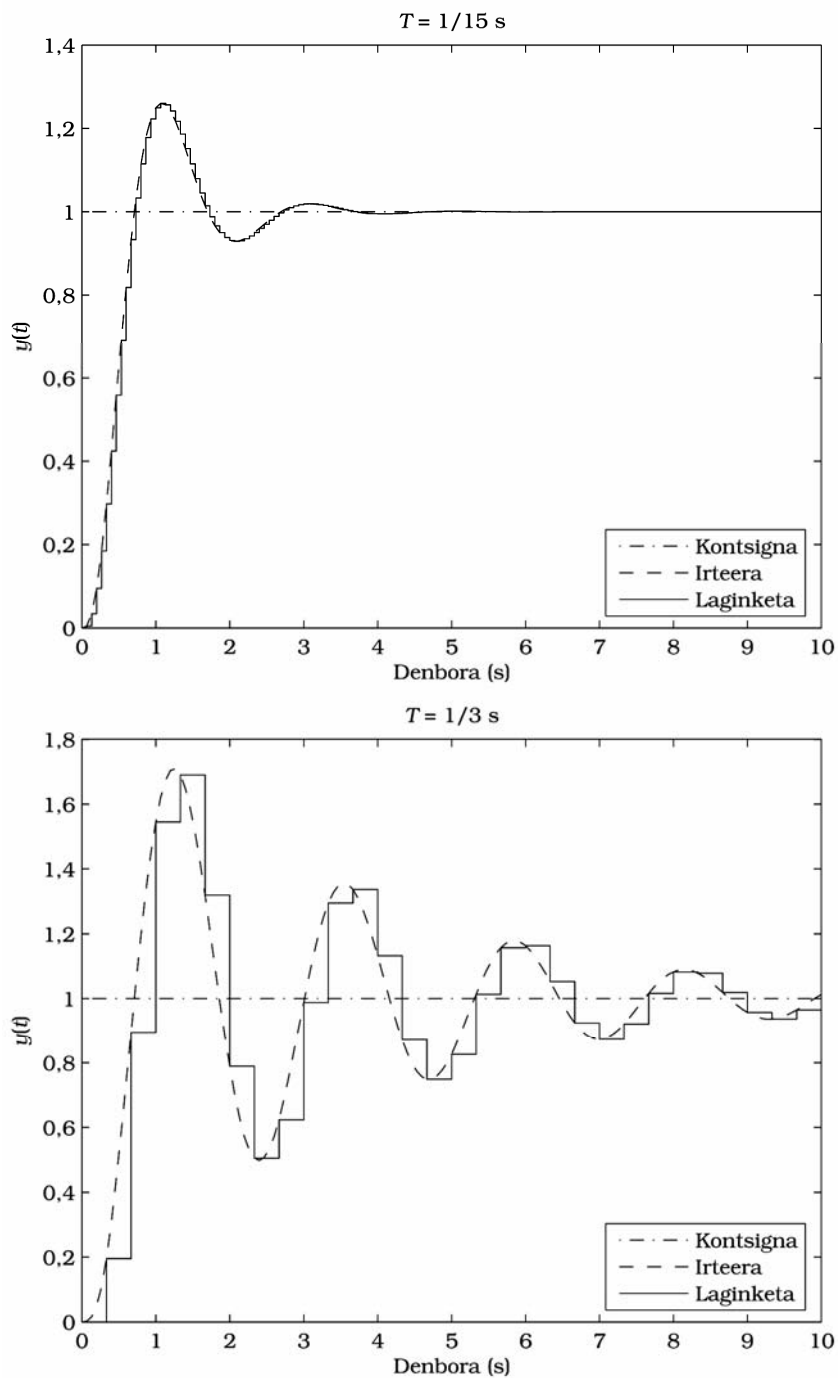


5.11 irudia. Kontrol-sistema digitala.

Laginketa-abiaduren tarte zabala betetzen duen sistema honen analisi diskretu zehatza eginez gero, ikusiko genuke $5\omega_n$ baino abiadura txikiagoen kasuan ezegonkortasuna agertzen dela, eta $5\omega_n$ eta $10\omega_n$ tartean dauden abiaduren kasuan, berriz, moteltze-faktorea hondatu egingo litzateke. Abiadura $20\omega_n$ —edo 20 aldiz sistemaren banda-zabalera— inguruan dabilenean, hurbilketa-metodoaren fidagarritasuna handia izango da.

Lagingailu-euskailuek sartzen dituzten atzerapenak kontuan ez hartzea izan ohi da erroreak agertzeko arrazoi nagusia. Dena den, metodo honek badu abantaila bat: kontroladorearen diseinua egin arte ez da hautatu behar laginketa-abiadura.

5.12 irudian erakusten dira aurreko adibidean ondorioztatu diren kontrol-algoritmoak erabiliz lortzen diren erantzunen grafikoak —bi laginketa-abiadura ezberdin erabiliz—. Ikusten denez, laginketa-abiadura azkarrarekin kontrol-zehaztapenak egoki lortzen dira; laginketa-abiadura mantsoarekin, aldiz, portaera okerragoa da. Kontrol-sistemen diseinua abiadura mantsoetarako egitean, gomendagarriagoa da laginketa kontuan hartzen duten metodoak aplikatzea; kontroladorea zuzenean diskretuki diseinatzea, alegia.



5.12 irudia. Kontrol-sistemaren portaera.

5.4 KONTROL-SISTEMA DISKRETUEN DISEINU DISKRETUA

Ondoren, bigarren metodoari ekingo diogu; hau da, diseinu diskretuari.

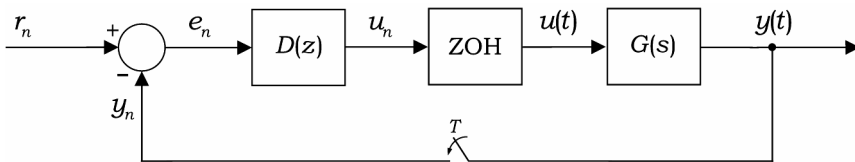
5.4.1 ANALISIRAKO ARAUAK

Honelako diseinuetan, lehenik eta behin, elementu jarraitu guztien diskretizazioa egin behar da. 5.11 irudiko sistemaren antzeko bat kontuan hartuz, u_n eta y_n seinaleen arteko transferentzia-funtzioa lortu nahi dugu.

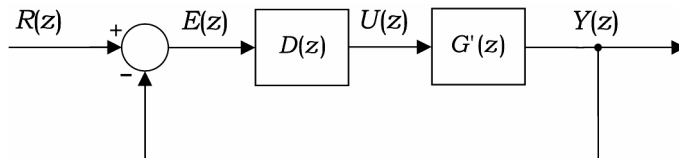
Aurretik lagingailu-cuskailua duen $G(s)$ transferentzia-funtzioaz deskribatutako prozesu baten kasuan, transferentzia-funtzio diskretu hau lortzen da:

$$G'(z) = (1 - z^{-1}) z \left[\frac{G(s)}{s} \right] \quad (5.33)$$

(5.33) ekuazioaren bidez, osagai jarraitu nahiz diskretuak dituen 5.13 irudiko sistema ordezkatu ahal izango dugu 5.14 irudian agertzen den sistema baliokide diskretuaz.



5.13 irudia. Osagai jarraitu eta diskretuak dituen sistema.



5.14 irudia. Sistema diskretu baliokidea.

Sistemaren diskretizazioa egindakoan, analisia eta konpentsadorearen diseinua sistema jarraituetakoak bezalakoak dira, eta bete beharreko arauak ere, haien

antzekoak. Lehenik eta behin, begizta itxiko transferentzia-funtzioa lortu behar da. 5.13 irudiko sistemaren kasuan,

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G'(z)}{1 + D(z)G'(z)} \quad (5.34)$$

Begizta itxiko sistemaren polinomio karakteristikoaren erroak lortzeko, ekuazio hau askatu behar da:

$$1 + D(z)G'(z) = 0 \quad (5.35)$$

eta ekuazio horri aplikatzen zaio zuzenean erroen leku geometrikoaren metodoa.

5.4.2 KONTROLADOREEN DISEINUA

Sistema jarraituen kasuan, kontrol-lege proportzionalak, integralak, deribatiboak edo horien konbinazioak erabiliz, aurreratze, atzeratze edo aurreratze-atzeratze motetako konpentsadoreak lortzen dira.

Sistema diskretuen kasuan, legerik sinpleenak hauek dira:

Proportzionala: $u_n = k_p e_n \quad (5.36)$

edo
 $D(z) = k_p \quad (5.37)$

Deribatiboa: $u_n = k_d (e_n - e_{n-1}) \quad (5.38)$

edo
 $D(z) = k_d (1 - z^{-1}) = k_d \frac{z-1}{z} \quad (5.39)$

Integrala: $u_n = u_{n-1} + k_i e_n \quad (5.40)$

edo
 $D(z) = \frac{k_i}{1 - z^{-1}} = k_i \frac{z}{z-1} \quad (5.41)$

5.3 adibidea

Demagun 5.3.1.5 diseinu-adibideko

$$G(s) = \frac{50}{s(s+1)(s+5)}$$

transferentzia-funtzioa duen sistema bera kontrolatu nahi dugula.

Orduan,

$$G'(s) = G_{H_0}(s)G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{50}{s(s+1)(s+5)}$$

Z transformatua aplikatuz,

$$\begin{aligned} G'(\tilde{z}) &= Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{50}{s(s+1)(s+5)} \right] = \\ &= \frac{\tilde{z}-1}{\tilde{z}} Z \left[\frac{50}{s^2(s+1)(s+5)} \right] \\ &= \frac{(10T - 12 + 12,5e^{-T} - 0,5e^{-5T})\tilde{z}^2 +}{+ [12 - (13 + 10T)e^{-T} + (13 - 10T)e^{-5T} - 12e^{-6T}]\tilde{z} +} \\ G'(\tilde{z}) &= \frac{+ 0,5e^{-T} - 12,5e^{-5T} + (12 + 10T)e^{-6T}}{(\tilde{z}-1)(\tilde{z}-e^{-T})(\tilde{z}-e^{-5T})} \end{aligned}$$

$T = 1/15$ s denean

$$G'(\tilde{z}) = \frac{0,002238(\tilde{z} + 0,2419)(\tilde{z} + 3,3844)}{(\tilde{z}-1)(\tilde{z}-0,9355)(\tilde{z}-0,7165)}$$

$T = 1/3$ s denean

$$G'(\tilde{z}) = \frac{0,1955(\tilde{z} + 0,1548)(\tilde{z} + 2,3943)}{(\tilde{z}-1)(\tilde{z}-0,7165)(\tilde{z}-0,1889)}$$

Lortu nahi ditugun begizta itxiko ezaugarriak

$$\xi = 0,45 \text{ eta}$$

$$\omega_n = 3,5 \text{ rad/s}$$

dira, eta, ondorioz, s planoko begizta itxiko polo dominanteak hauek izan beharko dute:

$$s_{1,2} = -1,575 \pm 3,126j$$

$\tilde{z} = e^{Ts}$ transformazioa aplikatuz, $\tilde{z}$ planoan, eta laginketa-periodoaren arabera, erro dominante horiek beste hauetan eraldatzen dira:

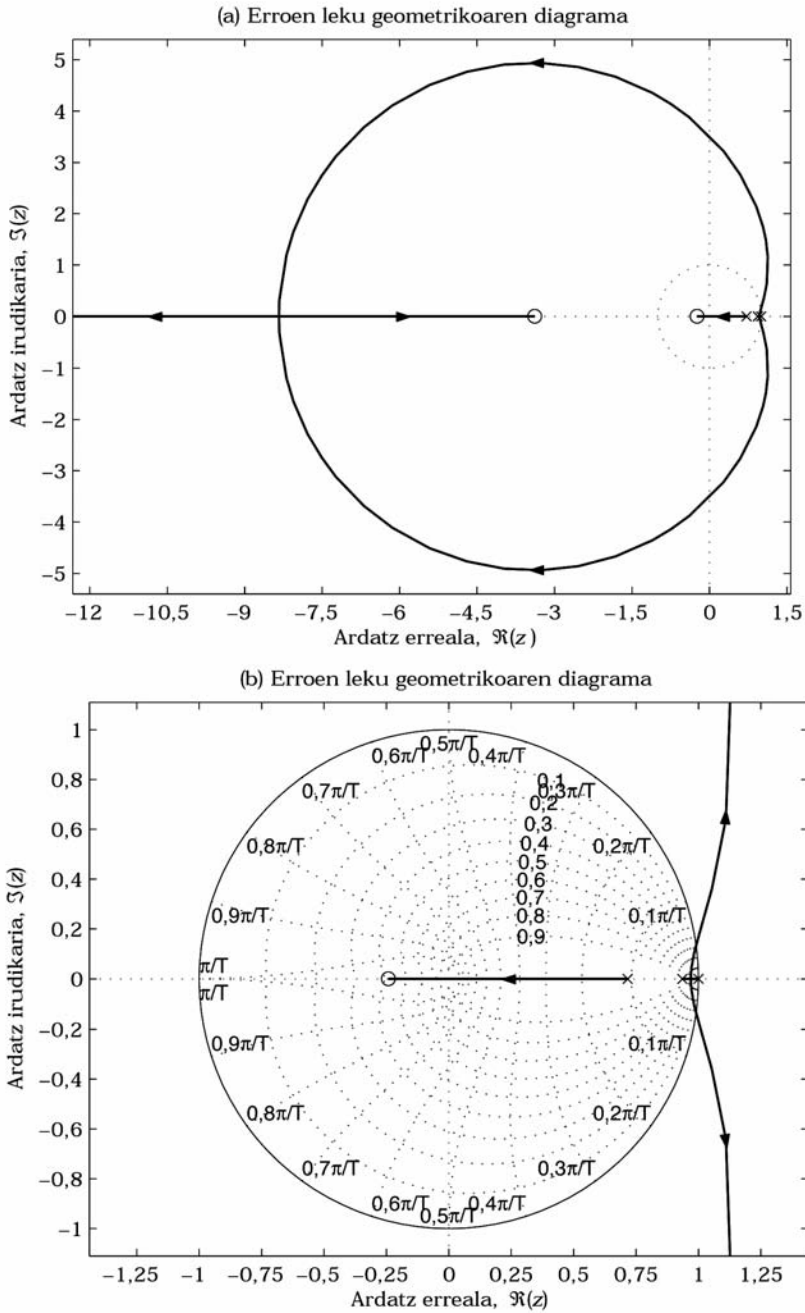
$$\tilde{z}_{1,2} = 0,881 \pm 0,186j \quad (T = 1/15 \text{ s})$$

$$\tilde{z}_{1,2} = 0,3 \pm 0,51j \quad (T = 1/3 \text{ s})$$

Laginketa-periodo bakoitzerako, eta erroen leku geometrikoaren metodoa erabiliz, egiaztatu behar da ea begizta itxiko polo dominanteek kokaleku horiek har ditzaketen, eta, hala ez balitz, konpentsadorea diseinatu beharko da $\tilde{z}$ planoan, behin konpentsatutako sistemak eskatutako zehaztapenak bete ditzan.

$T = 1/15 \text{ s}$ denean

$G'(\tilde{z})$ funtzioaren erroen leku geometrikoaren diagrama ikus daiteke 5.15(a) irudian, $T = 1/15 \text{ s}$ denean. Eskatutako zehaztapenak bete ahal izateko, banatze-puntutik irteten diren adarrak —ikus 5.15(b) irudiko xehetasuna— ezkerreantz mugitu behar dira $\tilde{z}$ planoan. Beraz, diseinatu beharreko konpentsadoreak aurreratze edo PD motakoa izan beharko du. Kontroladore deribatibo hutsa ezarriko balitz, sistemaren ordena ez ezik, bere tipoa txikiagotu egingo litzateke, eta hori komenigarria ez denez, ez dago aukera hori aintzat hartzerik.



5.15 irudia. $G'(z)$ funtzioaren erroen leku geometrikoaren diagrama eta horren xehetasun bat, $T = 1/15$ segundo denean.

Demagun honako egitura hau duen kontroladore proportzional-deribatiboa diseinatzen dela:

$$U(z) = k \left[1 + \gamma (1 - z^{-1}) \right] E(z) \quad (5.42)$$

edo

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = k(1 + \gamma) \frac{z - \frac{\gamma}{1 + \gamma}}{z} \quad (5.43)$$

Konpentsadorearen zeroa kokatzeko — $z = +1$, deribatibo hutsaren kasuan— askatasuna eskaintzen du horrek, baina poloa z planoaren jatorrian jarri behar da nahi eta nahi ez.

Ondoren, sistema jarraituetan bezala lan egiten da. Horretarako, erroen kokalekua aztertuz, faseko angelua bilatzen da, eta konpentsadoreak eman beharrekoa kalkulatzeko. Kasu honetan,

$$\begin{aligned} \arg \left[G'(z) \right]_{z=0,881+0,186j} &= \arg \left[\frac{(z + 0,2419)(z + 3,3844)}{(z - 1)(z - 0,9355)(z - 0,7165)} \right]_{z=0,881+0,186j} = \\ &= -266,2^\circ \end{aligned}$$

Ikusten denez, $86,2^\circ$ -ko angelua gehitu behar da —aurreratuz—. Nahiz eta angelu oso handia izan, kondizio hori betetzen duen konpentsadorea honako hau da:

$$D(z) = k' \frac{z - 0,907}{z}$$

Konpentsatutako sistemaren erroen leku geometrikoaren diagrama eta horren xehetasun bat ikus daitezke 5.16(a) eta (b) irudietan. Erro dominanteak diseinuaren hasieran finkatutako kokalekuetan egon daitezen behar den irabazia $k = 0,0105$ da. Horrenbestez, begizta itxiko sistemaren poloak hauek dira:

$$z_{1,2} = 0,88 \pm 0,185j \quad (s_{1,2} = -1,575 \pm 3,126j)$$

$$z_3 = 0,892 \quad (s_3 = -1,71)$$

$$z_4 = -0,0108 \quad (s_{4,5} = -67,9 \pm 47,1j)$$

Polo horiek erantzun egokia eragingo dute, baldin eta $s = -1,71$ puntuan dagoenaren eragina handiegia ez bada.

Sistema osoaren irabazia $k = 0,0105$ izan dadin konpentsadoreak eman behar duen k' irabaziaren balioa hau izango da:

$$k' = 0,0105/0,002238 = 4,69$$

eta konpentsadorearen egitura osoa, berriz,

$$D(z) = 4,69 \frac{z - 0,907}{z}$$

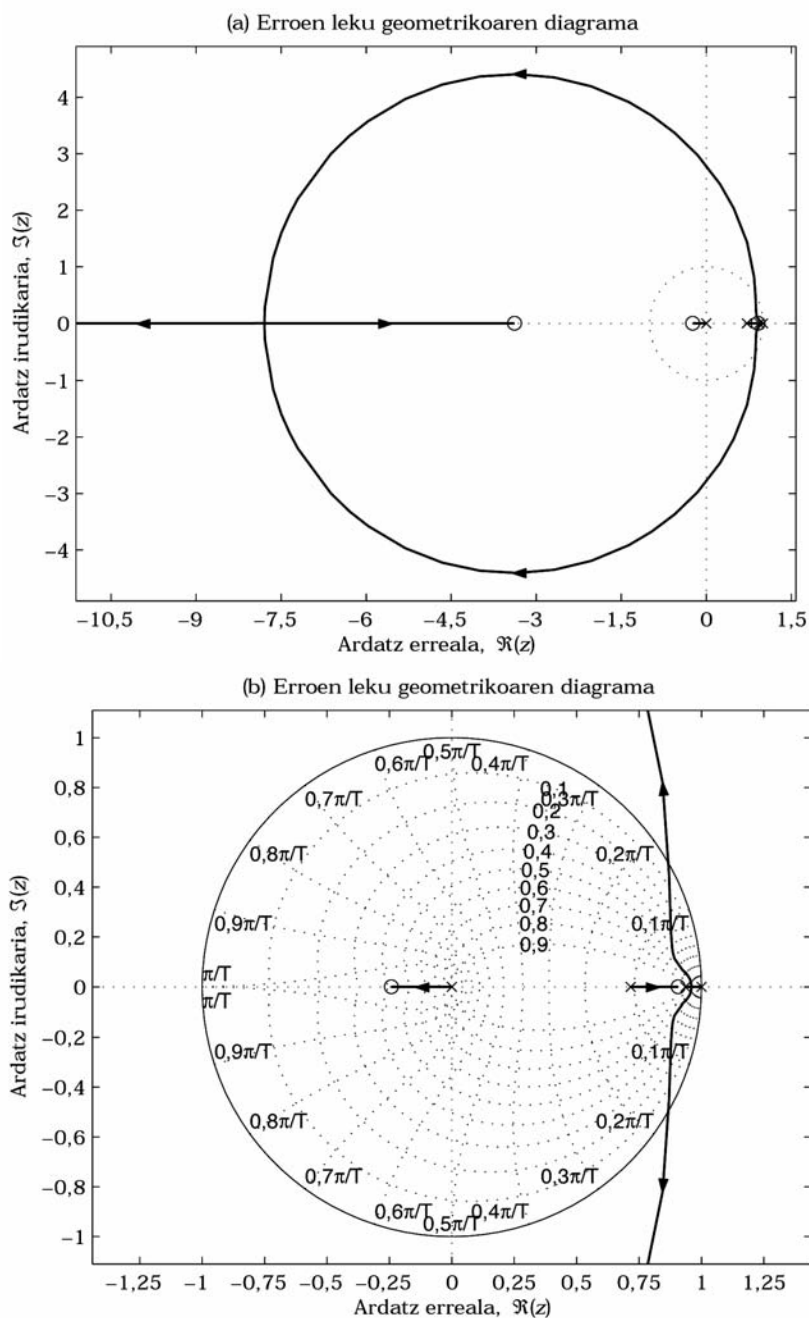
Orduan, kontrol-algoritmo hau lortzen da:

$$u_n = 4,69e_n - 4,25e_{n-1}$$

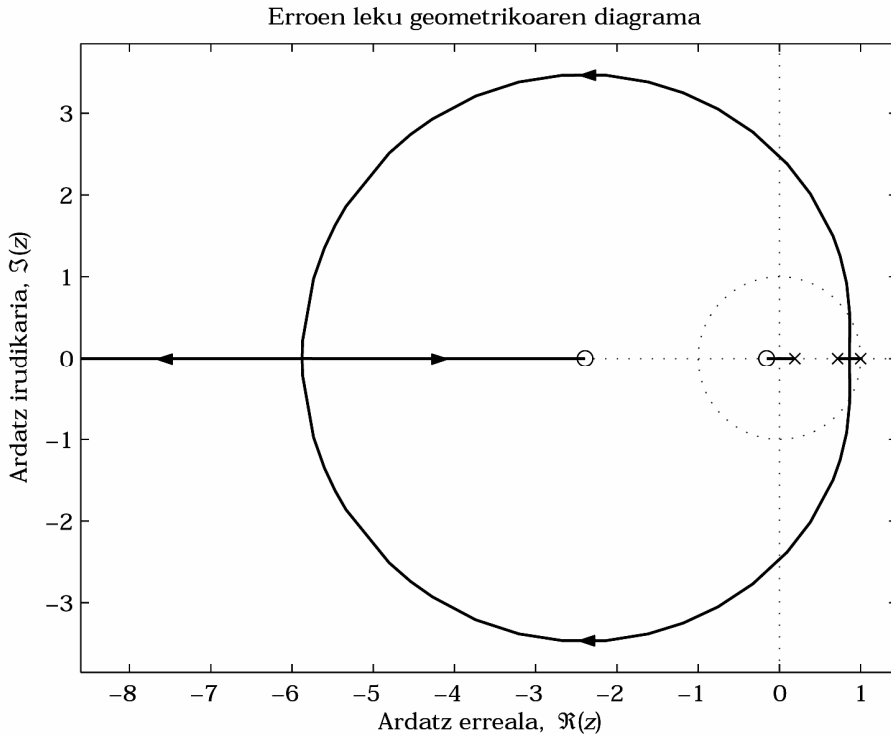
$T = 1/3$ s denean

Laginketa-periodoa $T = 1/3$ segundo denean lortzen den konpentsatu gabeko sistemaren erroen leku geometrikoaren diagrama ageri da 5.17 irudian. Konpentsatutako sistemaren erroen leku geometrikoaren diagrama $z_{1,2} = 0,3 \pm 0,51j$ puntuetatik igaro dadin, konpentsadoreak aurreratu behar duen angelua $T = 1/15$ s zen kasuan baino handiagoa da.

$$\begin{aligned} \arg[G'(z)]_{z=0,3+0,51j} &= \arg\left[\frac{(z+0,1548)(z+2,3943)}{(z-1)(z-0,7165)(z-0,1889)}\right]_{z=0,3+0,51j} = \\ &= -291,9^\circ \end{aligned}$$



5.16 irudia. Konpentsatutako sistemaren erroen leku geometrikoaren diagrama eta horren xehetasun bat, $T = 1/15$ segundo denean.



5.17 irudia. $G'(z)$ sistemaren erroen leku geometrikoaren diagrama, $T = 1/3$ segundo denean.

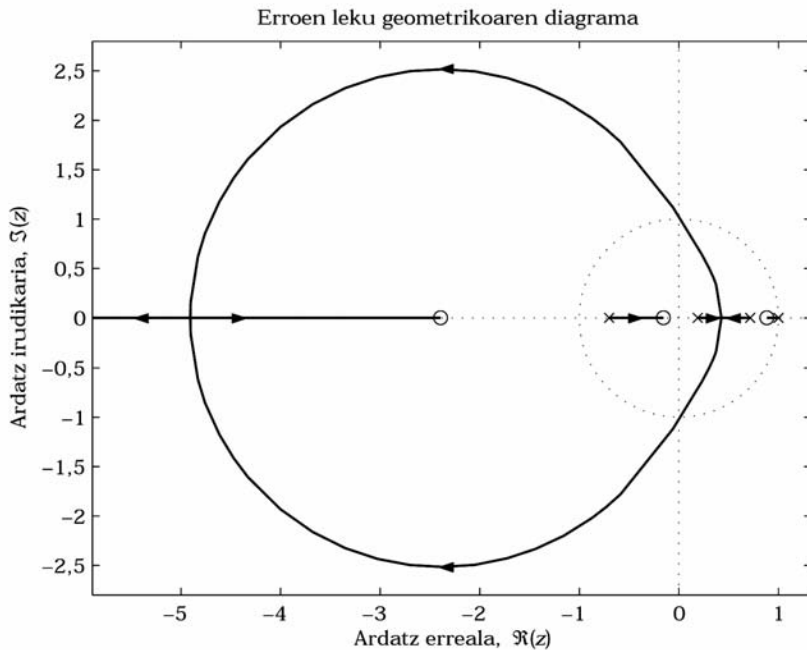
Beraz, konpentsadoreak aurrerratu behar duen angelua $111,9^\circ$ -koa da. Hori ezin da lortu konpentsadorearen poloa z planoko jatorrian egonda, PD konpentsadorearen kasuan gertatzen den bezala. Kasu horretan, gainera, zeroa zirkulu unitariotik kanpo egongo litzateke. Beraz, lortu nahi dugun konpentsadoreak zeroa eta poloa izango ditu behar den angelu hori emateko, eta, bestetik, hasieratik finkatutako kondizioak bete beharko ditu. Aurreratze-ezaugarriak besterik ez dituen konpentsadoreak ez lituzke kondizio guztiak beteko, baina, dena den, aurreratze hutseko konpentsadorea aurkeztzen dugu dakartzan zailtasunak aztertzearen.

Froga-errore metodoa erabiliz, fase-aurrerapen egokia ematen duen konpentsadore hau diseinatzen da:

$$D(z) = k' \frac{z - 0,885}{z + 0,7}$$

Konpentsatutako sistemaren erroen leku geometrikoaren diagrama aurkezten da 5.18 irudian. $k = 0,2295$ denean, polo dominanteak finkatutako kokalekuetan daude, eta begizta itxiko poloak hauek dira:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= 0,3 \pm 0,51j & (s_{1,2} &= -1,575 \pm 3,126j) \\ z_3 &= 0,91 & (s_3 &= -0,283) \\ z_4 &= -0,5344 & (s_{4,5} &= -1,88 \pm 9,423j) \end{aligned}$$



5.18 irudia. Konpentsatutako sistemaren erroen leku geometrikoaren diagrama, $T = 1/3$ segundo denean.

Nahiz eta finkatutako ezaugarriak polo bikote batentzat lortu diren, gainerako poloak ez dira egokiegia. Bestalde, konpentsadorearen k' irabaziaren balioa

$$k' = 0,2295/0,1955 = 1,174$$

izango da, eta konpentsadore osoaren transferentzia-funtzioa, berriz,

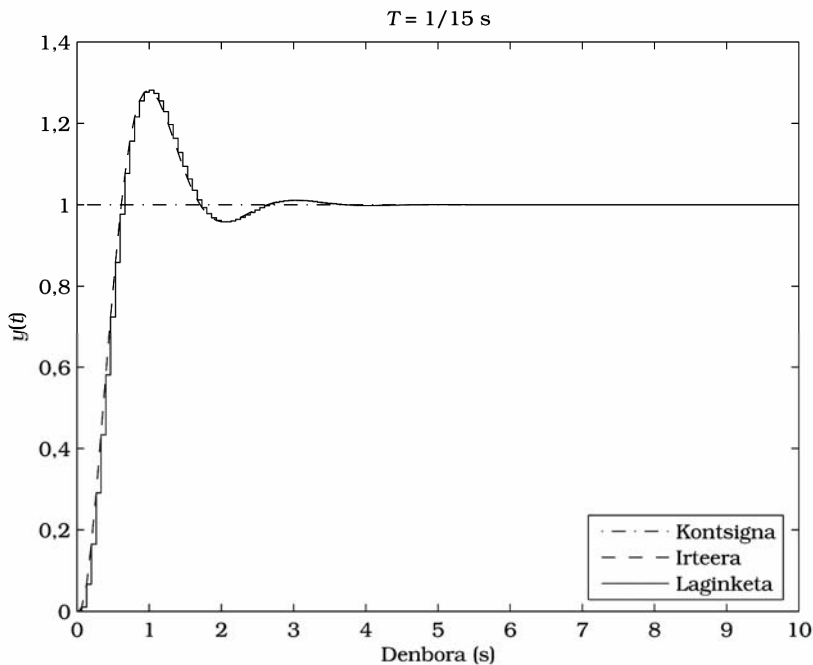
$$D(z) = 1,174 \frac{z - 0,885}{z + 0,7}$$

Azkenik, kontrol-algoritmoa honako hau da:

$$u_n = -0,7u_{n-1} + 1,174e_n - 1,039e_{n-1}$$

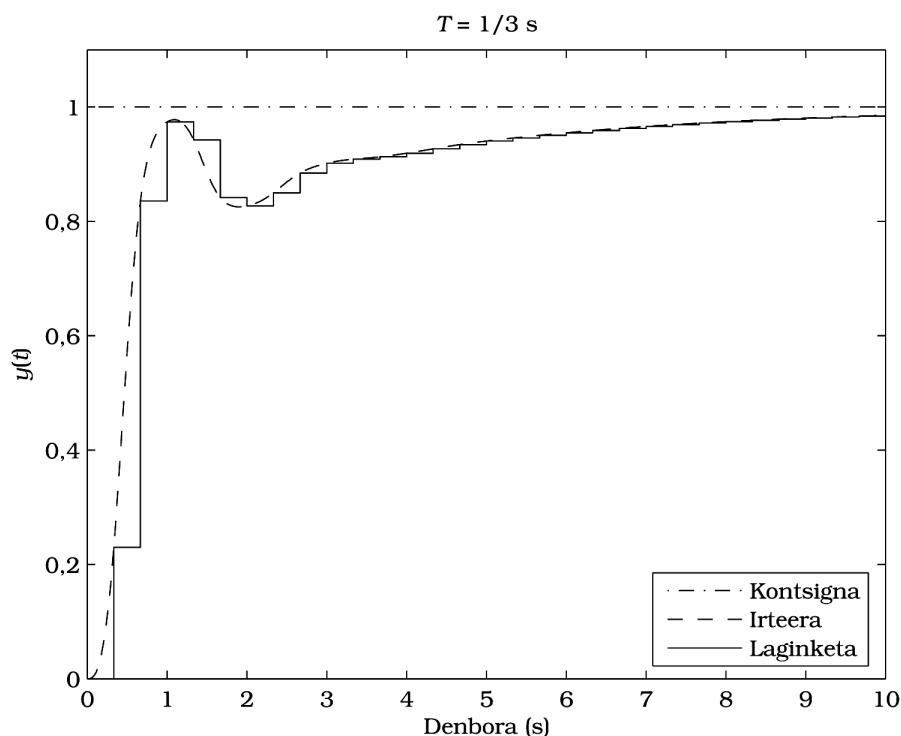
Simulazio-emaitzak

Kontsideratu ditugun bi laginketa-periodoekin egindako simulazioei dagozkien emaitzen azterketa interesgarria izan daiteke. $T = 1/15$ segundo denean sistemak maila unitarioko sarrerari emandako denbora-erantzuna ikusten da 5.19 irudian. Argi dago erantzun egokia dela, eta, lortutako gainditzea, ostera, hasieratik finkatutako moteltze-faktorearen zehaztapenarekin bat datorrela. Beraz, diseinatu den PD kontroladorea egokia da.



5.19 irudia. Konpentsatutako sistemak denboran zehar duen erantzuna, $T = 1/15$ segundo denean.

5.20 irudian, berriz, $T = 1/3$ segundoko laginketa-periodoa erabiliz lortzen den sistemaren denbora-erantzuna islatzen da. Aurreikusi den bezala, $\zeta = 0,91$ poloaren eragina dela eta, erantzuna ez da oso egokia. Dena den, gainditzetik erakusten ez badu ere, sistemaren erantzuna erreferentziara inguratzen da.

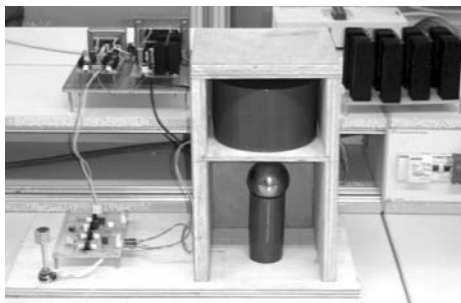


5.20 irudia. Konpentsatutako sistemak denboran zehar duen erantzuna, $T = 1/3$ segundo denean.

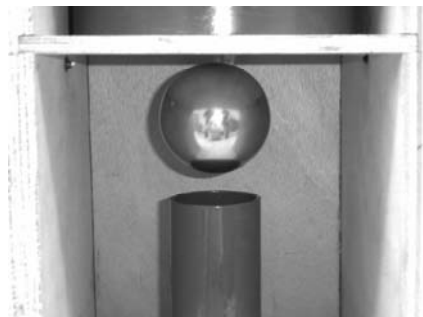
5.4 adibidea

Donostiako Unibertsitate Eskola Politeknikoan irakasten den Elektronikako Industri Ingeniaritza Teknikoko titulazioan matrikulatutako ikasle batek 5.21(a) irudiko lebitadore magnetikoaren prototipoa garatu zuen, 2003-04 ikasturtean, karrera-amaierako proiektu

gisa. Lebitazio-sistema 4.4 ariketan deskribatutako printzipio berean oinarritzen da, eta, 5.21(b) irudian ikus daitekeen bezala, 880 gramoko altzairuzko bola bat airean esekita mantentzeko gai da.



5.21(a) irudia. Lebitadore magnetikoaren prototipoa.



5.21(b) irudia. Bolaren lebitazioa.

(Raúl García Moneo ikasleak utzitako argazkiak)

Elektroimana eta bolaz osatutako azpisistemaren eredu dinamikoa ez-lineala da; izan ere, elektroimanak bolari eragiten dion erakartze-indar magnetikoak adierazpen honi jarraitzen dio:

$$f_m(i, x) = \frac{1}{2a} L_1 e^{-x/a} i^2 \quad (5.44)$$

i da elektroimana zeharkatzen duen korronea, x harilaren behe-muturretik bolaren goi-muturreraino dagoen distantzia, eta L_1 eta a dira elektroimana gehi bolaz osatutako multzoaren inдукtantzia aldagarria ezartzen duten parametroak. Espero zitekeen bezala, (5.44) adierazpenaren arabera, erakartze-indarra areagotzeko, bolaren eta harilaren arteko x distantzia txikiagotu, edo, bestela, harila zeharkatzen duen i korronea igoarazi behar da.

Horrenbestez, elektroimana-bola azpisistemaren portaera dinamikoa ereduizatzen duen ekuazio diferentziala hau da:

$$mg - f_m(i, x) = m\ddot{x} \quad (5.45)$$

m bolaren masa eta g grabitatearen azelerazioa dira. Ikus daitekeenez, bola harilaren behe-muturretik d distantziara orekan — $\ddot{x} = 0$ — lebitatzen mantentzen dadin, f_m indar magnetikoak bolaren pisua berdindu behar du.

Horretarako, elektroimana zeharkatu behar duen I korronea hau dela ondoriozta daiteke (5.44) adierazpenetik:

$$I = \sqrt{\frac{2mga}{L_1 e^{-d/a}}} \quad (5.46)$$

Kontrol-lege lineal bat diseinatzeko asmoz, (5.45) ekuazioa $x = d$ eta $i = I$ diren oreka-puntu baten inguruan linealizatuz gero, adierazpen hau lortzen da:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2(d + \Delta x)}{dt^2} &= mg - f_m(I, d) + \left. \frac{\partial(mg - f_m(i, x))}{\partial i} \right|_{I, d} \Delta i + \\ &+ \left. \frac{\partial(mg - f_m(i, x))}{\partial x} \right|_{I, d} \Delta x \end{aligned}$$

non $\Delta x = x - d$ eta $\Delta i = i - I$ baitira. Eta, hori garatuz,

$$\begin{aligned} m \Delta \ddot{x} &= 0 - \frac{1}{a} L_1 e^{-x/a} i \bigg|_{I, d} \Delta i + \frac{1}{2a^2} L_1 e^{-x/a} i^2 \bigg|_{I, d} \Delta x = \\ &= -\frac{1}{a} L_1 e^{-d/a} I \Delta i + \frac{1}{2a^2} L_1 e^{-d/a} I^2 \Delta x \end{aligned} \quad (5.47)$$

Azkenik, (5.46) ekuazioko I eta d -ren arteko erlazioa kontuan izanik, (5.47) adierazpena honela berridatz daiteke:

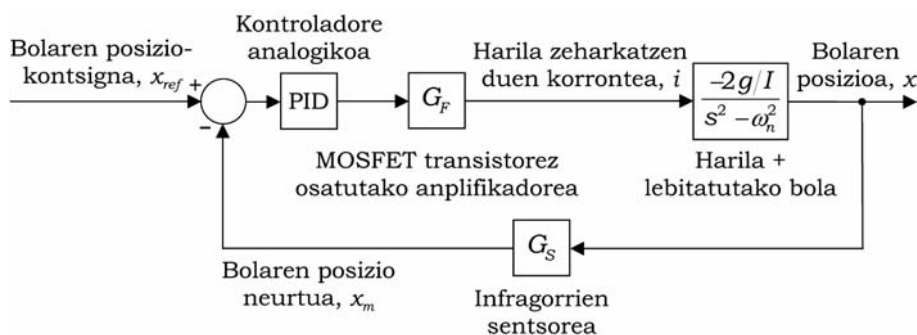
$$\Delta \ddot{x} = -\frac{2g}{I} \Delta i + \frac{g}{a} \Delta x$$

Ondorioz, transferentzia-funtzio honen bitartez aurkez daiteke kontrolatu beharreko sistemaren eredu lineal hurbildua:

$$G(s) = \frac{\Delta X(s)}{\Delta I(s)} = \frac{-2g/I}{s^2 - \omega_n^2} \quad (5.48)$$

non $\omega_n = \sqrt{g/a}$ baita.

5.21 irudiko prototipoaren bolak harilarekiko duen lebitazio-posizioa gobernatu nahian, anplifikadore operazioaletan oinarritutako PID kontroladore analogiko bat eraiki zen aurrena, eta, (5.48) eredua abiapuntutzat hartuz, poloen esleipenaren teknika aplikatuz doitu hura gero. 5.22 irudiak islatzen du garatutako kontrol-sistemari dagokion bloke-diagrama sinplifikatua. Ikus daitekeen bezala, elektroimana MOSFET transistoreetan oinarritutako anplifikadore baten bidez elikatzen den bitartean, bolaren harilarekiko posizioa infragorrien sentsore bat erabiliz neurtzen da. Bestalde, lebitazio-sistema jakin horri dagozkion parametroen balioak 5.2 taulan jaso dira.



5.22 irudia. Lebitadore magnetikoaren kontrol-sistema analogikoa.

Demagun maiztasunaren arloan zuzenean diskretuki diseinaturiko konpentsadore digital batez ordezkatu nahi dugula 5.22 irudiko PID kontroladore analogikoa, eta bete beharreko zehaztapen gisa bi kondizio hauek ezartzen direla:

1. Begizta itxiko sistemak gehienez % 10eko egoera iraunkorreko errorea izango du maila sarreraren aurrean.
2. Konpentsatutako sistemak 60°-ko fase-tartea izan behar du.

5.2 taula. Lebitazio-sistemaren parametroak.

<i>Parametroa</i>	<i>Balioa</i>
g	9,81 m/s ²
I	2,1 A
ω_n	37,435 s ⁻¹
G_F	2,5 A/V
G_S	800 V/m

Jatorrizko PID analogikoaren ordezt

$$D(s) = -11,4904 \frac{s + 63,4812}{s + 884,1796}$$

transferentzia-funtzioko aurreratze-kompentsadore jarraitua erabiliko balitz, froga daiteke, aurreko bi zehaztapenak betetzeaz gain, begizta itxian $\omega_c = 373$ rad/s inguruko banda-zabalera lortuko litzatekeela.

Horiek horrela, egokia dirudi $\omega_s = 10\omega_c = 3730$ rad/s edo gehiagoko laginketa-maiztasuna hautatzea kompentsadore digitalaren diseinu diskretuari ekiteko. Aurreko kontsiderazioak kontuan izanik, planta diskretizatzeko erabili beharreko laginketa-periodoa gehienez

$$T = \frac{2\pi}{10\omega_c} = 1,6845 \text{ ms}$$

litzateke. Horrenbestez, $T = 1,5$ ms-ko laginketa-periodoa aukeratuko da.

5.22 irudiari erreparatuz, ondoriozta daiteke hau dela gobernatu beharreko sistemaren begizta irekiko transferentzia-funtzioa:

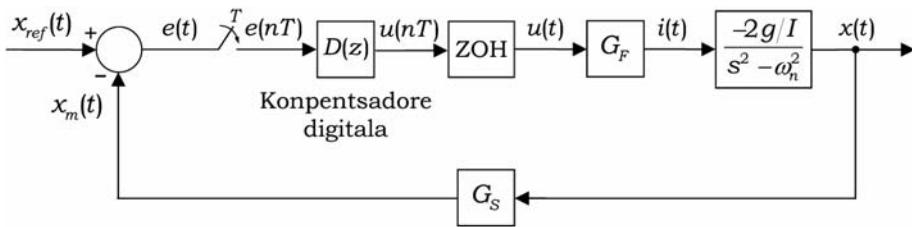
$$G_F G(s) G_S = \frac{-2gG_F G_S/I}{s^2 - \omega_n^2} = \frac{-2gG_F G_S/I}{(s + \omega_n)(s - \omega_n)}$$

Horren baliokide diskretua lortzeko, konpentsadore digitalaren eta G_F irabaziko amplifikadorearen artean ezarritako zero ordenako euskailuaren eragina aintzat hartu beharra dago —ikus 5.23 irudia—. Hortaz, konpentsadore digitalak hautematen duen begizta irekiko transferentzia-funtzioa hau da:

$$G'(s) = G_{H_0}(s)G_F G(s)G_S = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{-2gG_F G_S / I}{(s + \omega_n)(s - \omega_n)}$$

eta horri dagokion baliokide diskretua, berriz,

$$\begin{aligned} G'(\tilde{z}) &= \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{-2gG_F G_S / I}{(s + \omega_n)(s - \omega_n)} \right] = \\ &= \frac{\tilde{z} - 1}{\tilde{z}} \mathcal{Z} \left[\frac{2gG_F G_S}{I\omega_n^2} \frac{-\omega_n^2}{(s + \omega_n)(s - \omega_n)} \right] = \\ &= \frac{2gG_F G_S}{I\omega_n^2} \frac{\tilde{z} - 1}{\tilde{z}} \left(\frac{\tilde{z}}{\tilde{z} - 1} - \frac{1}{2} \frac{\tilde{z}}{\tilde{z} - e^{-\omega_n T}} - \frac{1}{2} \frac{\tilde{z}}{\tilde{z} - e^{\omega_n T}} \right) \\ G'(\tilde{z}) &= \frac{gG_F G_S}{I\omega_n^2} \frac{(2 - e^{-\omega_n T} - e^{\omega_n T})(\tilde{z} + 1)}{\tilde{z}^2 - (e^{-\omega_n T} + e^{\omega_n T})\tilde{z} + 1} \end{aligned} \quad (5.49)$$



5.23 irudia. Lebitadore magnetikoaren kontrol-sistema digitala.

Maiztasunaren arloko konpentsadore diskretuaren diseinua jarraituentzat aplikatzen diren metodoekin gauzatu ahal izateko, ezinbestekoa da, beste ezer egin baino lehen, $G'(\tilde{z})$ -ren $\mathcal{W}$ transformatua lortzea. Hala, (5.49) adierazpenean

$$\tilde{z} = \frac{1 + T\omega/2}{1 - T\omega/2} \text{ aldagai-aldaketa aplikatuz gero,}$$

$$\begin{aligned}
 G'(w) &= \frac{g_{G_F} G_S}{I \omega_n^2} \frac{\left(2 - e^{-\omega_n T} - e^{\omega_n T}\right) \left(\frac{1 + T w / 2}{1 - T w / 2} + 1\right)}{\left(\frac{1 + T w / 2}{1 - T w / 2}\right)^2 - \left(e^{-\omega_n T} + e^{\omega_n T}\right) \frac{1 + T w / 2}{1 - T w / 2} + 1} = \\
 &= \frac{-4 g_{G_F} G_S}{T I \omega_n^2} \frac{\frac{2 - e^{-\omega_n T} - e^{\omega_n T}}{2 + e^{-\omega_n T} + e^{\omega_n T}} \left(w - \frac{2}{T}\right)}{w^2 + \frac{4}{T^2} \frac{2 - e^{-\omega_n T} - e^{\omega_n T}}{2 + e^{-\omega_n T} + e^{\omega_n T}}} \quad (5.50)
 \end{aligned}$$

Hartara, (5.49) eta (5.50) adierazpenetan ageri diren parametroen balioak ordezkatzuz, begizta irekiko transferentzia-funtzio hauek erdiesten dira $\tilde{\kappa}$ eta w planoetan:

$$G'(\tilde{\kappa}) = \frac{-0,02103(\tilde{\kappa} + 1)}{\tilde{\kappa}^2 - 2,0032\tilde{\kappa} + 1} \quad \text{eta} \quad G'(w) = \frac{14,0069(w - 1333,3333)}{w^2 - 1400,6431}$$

Konpentsadore digitalaren diseinuari jarraitua balitz bezala ekingo zaio w planoan; $D(w)$ lortutakoan, alderantzizko $\mathcal{W}$ transformatua aplikatuko zaio $D(\tilde{\kappa})$ ondorioztatzearen. Horrenbestez, har dezagun

$$D(w) = \frac{k}{\alpha_w} \frac{w + \frac{1}{T_w}}{w + \frac{1}{\alpha_w T_w}} \quad (5.51)$$

konpentsadorearen transferentzia-funtzioa w planoan.

Lehenik eta behin, k irabazia doitu behar zaio egoera iraunkorreko e_{ss} erroreari dagokion zehaztapena betetzeko. Horrenbestez, kontrolatu beharreko sistemaren begizta irekiko (5.48) transferentzia-funtzioa irabazi negatibokoa izaki, begizta itxiko sistema egonkorra izan dadin, ezinbestekoa da konpentsadorearen k irabaziak negatiboa izan behar duela kontsideratzea. Gainera, kasu honetan, sistema 0 tipokoa denez, honela kalkula daiteke maila unitarioko κ_{ref} kontsignen aurrean duen egoera iraunkorreko errorea:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (5.52)$$

non mailako errore-konstantea baita K_p .

Transferentzia-funtzio jarraitu edo diskretuetan oinarrituz kalkulaturik ere, K_p bera lortzen dela frogatu zen 4. kapituluko 4.6.4 azpiatalean. Horretaz gain, 4.2 adibideak adierazten du edozein transferentzia-funtzio jarraituren $\mathcal{W}$ transformatuak bere jatorrizko irabazia mantentzen duela. Hortaz, espero izatekoa da $G'(w)$ transferentzia-funtzioa abiapuntutzat harturik lortzen den K_p -ren balioa ere aurreko biekien bat etortzea. Izan ere,

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} k G_F(s) G_S = \lim_{s \rightarrow 0} k G_F \frac{-2g/I}{s^2 - \omega_n^2} G_S = \frac{2g G_F G_S k}{I \omega_n^2} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{z \rightarrow 1} k G'(\tilde{z}) = \lim_{z \rightarrow 1} k \frac{g G_F G_S}{I \omega_n^2} \frac{(2 - e^{-\omega_n T} - e^{\omega_n T})(\tilde{z} + 1)}{\tilde{z}^2 - (e^{-\omega_n T} + e^{\omega_n T})\tilde{z} + 1} = \\ &= \frac{2g G_F G_S k}{I \omega_n^2} \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{w \rightarrow 0} k G'(w) = \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} k \frac{-4g G_F G_S}{T I \omega_n^2} \frac{\frac{2 - e^{-\omega_n T} - e^{\omega_n T}}{2 + e^{-\omega_n T} + e^{\omega_n T}} \left(w - \frac{2}{T} \right)}{w^2 + \frac{4}{T^2} \frac{2 - e^{-\omega_n T} - e^{\omega_n T}}{2 + e^{-\omega_n T} + e^{\omega_n T}}} = \frac{2g G_F G_S k}{I \omega_n^2} \end{aligned} \quad (5.55)$$

Bistakoa denez, hiru eratara kalkulaturiko K_p -ak bat datoz. Propietate hori orokorra da, eta, ondorioz, konpentsadorea diskretuki diseinatu behar bada ere, haren irabaziaren doiketa, $\tilde{z}$ planoan ez ezik, s edo w planoetan ere egin daiteke, hiru metodoek emaitza bera eragiten baitute.

Bestalde, kasu honetan k irabaziak negatiboa izan behar duenez, K_p ere ezinbestean negatiboa izango dela inplikatzan dute (5.53)–(5.55) ekuazioek. Hori dela eta, (5.52) adierazpenari erreparaturaz, ondoriozta daiteke maila unitarioko

kontsignen aurrean % 10eko egoera iraunkorreko errorea lortzeko modu bakarra dela $K_p = -11$ eta, ondorioz, $e_{ss} = -0,1$ izatea. e_{ss} negatiboa izateak adierazten du bolak harilaren behe-muturrarekiko behar baino % 10 urrunagoko distantziara lebitatuko duela. Azken finean,

$$k = \frac{I\omega_n^2 K_p}{2gG_F G_S} = -0,8250$$

Behin k irabazia doitu ostean, $kG'(w)$ transferentzia-funtzioaren maiztasun-erantzuna 5.24 irudiko Bode diagramaz baliatuz aztertzen da. Han, fase-tartea $-5,08^\circ$ dela egiazta daiteke, ezarritako 60° -ko zehaztapenetik oso urrun. Espezifikazio hori bete izan balitz, diseinua amaitutzat jo eta, konpentsadore gisa, $k = -0,8250$ balioko irabazi hutsa erabiliko litzateke. Aztergai den lebitadore magnetikoaren kasuan ordea, konpentsadorearen diseinua (5.51) adierazpeneko

$$\frac{D(w)}{k} = \frac{1}{\alpha_w} \frac{w + \frac{1}{T_w}}{w + \frac{1}{\alpha_w T_w}} \quad (5.56)$$

gaia ere gehituz osatu beharra dago, k irabazi hutsa kontroladore gisa erabiliz begizta itxiko sistema ezegonkorra gertatuko bailitzateke.

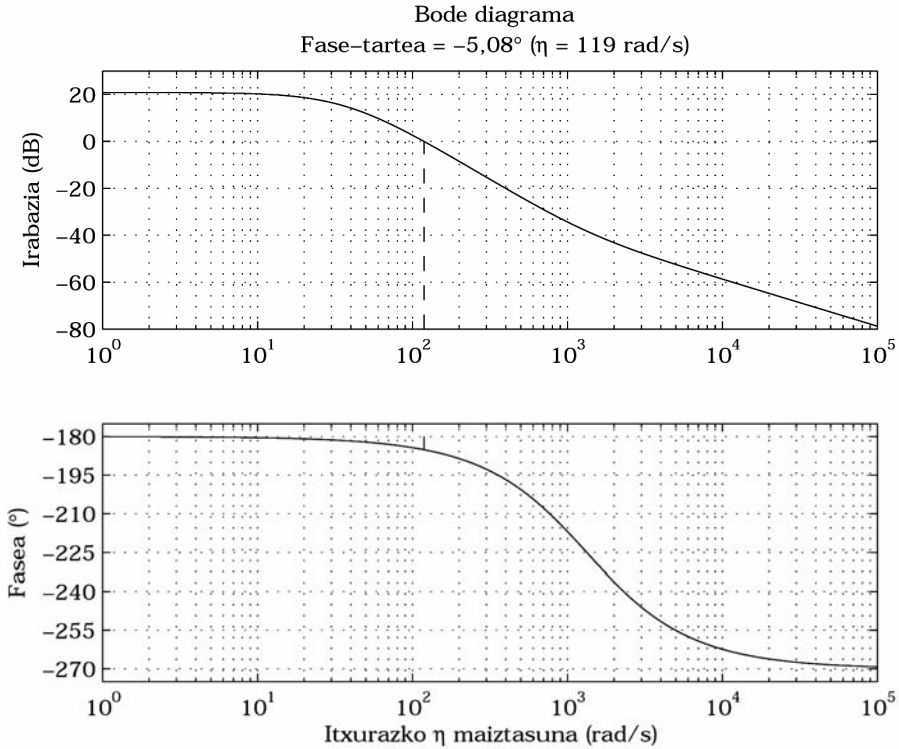
Gainera, 5.24 irudiko fasearen diagramak argi erakusten du diseinatu beharreko konpentsadoreak aurreratzekoa izan behar duela; izan ere, atzeratze-kompentsadore bat sartzeak eragingo luke edozein maiztasuni dagokion fase-atzerapena gutxienez 180° izatea, eta, ondorioz, 60° -ko fase-tartea lortzea eragozte. Hortaz, aurreratze-kompentsadore baten (5.56) ekuazioko gaiari dagokion Bode diagrama islatzen du 5.25 irudiak, non

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha_w}{1 + \alpha_w} \quad (5.57)$$

eta

$$\eta_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha_w} T_w} \quad (5.58)$$

baitira.

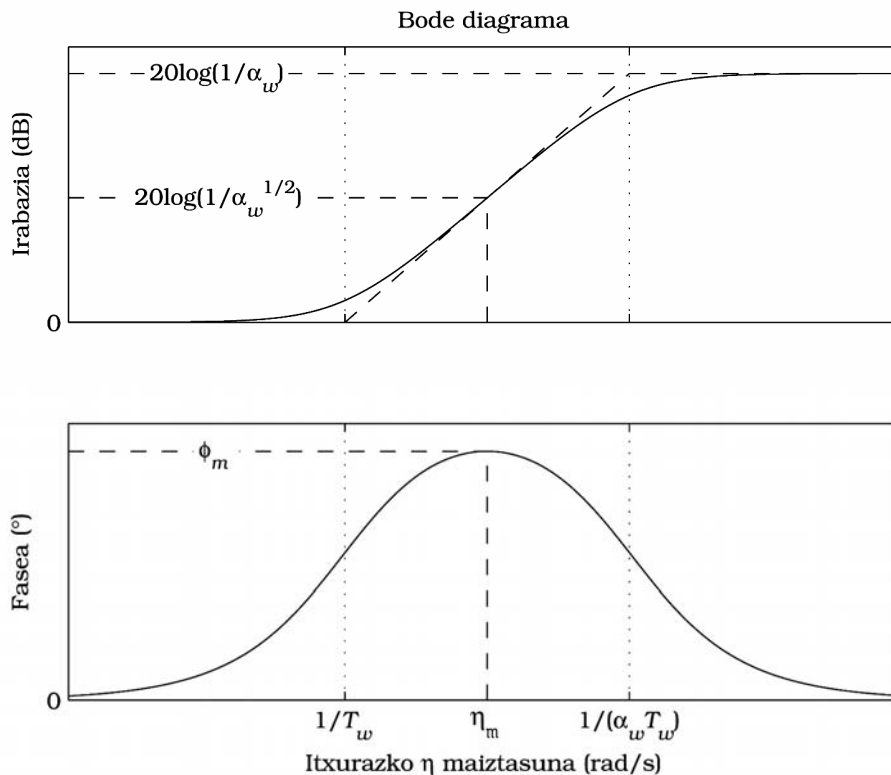


5.24 irudia. $kG'(u)$ transferentzia-funtzioaren Bode diagrama.

Konpentsadorea sartutakoan, 5.24 irudikoari 5.25 irudikoa batuz lortzen da $D(w)G'(w)$ sistemaren Bode diagrama. Ondorioz, ahalik eta diseinurik eraginkorrena egiteko, lortu behar da konpentsadoreak ϕ_m fase-aurrerapen maximoa eskaintzen duen η_m maiztasuna eta konpentsatutako $D(w)G'(w)$ sistemaren fase-tartea kalkulatzeko den maiztasuna bat etortzea.

Horretarako, konpentsadorearen $D(w)/k$ gaiak η_m maiztasunean $20 \log(1/\sqrt{\alpha_w})$ dB-eko irabazia aurkezten duela kontuan hartuz, $kG'(w)$ sistemak $-20 \log(1/\sqrt{\alpha_w})$ dB-eko irabazia duen maiztasuna η_m -ri berdindu behar zaio. Hala, $kG'(w)$ sistema eta $D(w)/k$ gaiari dagozkien Bode diagramak

batuz lortzen den $D(\omega)G'(\omega)$ sistemaren Bode diagramak 0 dB-eko irabazia izango du η_m maiztasunean. Hau da, $D(\omega)/k$ gaiak ϕ_m fase-aurrerapen maximoa eskaintzen duen η_m maiztasunean kalkulatu da konpentsaturiko sistemaren fase-tartea, konpentsadoreak eskaintzen dituen baliabideak ahalik eta gehien ustiatuz.



5.25 irudia. Konpentsadorearen $\frac{D(\omega)}{k} = \frac{1}{\alpha_w} \frac{\omega + 1/T_w}{\omega + 1/(\alpha_w T_w)}$ gaiari dagokion Bode diagrama.

Bestalde, konpentsaturiko $D(\omega)G'(\omega)$ sistemaren fase-tartea $kG'(\omega)$ -rena lortzen den 119 rad/s-ko maiztasun berean kalkulatu balitz, ϕ_m fase-aurrerapenak

$$\phi_m = 5,08^\circ + 60^\circ = 65,08^\circ$$

baliokoa beharko luke 60° -ko fase-tartearen zehaztapena betetzearren. Aitzitik, $D(w)G'(w)$ -ren fase-tartea $kG'(w)$ sistemak $-20\log\left(1/\sqrt{\alpha_w}\right)$ dB-eko irabazia duen maiztasunean kalkulatzen da, 119 rad/s baino handiagoa den η_m maiztasunean, alegia. 5.24 irudian ikus daitekeenez, 119 rad/s baino maiztasun handiagoetan fase-atzerapena $185,08^\circ$ baino handiagoa da, eta, ondorioz, konpentsadoreak dakarren ϕ_m fase-aurrerapenak $65,08^\circ$ baino handixeagoa —tipikoki 5 eta 10° artean— izan beharko du $kG'(w)$ -ren atzerapen gehigarri hori konpentsatzeko.

Dena den, ϕ_m zehazki kalkulatu ahal izateko, ezinbestekoa da aldezturik α_w ezagutzea. Baina α_w parametroa ϕ_m -ren araberkia dela adierazten du (5.57) ekuazioak. Horrek guztiak adierazten du diseinu-metodoak iteratiboa izan behar duela. Hala, zenbait proba egin ostean, 60° -ko fase-tartea iristeko, $D(w)/k$ gaiak ekarri beharreko fase-aurrerapen maximoa

$$\phi_m = 65,08^\circ(+9,12^\circ) = 74,2^\circ$$

dela ikusi da. Horretarako behar den α_w , (5.57) ekuaziotik abiatuz, honela ondorioztatzen da:

$$\alpha_w = \frac{1 - \sin \phi_m}{1 + \sin \phi_m} = 0,01925$$

Ikus daitekeenez, ϕ_m handiegia gertatzen da aurreratze-kompentsadore analogiko bakar baten bitartez lortzeko. Ez horrela kompentsadorea modu digitalean gauzatzen bada; ϕ_m -ren balioaren arabera, programatu beharreko diferentzia-ekuazio baten koefizienteak esleitzen zaizkien balioak baino ez baitira aldatzen orduan.

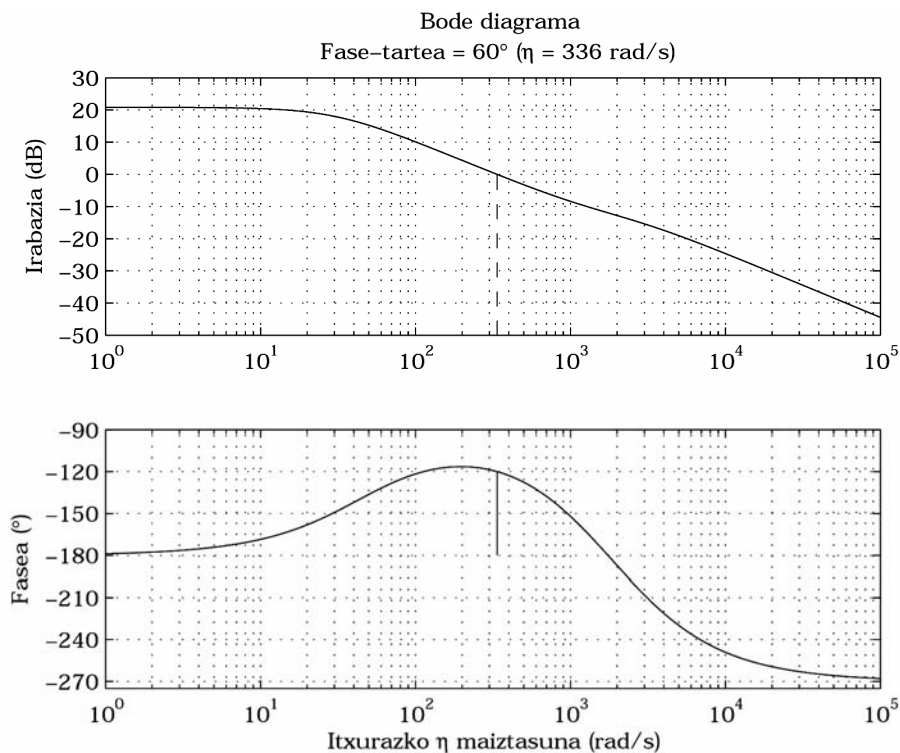
Bestetik, η_m identifikatzeko, 5.24 iruditik ondorioztatzen da $kG'(w)$ sistemak $-20\log\left(1/\sqrt{\alpha_w}\right) = -17,1546$ dB-eko irabazia duen itxurazko maiztasuna; eta hori 336,3181 rad/s da. Datu horrekin, eta (5.58) adierazpenaz baliatuz, $D(w)$ kompentsadorearen azken parametroa honela kalkulatzen da:

$$T_w = \frac{1}{\eta_m \sqrt{\alpha_w}} = \frac{1}{336,3181 \sqrt{0,01925}} = 0,02143$$

Ondorioz, k , α_w eta T_w parametroen balioak (5.51) ekuazioan ordezkatur, w planoan adierazitako transferentzia-funtzio hau lortzen da konpentsadorearentzat:

$$D(w) = -42,8451 \frac{w + 46,668}{w + 2423,7139}$$

5.26 irudian ikus daiteke aurreko $D(w)$ -ren bitartez konpentsatutako $D(w)G'(w)$ sistemaren Bode diagrama. Hor, 60° -ko fase-tartearen zehaztapena betetzen dela egiaztatu ez ezik, hori $\eta_m = 336$ rad/s-ko itxurazko maiztasunean kalkulatzen dela ere frogatzen da.



5.26 irudia. Konpentsaturiko $D(w)G'(w)$ sistemari dagokion Bode diagrama.

5.27 irudiak, berriz, konpentsaturiko begizta itxiko $D(w)G'(w)/[1 + D(w)G'(w)]$ sistemaren maiztasun-erantzuna islatzen du; eta itxurazko banda-zabalera 717 rad/s da. Hortaz, begizta itxiko kontrol-sistemaren

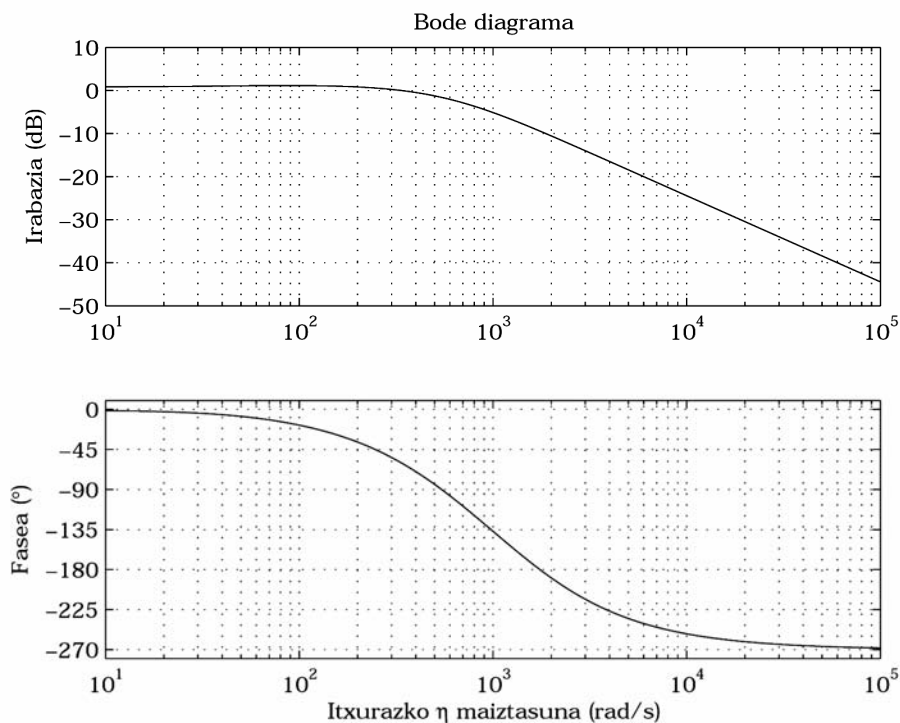
benetako banda-zabalera 4. kapituluko 4.4 atalean ondorioztaturiko ekuazio honetan oinarrituz lor daiteke:

$$\eta = \frac{2}{T} \tan(\omega T/2)$$

izan ere, benetako ω maiztasun bat, edozein, hari dagokion itxurazko η maiztasunetik abiatuz honela kalkula daiteke:

$$\omega = \frac{2}{T} \arctan(\eta T/2)$$

Horrek adierazten du konpentsatu ondorengo lebitadore magnetikoaren banda-zabalera $\frac{2}{0,0015} \arctan(717 \cdot 0,0015/2) \cong 658$ rad/s ingurukoa dela.



5.27 irudia. Konpentsatutako begizta itxiko $D(w)G'(w)/[1 + D(w)G'(w)]$

sistemaren Bode diagrama.

Azkenik, $D(w)$ transferentzia-funtzioaren alderantzizko $\mathcal{W}$ transformatua eginez, konpentsadore digitalari dagokion $D(z)$ transferentzia-funtzio diskretua kalkulatzen da. Horrenbestez, kasu honetan w eta z aldagaiak erlazionatzen dituen ekuazioa

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{0,0015} \frac{z-1}{z+1}$$

dela kontuan harturik,

$$D(z) = -42,8451 \frac{\frac{2}{0,0015} \frac{z-1}{z+1} + 46,668}{\frac{2}{0,0015} \frac{z-1}{z+1} + 2423,7139}$$

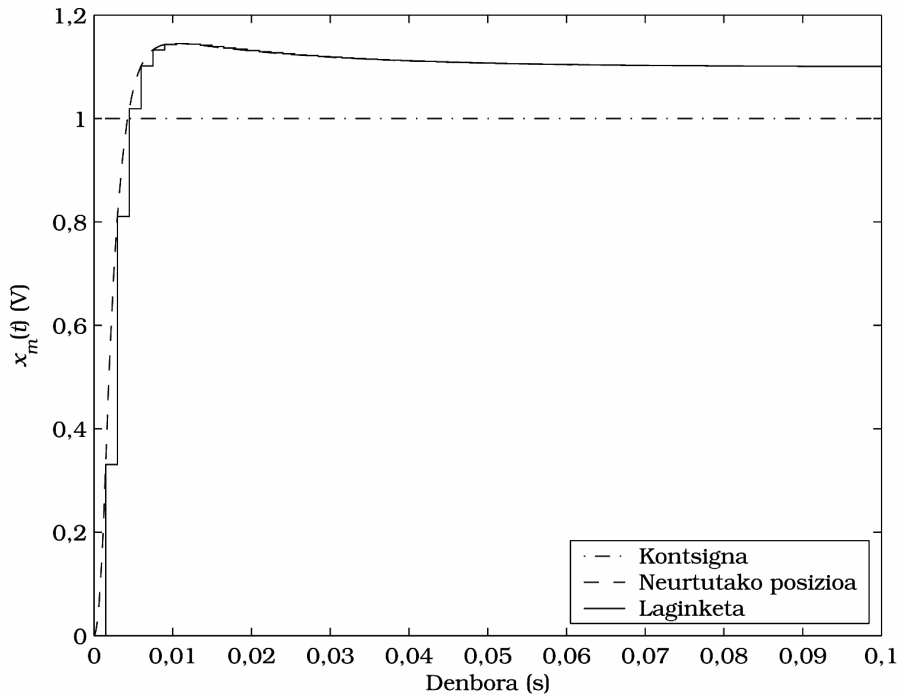
eta, aurreko adierazpena landuz,

$$D(z) = -15,7374 \frac{z-0,9324}{z+0,2902}$$

Ondorioz, aurreratze-kompentsadore hori gauzatzeko programatu beharreko diferentzia-ekuazioa hau da:

$$u_n = -0,2902u_{n-1} - 15,7374e_n + 14,673e_{n-1}$$

Lebitadore magnetikoaren kontrol-sistema digitala diseinatu berri den konpentsadorean oinarrituz gauzatuz gero, simulazio bidez baieztatu daiteke neurtutako x_m posizioak maila unitarioko x_{ref} kontsigna bati 5.28 irudiko denbora-erantzuna emango diola. Bertan, % 10eko egoera iraunkorreko errorearen zehaztapena betetzen dela egiaztatzeaz gain, gehieneko gainditzea baxua dela ere ikus daiteke, 60°-ko fase-tarte batetik espero daitekeen bezala.



5.28 irudia. Simulazioz lortutako lebitazio-sistema digitalen denbora-erantzuna.

5.5 LABURPENA

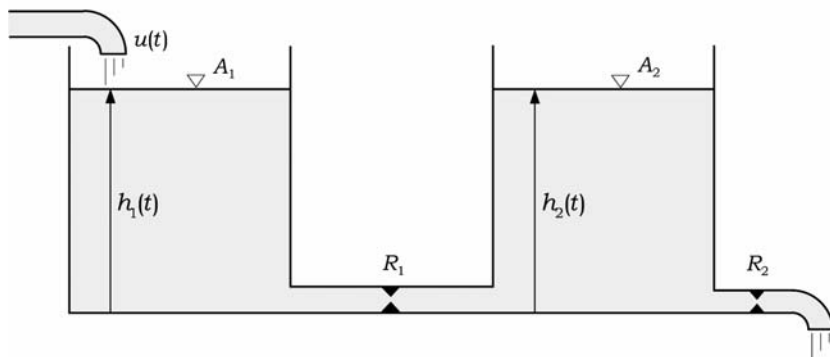
Kapitulu honetan, sistema digitalen kontrola gauzatzeko behar-beharrezkoak diren kontzeptuak landu ditugu hasieran; Z transformatua eta diferentzia-ekuazio linealen arteko erlazioa, eta laginketa-periodoaren zentzuzko hautaketarako irizpideak, alegia. Ondoren, kontroladore digitalen diseinuari ekin diogu. Teknika jarraituak aplikatu ditugu lehenbizi, digitalizazio-prozedura ezberdinak aurkeztu eta haien arteko konparazio-azterketa egin dugu. Amaitzeko, kontroladoreak zuzenean diskretuki diseinatzeko metodoa ere aditzera eman dugu. Horrenbestez, Bode edo erroen leku geometrikoaren diagraman oinarrituriko diseinu-teknika jarraituak nahiz diskretuak aplikatuz, aurreratze/atzeratze erako konpentsazio-sareak nahiz PID motako egitura digitalak garatu ditugu.

5.6 ARIKETAK

5.1 5.29 irudiko sistema aintzat hartuz, begizta itxiko ezaugarri hauek lortu nahi ditugu:

1. Maila erako sarrera baten aurrean lortzen den egoera iraunkorreko errorea zero izatea.
2. Begizta itxiko polo dominanteak jatorrizko kokalekuetan mantentzea.

$A_1 = A_2 = 1$, $R_1 = 1/2$ eta $R_2 = 1/3$ izanik, zehaztaper horiek lortzeko beharrezkoa den PI kontroladorea diseina ezazu, eta, laginketa-periodo egokia hautatuz, kontroladore diskretu baliokidea lortu.



5.29 irudia. Bi andel jauzi eran dituen sistema.

5.2 Transferentzia-funtzio hau duen begizta irekiko sistema hartuz:

$$G(z) = \frac{0,2(z + 0,8)}{(z - 1)(z - 0,6)}$$

diseina ezazu aurretik ezarri beharreko $D(z)$ konpentsadorea, begizta itxiko sistema egonkorra dela ziurtatzeaz gain, arrapala erako sarrera baten aurrean lortzen den egoera iraunkorreko errorea zero izan dadin. Azter ezazu maila erako sarrera baten aurrean lortzen den erantzuna.

5.3 Satelite baten kokalekua definitzeko erabiltzen den funtzioa

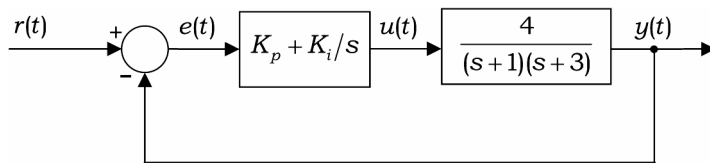
$$G(z) = K \frac{z+1}{(z-1)^2} \text{ da.}$$

- Egin sistemaren erroen leku geometrikoaren diagrama eta aztertu horren portaera.
- Kontroladore bat gehituz lortu nahi diren polo dominantei dagozkien ezaugarriak $\xi = 0,5$ eta $\omega_n = 3\pi/(10T)$ rad/s dira. Diseina ezazu aipatutako kontroladorea.

5.4 4.4 ariketako lebitazio magnetikoko sistema hartuz,

- Diseina ezazu zehaztapen hauek bete ditzan behar den konpentadore digitala: $t_r \leq 0,1$ segundo, $t_s \leq 0,4$ segundo eta $M_p \leq \% 20$.
- Azter ezazu kontroladore hori erabiliz lortzen den denbora-erantzuna, maila erako sarrera aplikatzen denean.

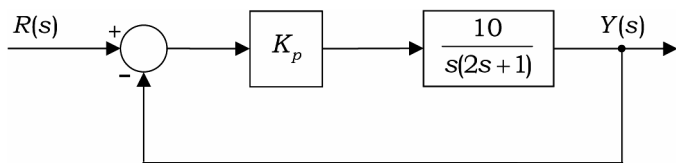
5.5 Aztertu 5.30 irudian ageri den kontrol-sistema, PI motako kontrol-legea erabiltzen denean. Kalkulatu K_p eta K_i parametroen balioak, sarrera gisa $r(t) = t$ funtzioa aplikatzen denean egoera iraunkorreko errorea 0,03 gertatzeaz gain, ekuazio karakteristikoaren erro karratikoen zati erreala -1ekoa izan dadin.



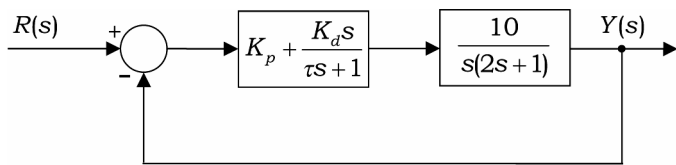
5.30 irudia. PI motako kontrol-legea duen kontrol-sistema.

Hautatu laginketa-periodo egokia ezarpen digitala egin ahal izateko, eta lortu ezarpenerako adierazpena.

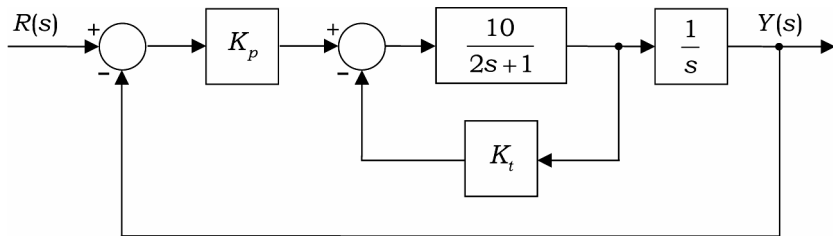
- 5.6 5.31(a) irudiko sistema K_p irabaziko kontroladore proportzionala erabiliz gobernatu nahi denean, erantzun oszilakorra lortzen da. Beraz, 5.31(b) eta (c) irudietako egiturak eta kontrolak proposatzen dira. Kalkula itzazu parametro guztien balioak, ahalik eta sistema azkarrena eta oszilaziorik gabekoa lortu ahal izateko. Hautatu laginketa-periodo egokia, eta lortu ezarpen digitala egiteko behar den adierazpena.



(a)



(b)



(c)

5.31 irudia. 1 tipoko sistemaren kontrol-aukerak.

- 5.7 Demagun sistema baten transferentzia-funtzioa

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

dela. Diseina ezazu horretarako behar den konpentsadorea, $K = 1,0$ denean sistema kritikoki moteldua egoteaz gain, $\tau = 1/(\xi\omega_n)$ denbora-konstantea

2,03 segundo izan dadin. $K = 0,244$ denean konpentsatu gabeko sistemak begizta itxian duena bezalakoa da denbora-konstante hori. Egin ezazu kalkulaturako kontroladorearen adierazpen diskretua.

- 5.8** Aurreko ariketako sistema bera hartuz, demagun $K = 1,5$ izan arte handitzen dela. Kalkula itzazu lortzen diren begizta itxiko polo konplexu dominanteen moteltze-faktorea eta $\tau = 1/(\xi\omega_n)$ denbora-konstantea. Aurki ezazu ezarpen digitalerako adierazpena.

- 5.9** Sistema fisiko baten portaera dinamikoa definitzen duen transferentzia-funtzioa

$$G(s) = \frac{1}{2s + 1}$$

da. Diseina ezazu behar den kontroladorea begizta itxiko sistemaren erantzunak maila unitarioko sarreren aurrean egoera iraunkorreko errorerik ez izateko, gainditzerik ez izateko eta denbora-konstantea $\tau = 1/(\xi\omega_n) = 1$ segundokoa izan dadin. Jo ezazu laginketa-periodoa $T = 0,1$ segundo dela, eta egin ezazu kontroladorearen diseinua sistemaren diskretizazioaz hasita.

- 5.10** Sistema fisiko baten dinamika definitzen duen transferentzia-funtzioa

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 2}$$

da. Sistema horrek maila unitarioko sarreren aurrean % 1eko egoera iraunkorreko errorea izateaz gain, begizta itxiko polo dominanteen $\xi = 0,707$ eta denbora-konstantea $\tau = 1/(\xi\omega_n) = 0,1$ segundo izan daitezen erabil daitekeen kontroladorea $G_c(s) = 202 + 20s$ da. Laginketa-periodoa $T = 0,01$ segundokoa baldin bada, egin kontroladorearen diskretizazioa hiru metodo aplikatuz, eta konpara itzazu guztiekin lortzen diren portaera dinamikoak.

5.11 Sistema baten transferentzia-funtzio diskretua

$$G(z) = \frac{0,18}{z - 0,82}$$

da. Diseina ezazu behar den kontroladorea, sistemak maila unitarioko sarrerari emandako erantzuna $c(t) = 1 - e^{-t}$ izan dadin. Jo ezazu laginketa-periodoa $T = 0,2$ segundo dela.

5.12 Sistema baten transferentzia-funtzio diskretua

$$G(z) = \frac{0,008(z + 0,790)}{z^2 - 1,4536z + 0,4966}$$

da. Aurki ezazu behar den kontroladorea, begizta itxiko sistemaren portaera dinamikoak gainditzetik ez izateaz gain, maila erako sarreren aurrean egoera iraunkorreko errorerik izan ez dezan. Jo ezazu 0,1 segundoko laginketa-periodoa duela.

5.13 Sistema baten transferentzia-funtzio digitala

$$G(z) = \frac{0,3935(z + 0,6065)}{z^2(z - 0,3679)}$$

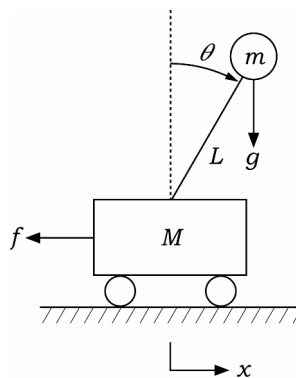
da. Ondoriozta ezazu behar den kontroladorea, maila sarreren aurrean sistemak duen erantzuna errorerik gabekoa izan dadin, eta begizta itxiko polo dominanteak jatorrizko kokalekuetan mantentzea.

5.14 Honako transferentzia-funtzio digital hau duen sistema kontrolatu nahi dugu, egonkortze-denbora hasierakoaren laurdenera jaitsi eta egoera iraunkorreko errorerik izan ez dezan:

$$G(z) = \frac{0,5 + 0,22z}{(z - 0,1)(z - 0,2)}$$

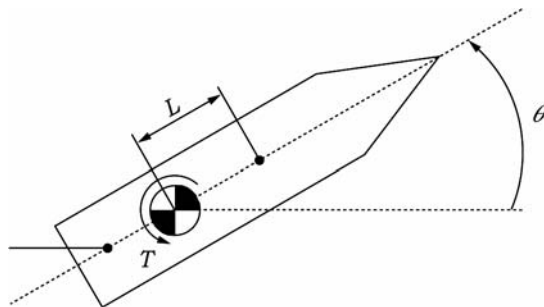
Azter ezazu eskatzen diren zehaztapenak betetzeko modurik badagoen, eta, ez badago, arrazoiu zeini emango zeniokeen lehentasuna. Diseinatu behar den kontroladorea edozein kasutan.

- 5.15** Kohete baten aireratze-prozesua ereduztatzen duen sistema da 5.32 irudikoa. Aplikatutako f indarra kontrol-aldagaia da. Mugimendua aztertzeko erabiltzen den linealizatutako ekuazioa $ML\ddot{\theta} - (M + m)g\theta = f$ dela jakinik, diseina ezazu θ angelua zero inguruan mantentzearren behar den kontroladore digitala. Bete behar diren zehaztapenak $\xi = 0,707$ eta 10 segundoko egonkortze-denbora dira. Bestalde, $M = 50$ kg, $m = 10$ kg, $L = 30$ m eta $g = 9,81$ m/s² dira beste parametroen balioak.



5.32 irudia. Kohete baten portaera adierazteko erabilitako sistema.

- 5.16** Ibilgailu bat jariakin baten barruan mugitzen denean prozesu ezegonkor baten adierazgarri dela esan daiteke, jariakinaren indarrek ez baitute masen zentroan eragiten, presio-zentroan baizik. Beraz, indar horiek momentu bat sortzen dute, ibilgailuaren errotazioa eragiten duena. Honelako ibilgailuen mugimendua elementu gehigarriak erabiliz kontrola daiteke, eta, adibide gisa, 5.33 irudian eskematizatzen den misilaren higidura aztertuko da.



5.33 irudia. Misil baten kontrola.

Horren dinamika adierazten duen linealizatutako ekuazioa $I\ddot{\theta} = T + C_{\eta}L\theta$ da. Demagun horko parametroek balio hauek hartzen dituztela: $I = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ eta $C_{\eta}L = 15 \text{ N}\cdot\text{m}$. Diseina ezazu behar den kontroladorea, sistemaren errotazioa ahalik eta txikiena izan dadin, eta, horrenbestez, $\theta \approx 0$. Hauta ezazu behar den laginketa-periodoa eta definitu kontroladorearen ezarpen-legea.

5.17 Transferentzia-funtzio hau duen sistema kontrolatu nahi dugu:

$$G(z) = \frac{k(z + 0,9)}{(z - 1)(z - 0,7)}$$

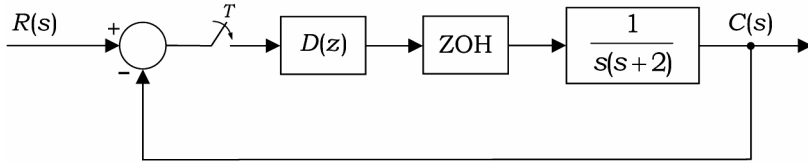
Aurki ezazu behar den laginketa-periodoa, eta diseinatu kontroladore aproposa begizta itxiko sistema 10 segundotan egonkor dadin, $\xi = 0,8$ izanik.

5.18 Azter ezazu sistema honek behar duen kontroladorea, begizta itxian gutxienez $\xi = 0,707$ ko moteltze-faktorea izan dezan:

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 1)}$$

Hauta ezazu behar den laginketa-periodoa, eta ondorioztatu lortutako kontroladorearen ezarpen digitala egiteko behar den adierazpena.

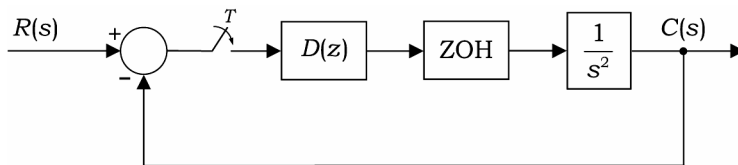
5.19 Har dezagun kontuan 5.34 irudian islatutako kontrol-sistema digitala. Jo ezazu laginketa-periodoa $T = 0,1$ segundo dela.



5.34 irudia. Kontrol-sistema digitala.

- a) Diseina ezazu behar den $D(z)$ kontroladorea, begizta itxiko sistemak honako zehaztapen hauek bete ditzan:
 1. Irabazi-tartea ≥ 25 dB
 2. Fase-tartea $\geq 70^\circ$
 3. Arrapalako errore-konstantea, $K_p = 1 \text{ s}^{-1}$
- b) Ondoriozta ezazu diseinatutako kontrol-lega prozesadore digital batean ezartzea ahalbidetzen duen diferentzia-ekuazioa.

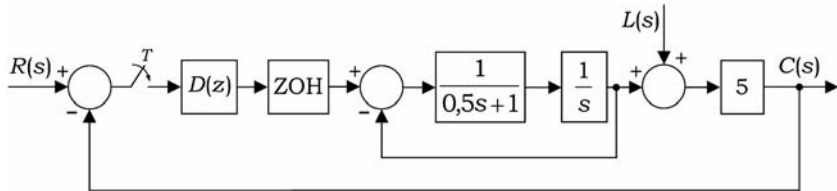
5.20 Demagun 5.35 irudiko kontrol-sistema digitalak $T = 0,1$ segundoko laginketa-periodoa erabiltzen duela.



5.35 irudia. Kontrol-sistema diskretua.

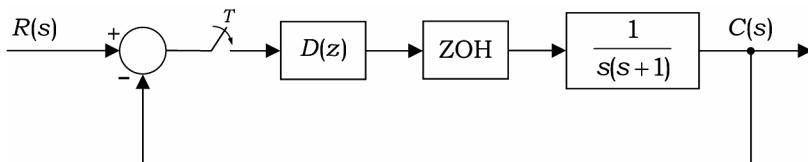
- a) Diseina ezazu $D(z)$ konpentsadore digital egokia, begizta itxiko sistemaren maiztasun-ezaugarriak hauek izan daitezen:
 1. Irabazi-tartea ≥ 15 dB
 2. Fase-tartea $\geq 45^\circ$
- b) Lor ezazu diseinaturiko kontroladorea prozesadore digital batean ezartzeko behar den zenbakizko kontrol-lega.

5.21 Har dezagun kontuan 5.36 irudiko kontrol-sistema. Jo ezazu laginketa-periodoa $T = 0,2$ segundo dela.



5.36 irudia. Kontrol-sistema.

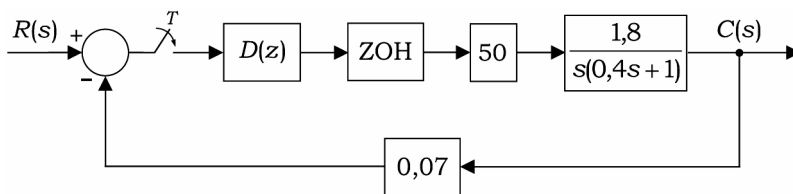
- Aurki ezazu $C(z)/R(z)$ transferentzia-funtzioa, $L(s) = 0$ denean.
 - Kalkula ezazu konpentsatu gabeko $-D(z) = 1$ sistemaren egoera iraunkorreko errorea, sarrera gisa maila unitarioa aplikatzen denean.
 - Diseina ezazu $D(z)$ aurreratze-kompentsadore digitala, kontrol-sistemaren fase-tartea 50° baino handiagoa izan dadin.
 - Kalkula ezazu diseinatutako konpentsadorea erabiliz maila unitarioko sarrera batek eragiten duen egoera iraunkorreko errorea, eta konparatu b) atalean lortu duzunarekin.
 - Ondoriozta ezazu diseinatutako kontroladorea prozesadore digital batean inplementatzeko programatu beharko litzatekeen zenbakizko kontrol-legea.
- 5.22** Konpentsatu gabeko 5.37 irudiko kontrol-sistemak 30° inguruko fase-tartea du. Jo ezazu laginketa-periodoa $T = 1$ segundo dela, eta



5.37 irudia. Kontrol-sistema diskretua.

- Diseinatu $D(z)$ atzeratze-kompentsadore digital egokia, kontrol-sistemaren fase-tartea 50° -raino irits dadin.
- Aurkeztu grafikoki diseinatutako kompentsadore digitalarekin sistemak maila unitarioko sarrera bati ematen dion erantzuna. Konpara ezazu erantzun hori kompentsatu gabeko $-D(z) = 1-$ sistemak duenarekin.
- Diseinatu kontrol-sistemaren fase-tartea 50° -raino igoarazten duen $D(z)$ aurreratze-kompentsadore diskretua.
- Marratzu aurreratze-kompentsadore diskretu horretan oinarrituriko kontrol-sistemak maila unitarioko sarrera bati emango liokeen erantzuna. Konpara ezazu erantzun hori **b)** atalean lortutakoarekin.
- Kalkulatu zer diferentzia-ekuazioak behar diren **a)** eta **c)** ataletan diseinatu dituzun kontrol-legeak prozesadore digital batean ezarri ahal izateko.

5.23 Jo ezazu 5.38 irudiko kontrol-sistema $T = 0,1$ segundoko periodoaz lagintzen dela.



5.38 irudia. Kontrol-sistema digitala.

- Aurki ezazu $C(z)/R(z)$ transferentzia-funtzioa.
- Diseina ezazu $D(z)$ kompentsadore digital aproposa, sistemaren fase-tartea gutxienez 60° -koa izan dadin.

- c) Kalkula ezazu diseinatutako konpentsadorea erabiliz sistemak duen irabazi-tartea.
- d) Ondoriozta ezazu diseinatu duzun kontroladorea prozesadore digital batean ezartzea ahalbidetzen duen zenbakizko kontrol-legea.

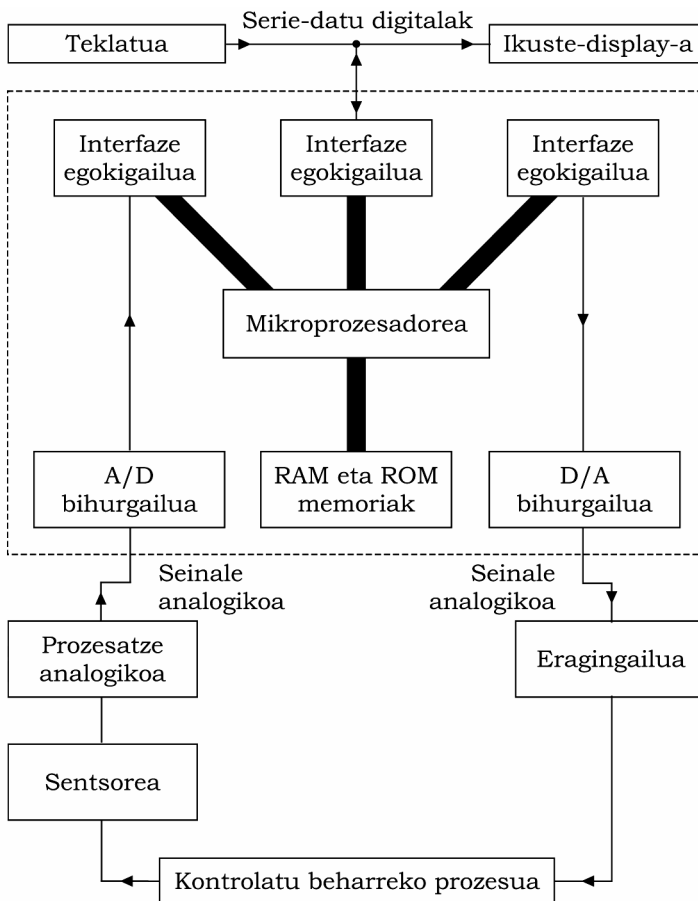
6

Kontrol-begiztaren osagaiak

6.1 SARRERA

Kapitulu honetan, kontrol-begiztan agertzen diren eta eragiketa egokiak egitea ahalbidetzen duten osagaien ezaugarriak eta haien arteko loturak aztertuko ditugu.

6.1 irudian dago mikroprozesadorea osagaitzat duen kontrol-begiztaren diagrama. Lerro etenez inguratutako elementuek osatzen duten egiturari mikro-kontroladore deritzo.



6.1 irudia. Mikroprozesadorea osagaitzat duen kontrol-begizta.

6.2 SARRERAKO ZIRKUITUEN DISEINUA

Kontrol-diagrama batean, neurketa gehienak transduktore analogikoen bitartez egin ohi dira. Hori dela eta, arreta berezia eskaini behar zaie neurgailu horiei loturiko zirkuitu analogiko guztiei. Besteak beste, puntu hauek aztertu behako genituzke:

1. Igorri aurretik, seinaleak anplifikatu, bufferrean sartu edo isolatu egin behar al dira?
2. Zer neurri —konexio bereziak lurrera, iragazketa analogikoa, etab.— hartu behar da interferentziak saihesteko?
3. Transduktoreek behar al dute aplikazio zehatz bati loturiko zirkuitu berezirik?

Hori guztia kontuan hartuz, argi dago kasurik konplexuenetako bat anplitude txiki eta banda-zabalera handiko seinaleak urrutira eta ingurune zaratsuan zehaztasun handiz bidali behar direnean gertatzen dela.

6.2.1 SARRERAKO NEURKETA ARRUNTAK

Kontrol-eskema industrial batek, oro har, hainbat osagai nahiz lekutatik iristen diren berrogeita hamar informazio-sarrera edo gehiago izango ditu. Seinale horien mailak ere ezberdinak izango dira, eta, eskuarki, urrutitik iritsiko dira ingurune zaratsuetatik igaroz.

Horiek horrela, informazio fidagarria konputagailura eramateak garrantzi handia du. Ondoren, zenbait adibide aztertuko ditugu.

6.2.1.1 Posizio angeluarraren neurketa

Posizio angeluarra neurtzeko sinkronizatzailea erabiltzen denean, konputagailura iristen diren seinaleak hiru tentsio hauek dira:

$$v_1 = v \sin \theta$$

$$v_2 = v \sin(\theta + 2\pi/3)$$

$$v_3 = v \sin(\theta + 4\pi/3)$$

θ izanik puntu zehatz batean neurtutako posizio angeluarra.

Seinaleak, eskuarki, 10 Volt inguruan egon ohi dira, eta, neurketa-puntua konputagailutik oso urrun ez badago, zuzenean A/D bihurgailura eraman daitezke. Konputagailuaren barnean, programa batek θ kalkula dezake, hiru seinaleak kontsideratuz.

6.2.1.2 Encoder digitalak posizio angeluarrak neurtzeko

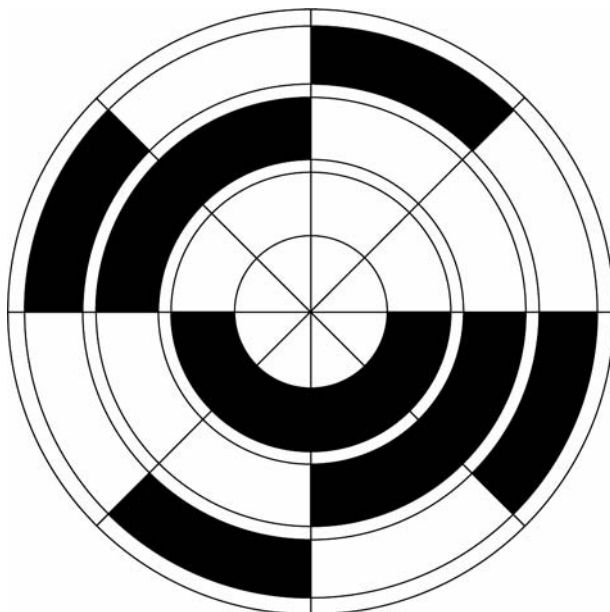
Encoder digitalak seinale digitala sortzen du zuzenean. Horretarako, neurtu beharreko posizioan ipintzen den bereziki osatutako diskoa erabiltzen da.

Disko hori eremu garden eta opakoz osaturik dago; diskoaren biraketaren arabera, haren erradioan zehar ikusten diren eremu garden eta opakuen sekuentziaz posizioa definitzen da. Adibide gisa, 6.2 irudiko diskoak zortzi identifikazio erradial ditu —8 zenbaki bitar, alegia—.

Horrenbestez, argia diskoaren erradioan zehar irakurri eta, sistema fotoelektriko batez baliatuz, posizio zehatza ezagut daiteke. Mota honetako encoderra absolutua da. Encoder honetan, 6.2 irudiko kode bitar naturala ez ezik, beste kode batzuk ere erabil daitezke, Gray kodea, besteak beste.

Encoder digitalen konputagailuarekiko interfazea zuzena da. Encoder hauek sarrerako ataka paralelora lotu eta, nahi denean, programaz irakur daitezke.

Badira neurri erlatiboak hartzeko encoder optikoak ere. Diskoa mugitzen den heinean, pultsuak sortu eta kontagailu batera iristen direnez gero, posizio angeluarra kalkula daiteke. Encoder erlatiboek zehaztasun handia izan arren, aurkako kondizioetan erreferentzia gal dezakete.



6.2 irudia. Encoder digital baten diagrama eskematikoa.

6.2.1.3 *Temperatura-neurketa termoparea erabiliz*

Oro har, temperatura altuak neurtzeko -100 eta $1000\text{ }^{\circ}\text{C}$ artekoak—, termopareak erabiltzen dira. Labe industrialek ez dute $1000\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ko temperatura baino altuagoetan jarduten, eta, ondorioz, termopareak erabili ohi dituzte temperatura neurtzeko.

Termopare arrunt batek $4\text{ mV}/100\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ko irteera ematen du, non bi magnitudeen arteko erlazioa ez-lineala baita. Termoparearen kalibraketa haren lotura hotza $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ra eramanez egiten da. Eskuarki, saiakuntza hori laborategian egin ohi da, eta, horretaz gain, lotura hotzaren konpentsazioa egin behar da, konputagailuaren barnean edo kanpoan.

Perturbazioen eraginak saihesteko, termoparearen seinaleak konpentsaziorik gabek erabiliz garraiatzen dira.

Zirkuitu irekian geratuz gero, termopareek huts egiten dute normalean. Konputagailuak hutsegite hori zuzen interpretatu beharko du, eta ez tenperatura baxuaren neurketa gisa. Beraz, babes-sistema behar-beharrezkoa gertatuko da.

Bestalde, termopareen seinaleak urrutira eramanez ahal izateko, korrante-seinale bihurtzen dira. Horretarako, 4 eta 20 mA arteko tentsio/korrante bihurtailua erabiltzen da. Konputagailura eramanez aurretik, korranteari erresistentzia apropos batetik igaroarazten zaio, eta berriro sarrerako tentsio-seinale egokia lortzen da.

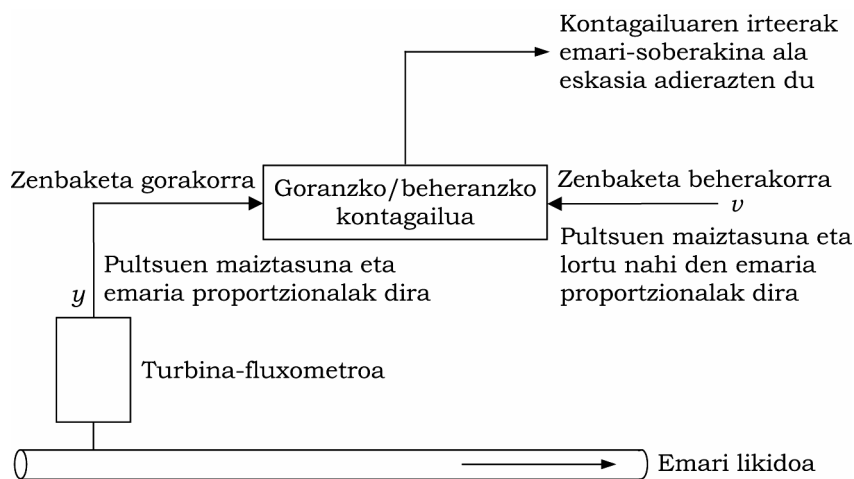
6.2.1.4 Tenperatura-neurketa erresistentzia-termometroa erabiliz

−100 °C-tik 300 °C-ra bitarteko tenperaturak erresistentzia-termometroez neurtu izan ohi dira. Mota honetako termometroa platinoz edo beste metal batzuek egina dago; metal horiei dagokien erresistentziaren tenperatura-koefizientea zehaztasunez ezagutzen da. Termometroaren erresistentzia neurtzeko, zubi baten adarretako batean kokatu eta korrontez hornitzen da. Erresistentziaren informazioa dakarten hiru tentsio-seinaleak tenperatura adierazten duen seinale bakarra bihurtu behar dira. Seinale hori distantzia luzeetara garraiatu ahal izateko, termoparearen kasuan gertatzen zen bezala, korrante-seinale bihurtuko da igorpena gauzatzeko.

6.2.1.5 Emariaren neurketa turbina-fluxometroak erabiliz

Neurtzeko prozedura hau ere erabili ohi da likidoak nahasteko sistema askotan. Fluxometroak fluxu-abiadurakiko —emariarekiko— maiztasun proportzionalak dituzten pulsu-segidak sortzen ditu.

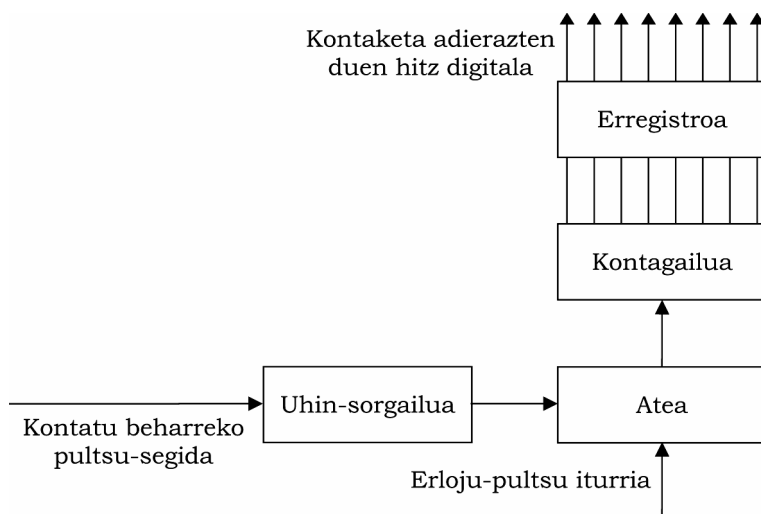
6.3 irudian ikus daiteke aplikazio arrunta. Lortu nahi den emaria v pulsu-segidaren bidez adierazten da, eta neurtutako emaria, berriz, y segidaren bitartez. Bi segidak kontagailu berera sartzen dira, y gehituz eta v kenduz. Kontrol-sistema batean y emaria doi daiteke kontagailua zerora eramateko; hala, aplikaziorako beharrezkoa den likido-bolumen egokia lortzen da.



6.3 irudia. Turbina-fluxometroaz neurtutako emaria.

6.2.1.6 Kontagailuak

Dagoeneko aipatu diren kontagailuek pultsuak jaso eta erregistro batean metatzen dituzte. Orduan, segidari dagokion zenbaki digitala sortzen da. Elektronikoki, 6.4 irudian ageri den zirkuituaz osaturik daude.



6.4 irudia. Pultsuak zenbatzeko sistema.

Seinale mota nahiz maila ezberdinak aztertzeko erabil daitezke, besteak beste, aipatu diren neurgailuak. Sentsorea konputagailutik hurbil kokatuz gero, gehienetan, sarrerako datuak eskuratzeko txartel bereziak erabiltzen dira.

Seinale analogiko ahulak, aldiz, ‘sendotu’ egin behar dira igorpena gauzatu aurretik. Haiek korrante-seinale bihurtzea da metodorik arruntena; izan ere, korrantea kilometro askoan galerarik gabe bidali ahal izateaz gain, zaratarekiko sentikortasun txikia du. Puntu zehatz batera seinale bat baino gehiago iristen bada, multiplexatu, A/D bihurgailura eraman eta, orduan, konputagailura serie eran igortzen dira.

Konputagailuak gai izan behar du etengailuen egoerak aztertzeko ere. Etengailu horietako seinaleak digitaltzat har daitezke —irekita ala itxita—, eta zuzenean konputagailura eraman ohi dira.

6.3 ERAGINGAILUAK

Kontrol-sistema txikietan, laborategi mailako labe baten tenperaturaren kontrolerako sistema batean esate baterako, kontrol-begiztaren osagairik garestiena eragingailua suertatzen da. Beraz, lortzen den diseinua erabilgarria izan dadin, eragingailua kontu handiz hautatu beharra dago. Hautaketa hori aplikazioaren arabera egin behar den arren, eragingailuekin zerikusia duen zenbait ezaugarri garrantzitsu aipatuko ditugu labur, horretarako adibide bat aitzakiatzat harturik.

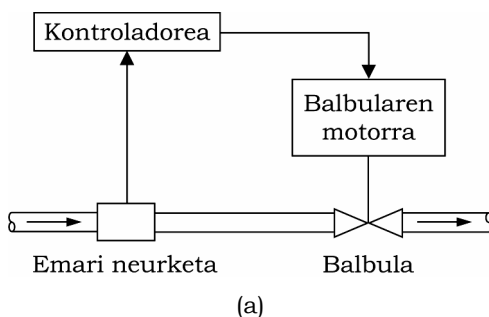
6.3.1 KONTROL-EGITURAREN HAUTAKETA

Eragingailu zehatz bat aztertu nahian, hodi bateko emariaren kontrolean parte hartzen duen elektrobalbula kontsideratuko da.

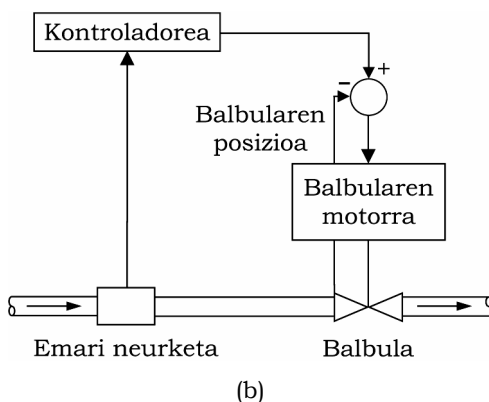
Aipatutako balbula gobernatzeko, bi estrategia hauek jarrai daitezke:

- a) Kontrol-begizta zuzenean itxi, edo
- b) Begizta gehigarri bat ezarri balbularen posizioa kokatzeko.

6.5 irudian islatzen dira bi egiturak. Bi aukeren arteko hautaketa, kontrolatu beharreko prozesua, algoritmoa eta eragingailuaren histeresiaren arabera egin beharko da.



(a)



(b)

6.5 irudia. (a) Zuzenean kontrolatutako eragingailua.

(b) Begizta gehigarriaz kontrolatutako eragingailua.

Horretaz gain, oro har, eragingailu bakoitzak bere portaera ez-lineal berezia duela ere kontuan hartu beharra dago.

6.3.2 ABIADURA-MUGAK ERAGINGAILUETAN

6.5 irudian islatutako elektrobalbula eragingailu ideala balitz, jasotzen duen seinalearen anplitudearekiko proportzionala den abiaduraz ireki edo itxiko litzateke. Benetakoak, ordea, abiadura-muga bat izango du. Hori dela eta,

balbularen desplazamendu handi batek txiki batek baino denbora gehiago beharko du, logikoa den bezala.

Jasotako kontrol-seinaleak duen anplitudearen arabera erantzun horrek ez-linealtasunak eta atzerapenak sortzen ditu kontrol-begiztan. Horrenbestez, eragingailuaren motorra hautatzean, ziurtatu beharko da aurkako efektu horiek maila onargarrien barruan mantenduko direla.

6.4 INTERFAZE ANALOGIKOA

Prozesu industrial gehienak analogikoak dira; ondorioz, konputagailura iritsi edo handik irteten diren seinaleak analogikoak direnez, lan egiteko modua aztertu beharko da.

6.4.1 A/D ETA D/A BIHURKETA-PROZESUAK

A/D nahiz D/A bihurgailu hauek kontrol-sistemaren portaera definitzen dutenez gero, garrantzizkoa da bi bihurketa-prozesuen analisi zehatza egitea.

Har dezagun kontuan A/D bihurketa-prozesua lehendabizi. $f(t)$ seinale jarraitua diskretizatu behar da; horretarako, nT laginketa-unean $f(t)$ seinalea A/D bihurgailura konektatzen dela onar daiteke. Orduan, hurrengo bi funtsezko galdera hauei erantzun behar zaie:

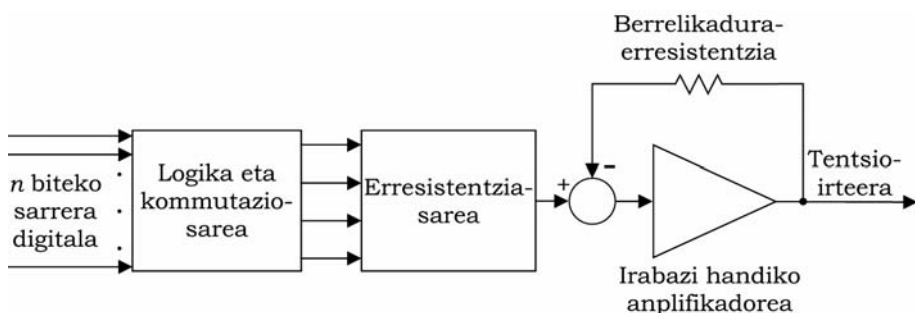
1. Zenbat irauten du bihurketak?
2. Zenbateko zehaztasuna du?

D/A bihurketari dagokionez, berriz, hiru dira galderak:

1. Zenbat irauten du bihurketak?
2. Zenbateko zehaztasuna du?
3. D/A bihurgailuaren arteak deriba garrantzitsurik ba al du elkarren segidako bi laginketa-periodoren artean?

6.4.2 D/A BIHURKETA

D/A bihurgailuak 6.6 irudiko eskema bidez azaldu den bezala lan egiten du. Labur esanda, hitz digital bat tentsio analogiko bihurtzen da erresistentzia-sare apropos baten bitartez, eta azken anplifikadoreak biharketa egokia ziurtatzen du.

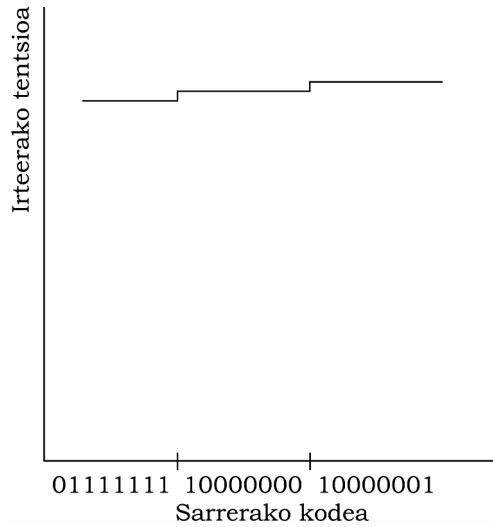


6.6 irudia. D/A bihurgailu baten funtzionamendua.

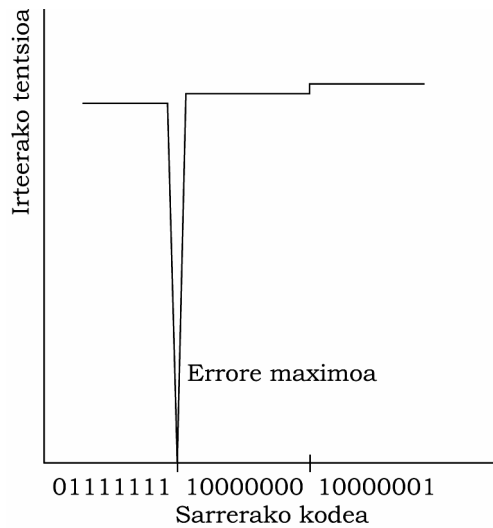
D/A bihurgailu baten egonkortze-denbora, eskuarki, anplifikadorearen bufferrak zehaztutakoa izan ohi da. Aitzitik, anplifikadorerik ez balego, egonkortze-denbora hori irteerako zirkuituaren ezaugarriei loturikoa izango litzateke.

Bestalde, D/A bihurgailuaren irteerak nahi ez diren seinale iragankorrak izan ditzake. Baieztapen hori argitzearren, demagun 0111111 hitz digitala bihurtzen ari delarik, aipatutako hitza 10000000 izan arte handitzen dela. Modu idealean, bihurgailuaren irteera 6.7 irudikoa izango litzateke.

Dena den, praktikan, sareko erresistentzien konexionatua gobernatzen duten etengailuak ongi sinkronizatuta ez badaude, gertaera kaltegarriak jazo daitezke. Esate baterako, esangura txikieneko zazpi bitei dagozkien zazpi etengailuak zortzigarrenari dagokiona itxi aurretik irekiko balira, *glitch*-a ageri den 6.8 irudiak erakusten duena litzateke bihurketaren emaitza.



6.7 irudia. D/A bihurgailuaren portaera ideal.



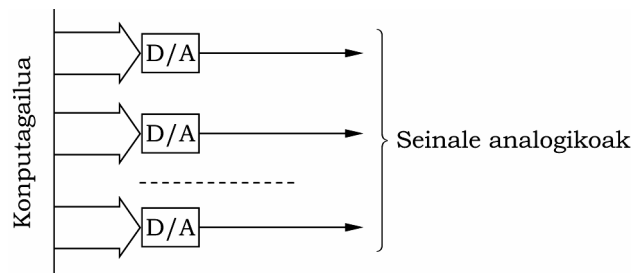
6.8 irudia. D/A bihurgailuaren portaera *glitch*-a gertatzen denean.

Kontuan izan behar da kode bitarraren aldaketa nabarmenak daudenean baino ezin direla agertu *glitch*-ak. Beste hitz batzuetan esanda, 10000000 →

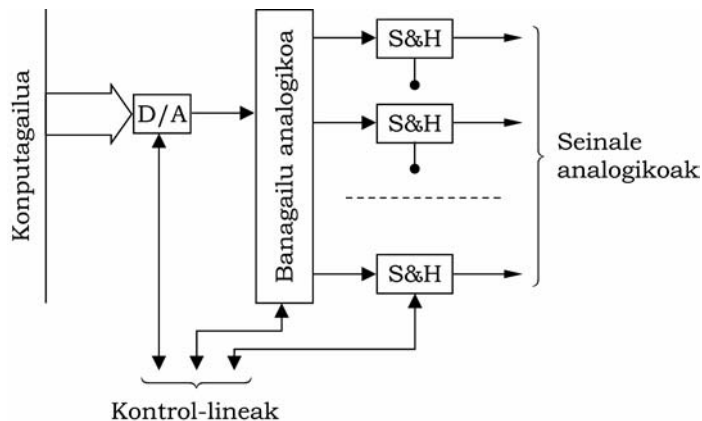
10000001 aldaketak ezin du, inolaz ere, *glitch*-ik sorrarazi. Eskuarki, arazo horri aurre egiteko, D/A bihurgailuaren ostean lagingailu-euskailua ezarri ohi da.

6.4.3 IRTEERA ANALOGIKOKO EGITURAK

6.9 eta 6.10 irudietan ageri dira irteera analogiko bat baino gehiago sortzeko bi egitura. Kanal bakoitzeko D/A bihurgailu bat du lehendabizikoak —6.9 irudia—, eta bigarrenak baino azkarrago eta sentikortasun gutxiagoz erantzuten du —6.10 irudia—.

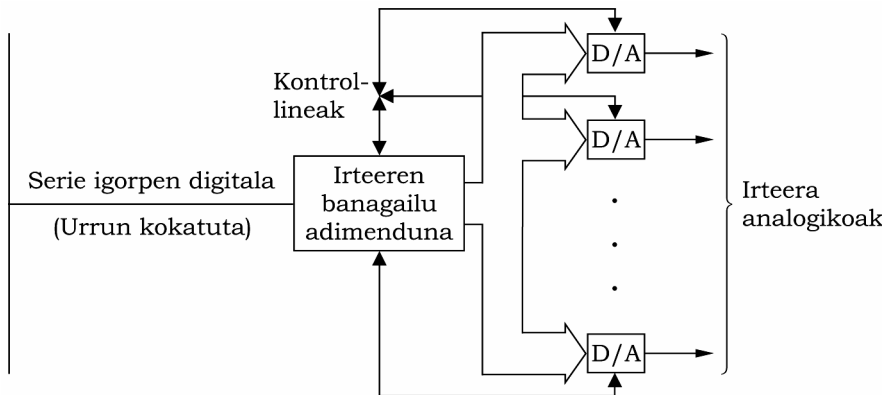


6.9 irudia. Irteera analogikoak, kanal bakoitzeko D/A batekin.



6.10 irudia. Irteera analogikoak, kanal bakoitzeko lagingailu-euskailu —Sample and Hold (S&H)— batekin.

Irteera analogikoen multzo bat konputagailutik urrun kokatu behar denean, 6.11 irudiko egitura da egokiena, baita kostu aldetik ere. D/A bihurgailu-taldea automatikoki eragin dezakeen serietik paralelorako banagailu bat dauka sistemak.



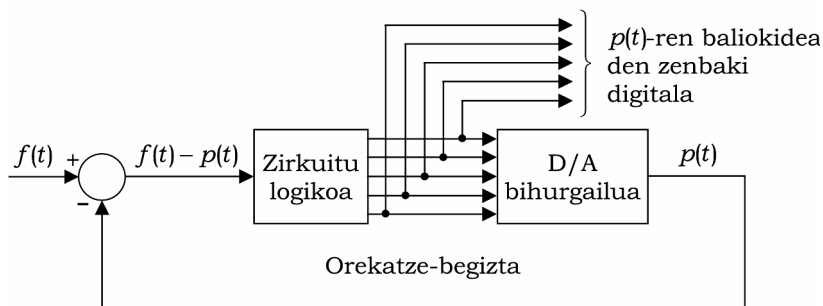
6.11 irudia. Irteera analogikoa, serie erako igorpen digitala erabiliz.

6.4.4 A/D BIHURKETA-PROZESUA

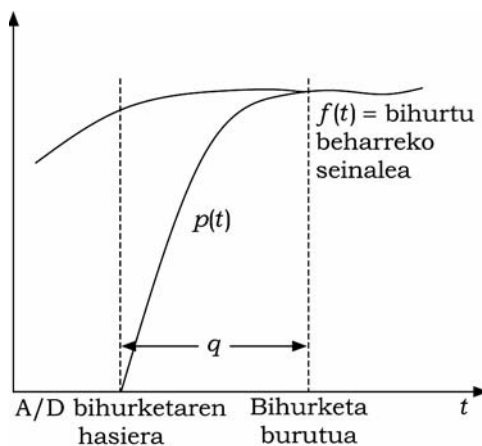
A/D bihurgailu ideal batek $f(t)$ seinale jarraitua jaso eta $f^*(t)$ seinale diskretua sortuko du erantzun gisa. Azpialt honetan ordea, bihurketa-prozesu praktikoa aztertuko dugu. Prozesu hori gauzatzeko elektronikoki erabili ohi diren teknikak era askotakoak izan daitezke. Horietako bat aztertuko dugu ondoren.

Demagun $f(t)$ seinale analogikoa bihurtu behar dela. $f(t)$ seinale horri D/A bihurgailu batek sortutako $p(t)$ seinalea kentzen zaio, eta kontagailu batek A/D bihurgailuko zenbaki digitalaren esangura txikieneko bita aldatzen —handitzen edo txikiagotzen— du, $|f(t) - p(t)| < \delta$ ezberdintasuna betetzea lortu arte —ikus 6.12 eta 6.13 irudiak—. Une horretan, bihurketa-prozesua bukatutzat ematen da eta zenbaki digitala irakur daiteke. δ zenbakia hitz digitalaren bit kopuruaren arabera da.

Bistakoa denez, A/D bihurketan lortu nahi den zehaztasun handiari ezin izango zaio azkartasunaren ezaugarria gehitu, batak bestea eragozten baitu.



6.12 irudia. A/D bihurtgailuaren prozedura.



6.13 irudia. A/D bihurtgailuaren denbora-ezaugarriak.

6.4.4.1 A/D bihurtgailura sartzen den seinalea aldatzeko abiadura-muga

Demagun A/D bihurtgailu batera seinale analogiko aldakorra iristen dela. A/D bihurtgailuan dagoen D/A bihurtgailuak, erloju-pultsu bakoitzeko, esangura txikiena duen bit bat aldaraz dezake gehienez. Abiadura horrek, beraz, A/D bihurtgailura iristen den tentsio analogikoaren aldaketa-abiadura mugatzen du. Muga horrek, hain zuzen, onar daitekeen gehienezko aldaketa-abiadura ezarriko du. Hala, har ditzagun

v_{max} sarrerako tentsio analogikoaren eskala-fondoa,
 f_c erlojuaren maiztasuna, eta

n bihurtuak maneiatzen duen bit kopurua.

Orduan, gehienezko aldaketa-abiadura $v_{\max} f_c / 2^n$ da.

Demagun orain $a \sin \omega t$ tentsio sinusoidala bihurtu behar dela,

$$\frac{d(a \sin \omega t)}{dt} = a \omega \cos \omega t \quad (6.1)$$

eta hau izango da lor daitekeen gehienezko aldaketa-abiadura:

$$\left. \frac{d(a \sin \omega t)}{dt} \right|_{\max} = a \omega \quad (6.2)$$

Bihurgailuaren abiadura-muga gainditu gabe onar daitekeen seinale analogikoaren maiztasunik altuena (6.2) adierazpena A/D bihurtuaren gehienezko aldaketa-abiadurari berdinduz lortzen dena da. Hortaz,

$$a \omega_{\max} = \frac{v_{\max} f_c}{2^n}$$

baina $a = v_{\max} / 2$ denez gero,

$$\omega_{\max} = \frac{f_c}{2^{n-1}} \quad (6.3)$$

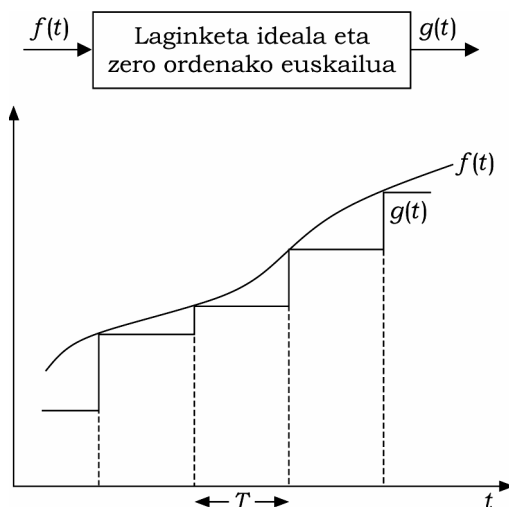
izango da.

6.4.5 LAGINGAILU-EUSKAILUAK

Zero ordenako lagingailu-euskailu idealek $f(t)$ seinale analogikoa hartzen dute eta $g(t)$ seinalea sortzen dute irteera gisa. $g(t)$ seinalea $f(t)$ -rekin bat dator laginketa-uneetan, eta konstante mantentzen da elkarren segidako bi laginketa-uneren artean —ikus 6.14 irudia—.

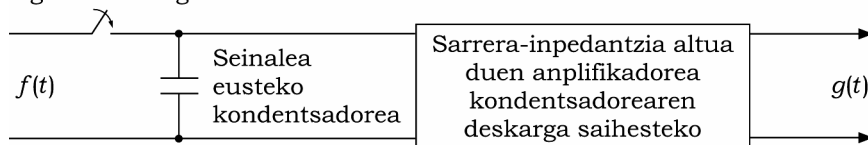
6.15 irudian eskema bidez azaltzen da sistema hauen hardwarea. Kondentsadorea kargatu ahal izateko, laginketa-etengailua q denbora finitu batez ixten

da. Etengailu hori berriro irekitzen denean, egoera iragankor bat jasan ostean, $g(t)$ seinaleak bere maila ia konstante mantentzen du hurrengo laginketa-unera arte. Izan ere, kondentsadorearen deskarga dela eta, nahiz eta sarrera-inpedantzia altuko anplifikadorea erabili, ez da lortuko $g(t)$ seinalea laginketa-uneen tartetan zeharo konstante mantentzea —6.16 irudia—.



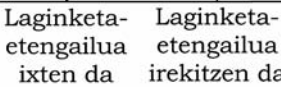
6.14 irudia. Lagingailu-euskailu ideal baten portaera.

Erlojuak gobernatutako
laginketa-etengailua



6.15 irudia. Lagingailu-euskailuaren lana.

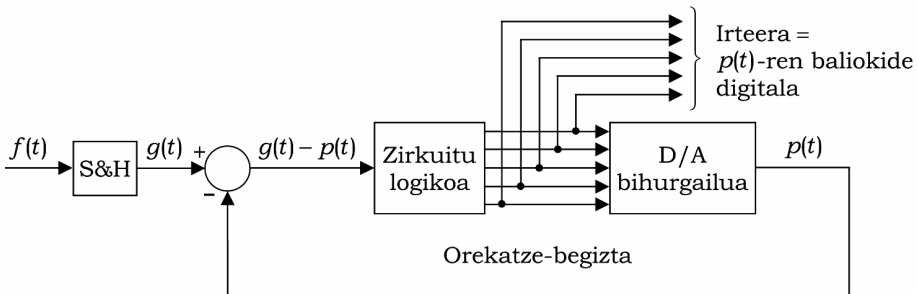
Aldaketa azkarrak jasaten dituzten seinaletan —edo T laginketa-periodoaren balio txiki kasuan—, g -ren balioa eta laginketa-etengailuaren egoera iragankorra kritikoak gerta daitezke. Laginketa mantsoen kasuan berriz, — T handiak—, kondentsadorearen deskarga funtsezko faktore bihurtzen da.



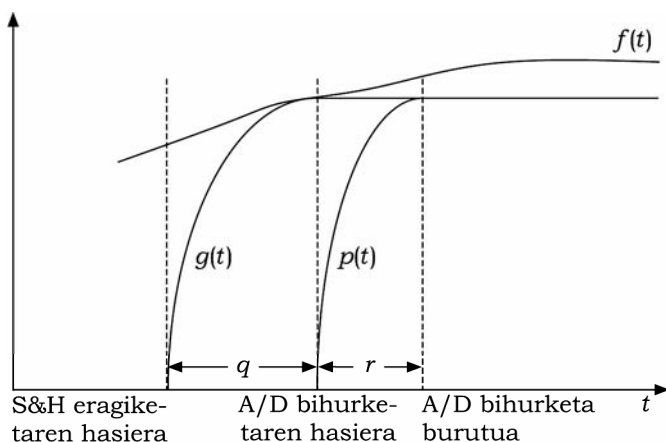
6.16 irudia. Ideala ez den lagingailu-euskailuaren portaera.

6.4.6 A/D BIHURGAILUA LAGINGAILU-EUSKAILU BATEZ

Oso azkar aldatzen den seinale analogiko bat digital bihurtu behar denean, lagingailu-euskailua A/D bihurgailuaren aurretik ipintzeak asko hobetzen du horren portaera. 6.17 eta 6.18 irudietan islatzen dira sistema horren egitura eta denboran zehar ematen duen erantzuna, hurrenez hurren.



6.17 irudia. A/D bihurtzaileak lagingailu-euskailua erabiliz.



$f(t)$ Bihurtu beharreko seinalea

$g(t)$ S&H-aren irteera

$p(t)$ D/A bihurgailuaren irteera

q S&H-aren erantzun-denbora

r Orekatze-begiztaren erantzun-denbora

6.18 irudia. 6.17 irudiko egitura duen sistemaren denbora-erantzuna.

6.4.7 SARRERAKO MULTIPLEXAZIOA

Multiplexadoreak seinale analogikoen kopuru jakin bat jaso eta, guztien artean denbora berdintasunez banatuz, denak kanal analogiko bakarrera eramaten ditu.

Seinale guztien arteko denbora-banaketa JFET edo CMOS transistoreez egin ohi da, nahiz eta kasu praktiko batzuetan oraindik ere errele mekanikoa erabiltzen den.

Multiplexadorearen abiadurak bi faktore hauen eragina jasaten du:

- Etengailuen konmutazio-denbora —JFET transistoreetan, 10^{-7} s; erreleetan, berriz, 10^{-3} s—
- Multiplexadoreak elikatzen duen zirkuituaren egonkortze-denbora

Zirkuitu baten denbora-konstantea τ izanik, A/D bihurgailuak n bitekin lan egiten badu, froga daiteke ekuazio honen emaitza den T_s denbora-periodoa igaro beharko duela multiplexadorearen irteera-seinalearen A/D bihurketari ekin aurretik (Leigh, 1992):

$$T_s \geq \tau \ln(2^n - 1) \quad (6.4)$$

6.4.7.1 Iruzkina

Multiplexadoreak seinale bat edo bestea igarotzen uzten duen bakoitzean, A/D bihurgailura transmititzen den egoera iragankor bat sortzen da. T_s -k ezarritako denbora-kondizioa betez gero, bihurketa abiatzen denerako egoera iragankor hori praktikoki desagertuta egongo dela ziurtatzen da, eta, ondorioz, kasurik aurkakoa izan arren, ez da errorerik gertatuko bihurketa digitalean.

τ -ren balio tipikoa **10^{-6} segundo** ingurukoa izan daiteke, eta, horrenbestez, igaro beharreko T_s denborari dagokiona, berriz, honako hau:

$$T_s = 5,5 \cdot 10^{-6} \text{ segundo} \text{ —8 bitez arituz—}$$

$$T_s = 11 \cdot 10^{-6} \text{ segundo} \text{ —16 bitez arituz—}$$

Denbora-periodo horiei A/D bihurketa-denbora, konputazio-denborak eta abar gehitu beharko zaizkie. Gainera, zenbait aplikazio berezirentzat egokiak ote diren ala ez erabakitzeko, beste aldagai hauek ere kontuan hartu beharko dira:

- a) Multiplexatu beharreko seinale kopurua
- b) Aldiberekotasuna

Bestetik, badira azpimarratu beharreko beste bi alderdi:

1. A/D bihurgailuaren erantzun-denbora T laginketa-periodoarekin konparatuz esangarria bada, multiplexadoreak datuak gal ditzake. Horrek arazoak sor ditzake datuak interpretatzean.

2. Multiplexadoreak jasotzen dituen balioak arras ezberdinak izan daitezkeenez, kasurik aurkakoena kontsideratu behar da, bihurgailuak egonkortzeko moduko denbora izan dezan.

6.4.8 APLIKAZIOAREN ARABERAKO MULTIPLEXADOREAREN HAUTAKETA

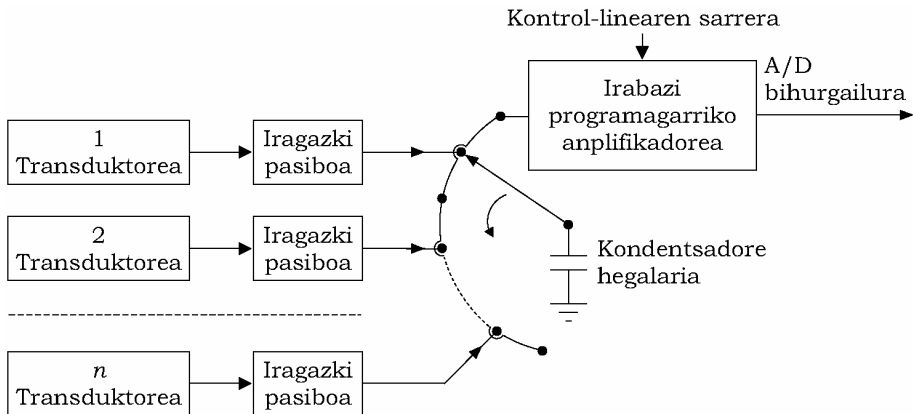
Beste hainbat kasutan gertatzen den bezala, multiplexadorearen hautaketak praktikan abiaduraren eta zehaztasunaren arteko konpromisoa dakar; izan ere, abiadura nahiz zehaztasun handiak lortzeko behar den gailua oso garestia gerta daiteke. Hiru dira erabili ohi diren multiplexazio-metodoak: aplikazio industrial askotan baliagarria den ‘kondentsadore hegalaria’, aplikazio zehatzetarako multiplexadore analogikoa eta, azkenik, berez multiplexadorea ez den multiplexadore digital deritzona. Azken bien artean hautatzeko, kostuak alderatzen dituen konparaketa eta lortu beharreko ezaugarriak kontsideratzen dituen azterketa hartzen dira kontuan.

6.19 irudiko ‘kondentsadore hegalariaren’ zirkuitua oso egokia da, eta, lortzen duen abiadura eta zehaztasuna direla eta, aplikazio industrial anitzetan erabiltzen da. Transduktoreetako seinaleen iragazketa egin ostean, multiplexazioa eta isolamendua aplikatzen zaizkie kondentsadore bidez. Irudiak adierazten duen bezala, kondentsadorea konektaturik dagoen bitartean, sarre-rako tentsioa iritsi arte kargatzen da, eta, ondoren, tentsio hori anplifikadore programagarria hornitzeko erabiltzen du. Anplifikadorearen irabazia kondentsadorearen terminalaren mugimenduarekin batera aldatzen da, kanal bakoitzari irabazi egokia eman ahal izateko.

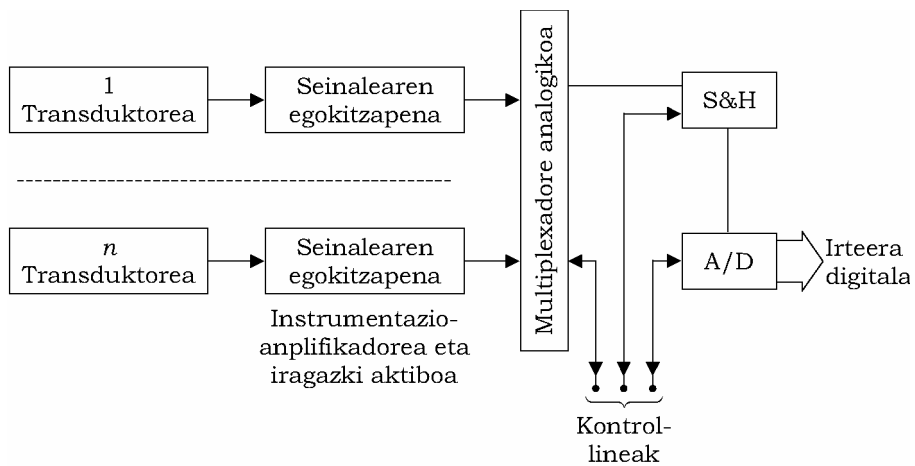
Abiadura handia eta zehaztasun berezia behar direnean, 6.20 irudian eskema bidez azaldu den sistema gomendatzen da. Kanal bakoitzak oso kalitate oneko anplifikadorea du, eta, A/D bihurgailura eramán baino lehen, multiplexadore analogikoaren aurretik seinalea iragazten da.

Alternatiba gisa, 6.21 irudian azaldutako zirkuitua erabil daiteke. Kanal bakoitzeko A/D bihurgailu batez horniturik dago, eta bihurgailu horien

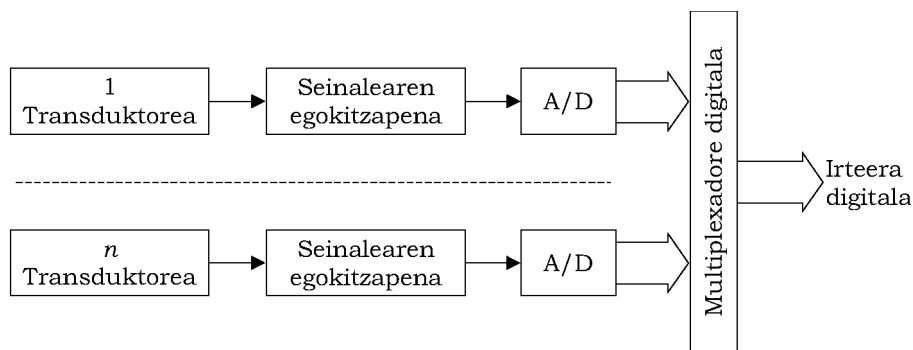
funtzionamendu sekuentziala programa bidez antolatzen da. Horrenbestez, eragiteko modu hori multiplexazio digital gisa ezagutzen da.



6.19 irudia. 'Kondentsadore hegalariaren' zirkuitua.



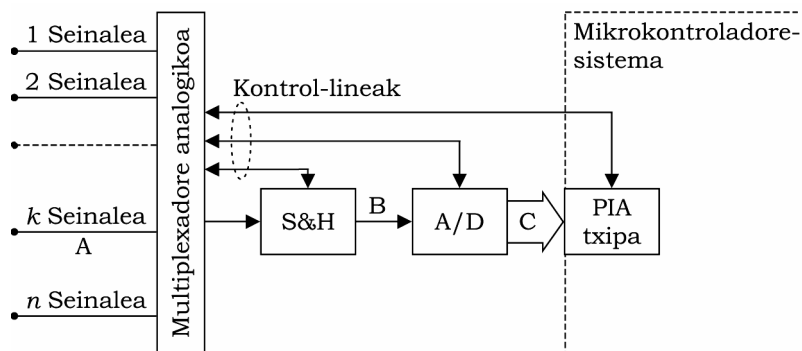
6.20 irudia. Abiadura eta zehaztasun handiak lortzeko behar diren multiplexadore eta zirkuituak.



6.21 irudia. Multiplexazio digitala.

6.4.9 MULTIPLEXADOREAREN KRONOGRAMA

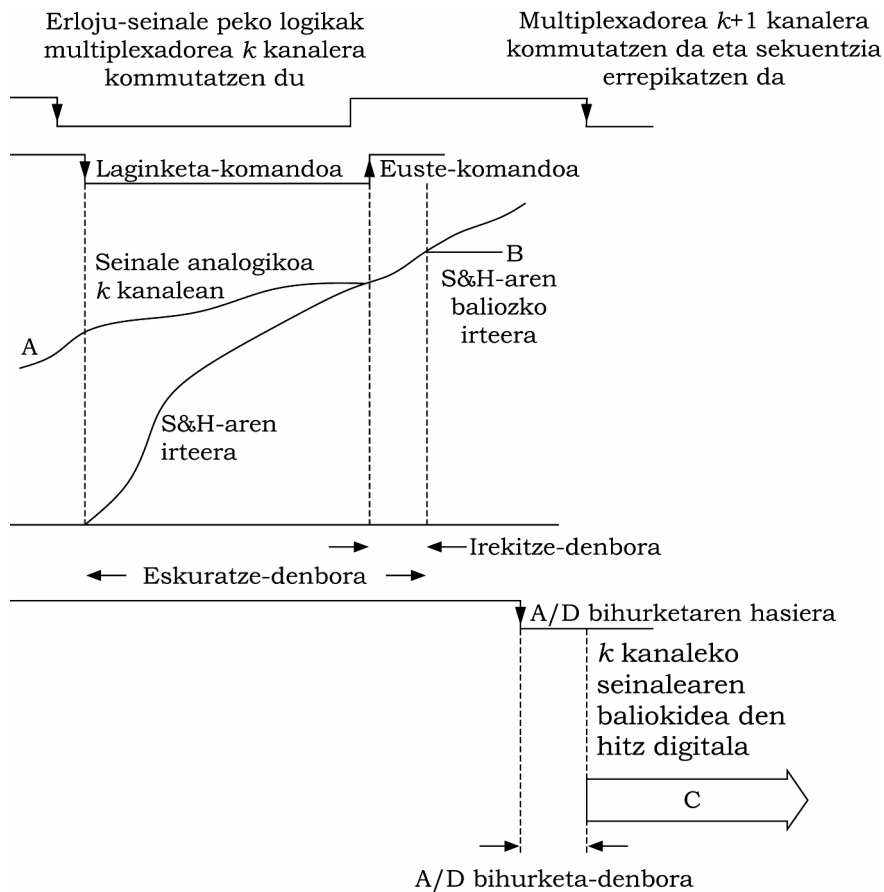
Multiplexadore analogikoa, lagingailu-euskailua, A/D bihurtzailea eta mikrokontroladore-sistemara daraman PIA izeneko txipak osatzen duten konfigurazioa erakusten du 6.22 irudiak. PIA txipa datuen transferentzia kontrolatzeko interfaze programagarria besterik ez da.



6.22 irudia. Multiplexadore-sistemaren eta mikroaren arteko konexioa.

6.23 irudiak 6.22 irudiko sistema orokorrari dagokion kronograma azaltzen du; hor ikus daiteke nola transmititzen den A seinale analogikoa sisteman zehar: B tarteko seinaleaz baliatu eta C seinale digital bihurtuz, alegia. 6.23 irudiko taulan jasotzen dira prozesu batzuen gutxi gorabeherako iraupenak. Eskuarki,

iraupen horiek honako hauen arabera izan ohi dira: gailuaren kostua, lortu nahi den zehaztasuna, egonkortze-denborak eta zirkuituaren kapazitantzia.



Iraupen tipikoak

Multiplexadorea konmutatu eta zirkuitua egonkoritu arte behar den denbora	1-5 μ s
S&H-aren eskuratze-denbora	5-10 μ s
A/D bihurteta-denbora	1-1000 μ s

6.23 irudia. 6.22 irudiko sistemari dagokion kronograma.

6.4.10 BIHURGAILUEN ZEHAZTASUN TIPIKOAK

Interfazerako gailu elektroniko erabilienen abiadurak aztertzeko, erantzun-abiadura batzuen balio orientagarriak jaso dira 6.1, 6.2 eta 6.3 tauletan. Oro har, eta, dagoeneko aipatu den bezala, abiaduraren eta zehaztasunaren arteko konpromisoa lortu behar da, biak izan nahi badira gailuen kostua izugarri hazten baita.

6.1 taula. A/D bihurgailuen bihurketa-denborak.

Bihurgailu mota	8 bit	10 bit	12 bit
Kostu baxua	10 μ s	40 μ s	60 μ s
Aplikazio orokorrak	5 μ s	20 μ s	20 μ s
Azkarra	1 μ s	2 μ s	5 μ s
Oso azkarra	0,01 μ s	0,1 μ s	1 μ s

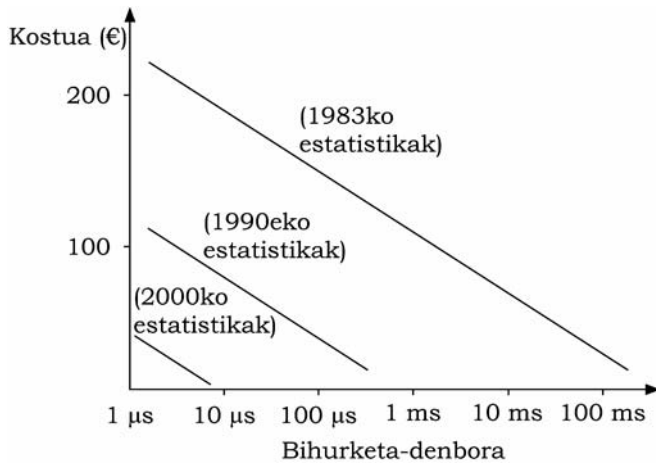
6.2 taula. A/D bihurgailuen egonkortze-denborak.

Bihurgailu mota	8 bit	10 bit	12 bit
Aplikazio orokorrak	1 μ s	2 μ s	4 μ s
Azkarra	0,03 μ s	0,25 μ s	1 μ s
Oso azkarra	0,01 μ s	0,02 μ s	0,04 μ s

6.3 taula. Lagingailu-euskailuak.

Gailu mota	Zehaztasuna	Datuak eskuratzeko denbora
Kostu baxua	% 0,1	2 μ s
	% 0,01	5 μ s
Aplikazio orokorrak	% 0,1	5 ns
Oso azkarra	% 0,01	0,1 ns

Esate baterako, A/D bihurgailuen kostua hitz-luzera, abiadura eta zehaztasunarekin batera handitzen da. Horren adierazgarri da 6.24 irudiak islatzen duen 12 biteko bihurgailu baten abiaduraren eta kostuaren arteko erlazioa.



6.24 irudia. 12 biteko A/D bihurgailu baten kostuaren eta abiaduraren arteko erlazioa.

6.5 INTERFAZE DIGITALA

6.5.1 SARRERA

Interfaze digitala zenbait gailuren arteko datu-transferentzia egiteko teknologia digitalari loturik dago. Oso gai zabala da, baina bereziki diseinurako interesgarriak diren ezaugarriak aztertuko ditugu.

Egin beharreko datu-transferentzia nagusiak hauek dira:

- Prozesuko neurketak A/D bihurgailutik mikroprozesadorera eramatea,
- Seinale eragileak —kontrol-seinaleak, alegia— mikroprozesadoretik D/A bihurgailura eramatea, eta

- c) Datuak mikroprozesadoretik periferikoetara eramatea: teklatu, pantaila, inprimagailu, plotter edo beste konputagailu batzuetara, alegia.

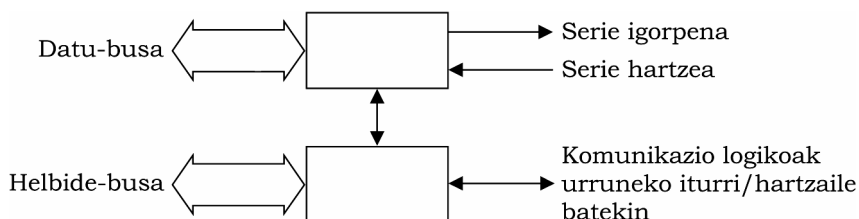
Oro har, datu-transferentziak sekuentzialki —seriean— egin ohi dira distantzia luzeetara, eta paraleloan, berriz, gailuak elkarrengandik hurbil daudenean. Horrenbestez, a) eta b) erako datu-transferentziak paraleloan egin ohi dira, eta c) motakoak, serie nahiz paralelo komunikazioen konbinazioak erabiliz.

6.5.2 SERIE INTERFAZEA

Mikrokontroladorearen barne-eragiketa datu-transferentzia paraleloan oinarritutakoa izaki, serie/paralelo bihurgailua behar izaten da serie erako lineak hari konektatu ahal izateko. Horrelako bihurgailua erregistro bat besterik ez da.

Erregistro hori betez joaten da serie lineatik datozen datuekin, sistemaren erlojuak ezartzen duen erritmoan. Hala, erregistroa beteta dagoenean, mikroprozesadore-sistemaren datu-busera konektatzen da.

Transferentzia mota hori oso modu sinplean gauzatzen da txip bereziak erabiliz. Horietako bat da, esate baterako, ACIA (*Asynchronous Communications Interface Adaptor*), batzuetan UART (*Universal Asynchronous Receive and Transmit*) izenez ere ezagutzen dena. 6.25 irudiak erakusten duen bezala, horrelakoek bi serie-konexio dituzte, sarrera eta irteerentzat. UART batek lotura logikoak ditu urruneko datu-iturri edo igorpen-sistemeekin eta konputagailuaren helbide-busarekin; konputagailuaren datu-busarekin buffer erregistro baten bitartez konektatzen da.

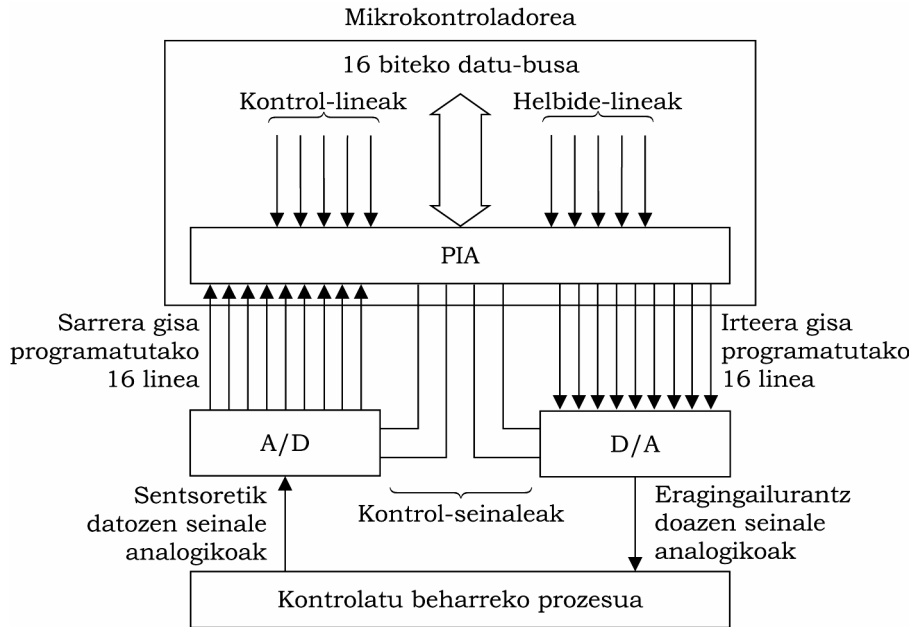


6.25 irudia. ACIA sistemen diagrama.

6.5.3 INTERFAZE PARALELOA

Kontrol-aplikazio sinpleenetan behar diren interfaze paraleloak PIA (*Peripheral Interface Adaptor*) izeneko txipak erabiliz egin daitezke, programagarriak baitira.

PIA sistemak gailu egokiak dira A/D nahiz D/A bihurgailuaren eta mikro-prozesadorearen arteko interfazea gauzatzeko. 6.26 irudian ikus daiteke horien egitura tipikoa. Irudian adierazten den bezala, diseinu-etapan zehar egin beharreko urratsik garrantzitsuenetakoa da PIA gailuen konexio egokiak ezartzea.

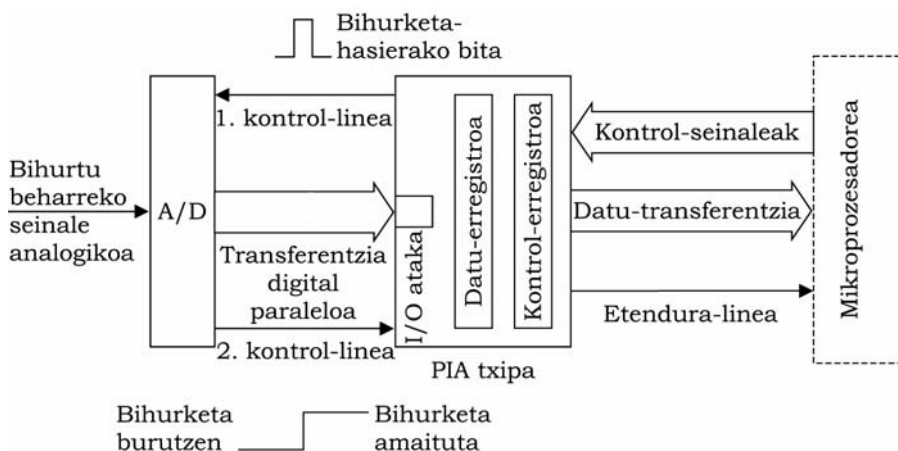


6.26 irudia. Mikrokontroladorea oinarritzko kontrol-begiztan, PIA txiparen eginkizuna erakutsiz.

Horiek horrela, PIA txipa eta A/D bihurgailuak konexionatzeko modu egokia aztertuko dugu ondoren.

6.5.3.1 A/D bihurgailuaren eta PIA txiparen arteko konexionatua

CR kontrol-erregistroa nahiz DR datu-erregistroa osagai gisa dituen PIA ageri da 6.27 irudian. PIA txiparen eta mikroprozesadorearen arteko konexionatua helbide-busa, datu-busa eta etendura-linea erabiliz egiten da. PIAren eta A/D bihurgailuaren artekoa, berriz, ataka paraleloaren eta bi kontrol-lineen bitartez gauzatzen da.



6.27 irudia. PIA txiparen bidezko A/D bihurgailuaren kontrola.

Helbide-busaren bitartez mikroprozesadoretik bidalitako seinaleek PIAren konfigurazioa finkatzen dute, ataka paraleloa sarrerako ataka gisa definituz. Ondorioz, hau da lan egiteko modua:

1. Lehenengo kontrol-linea erabiliz, PIAk 'bihurketa hasi' seinalea —agin-dua— bidaltzen du A/D bihurgailura.
2. Bihurketa bukatutakoan, A/D bihurgailuak 'bihurketa amaituta' seinalea transmititzen dio PIAri bigarren kontrol-lineatik.
3. PIAk bihurgailuko datua irakurri eta datu-erregistroan metatzen du, kontrol-erregistroan bit egokia aktibatu —1en ipini—, eta etendura-seinalea igortzen du mikroprozesadorera.

4. Mikroprozesadoreak zirkuituko PIA guztiei dagozkien kontrol-erregistroetako bitak aztertzen ditu etendura-seinale bila. Orduan, etendura sortu duen PIAtik datuak jaso, eta haren kontrol-erregistroko bita garbitzen du —0n ipini—.
5. Sarrerako beste seinaleren bat iritsi bitartean, etendura gertatu aurretik mikroprozesadoreak esku artean zituen atazei ekiten die berriro.

6.6 LABURPENA: MIKROPROZESADOREAK KONTROL-APLIKAZIOETAN

Kapitulu honetan, kontrol-sistema tipiko baten osagai diren gailu elektronikoen arteko konexionatuak aztertu ditugu; hala ere, badira mikroprozesadore bat baino gehiago behar izaten dituzten beste kasu batzuk ere.

Kostua, abiadura eta memoriaren tamaina dira, ziur aski, mikroprozesadore baten ezaugarri nagusietakoak. Dena den, aplikazioaren arabera, beste parametro batzuk ere hartu behar dira kontuan. Hala nola:

- a) Goi-mailako programazio-lengoaiak erabiltzeko aukera
- b) Sarrera/irteera ahalmena
- c) Interfazearen erabilgarritasuna eta kostua
- d) Etendurak egiteko baliabideak
- e) Softwarea ezartzeko sistemak, mihiztatzaile gurutzatuak edo bestelako garapen-sistemak
- f) Handitzeko ahalmena, aldibereko programazioa egiteko CPU-CPU interkonexioak eskainiz, esate baterako

Laburtuz, diseinatu beharreko sistema elektronikoak aplikazioaren zehaztapenak bete beharko ditu. Lan egiteko beste modu bat izan daiteke, moduluak

erabiliz, sistema estandarren bidezko diseinua ahalbidetzea. Dena den, beharbada, erantzunik egokiena da aplikazio zehatz bakoitzerako diseinua neurrira egitea, ahal den heinean modulu estandarrak erabiliz. Bestalde, ekipoen garapen arina dela eta, kontuan hartu behar da modulu estandarrak azkar zaharkitzen direla eta aldatu egin behar izaten direla.

7

Kasu praktikoen azterketa

7.1 SARRERA

Azken kapitulu honetan, aurrekoetan landu diren kontrol digitalaren kontzeptuetako asko bi adibide praktikotan aplikatzen dira. Lehenengoaren helburua da korrante zuzeneko serbomotor komertzial baten ardatzaren posizio angeluarra gobernatzea, eta, horretarako, maiztasunaren alorrean diseinatutako bi kontrol-egitura alternatibo aztertzen dira.

Bigarren kasu praktikoak, bestetik, material-saiakuntzako labe baten tenperatura-kontrola azaltzen du. Kasu horretan, sintonizatzeko-formula heuristikoetan oinarrituz doituriko PID motako —PI nahiz PID, hain zuzen— kontroladore jarraituen digitalizazioa da aztergai.

Adibide horiek azaltzean, kontrol-diziplinaren zenbait alderdi praktikoa agerian jartzen dira; hala nola, gobernatu beharreko sistemen ereduztapen esperimentalak, sentore eta eragingailuen karakterizazioa, eragingailuen ahetasuna, euskarri digitalean programatu beharreko kontrol-algoritmoen bizkarrezurra, kontrol-egiturak gauzatzeko erabilutako hardwarea, ‘antialias’ iragazkiaren beharra eta abar.

7.2 KORRANTE ZUZENeko SERBOMOTOR BATEN ARDATZAREN POSIZIONATZEA

Adibide praktikoa honen bitartez, korrante zuzeneko (KZ) serbomotor komertzial baten ardatzaren posizio angeluarra digitalki kontrolatzeko bi egitura posible aztertzen ditugu. Digitalizaturiko aurreratze-kompentsadore jarraitu bat abiapuntutzat hartzen du lehenak, eta atzeratze-kompentsadore diskretu batean oinarritzen da bigarrena. Biak ere, Bode diagramaz baliatuz, maiztasunaren alorrean diseinatu dira.

Korrante zuzeneko motorren posizio angeluarra gobernatzeko, praktikan, PID motako kompentsadoreetan oinarrituriko kontrol-egitura ezberdinak gauzatu ohi dira. Guztien artean erabiliena, ziur aski, P posizio-kontroladorea eta

PI abiadura-kontroladorea jauzi eran ipinita dituen bi begiztakoa da (Vas, 1998). Konfigurazio horretan, posizioa kanpo-begiztan kokatutako P konpentsadore proportzional huts batek gobernatzen du; horrek sorturiko kontrol-seinalea abiadura kontrolatzen duen barne-begiztako PI konpentsadore bati kontsigna gisa ezartzen zaio.

Horrenbestez, onartu beharra dago atal honetan aztertzen diren bi kontrol-egiturak agian ez direla egokienak KZeko motor baten ardatzaren posizio angeluarra gobernatzeko. Dena den, maiztasunaren arloko aurreratze- nahiz atzeratze-kompentsadore digitalen diseinu-metodoak argitzeko adibide aproposak direnez, kapitulu honetan bi kontrol-egitura horiek azaltzea erabaki dugu.

7.2.1 BEGIZTA IREKIKO SISTEMAREN EREDUZTAPENA

Kompentsadoreen diseinuari ekin aurretik, kontrolatu beharreko begizta irekiko sistemaren ereduztapenari helduko diogu. Hiru elementuz osaturik dago: potentzia-anplifikadorea —eragingailua—, KZeko serbomotorra —planta— eta potentziometro zirkularra —posizio-sentsorea—.

Potentzia-anplifikadorea eta sentsore potentziometrikoa *Elettronica Veneta*-ren G36A modulu didaktikoan integraturik daude, eta KZeko serbomotorra etxe komertzial bereko TY36A modeloa da. Ekipo horiek sarritan erabiltzen dira *Donostiako Unibertsitate Eskola Politeknikoko Sistemen Ingeniaritza eta Automatika Sailak* irakasten dituen zenbait ikasgairi dagozkien laborategiko praktketan.

7.2.1.1 Potentzia-anplifikadorea

H-itxurako zubia izeneko konfigurazio ezaguna osatuz kokaturik dauden lau MOSFET transistoretan oinarritzen da serbomotorraren indusitua elikatzeaz arduratzen den potentzia-anplifikadorea. Transistore horien desarra, sarrera gisa kontrol-seinalea jasotzen duen korrante zuzeneko pultsu-zabalera bidezko modulazioko —*Pulse Width Modulation* (PWM)— zirkuitu batek gobernatzen du.

Potentzia-anplifikadore horrek KZeko motorraren dinamika baino nabarmen azkarragoa duenez, zentzuzkoa dirudi hori aintzat ez hartzea. Horretaz gain, MOSFET transistoreak konmutazioan aritzen diren arren, PWM zirkuituaren linealizazio-eginkizuna dela eta, potentzia-anplifikadorea irabazi estatiko huts batez aurkez daiteke.

Irabazi horren identifikazioa modu esperimentalean egin da, potentzia-anplifikadorearen sarreran aplikatutako u tentsioei dagozkien irteerako v_a tentsioak erregistratuz. Saiakuntza horren emaitza jasotzen du 7.1 taulak.

7.1 taula. Potentzia-anplifikadorearen karakterizazioarako eragiketa-puntuak.

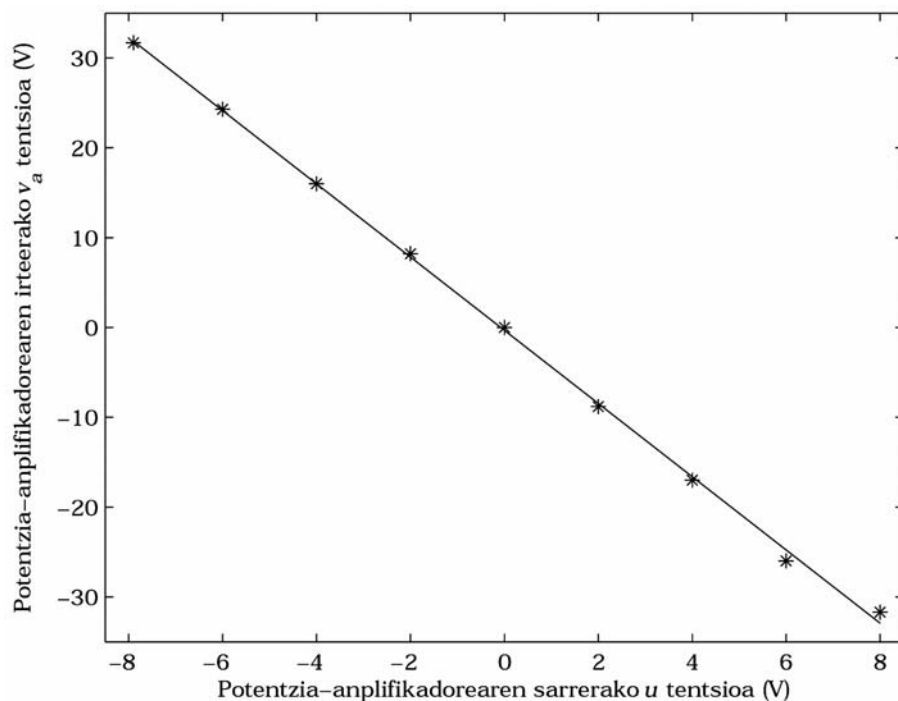
u (V)	-7,9	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
v_a (V)	31,7	24,3	16	8,2	0	-8,8	-17	-26	-31,7

Erregresio lineala aplikatuz, potentzia-anplifikadorearen irteera eta sarrerako tentsioak erlazionatzen dituen adierazpena hau dela ondorioztatzen da:

$$v_a = -4,0762u - 0,3214 \quad (7.1)$$

Hor, agerian uzten da potentzia-anplifikadore hori etapa alderantzikatzailea dela, sarrerako tentsioaren zeinua alderantzikatzen baitu irteeran. Ezaugarri hori kontuan eduki behar izaten da kontroladorearen irabaziari dagokion zeinua finkatzean. Ondorioz, $-0,3214$ V-eko offseta gaitzetsiz, potentzia-anplifikadorea $G = -4,0762$ ko irabazi huts gisa ereduza daiteke.

7.1 taulan islatutako eragiketa-puntuez gain, 7.1 irudian (7.1) ekuazioak emandako linea aurkezten da; eta horrek berretsi egiten du potentzia-anplifikadorearen portaera lineala dela kontsideratzearen hurbilketa onargarria dela.

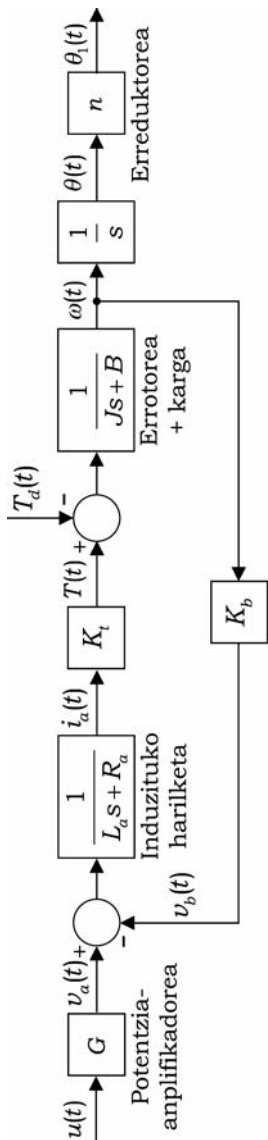


7.1 irudia. Potentzia-anplifikadorearen kurba adierazgarria.

7.2.1.2 Korrante zuzeneko serbomotorra

Korrante zuzeneko serbomotorra iman iraunkor eta kitzikapen independentekoa da, eta, horrenbestez, induzituz —armaduraz— kitzikatutakoa. Gainera, ardatzeko abiadura murriztu eta emandako pare eragilea handiagotzea ahalbidetzen duen bi etapako erreduktore batez horniturik dago.

Konfigurazio horren arabera konexionatutako KZeko motorren eredu matematikoa oso ezaguna da, eta, potentzia-anplifikadorea eta erreduktorea barne, 7.2 irudiko bloke-diagramaren bitartez aurkez daiteke. Ageri diren aldagaiek magnitude hauek adierazten dituzte: v_a eta i_a dira induzituko tentsio eta korrantea, v_b da indar kontraelektroeragilea (k.e.e.), T eta T_d pare eragilea eta kargaren pare, ω eta θ ardatzaren abiadura eta posizio angeluarrak, eta, azkenik, θ_1 erreduktore osteko posizio angeluarra.



7.2 irudia. KZeko serbomotorrez eta potentzia-amplifikadorez osatutako azpisistemaren bloke-diagrama.

Fabrikatzailearen arabera, 7.2 irudiko bloke-diagraman ageri diren parametro elektrikoen eta mekanikoen balioak 7.2 taulan islatutakoak dira.

7.2 taula. KZeko serbomotorraren parametro adierazgarriak.

Parametroa	Deskribapena	Balioa
R_a	Induzituaren erresistentzia	5,5 Ω
L_a	Induzituaren induktantzia	2,8 $\cdot 10^{-3}$ H
K_t	Parearen konstantea	0,046 N·m/A
K_b	Indar kontraelektroeragilearen konstantea	0,0573 V/(rad/s)
$J_{\text{errotorea+takometroa}}$	Errotore + takometroaren inertzia-momentua	5,98 $\cdot 10^{-6}$ kg·m ²
n	Transmisio-erlazioa	1/50

Modu teorikoan, SI Nazioarteko Sistemako unitatetan adierazitako K_t eta K_b konstanteen balioak berdinak izan beharko lukete. Aitzitik, 7.2 taulari erreparatuz, fabrikatzaileak emandako bi konstante horien balioak ez datoz bat inondik inora ere.

Bestetik, 7.2 irudian ageri den biraketa-ardatzarekiko J inertzia-momentu totalak barne hartzen ditu, KZeko serbomotorraren errotoreaz gain, horrekin batera bira egiten duten takometroa eta erreduktorea ere. Dena den, fabrikatzaileak emandako inertzia-momentuaren balioak azken osagai hori kontuan hartzen ez duenez, ezin daiteke hartu J inertzia-momentutzat.

Aipatu berri diren bi oztopo horiek gainditu eta serbomotorraren eredu matematiko fidagarria osatzeko, K_b nahiz J parametroak saiakuntza sinple baten bitartez modu esperimentalean ondorioztatuko ditugu.

Saiakuntzaren emaitzak interpretatzean, KZeko motorren ordena murriztuko eredua kontsideratuko da, indusituko L_a induktantzia baztergarritzat jotzen duena, alegia. Horrenbestez, 7.2 irudiko bloke-diagrama L_a parametroa gaitzetsiz aztertuz gero, ω eta u -ren arteko lehen ordenako transferentzia-funtzio hurbildu hau lortzen da:

$$\frac{\omega(s)}{U(s)} \cong \frac{\frac{GK_t}{R_a B + K_t K_b}}{1 + \frac{R_a J}{R_a B + K_t K_b} s} \quad (7.2)$$

Gainera, fabrikatzaileak biskositate-marruskaduraren B koefizienteari buruzko inolako daturik eskaintzen ez badu ere, hori ia zero dela onartzeak zentzuzko hurbilketa dirudi. Hala, $B = 0$ dela jotzen bada, (7.2) transferentzia-funtzioa are sinpleago den beste honetan geratzen da:

$$\frac{\omega(s)}{U(s)} \approx \frac{G/K_b}{1 + \frac{R_a J}{K_t K_b} s} \quad (7.3)$$

non K irabazia eta τ denbora-konstantea $K = G/K_b$ eta $\tau = R_a J / (K_t K_b)$ baitira.

Lehen ordenako (7.3) transferentzia-funtzioa karakterizatzen duten bi parametro horiek modu esperimentalean zenbatetsita K_b eta J identifika daitezke; izan ere,

$$K_b = G/K \quad (7.4)$$

$$J = \tau K_t K_b / R_a = \tau K_t G / (R_a K) \quad (7.5)$$

dira, eta G , K_t eta R_a dagoeneko parametro ezagunak dira. Zehazki esanda, K eta τ -ren balioak zenbatesteko potentzia-anplifikadorearen u sarreraren tentsio-maila bat aplikatuko da, eta takometroaren bidez neurtutako ω biraketa-abiaduraren denbora-bilakaera erregistratuko da.

Dena den, ezaguna denez, takometroak, une oro, ω abiadurarekiko proportzionala den v_{lak} tentsio-seinale bat sortzen du. Hortaz, potentzia-anplifikadorearekin egin den bezala, takometroa karakterizatu beharra dago, tentsio-balio bakoitzari dagokion biraketa-abiadura ondorioztatzearren. 7.3 taulan bildu ditugu serbomotorraren hainbat abiadura angeluarretan takometroak ematen dituen tentsioen neurketa esperimentalak.

7.3 taula. Takometroaren karakterizaziorako eragiketa-puntuak.

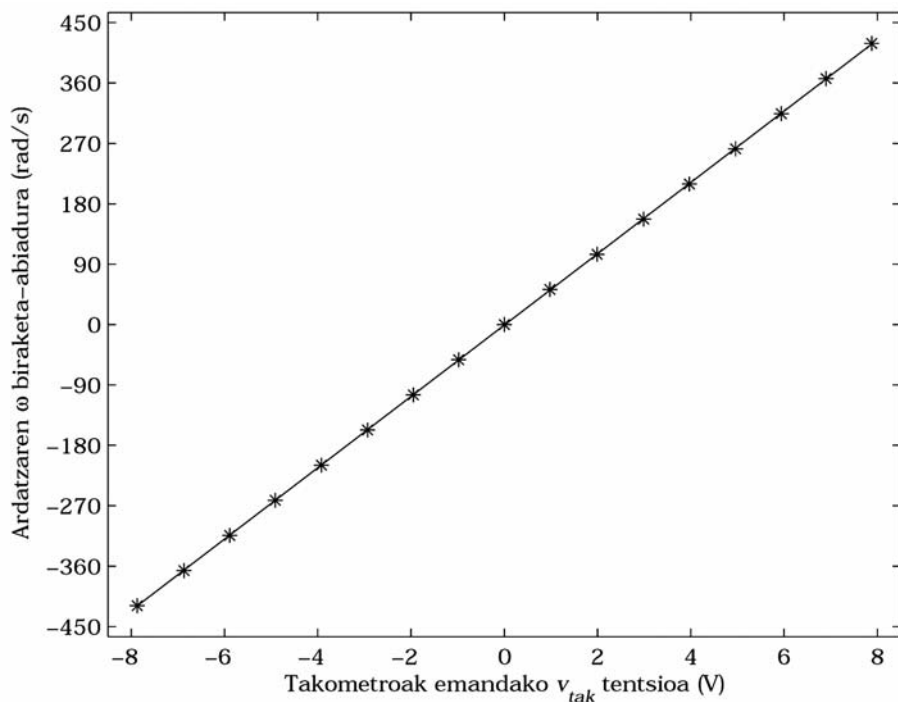
v_{tak} (V)	-7,87	-6,87	-5,89	-4,91	-3,92	-2,93	-1,95	-0,98	0
ω (r.p.m.)	-4000	-3500	-3000	-2500	-2000	-1500	-1000	-500	0
v_{tak} (V)	0,98	1,99	2,99	3,97	4,96	5,94	6,90	7,88	
ω (r.p.m.)	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	

Puntu sorta horri erregresio lineala aplikatuz gero, ardatzaren biraketa-abiadura eta takometroak emandako tentsioa erlazionatzen dituen adierazpen hau lortzen da:

$$\omega = 53,1569v_{lak} - 0,9068 \tag{7.6}$$

non ω rad/s-tan baitago. Horrenbestez, $-0,9068$ rad/s-ko offseta baztertuz, ondorioztatzen da konstante takometriko deritzona $K_{lak} = 1/53,1569 = 1,8812 \cdot 10^{-2}$ V/(rad/s) dela. 7.3 irudian, 7.3 taulan bildutako eragiketa-puntuak eta (7.6) ekuazioaz lortutako takometroaren kurba adierazgarria aurkezten dira grafikoki. Espero zitekeen bezala, takometroaren linealtasuna bikaina da.

Horiek horrela, potentzia-anplifikadoreari -6 V-eko maila erako sarrera aplikatzearen ondorioz takometroak emandako v_{lak} tentsioaren denbora-bilakaera erregistratzen bada, (7.6) adierazpena kontuan hartuz, 7.4 irudiko ω biraketa-abiaduraren denbora-erantzuna lortzen da. Bistakoa denez, onargarria da hori (7.3) transferentzia-funtziodun lehen ordenako sistema batek emango lukeenarekin parekatzea.



7.3 irudia. Takometroaren kurba adierazgarria.

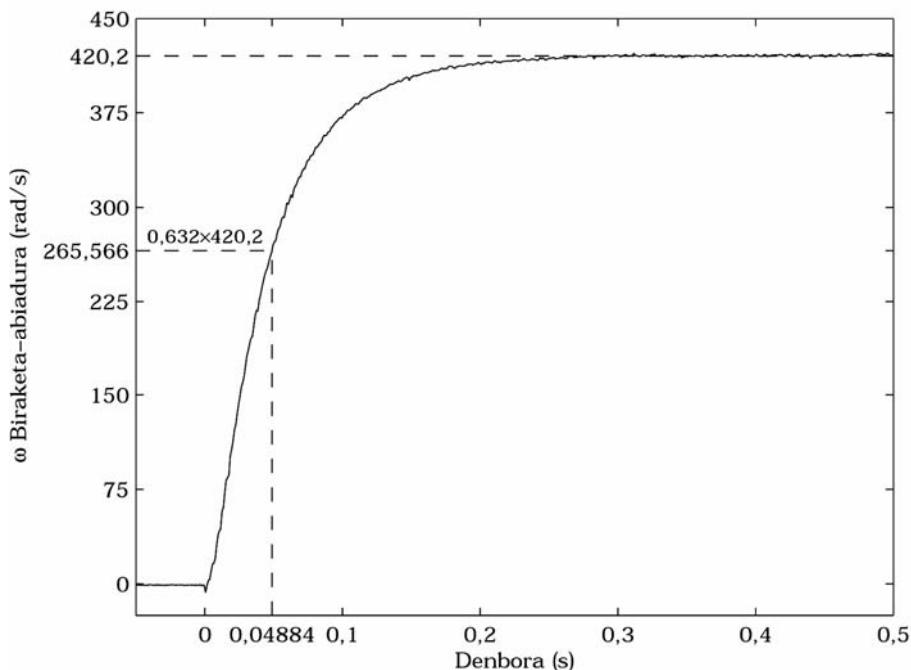
Arrazoinamendu horri jarraituz, ω egonkortzen den balioa $\omega_{ss} = 420,2 \text{ rad/s}$ ingurukoa denez, $\omega(s)/U(s)$ transferentzia-funtzioaren irabazia $K = 420,2/-6 = -70,0333 \text{ (rad/s)/V}$ litzateke. Halaber, biraketa-abiadurak ω_{ss} balioaren % 63,2 — $0,632 \cdot 420,2 = 265,566 \text{ rad/s}$ — maila erako sarrera aplikatu eta $\tau = 0,04884 \text{ s}$ -ko denbora-konstante bat igaro ostean iristen duela ere ondoriozta daiteke. Hortaz, (7.4) eta (7.5) adierazpenen arabera, K_b eta J parametroen zenbatespen hauek lortzen dira:

$$K_b = -4,0762/-70,0333 = 0,0582 \text{ V/(rad/s)}$$

$$J = 0,04884 \cdot 0,046 \cdot 0,0582/5,5 = 2,3775 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

7.5 irudian, benetako serbomotorraren ω biraketa-abiadurari gainjartzen zaio 7.2 irudiko simulazio-eredua $u(t) = -6 \text{ V}$ -eko maila erako sarrera beraren

eraginpean jarrita lortzen dena. Simulaturiko ereduaren K_b eta J parametroak modu esperimentalean zenbatetsitakoak dira.



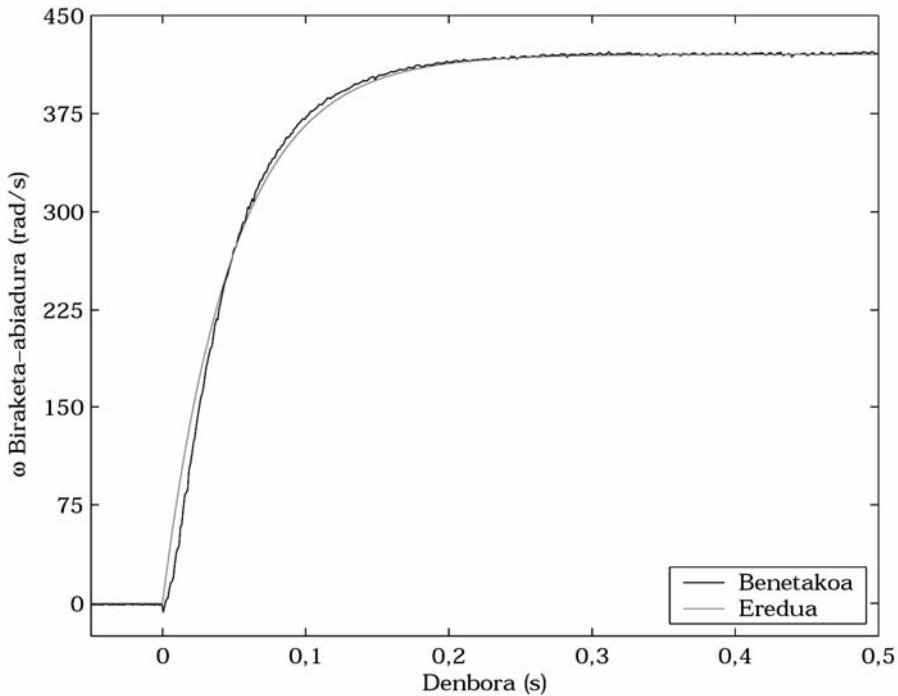
7.4 irudia. ω biraketa-abiadurak -6 V-eko maila erako sarrera bati emandako erantzuna.

Ikus daitekeenez, K_b parametroarentzat modu esperimentalean ondorioztatu den balioa ia bat dator fabrikatzaileak emandakoarekin, eta, ondorioz, asko aldentzen da K_f -rentzat ematen duenetik. Dena den, benetako KZeko serbomotorraren portaerarekin duen ageriko antzekotasuna dela eta, 7.5 irudiko erantzun simulatua lortzeko erabili den eredu bera hartuko dugu konpentsadoreen diseinurako abiapuntu gisa.

7.2.1.3 Potentziometro zirkularra

7.2 irudiko θ_1 posizio angeluarra kontrolatzeaz arduratzen den konpentsadorearen diseinua errazteko, joko dugu zuzenean θ_1 seinalea

berrelikatzen dela. Praktikan, ostera, sentso-re potentziometriko baten bitartez, θ_1 posizioaren arabera v_{pot} tentsioa sortzen da berrelikadura-seinale gisa. Hori dela eta, seinalea konputagailu edo mikrokontroladorean jaso, eta, programa barruan, zer posizio angeluarri dagokion kalkulatu beharko da kontrol-algoritmoa aplikatu aurretik.



7.5 irudia. Benetako serbomotorraren eta simulazio-ereduaren konparaketa, ω biraketa-abiaduraren ikuspuntutik.

θ_1 posizioaren eta v_{pot} tentsioaren arteko erlazioa ezartzeko, potentziometro zirkularra modu esperimentalean karakterizatzen da. Horretarako, beste ezer egin baino lehen, KZeko serbomotorraren erantzuna baino nabarmen azkarragoa duela eta, gaitzetsi egiten da sentso-re honen dinamika ere, potentzia-anplifikadore eta takometroarekin egin den bezala.

7.4 taulan bildu ditugu erreduktore ondoko ardatzaren hainbat θ_1 posizioentzat modu esperimentalean neurtutako potentziometro zirkularren v_{pot} tentsio-balioak.

7.4 taula. Sentsore potentziometrikoaren karakterizaziorako eragiketa-puntuak.

v_{pot} (V)	-8	-6,71	-5,4	-4,03	-2,71	-1,41	-0,09
θ_1 (°)	0	30	60	90	120	150	180
v_{pot} (V)	1,21	2,58	3,9	5,26	6,72	8	
θ_1 (°)	210	240	270	300	330	359	

Hor islatutako eragiketa-puntuetan oinarrituriko erregresio lineala eginez, θ_1 eta v_{pot} -en arteko erlazio hau lortzen da:

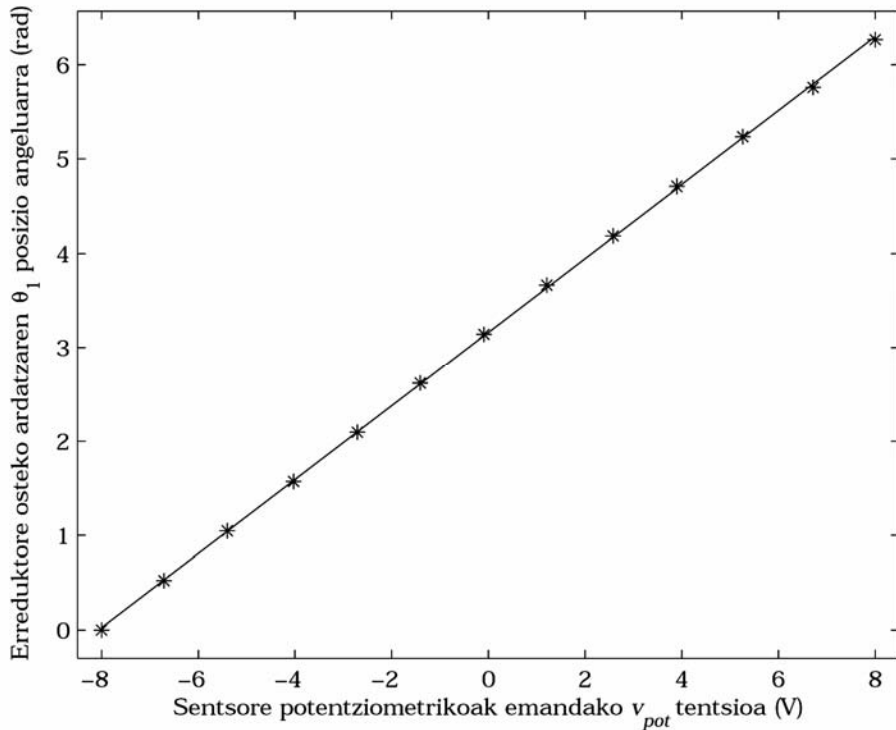
$$\theta_1 = 0,392v_{pot} + 3,1608 \tag{7.7}$$

non θ_1 rad-etan baitago. Potentzia-anplifikadore eta takometroaren kasuetan ez bezala, kasu honetako offseta ez da, inolaz ere, baztergarria, potentziometroaren tentsiorik ezean idealki $\theta_1 = \pi$ rad dela adierazten baitu. 7.4 taulako eragiketa-puntuak ez ezik, 7.6 irudiak (7.7) ekuazioari dagokion linea ere erakusten du, eta frogatzen du sentsore potentziometrikoaren linealtasuna ere oso ona dela.

7.2.2 AURRERATZE-KONPENTSADORE JARRAITU DIGITALIZATUA

KZeko serbomotorraren θ_1 posizio angeluarra gobernatzeko proposatzen den lehen kontroladore digitala aurreratze-konpentsadore jarraitu bat diskretizatuz lortzen da. Horretarako, jatorrizko kontroladore analogikoaren diseinua, Bode diagraman oinarrituz, maiztasunaren arloan egiten da, hurrengo bi zehaztapenak betetzeko:

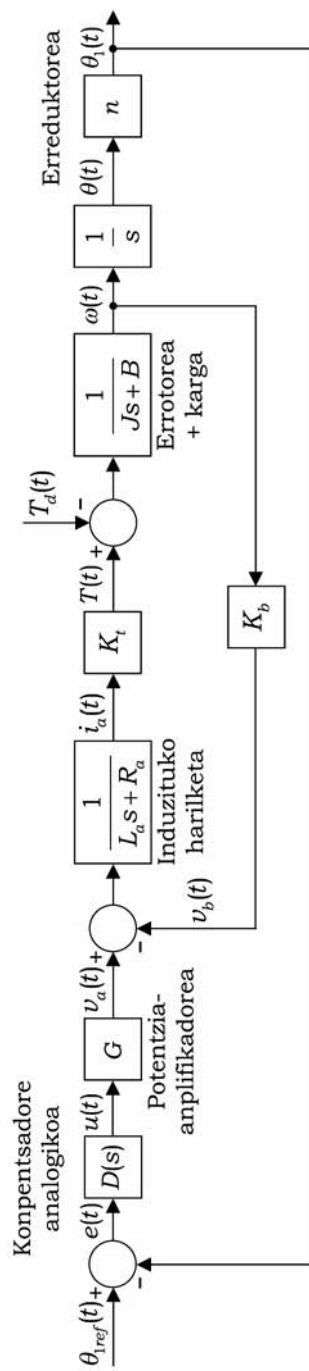
1. Arrapala erako sarreren aurrean, begizta itxiko sistemak gehienez % 1eko egoera iraunkorreko errorea izan dezan lortu nahi dugu.
2. Konpentsaturiko sistemaren fase-tarteak 60° izan behar du.



7.6 irudia. Sensore potenziometrikoaren kurba adierazgarria.

7.7 irudia θ_1 posizioaren kontrolerako sistema analogikoaren eskema da; ageri den aurreratze-kompensadore jarraituaren transferentzia-funtzioaren egitura honako hau da:

$$D(s) = \frac{k}{\alpha} \frac{s + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\alpha\tau}} \quad (7.8)$$



7.7 irudia. θ_1 posizioaren kontrol-sistema analogikoa.

Lehenik eta behin, egoera iraunkorreko erroreaki dagokion lehen zehaztapena betetzearren, $D(s)$ konpentsadorearen k irabazia finkatu beharra dago. Potentzia-anplifikadorearen G irabazia negatiboa dela kontuan izanik, konpentsadoreari dagokionak ere nahitaez negatiboa beharko du, begizta itxiko kontrol-sistemaren ezegonkortasuna ez sortzeko. Horretaz gain, 7.7 irudiko kontrol-sistema 1 tipokoa denez, honela kalkula daiteke arrapala unitarioko $\theta_{1\text{ ref}}$ kontsignek eragiten duten egoera iraunkorreko e_{ss} errorea:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_p} \quad (7.9)$$

K_p arrapalako errore-konstantea da.

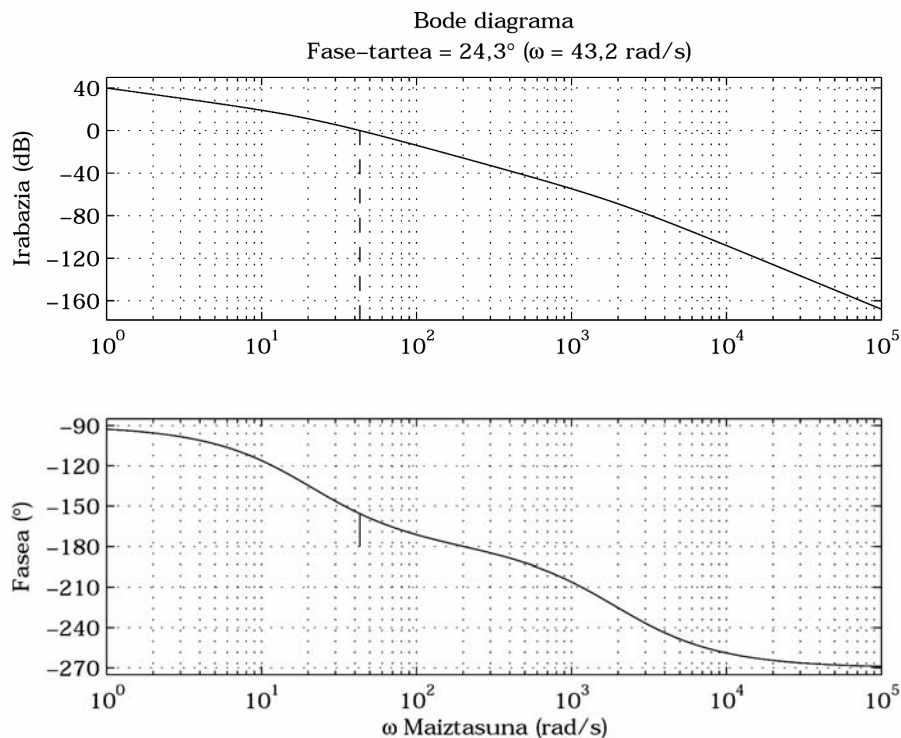
Horrenbestez, (7.9) adierazpenaren arabera, arrapala unitarioko kontsignaren eraginez $e_{ss} \leq 0,01$ izatea eragiten duen K_p -k 100 izan behar du gutxienez. Horiek horrela,

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{s \rightarrow 0} s k \frac{\theta_1(s)}{U(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s k \frac{G K_t n}{s [L_a J s^2 + (R_a J + L_a B) s + R_a B + K_t K_b]} = \\ &= \frac{k G K_t n}{R_a B + K_t K_b} \end{aligned}$$

denez, parametroentzat aurreko azpiatalean ezarritako balioen arabera,

$$k = \frac{K_p (R_a B + K_t K_b)}{G K_t n} = \frac{100 \cdot (5,5 \cdot 0 + 0,046 \cdot 0,0582)}{-4,0762 \cdot 0,046 \cdot (1/50)} = -71,39$$

Behin k doitu ostean, begizta irekiko $k \theta_1(s)/U(s)$ transferentzia-funtzioaren maiztasun-erantzuna islatzen du 7.8 irudiko Bode diagramak. Agerian jartzen denez, k irabazi hutsa kontroladore gisa erabiliko balitz, ez litzateke beteko 60° -ko fase-tartearen zehaztapena, $24,3^\circ$ -koa baino ez bailitzateke lortuko. Ondorioz, ezinbestekoa da $D(s)$ aurreratze-kompentsadorearen diseinua osatzea; horretarako, (7.8) transferentzia-funtzioko α eta τ parametroak finkatu behar dira.



7.8 irudia. $k\theta_1(s)/U(s)$ transferentzia-funtzioaren Bode diagrama.

Bode diagraman oinarrituz aurreratze-kompentsadorea s planoan diseinatzeko aplikatu beharreko metodoa guztiz bat dator 5.4 adibidean w planorako erabili denarekin. Dena den, 5.4 adibideko Bode diagramak itxurazko η maiztasunaren mendekoak dira; oraingoak, ostera, benetako ω maiztasunaren arabera agertzen dira. Salbuespen bakar horrekin, diseinu-metodoa 5.4 adibideko bera izaki, ez da horren filosofia berriro hemen azalduko.

7.8 irudiko Bode diagramaren arabera, kompentsatu ondoko fase-tartea kompentsatu aurreko $\omega = 43,2$ rad/s-ko maiztasun berean kalkulatu balitz, aurreratze-kompentsadorearen $D(s)/k$ gaiak, zehazki, $\phi_m = 60^\circ - 24,3^\circ = 35,7^\circ$ -ko fase-aurrerapen maximoa ekarri beharko luke 60° -ko fase-tartearen zehaztapena betearazteko.

Dena den, konpentsaturiko sistemari dagokion fase-tartearen kalkulua 43,2 rad/s-ko maiztasunean baino handiagoan egingo denez, konpentsadoreak aurreratu beharreko ϕ_m fase maximoa $35,7^\circ$ -koa baino zertxobait handiagoa izan beharko du; izan ere, desfasea maiztasunarekin batera hazten doala islatzen da 7.8 irudian. Zenbait proba egin ostean, 60° -ko fase-tartea iristeko, aurrerapenak

$$\phi_m = 35,7^\circ (+9,8^\circ) = 45,5^\circ$$

izan behar duela ateratzen da. Hortaz, α parametroaren balioa honela ondoriozta daiteke:

$$\sin \phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1-\sin \phi_m}{1+\sin \phi_m} = \frac{1-\sin 45,5^\circ}{1+\sin 45,5^\circ} = 0,1674$$

Horrenbestez, konpentsadorearen $D(s)/k$ gaiak, $\phi_m = 45,5^\circ$ -ko aurrerapen maximoa duen $\omega_m = 1/(\sqrt{\alpha}\tau)$ maiztasunean, $20\log(1/\sqrt{\alpha}) = 7,7632$ dB-eko irabazia du. Hori horrela dela jakinik, τ parametroaren balioa finkatzeko, $k\theta_1(s)/U(s)$ sistemak $-7,7632$ dB-eko irabazia duen maiztasuna ω_m -ri berdintzen zaio. Hala, konpentsatutako sistemaren fase-tartea konpentsadoreak fase-aurrerapen maximoa duen ω_m maiztasunean kalkula dadin lortzen da.

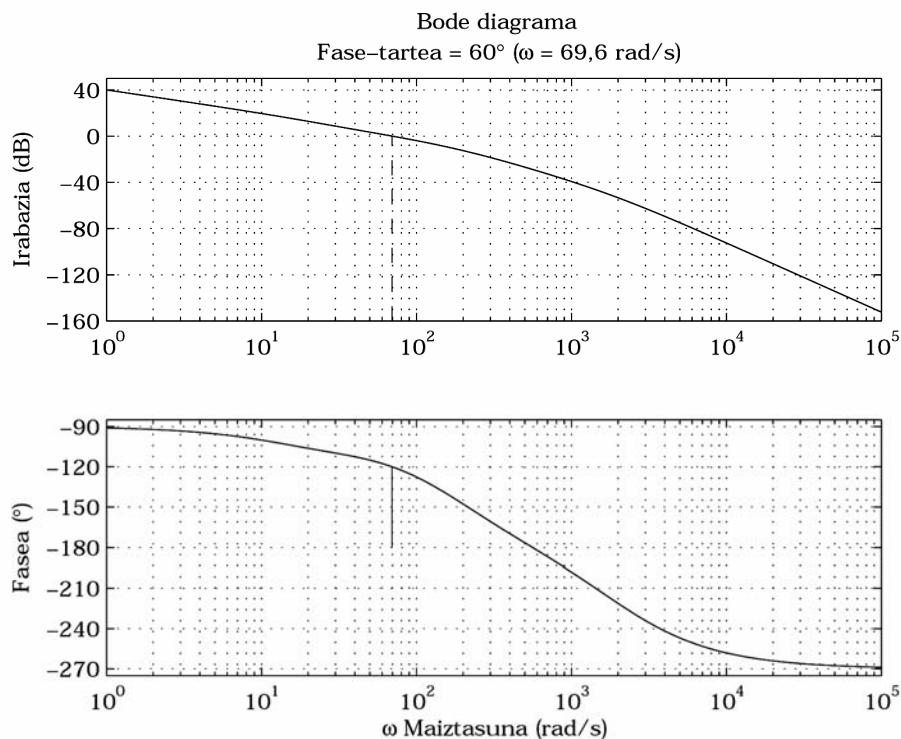
7.8 irudiko Bode diagrama aztertuz, frogatu daiteke $k\theta_1(s)/U(s)$ sistemak 69,6056 rad/s-ko maiztasunean lortzen duela $-7,7632$ dB-eko irabazia; ondorioz,

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\tau} = 69,6056 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{69,6056\sqrt{0,1674}} = 0,03512 \text{ s}$$

Azkenik, diseinuan zehar kalkulatu diren k , α eta τ parametroen balioak (7.8) adierazpenean ordezkaturik, $D(s)$ aurreratze-kompentsadore jarraituari dagokion transferentzia-funtzio hau lortzen da:

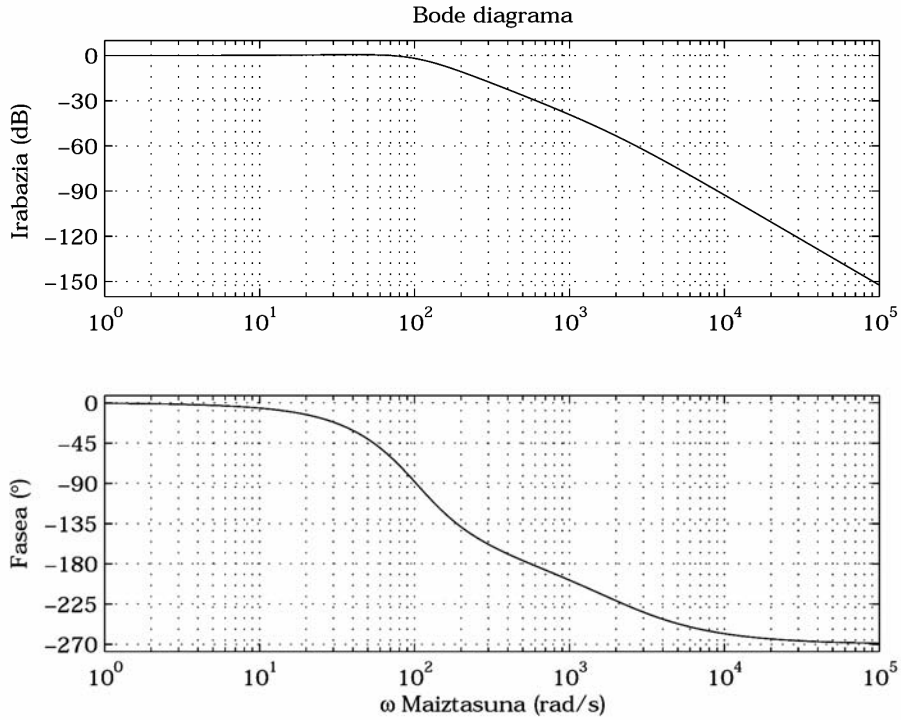
$$D(s) = -426,5359 \frac{s + 28,4764}{s + 170,1387} \quad (7.10)$$

$D(s)$ -ren bitartez konpentsatutako begizta irekiko $D(s)\theta_1(s)/U(s)$ sistemaren Bode diagrama 7.9 irudian erakutsitakoa da. Hor, 60° -ko fase-tartearen zehaztapena zehazki betetzen dela frogatzeaz gain, hori, nahi zen bezala, $\omega_m = 69,6$ rad/s-ko maiztasunean kalkulatzen dela ere berresten da.



7.9 irudia. Konpentsaturiko $D(s)\theta_1(s)/U(s)$ sistemari dagokion Bode diagrama.

Bestalde, 7.10 irudiak jasotzen du $D(s)$ aurreratze-kompensadoreaz lortzen den begizta itxiko kontrol-sistemaren Bode diagrama. Hor, diseinatu berri den posizionatze-sistema analogikoari dagokion banda-zabalera — -3 dB-eko irabazia aurkeztu duen maiztasuna, alegia— $\omega_c = 113$ rad/s ingurukoa dela ondorioztatzen da.



7.10 irudia. Konpentsatutako begizta itxiko $\theta_1(s)/\theta_{1\text{ref}}(s)$ sistemaren Bode diagrama.

Diseinuaren hurrengo etapa $D(s)$ konpentsadorearen diskretizazioa da, eta, horretarako, Tustinen hurbilketa trapezoidala aplikatuko da. Ondorioz, (7.10) transferentzia-funtzioan s aldagaia

$$\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

adierazpenaz ordezkatzuz, aurreratze-kompentsadore jarraituaren baliokide digital hau lortzen da:

$$D(z) = -426,5359 \frac{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} + 28,4764}{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} + 170,1387} =$$

$$= -426,5359 \frac{28,4764T + 2}{170,1387T + 2} \frac{\tilde{z} + \frac{28,4764T - 2}{28,4764T + 2}}{\tilde{z} + \frac{170,1387T - 2}{170,1387T + 2}}$$

Laginketa-periodoa hautatzeko, ω_s laginketa-maiztasunak gutxienez ω_c banda-zabalera baino 10 aldiz handiagoa izan behar du; hau da, $\omega_s \geq 10\omega_c = 1130$ rad/s. Kondizio horren arabera $T = 2\pi/\omega_s \leq 5,56$ ms behar duenez, $T = 5$ ms-ko laginketa-periodoa aukeratu da. Balio hori $D(\tilde{z})$ transferentzia-funtzioaren adierazpen orokorrean ordezkatzuz,

$$D(\tilde{z}) = -320,5546 \frac{\tilde{z} - 0,8671}{\tilde{z} - 0,4032}$$

dela ateratzen da. Horrenbestez, konpentsadore hau euskarri digital batean ezartzea ahalbidetzen duen diferentzia-ekuazioa hau da:

$$u_n = 0,4032u_{n-1} - 320,5546e_n + 277,9467e_{n-1}$$

7.2.3 ATZERATZE-KONPENTSADORE DIGITALA

Azpiatal honetan, θ_1 posizio angeluarra kontrolatzeko, atzeratze-kompentsadore digital baten diseinuari zuzenean diskretuki ekiten zaio. Ondorioz, ezertan hasi aurretik, $\theta_1(s)/U(s)$ transferentzia-funtzioaren diskretizazioa egin beharra dago, eta, horretarako, ezinbestekoa da T laginketa-periodo egokia finkatzea.

Bistakoa denez, kontroladorea diseinatu aurretik T hautatzea zeregin korapilatsua gerta daiteke; izan ere, begizta irekiko sistemaren portaera dinamikoa begizta itxi ostean nabarmen alda daiteke. Zailtasun horri konponbidea emateko, kasu honetan, 7.2.2 azpiatalean ezarritako zehaztapenak betearazten dituen atzeratze-kompentsadore jarraitua diseinatu da lehenik. Transferentzia-funtzio hau ondorioztatu da horrentzat:

$$D(s) = -7,4068 \frac{s + 0,9439}{s + 0,09793}$$

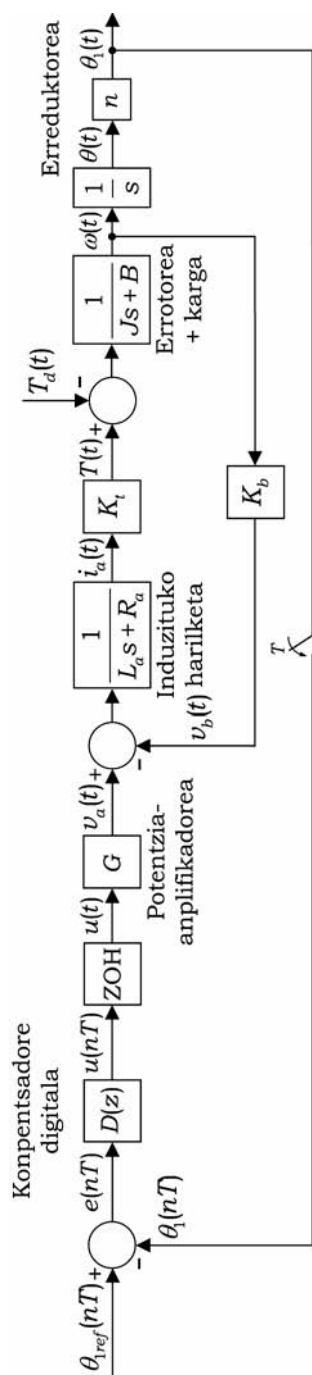
Konpentsadore analogiko honen bitartez, froga daiteke begizta itxiko posizionatze-sistemarentzat $\omega_c = 15,2$ rad/s inguruko banda-zabalera lortzen dela. Horrenbestez, 7.2.2 azpiataleko aurreratze-konpentsadoreari ezarri zaizkion zehaztapenak betetzen baditu ere, espero zitekeen bezala, atzeratze-konpentsadoreaz iristen den banda-zabalera aurreratzekoaren bidez lortzen dena -113 rad/s— baino nabarmen txikiagoa da. Ondorioz, posizionatze-sistemari dagokionez, aurrean daiteke atzeratze-konpentsadore digitalak ere aurreratzekoak baino denbora-erantzun askoz motelagoa eragingo duela.

Atzeratze-konpentsadore jarraituaz lortzen den banda-zabalera kontuan hartuz, bere baliokide diskretuaren diseinuari ekiteko, egokitzen jotzen da $\omega_s \geq 10\omega_c = 152$ rad/s-ko laginketa-maiztasuna hautatzea. Horretarako, laginketa-periodoak $T \leq 2\pi/152 = 0,04134$ s kondizioa bete behar duenez, $T = 0,04$ s-tan finkatzea erabakitzen da.

Proposatzen den posizionatze-sistema digitalari dagokion bloke-diagrama islatzen du 7.11 irudiak. $\theta_{1\text{ref}}$ kontsigna konputagailu bidez ezartzeko asmoa dagoenez, aipatutako bloke-diagraman zuzenean seinale digital gisa aurkeztu da. Bestetik, ohi bezala, $\theta_1(s)/U(s)$ transferentzia-funtzioaren baliokide diskretua ondorioztatzean, kontroladore digitalaren eta potentzia-anplifikadorearen artean zero ordenako euskailu bat fisikoki kokaturik dagoela kontsideratu behar da.

Horiek horrela, parametroen balioak ordezkatzuz, kontrolatu beharreko begizta irekiko sistemaren transferentzia-funtzioa

$$\begin{aligned} \frac{\theta_1(s)}{U(s)} &= \frac{\frac{GK_t n}{L_a J}}{s \left(s^2 + \frac{R_a J + L_a B}{L_a J} s + \frac{R_a B + K_t K_b}{L_a J} \right)} = \\ &= \frac{-56333,2432}{s(s^2 + 1964,2857s + 40216,3137)} \end{aligned}$$



7.11 irudia. θ_1 posizioaren kontrol-sistema digitala.

denez, honela lortzen da dagokion baliokide diskretua:

$$\begin{aligned}\frac{\theta_1(z)}{U(z)} &= Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{-56333,2432}{s(s^2 + 1964,2857s + 40216,3137)} \right] = \\ &= (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{-56333,2432}{s^2(s + 1943,594)(s + 20,6917)} \right]\end{aligned}\quad (7.11)$$

Bestalde, Z transformatuaren taulak zuzenean aplikatu ahal izateko, honela banantzen da aurreko adierazpena zatiketa partzialetan:

$$\frac{\theta_1(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{A}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{E}{s + 1943,594} + \frac{F}{s + 20,6917} \right] \quad (7.12)$$

(7.11) eta (7.12) ekuazioak konparatuz, A , C , E eta F konstanteen balioak hauek direla ondorioztatzen da:

$$A = -1,4008; \quad C = 6,8417 \cdot 10^{-2}; \quad E = 7,7543 \cdot 10^{-6} \quad \text{eta} \quad F = -6,8425 \cdot 10^{-2}$$

Horrenbestez, (7.12) adierazpen barruko Z transformatua eginez, ekuazio hau erdiesten da:

$$\frac{\theta_1(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1}) \left[\frac{ATz}{(z-1)^2} + \frac{Cz}{z-1} + \frac{Ez}{z-a} + \frac{Fz}{z-b} \right]$$

$a = e^{-1943,594T}$ eta $b = e^{-20,6917T}$ izanik. Azkenik, adierazpen berri hori landuz, lortu nahi dugun transferentzia-funtzio diskretuak itxura hau duela ondoriozta daiteke:

$$\frac{\theta_1(z)}{U(z)} = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \quad (7.13)$$

non

$$\begin{aligned}
 b_2 &= AT - (1 + a + b)C - (2 + b)E - (2 + a)F \\
 b_1 &= -(a + b)AT + (a + b + ab)C + (1 + 2b)E + (1 + 2a)F \\
 b_0 &= ab(AT - C) - bE - aF \\
 a_2 &= -(1 + a + b) \\
 a_1 &= a + b + ab \\
 a_0 &= -ab
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

baitira.

Dena den, konpentsadore diskretuaren diseinua maiztasunaren arloan jarraitua balitz bezala egin ahal izateko, $\theta_1(s)/U(s)$ transferentzia-funtzioari dagokion $\mathcal{Z}$ transformatua ez ezik, haren $\mathcal{W}$ transformatua ere aurkitu beharra dago. Horretarako, (7.13) transferentzia-funtzioko $\mathfrak{z}$ aldagaia

$$\mathfrak{z} = \frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2}$$

adierazpenaz honela ordezkatzten da:

$$\frac{\theta_1(w)}{U(w)} = \frac{b_2 \left(\frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2} \right)^2 + b_1 \frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2} + b_0}{\left(\frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2} \right)^3 + a_2 \left(\frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2} \right)^2 + a_1 \frac{1 + Tw/2}{1 - Tw/2} + a_0}$$

Eta azken ekuazio hori garatuz, w planoan kalkulaturako

$$\frac{\theta_1(w)}{U(w)} = \frac{d_3 w^3 + d_2 w^2 + d_1 w + d_0}{c_3 w^3 + c_2 w^2 + c_1 w + c_0} \tag{7.15}$$

transferentzia-funtzioa lortzen da; horko koefizienteak adierazpen hauen arabera kalkula daitezke:

$$\begin{aligned}
d_3 &= (-b_0 + b_1 - b_2)T^3 \\
d_2 &= 2(3b_0 - b_1 - b_2)T^2 \\
d_1 &= 4(-3b_0 - b_1 + b_2)T \\
d_0 &= 8(b_0 + b_1 + b_2) \\
c_3 &= (1 - a_0 + a_1 - a_2)T^3 \\
c_2 &= 2(3 + 3a_0 - a_1 - a_2)T^2 \\
c_1 &= 4(3 - 3a_0 - a_1 + a_2)T \\
c_0 &= 8(1 + a_0 + a_1 + a_2)
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Hortaz, (7.13), (7.14), (7.15) eta (7.16) ekuazioak aintzat hartzeaz gain, $\mathcal{A}$, C , E eta F konstanteen balioak nahiz T laginketa-periodoari esleitu zaiona kontuan izanik, kontrolatu beharreko begizta irekiko sistemaren $\varkappa$ eta w planoetan kalkulaturako transferentzia-funtzioak, hurrenez hurren, honako hauek direla ondorioztatzen da:

$$\begin{aligned}
\frac{\theta_1(\varkappa)}{U(\varkappa)} &= \frac{-0,01752\varkappa^2 - 0,01402\varkappa - 3,3892 \cdot 10^{-6}}{\varkappa^3 - 1,4371\varkappa^2 + 0,4371\varkappa - 7,5312 \cdot 10^{-35}} \cong \\
&\cong \frac{-0,01752\varkappa^2 - 0,01402\varkappa - 3,3892 \cdot 10^{-6}}{\varkappa^3 - 1,4371\varkappa^2 + 0,4371\varkappa} \\
\frac{\theta_1(w)}{U(w)} &= \frac{2,2428 \cdot 10^{-7}w^3 + 1,009 \cdot 10^{-4}w^2 - 5,5852 \cdot 10^{-4}w - 0,2523}{1,8394 \cdot 10^{-4}w^3 + 0,0128w^2 + 0,1801w}
\end{aligned}$$

Oraingoan, 7.2.2 azpiatalean ezarri diren maiztasun-alorreko zehaztapenak betetzearren, w planoan transferentzia-funtzio generiko hau duen atzeratze-konpentsadore bat diseinatzeko da:

$$D(w) = \frac{k}{\beta_w} \frac{w + \frac{1}{T_w}}{w + \frac{1}{\beta_w T_w}} \tag{7.17}$$

Zehazki, dagoeneko 7.2.2 azpiatalean frogatu den bezala, arrapala-itxurako $\theta_{1\text{ref}}$ kontsignek % 1eko errorea besterik eragin ez dezaten, konpentsatu ondorengo sistemaren abiadurako K_p errore-konstanteak 100 izan behar du. Kondizio hori betetzeko, konpentsadorearen irabaziari $k = -71,39$ balioa esleitu behar zaio.

Kasu honetan konpentsadorea zuzenean diskretuki diseinatzen den arren, balio bera ondorioztatzen da k -rentzat; izan ere, s , z nahiz w planoetan kalkulatzaren diren K_p -ak bat datoz. Dena den, diseinurako beharrezkoa ez bada ere, frogapen gisa konpentsadorearen k irabazia z nahiz w planoetatik abiatuz ere kalkulatzaren da. Honela,

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{T} k \frac{\theta_1(z)}{U(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{T} k \frac{-0,01752z^2 - 0,01402z - 3,3892 \cdot 10^{-6}}{z^3 - 1,4371z^2 + 0,4371z} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{0,04} k \frac{-0,01752z^2 - 0,01402z - 3,3892 \cdot 10^{-6}}{(z-1)(z^2 - 0,4371z)} = -1,4009k \end{aligned}$$

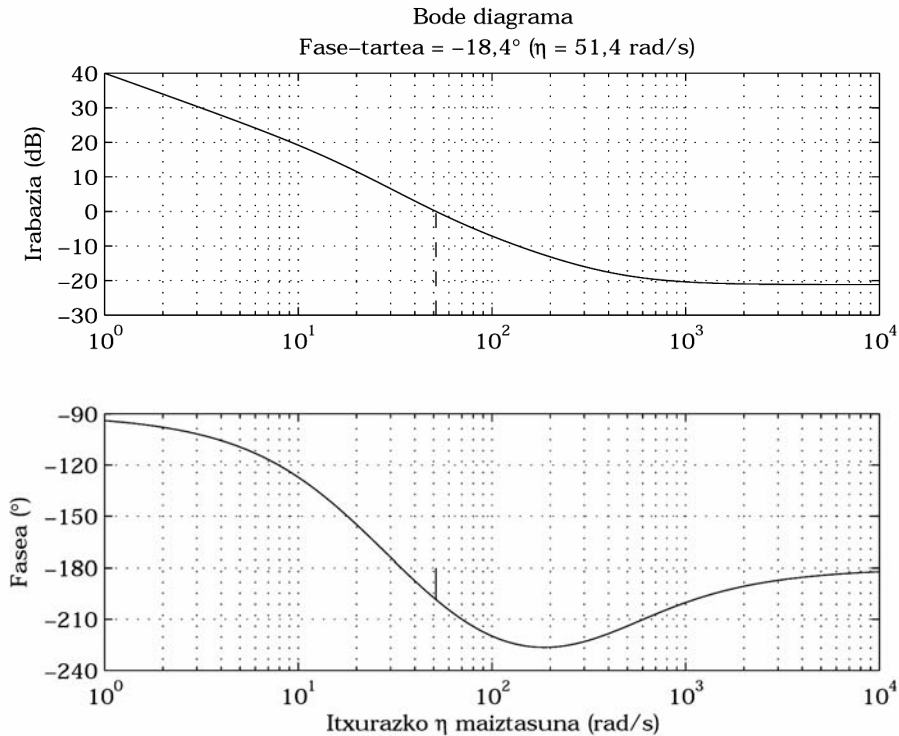
edo, bestela,

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{w \rightarrow 0} w k \frac{\theta_1(w)}{U(w)} = \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} w k \frac{2,2428 \cdot 10^{-7} w^3 + 1,009 \cdot 10^{-4} w^2 - 5,5852 \cdot 10^{-4} w - 0,2523}{1,8394 \cdot 10^{-4} w^3 + 0,0128 w^2 + 0,1801 w} = \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} w k \frac{2,2428 \cdot 10^{-7} w^3 + 1,009 \cdot 10^{-4} w^2 - 5,5852 \cdot 10^{-4} w - 0,2523}{w(1,8394 \cdot 10^{-4} w^2 + 0,0128 w + 0,1801)} = \\ &= -1,4009k \end{aligned}$$

Ondorioz, espero zen bezala, z nahiz w planoetan kalkulaturako k -ren balioa hau da:

$$k = \frac{K_p}{-1,4009} = \frac{100}{-1,4009} = -71,3827 \cong -71,39$$

7.12 irudian, $k\theta_1(w)/U(w)$ sistemari dagokion Bode diagrama islatzen da. Hori eta 7.8 irudikoa konparatuta jabetu gaitezke laginketa-prozesuak maiztasun-erantzunean eragiten duen hondatzeaz. Izan ere, $k\theta_1(s)/U(s)$ sistema jarraituak $24,3^\circ$ -ko fase-tartea du, eta $T = 0,04$ s-ko periodoaz lagindutako bere baliokide diskretuak, berriz, $-18,4^\circ$ -koa; horrek adierazten du konpentsadore gisa k irabazi hutsa erabiliz begizta ixteak ezegonkortasuna ekarriko lukeela.

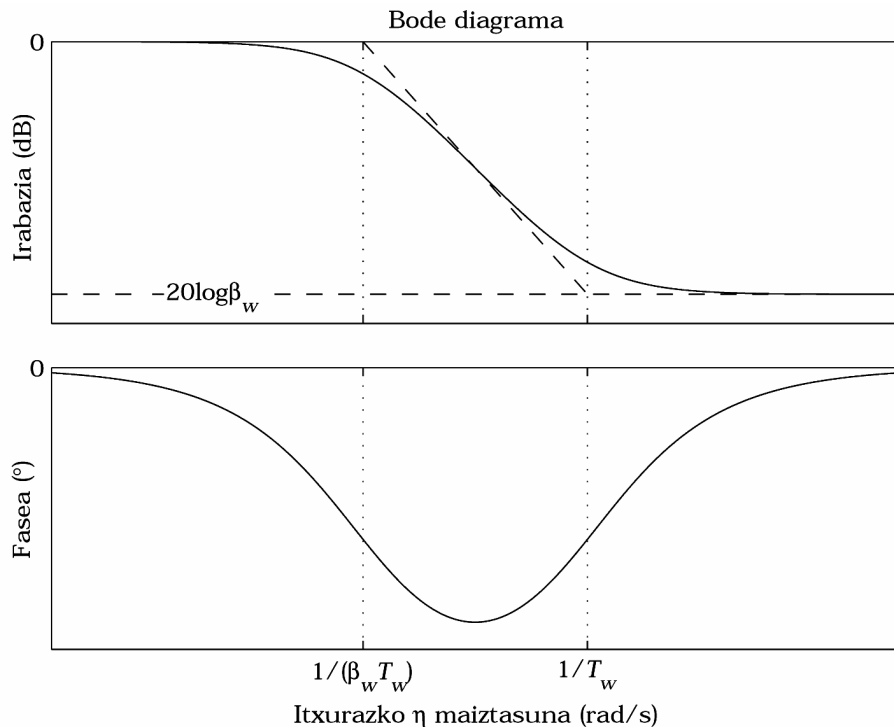


7.12 irudia. $k\theta_1(w)/U(w)$ transferentzia-funtzioaren Bode diagrama.

Hortaz, atzeratze-kompentsadorearen diseinua osatzearren, horren

$$\frac{D(w)}{k} = \frac{1}{\beta_w} \frac{w + \frac{1}{T_w}}{w + \frac{1}{\beta_w T_w}}$$

gaiari dagokion Bode diagrama azaltzen du eskema bidez 7.13 irudiak. Bertan, diseinua egiteko behar diren datu esanguratsuenak ere adierazten dira.



7.13 irudia. Konpentsadorearen
$$\frac{D(w)}{k} = \frac{1}{\beta_w} \frac{w + 1/T_w}{w + 1/(\beta_w T_w)}$$

gaiari dagokion Bode diagrama.

Dakigunez, (7.17) konpentsadoreaz gobernatutako sistemaren begizta irekiko Bode diagrama lortzeko, 7.12 irudian erakutsitakoari 7.13 irudikoa batu behar diogu. Horrenbestez, T_w eta β_w parametroen balio egokiak aurkitu behar dira, konpentsaturiko $D(w)\theta_1(w)/U(w)$ sistemaren Bode diagramak 60° -ko fase-tartea izan dezan. Ondoren, horretarako jarraitzen den arrazoinamendua deskribatzen da.

Agerikoa denez, $k\theta_1(w)/U(w)$ sistemaren fase-tartea horrek -120° -ko fasea duen η_0 maiztasunean kalkulatu balitz, exijitutako 60° -ko fase-tartea

konpentsadorearen $D(w)/k$ gaiaren beharrik gabe iritsiko litzateke. Dena den, hori lortzeko, $k\theta_1(w)/U(w)$ sistemaren η_0 maiztasuneko fasea aldatu gabe, dagokion irabazia 0 dB arte jaitsi beharko litzateke. Beste hitz batzuetan esanda, η_0 maiztasunean, $D(w)/k$ gaiak irabazia behar adina jaitsi beharko luke, aldi berean modu idealean inolako fase-aurrerapen edo -atzerapenik eragin gabe.

$D(w)/k$ gaiaren 7.13 irudiko Bode diagramari erreparatuz, $1/T_w$ hauste-maiztasunetik nabarmen gorago eginez, fasea apenas atzeratu gabe, lor daitekeen irabazi-atenuaziorik handiena — $-20\log\beta_w$ dB-ekoa, alegia— iristen da. Horrenbestez, $D(w)/k$ diseinatzean $1/T_w$ maiztasuna η_0 baino nabarmen beherago kokatzean datza gakoa. Praktikan, hamarkada eta zortzidun bat beherago ipini ohi da.

Horrenbestez, $D(w)/k$ gaiak $-20\log\beta_w$ dB-eko atenuazio maximoa emateaz gain, ia ez du fase-atzerapenik sortzen η_0 maiztasunean. Ondorioz, $k\theta_1(w)/U(w)$ sistemak η_0 -n duen irabazia $20\log\beta_w$ balioari berdinduz finkatzen da β_w parametroa. Hala, konpentsatutako $D(w)\theta_1(w)/U(w)$ sistemaren η_0 maiztasuneko irabazia 0 dB izango dela ziurtatzen da, eta fase-tartea η_0 -n kalkulatzera behartzen du horrek. Dena den, bertan, $D(w)\theta_1(w)/U(w)$ sistemaren fase-atzerapena 120° baino gehixeagokoa gertatuko da, konpentsadorearen $D(w)/k$ gaiak praktikan fase-atzerapen txiki bat sartzen baitu. Hortaz, 60° baino zertxobait baxuagoa den fase-tartea lortuko da.

$D(w)/k$ gaiak η_0 -n eragiten duen fase-atzerapen gehigarri horri aurre egiteko, η_0 gisa, $k\theta_1(w)/U(w)$ sistemak -120° -ko fase-atzerapena baino txikixeagoa —eskuarki, 5° eta 12° artean— duen maiztasun bat finkatzen da. Diseinua egin aurretik jakiterik ez dagoenez $D(w)/k$ gaiak η_0 maiztasunean zer fase-atzerapen sartuko duen, aurreratze-kompentsadorearen kasuan bezala, diseinu-metodoak iteratiboa izan beharko du.

Hainbat proba egin ostean, kasu honetan, $k\theta_1(w)/U(w)$ sistemak $-120^\circ(+5,4^\circ) = -114,6^\circ$ -ko fasea duen 6,4061 rad/s-ko maiztasun gisa finkatzen da η_0 . Ondorioz, $1/T_w$ hauste-maiztasuna η_0 baino hamarkada bat beherago kokatuz,

$$\frac{1}{T_w} = \frac{\eta_0}{10} = 0,6406$$

Bestalde, $k\theta_1(w)/U(w)$ sistemak $\eta_0 = 6,4061$ rad/s-ko maiztasunean 23,4983 dB-eko irabazia duenez,

$$20 \log \beta_w = 23,4983 \Rightarrow \beta_w = 14,9594$$

Balio horiek eta k irabaziari dagokiona (7.17) adierazpenean ordezkatzuz gero, konpentsadorearen w planoan kalkulaturako transferentzia-funtzio hau lortzen da:

$$D(w) = -4,7723 \frac{w + 0,6406}{w + 0,04282}$$

Kompentsadorea ezarri ostean lortzen den $D(w)\theta_1(w)/U(w)$ sistemaren Bode diagrama da 7.14 irudia; eskatutako 60° -ko fase-tartearen zehaztapena betetzen dela egiaztatzen da hor. Gainera, aurreikusi den bezala, fase-tartea itxurazko η_0 maiztasunean kalkulatzen dela ere berrets daiteke.

7.15 irudian, ostera, begizta itxiko $\theta_1(w)/\theta_{1\text{ref}}(w)$ kontrol-sistemarentzat lortzen den Bode diagrama islatzen da, eta diseinaturiko posizionatze-sistema digitalaren itxurazko η_c banda-zabalera 11,3 rad/s ingurukoa dela erakusten da. Horiek horrela, benetako eta itxurazko ω eta η maiztasunen arteko erlazio ez-lineala islatzen duen adierazpena gogora ekarriz, ondorioztatzen da posizionatze-sistema digitalaren benetako banda-zabalera

$$\omega_c = \frac{2}{T} \arctan(\eta_c T/2) = \frac{2}{0,04} \arctan(11,3 \cdot 0,04/2) = 11,1 \text{ rad/s}$$

dela.

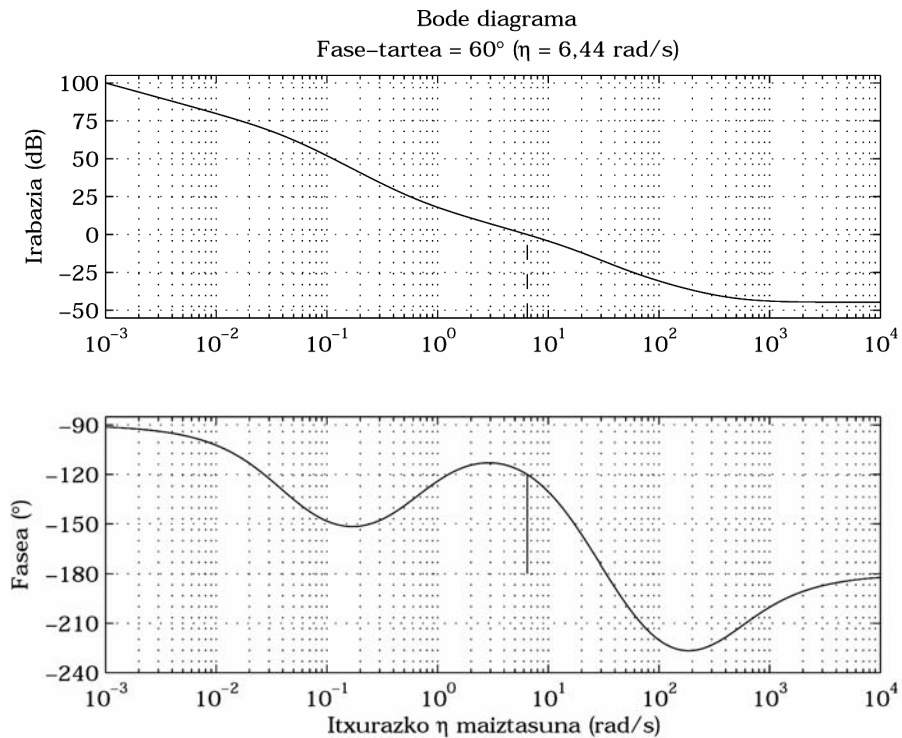
Amaitzeko, diseinatu den atzeratze-kompentsadore digitalaren $D(z)$ transferentzia-funtzio diskretua aurkitzeko, $D(w)$ -ren alderantzizko $\mathcal{W}$ transformatua kalkulatzen da. Horretarako, kasu honetan w eta z aldagaiak erlazionatzen dituen adierazpena hau dela aintzat hartuz:

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{0,04} \frac{z-1}{z+1}$$

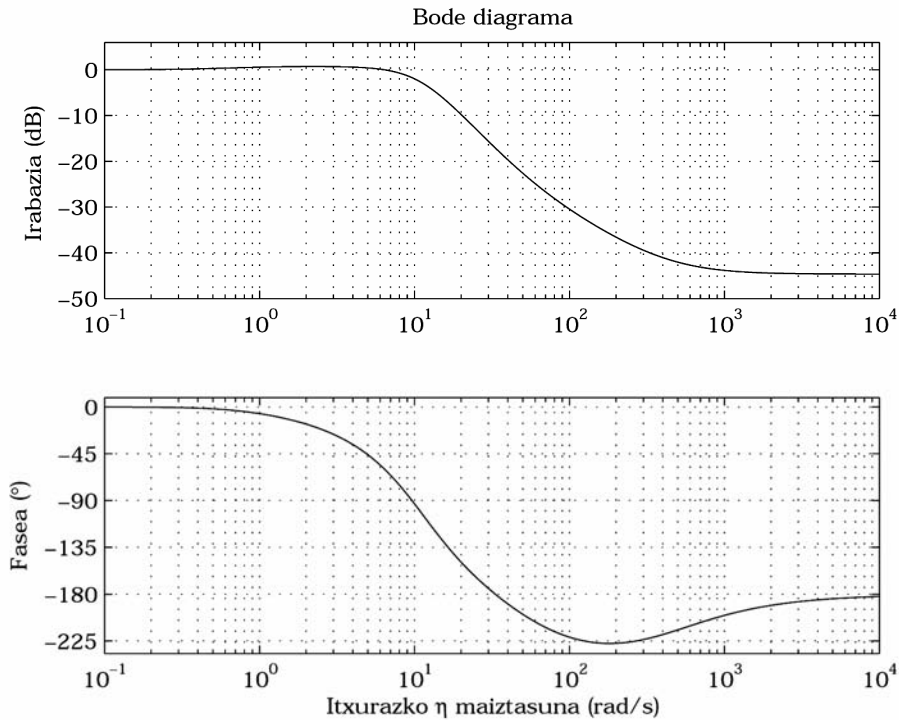
$$D(z) = -4,7723 \frac{\frac{2}{0,04} \frac{z-1}{z+1} + 0,6406}{\frac{2}{0,04} \frac{z-1}{z+1} + 0,04282}$$

delat ikusten da, eta azken transferentzia-funtzio hori garatuz,

$$D(z) = -4,8293 \frac{z-0,9747}{z-0,9983}$$



7.14 irudia. Konpentsatutako $D(w)\theta_1(w)/U(w)$ sistemari dagokion Bode diagrama.



7.15 irudia. Konpentsatutako begizta itxiko $\theta_1(w)/\theta_{1\text{ ref}}(w)$ sistemaren Bode diagrama.

Ondorioz, atzeratze-konpentsadore digital hori gauzatzeko, diferentzia-ekuazio hau programatu behar da:

$$u_n = 0,9983u_{n-1} - 4,8293e_n + 4,7071e_{n-1}$$

7.2.4 PROGRAMATU BIZKARREZURRA

BEHARREKO

KONTROL-ALGORITMOAREN

Diseinatu diren aurreratze- nahiz atzeratze-konpentsadorea euskarri digital batean ezartzean, sintesi-prozesuan kontsideratu ez ditugun hainbat alderdi praktiko hartu behar dira kontuan. Besteak beste, praktikan, u kontrol-seinaleak ezin ditu eragingailuak ezarritako goi- eta behe-muga batzuk gainditu. Esate

baterako, kasu honetan, KZeko serbomotorra elikatzen duen potentzia-anplifikadorea $|u| > 8$ V-eko sarreren aurrean ase egiten da. Hortaz, $|u| > 8$ V baino gehiago hazten uzteak, zentzu handirik ez izateaz gain, 'wind-up' deritzon arazoa eragin dezake.

Bestetik, kontrol-algoritmoa laginketa-une bakoitzean betetzeak hartzen duen T_{komp} konputazio-denbora T laginketa-periodoarekiko baztergarria den ala ez aztertzea ere beharrezkoa da. Izan ere, ezaugarri horren arabera, algoritmoa programatzeko modua zertxobait aldatzen da. Ondoren garatu ditugu bi kasu horiei dagozkien kontrol-programen bizkarrezurrak osatzen dituzten pseudokodeak.

7.2.4.1 Lehen kasua: T_{komp} T -rekiko baztergarria

Digitalki gauzatu beharreko aurreratze- nahiz atzeratze-kompentsadoreari dagozkien diferentzia-ekuazioek egitura orokor honi jarraitzen diote:

$$u_n = \alpha_1 u_{n-1} + \beta_0 e_n + \beta_1 e_{n-1}$$

non α_1 , β_0 eta β_1 konstanteak baitira. Horrenbestez, orokortasunari eutsi nahian, azken diferentzia-ekuazio hori da pseudokode honetan programaturik ageri dena.

1. pausoa: Kompentsadoreari dagozkion parametroen nahiz aurreko u_{n-1} kontrol-seinalearen eta e_{n-1} errorearen hasieratzea.

```

 $\alpha_1$  = ...;
 $\beta_0$  = ...;
 $\beta_1$  = ...;
 $U_{\min}$  = -8;
 $U_{\max}$  = 8;
 $u_{n-1}$  = 0;
 $e_{n-1}$  = 0;
...
```

→ Beste laginketa-une bat iritsi dela adierazten duen erloju-etendura.

n laginketa-unea:

2. pausoa: Sentsore potentziometrikoak emandako oraingo $v_{pot\ n}$ tentsioaren irakurketa; horretarako, ezinbestekoa da A/D bihurketa bat egitea.

3. pausoa: Oraingo $e_n = \theta_{1\ ref\ n} - \theta_{1\ n}$ errore-seinalearen kalkulua. $\theta_{1\ ref\ n}$ kontsigna programa bidez ezartzen da, eta, sentsore potentziometrikoaren kurba adierazgarriari dagokion (7.7) adierazpena kontuan hartuz, $\theta_{1\ n}$ ondorioztatzen da.

$$\theta_{1\ n} = 0,392 \times v_{pot\ n} + 3,1608;$$

$$e_n = \theta_{1\ ref\ n} - \theta_{1\ n};$$

4. pausoa: Oraingo u_n kontrol-seinalearen kalkulua.

$$u_n = \alpha_1 \times u_{n-1} + \beta_0 \times e_n + \beta_1 \times e_{n-1};$$

5. pausoa: Beharrezkoa balitz, u_n kontrol-seinalea mugatu egiten da potentzia-anplifikadorea ase ez dadin.

if $u_n < U_{min}$
 $u_n = U_{min};$

else if $u_n > U_{max}$

$$u_n = U_{max};$$

end

6. pausoa: u_n kontrol-seinalearen aplikazioa; horretarako, D/A bihurketa bat egin behar da.

7. pausoa: Aurreko u_{n-1} kontrol-seinalea eta e_{n-1} errorea hurrengo $n + 1$ laginketa-unerako eguneratzen dira.

$$u_{n-1} = u_n;$$

$$e_{n-1} = e_n;$$

n laginketa-periodoaren amaiera

8. pausoa: $n + 1$ laginketa-unea eta **2. pausora** itzuli.

Ikus daitekeenez, **4. pausoa**n kalkulatzeko den kontrol-seinalea potentzia-anplifikadorearen asetasuna eragiteko modukoa bada, **5. pausoa**n dagozkion mugen arabera zuzentzen da. Ondorioz, **7. pausoa**n u_{n-1} hurrengo laginketa-unerako eguneratzen denean, esleitzen zaion u_n -ren balioa aldeztu aurretik **5. pausoa**n zuzenduta dago. Hurrengo laginketa-unean bete-betea islatzen den u_n -ren zuzenketa erraz hori egin ezean, kontrol-seinalea behar baino denbora gehiago legoke ase, eta kontrolatu beharreko θ_1 aldagaiaren neurritz kanpoko oszilazioak eragin litzake horrek. Fenomeno kaltegarri horri *'wind-up'* deritzo.

7.2.4.2 Bigarren kasua: T_{komp} eta T konparagarriak

Proposatu berri den algoritmoari erreparatuz, ondoriozta daiteke, n -garren laginketa-unea ailegatzeko denetik u_n kontrol-seinalea **6. pausoa**n aplikatzeko den arte, zenbait kalkulu nahiz A/D eta D/A bihurketa bana egiteak hartzen duen T_{komp} konputazio-denbora bat igarotzen dela. Denbora hori T laginketa-periodoarekiko gaitzesgarria balitz, onargarria litzateke u_n kontrol-seinalea zehazki n -garren laginketa-unean aplikatzeko dela kontsideratzen duen hurbilketa.

Aitzitik, T_{komp} eta T konparagarriak badira, aipatutako hurbilketa onartezina egiten da; izan ere, u_n kontrol-seinalea aplikatzean, hurrengo $(n + 1)$ -garren laginketa-unea n -garrena bera baino gertuago izatea ere gerta daiteke. Gainera, kasu honetan, **5. pausoko** baldintzazko aginduen pilaketak arazoa areago dezake, konputazio-denbora luza edo labur baitaiteke han adierazitako kondizioen betetze-mailaren arabera. Elkarren segidako kontrol-seinaleen arteko denbora-tarteak irregularrak izatea eragiten du arazo horrek.

Aipatutako eragin kaltegarriak ahal den neurrian gutxitzeko, hobe da laginketa-periodo baten baitan kalkulatzeko kontrol-seinalea hurrengo laginketa-unea iritsi bezain laster aplikatzea. Hala, kontrol-seinale diskretuak laginketa-periodo bateko atzerapenaz aplikatzeko badira ere, erregulartasuna

gordez eguneratzen dira. Irizpide horri jarraituz, kontrol-algoritmoa honela berregituratzen da:

1. pausoa: Konpentsadoreari dagozkion parametroen nahiz oraingo u_n kontrol-seinalearen eta aurreko e_{n-1} errorearen hasieratzea.

$$\alpha_1 = \dots;$$

$$\beta_0 = \dots;$$

$$\beta_1 = \dots;$$

$$U_{\min} = -8;$$

$$U_{\max} = 8;$$

$$u_n = 0;$$

$$e_{n-1} = 0;$$

...

→ Beste laginketa-une bat iritsi dela adierazten duen erloju-etendura.

n laginketa-unea

2. pausoa: Aurreko $n-1$ laginketa-periodoan eguneratutako u_n kontrol-seinalearen aplikazioa; horretarako, ezinbestekoa da D/A bihurketa bat egitea.

3. eta 4. pausoak lehen kasurako garatu den algoritmoari dagozkion **2.** eta **3. pausoak** dira, hurrenez hurren.

5. pausoa: u_{n+1} kontrol-seinalea hurrengo laginketa-unerako kalkulatzeko da.

$$u_{n+1} = \alpha_1 \times u_n + \beta_0 \times e_n + \beta_1 \times e_{n-1};$$

6. pausoa: Beharrezkoa balitz, u_{n+1} kontrol-seinalea mugatu egiten da potentzia-anplifikadorea ase ez dadin.

$$\begin{aligned} \text{if } u_{n+1} < U_{\min} \\ u_{n+1} &= U_{\min}; \end{aligned}$$

```

else if  $u_{n+1} > U_{\max}$ 
     $u_{n+1} = U_{\max};$ 
end

```

7. pausoa: Aurreko e_{n-1} errorea hurrengo $n + 1$ laginketa-unerako eguneratzen da.

```

 $e_{n-1} = e_n;$ 

```

n laginketa-periodoaren amaiera

8. pausoa: $n + 1$ laginketa-unea eta **2. pausora** itzuli.

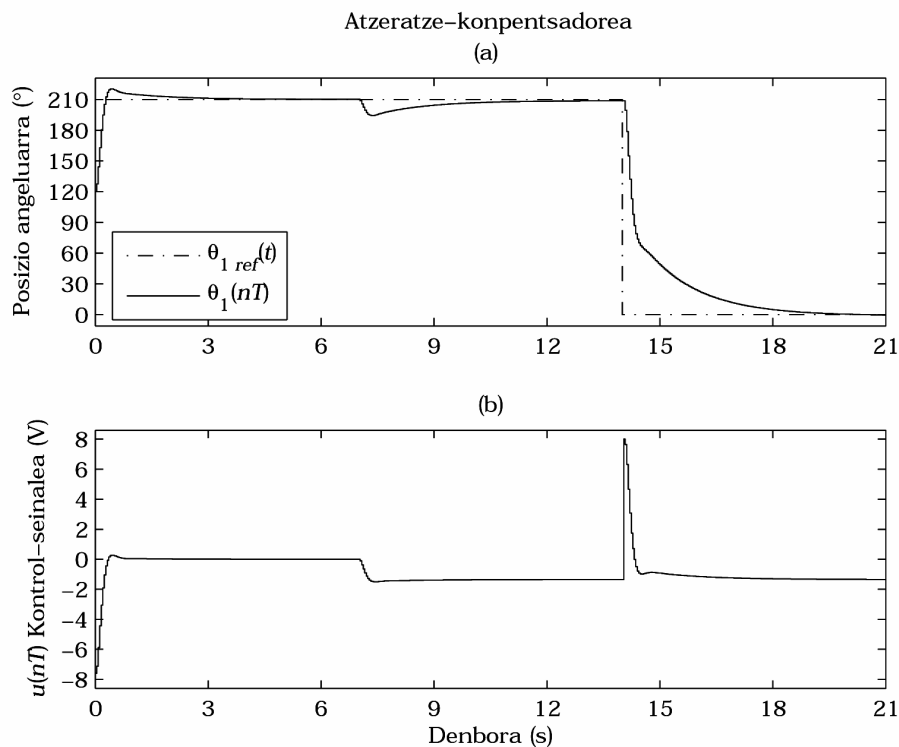
7.2.5 PROPOSATURIKO KONTROL-SISTEMAK BALIOZKOTZEA

θ_1 posizioa gobernatzeko diseinatu diren aurreratze- eta atzeratze-kompentsadoretan oinarritutako bi kontrol-sistemen funtzionamendua aztertzeko, hainbat simulazio nahiz saiakuntza esperimental egin da. Azpiatal honetan aurkezten dira lortutako emaitza adierazgarriak.

7.2.5.1 Simulazio-emaitzak

Simulazio-saiakuntzak gauzatu ahal izateko, serbomotorraren eredu matematiko gisa kompentsadoreak diseinatzeko erabili dena hartu da, 7.2 irudiko bloke-diagramaz azaldutakoa, alegia.

7.16 eta 7.17 irudiek, hurrenez hurren, atzeratze- eta aurreratze-kompentsadoreek kondizio beretan eragiten dituzten θ_1 —(a)— eta u —(b)— kontrol-aldagaien denbora-erantzunak jasotzen dituzte. Irudiotan ikus daitekeenez, saiakuntza hasi aurretik, erreduktore osteko motorraren ardatza 120° -ko posizioan geldirik dago. $\theta_{1\text{ref}}$ kontsigna 210° delarik abiatzen da saiakuntza, eta, 14. segundotik aurrera, hura bat-batean 0° izatera pasatzen da. Horretaz gain, perturbazio gisa, 7. segundotik aurrera, motorraren pare izendatuari dagokion $T_d = 0,046 \text{ N}\cdot\text{m}$ balioko balaztatze-momentua aplikatzen zaio erreduktore aurreko ardatzari.

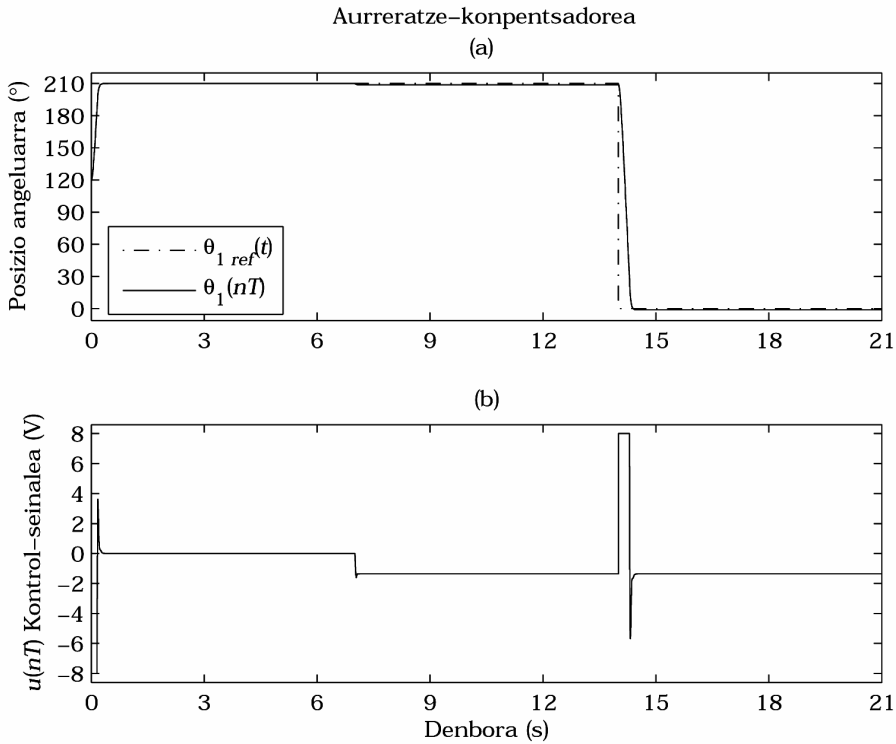


7.16 irudia. Atzeratze-kompentsadoreaz lortutako posizioaren eta kontrol-seinalearen denbora-bilakaera.

Oro har, biak egoera iraunkorreko errore eta fase-tarteari buruzko zehaztapen berak betetzeko diseinatu badira ere, aurreratze-kompentsadoreak atzeratzekoak baino erantzun askoz azkarragoak eragiten ditu, azken horren bitartez lortzen den begizta itxiko banda-zabalera nabarmen txikiagoa baita. Horiek horrela, 7.17(a) eta (b) irudiek islatutako denbora-erantzunen tarte esanguratsuenak 7.18 irudiaren ezker- eta eskuin-zutabeetan zehazten dira, hurrenez hurren.

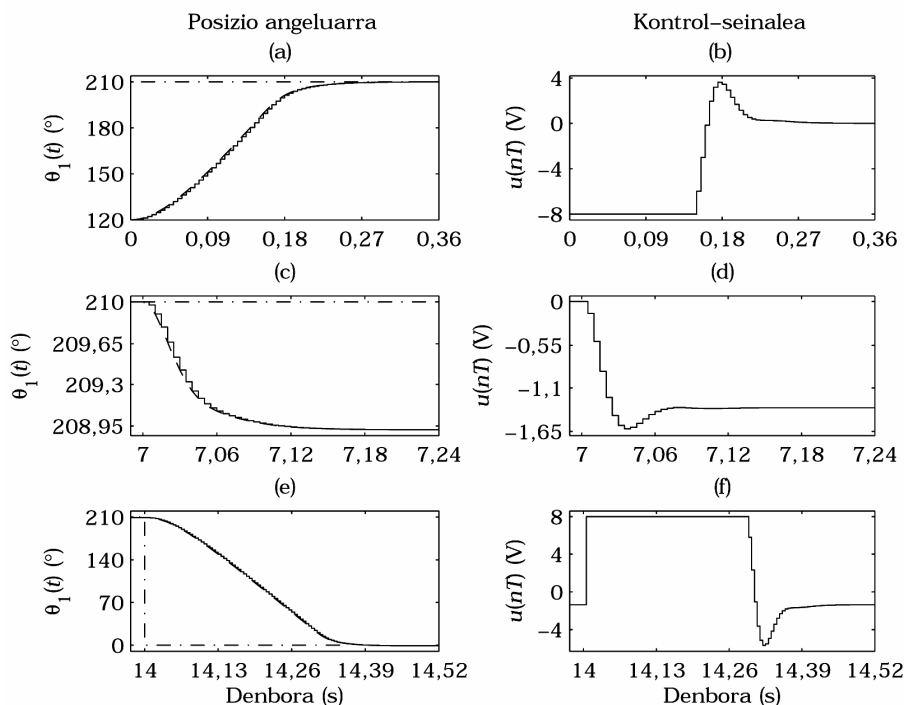
Aurreratze-kompentsadorearen berehalako erantzuna dela eta, ia edozein kontsigna-aldaketak kontrol-seinalea asetzera darama. Kasu honetan, 7.17(b) irudian ikus daitekeen bezala, saiakuntza-hasierako nahiz 14. segundoko kontsigna-aldaketek kontrol-seinaleak bere bi mugak iritsi ditzen eragiten dute.

7.18 irudiko (b) eta (f) xehetasunetan ikus daitezke bi asetasun horien iraupenak.



7.17 irudia. Aurreratze-konpentsadoreaz lortutako posizioaren eta kontrol-seinalearen denbora-bilakaera.

7.16(b) irudia aztertuz, ordea, ikus daiteke atzeratze-konpentsadoreak sortutako kontrol-seinalea 14. segundoko kontsigna-aldaketa handiagoaren eraginpean eta denbora-tarte laburrez baino ez dela asetzen. Dena den, beharbada, 7.16(b) irudia bera baino lekuko argiagoa da 7.16(a) irudia asetasun hori adierazteko; izan ere, θ_1 posizioak 14. segundoko kontsigna-aldaketari emandako erantzunaren itxura eta asetasunik eragiten ez duen saiakuntza-hasierakoari emandakoarena zeharo ezberdinak dira.



7.18 irudia. 7.17 irudiko denbora-erantzunen xehetasunak.

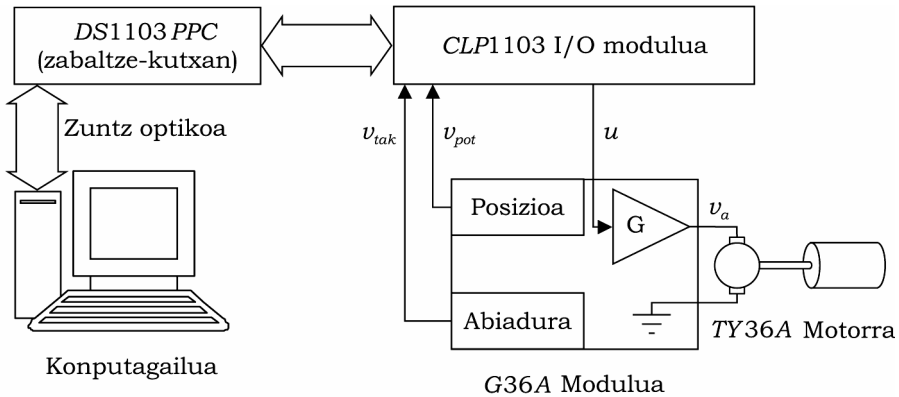
Hala eta guztiz ere, atzeratze-kompentsadoreak sorturiko u kontrol-seinalea 14. segundoaren inguruan asetzen den arren, 7.16(a) irudian ez da *'wind-up'* fenomenorik hautematen, zeren eta 7.2.4 azpiatalean adierazitakoari jarraituz, diseinatutako kompentsadoreari dagokion algoritmoa ezartzean gogoan izan baita kontrol-seinaleak ezin gaingiduzko goi- eta behe-muga batzuk dituela.

7. segundotik aurrera aplikatzen den serbomotorraren pare izendatuaren balio bereko T_d perturbazio konstanteari dagokionez, gradu bat baino handixeagoko egoera iraunkorreko erroreak eragiten ditu, 7.18 irudiko (c) xehetasunak erakutsi digun bezala. Ordena honetako erroreak onargarritzat jo daitezkeen arren, posizionatze-sistema adibide honen hasieran deskribatzen den P eta PI kontroladorez osatutako jauzi erako egituraren oinarriturikoa balitz, edozein perturbazio-pare konstantek eragindako errorea erabat desagerraraztea lortuko litzateke.

7.2.5.2 Emaiza esperimentalak

Benetako TY36A serbomotorraren θ_1 posizioa modu esperimentalean kontrolatzeko, diseinatu diren bi konpentsadorei dagozkien algoritmoak C programazio-lengoaian, *dSPACE* etxe komertzialeko DS1103 PPC datuak eskuratzeko txartela erabiliz, gauzatu dira. Txartel hori motor elektrikoetan ezarri beharreko kontrol-sistemen prototipogintza azkarra egiteko bereziki diseinaturik dago, eta simulaziotik esperimentaziorako bidea erabat errazten du.

7.19 irudiak erakusten du saiakuntza esperimentalak gauzatzeko egin den muntaketaren eskema. Ikus daitekeenez, DS1103 PPC txartela konputagailuari zuntz optikoaren bidez konektatzen zaio. Hala, kontrol-algoritmoei dagozkien programak konputagailuan editatu, konpilatu eta estekatu ostean, datuak eskuratzeko txartelaren DSPan (*Digital Signal Processor, Seinale-Prozesadore Digitala*) kargatzen dira. Konputagailua, hain zuzen, kontrol-aldagaien aldiuneko balioak monitorizatzeko ez ezik, txartelari aginduak —bertan kargatutako kontrol-algoritmoa martxan jarri ala gelditu, besteak beste— bidaltzeko bitarteko gisa erabiltzen da.

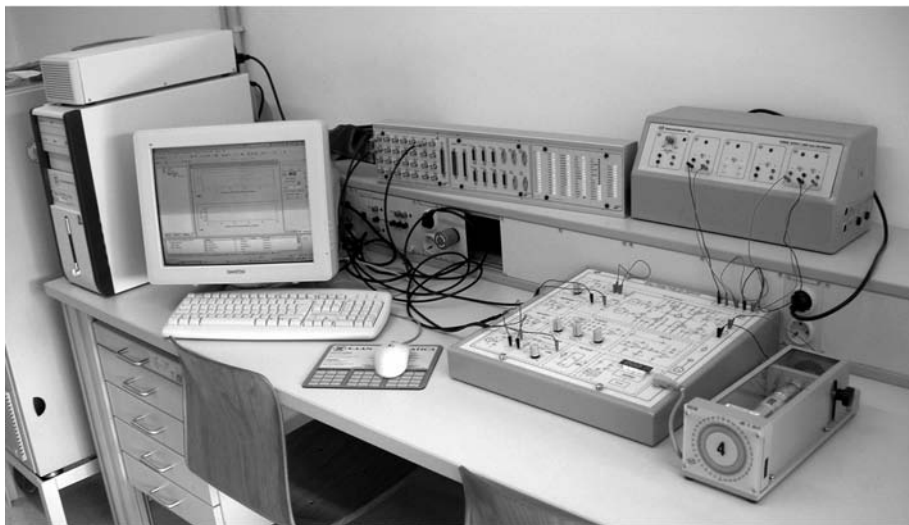


7.19 irudia. Esperimentaziorako muntaketaren eskema funtzionala.

Serbomotorrean ezarritako posizio-sensore potentziometrikoaren nahiz takometroaren v_{pot} eta v_{tak} tentsio-seinaleak datuak eskuratzeko txartelean jasotzen dira *dSPACE* etxeko sarrera/irteeren CLP1103 modulua bitartez. Potentziometroaren seinalea θ_1 posizioaren kontrol-begizta ixteko behar-

beharrezkoa da; takometroarena, berriz, motorraren biraketa-abiadura monitorizatzeko baino ez da erabiltzen.

Azkenik, txarteleko DSPan kargaturiko algoritmoak sortzen duen u kontrol-seinalea sarrera/irteeren modulua erabiliz kanporatzen da, eta motorra elikatzen duen potentzia-anplifikadorearen sarrera gisa aplikatzen da. 7.20 irudian ikus daiteke muntaketa osoa.

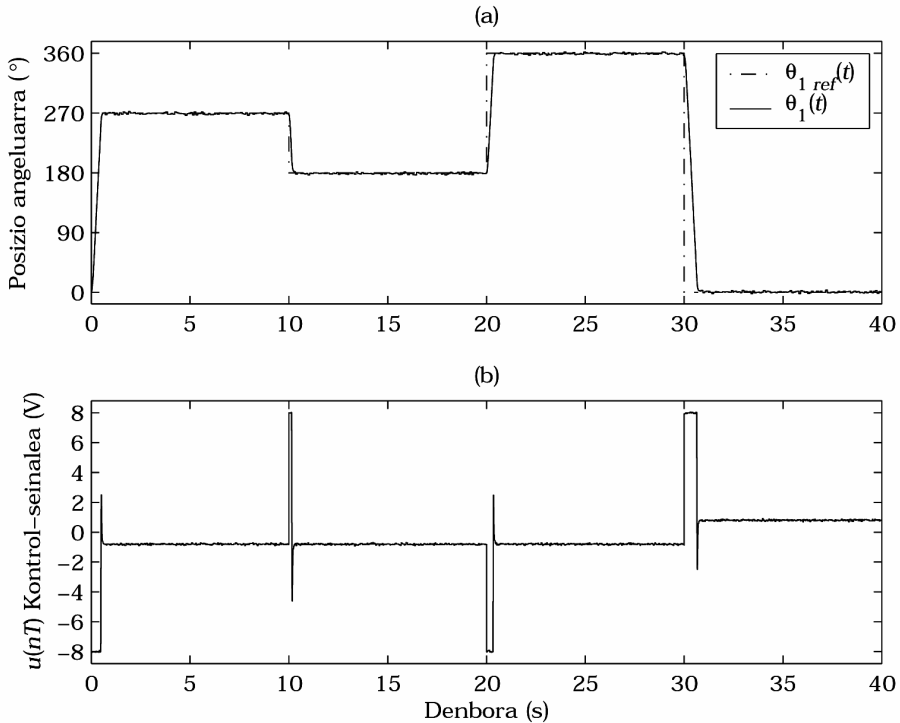


7.20 irudia. Muntaketa osoaren argazkia.

7.21 irudian islatzen dira aurreratze-kompentsadorea ezarriz egindako saiakuntza esperimental bati dagozkion emaitzak. 7.21(a) irudian, berriz, ikus daiteke posizio-kontsignaren balio ezberdinetako maila erako sarrera positibo nahiz negatiboz osaturik dagoela $\theta_{1\text{ref}}$; ondorioz, motorra hainbat eragiketa-puntutan aritzera eramaten da.

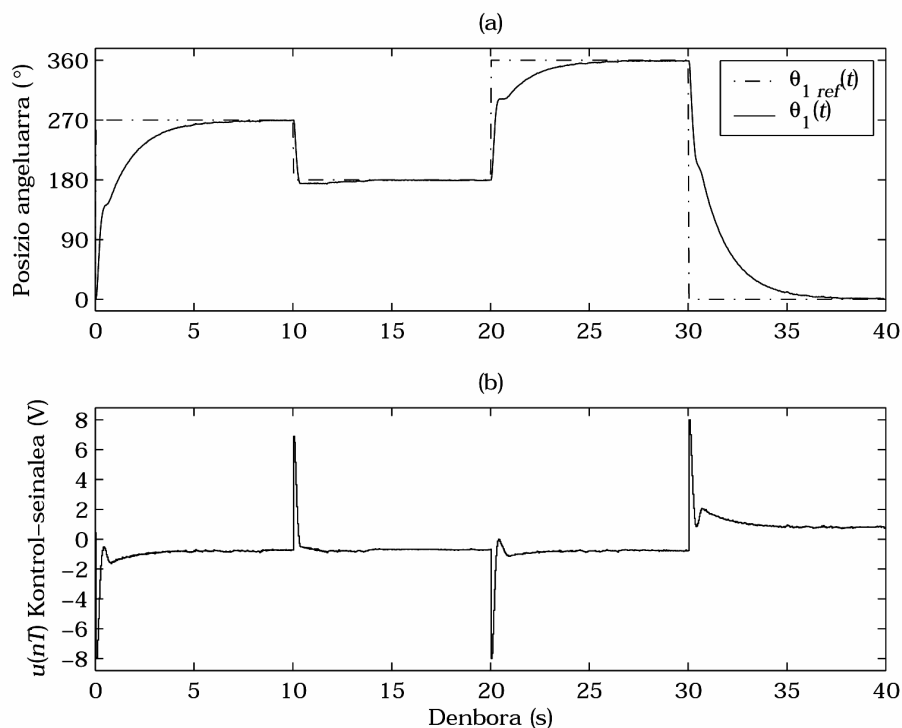
Simulazio-saiakuntzan lortutakoarekin bat, posizionatze-sistemaren erantzuna oso azkarra da, eta, saiakuntzan zehar aplikatzen diren kontsigna-aldaketa guztien eraginez, kontrol-seinalea une batez ase egiten da —ikus 7.21(b) irudia—. Gainera, posizio-kontsigna bakoitza iritsi ondoren motorra geldirik dagoenean, u kontrol-seinalea zehazki zero ez dela ere egiaztatzen da. Azken

efektu hori, (7.1) adierazpenak agerian jartzen duen offsetaz gain, benetako potentzia-anplifikadorearen ez-linealtasunek eragindakoa da.



7.21 irudia. Aurreratze-kompentsadoreaz maila erako sarrerei emandako erantzuna.

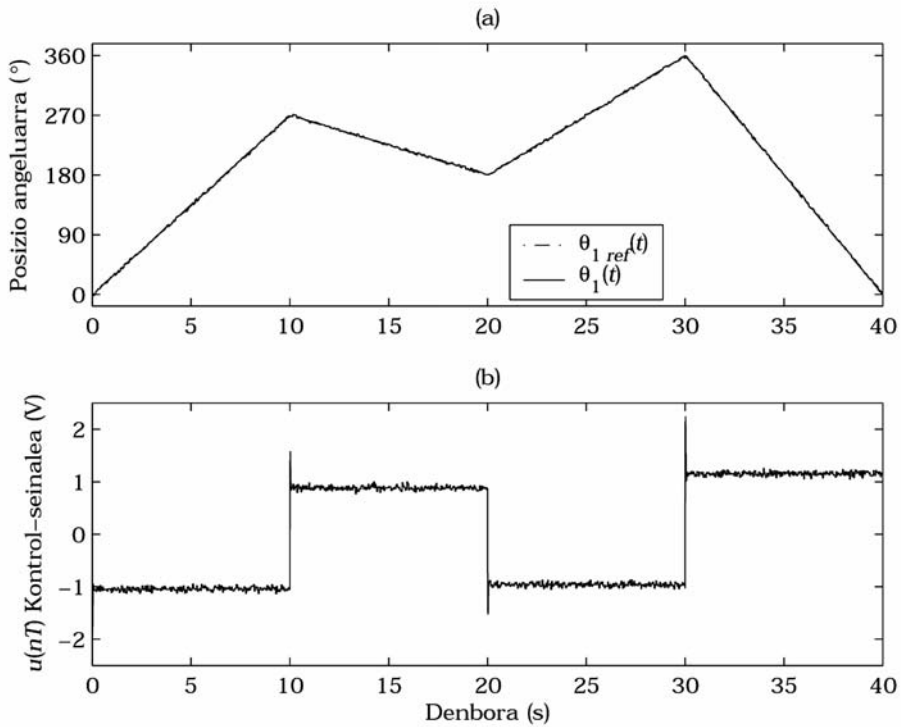
Aurreratze-kompentsadorea atzeratzekoaz ordezkatzuz egiten bada saiakuntza bera, 7.22 irudiko denbora-erantzunak erregistratzen dira. Horiek ere simulazioz lortutakoen antz handia dute, eta bigarren kontrol-egitura horren bitartez eragiten den erantzuna askoz motelagoa dela berresten da. Gainera, simulazioan gertatu den bezala, 7.22(b) irudiak agerian jartzen du ezen 90° -ko biraketari dagokion 270° -tik 180° -ra bitarteko biraketa dela kontrol-seinalearen asetasuna sortzen ez duen kontsigna-aldaketa bakarra. Oraingoan ere, ikus daiteke motorra geldirik dagoen bakoitzean kontrol-seinalearen balioa ez dela zehazki zero.



7.22 irudia. Atzeratze-konpentsadoreaz maila erako sarrerei emandako erantzuna.

Aurreko saiakuntzako θ_{1ref} -en lau balioak —bat-bateko kontsigna-aldaketen orde— 10 segundoko iraupena duten arrapalen buruan iristen badira, proposaturiko aurreratze- eta atzeratze-konpentsadorea erabiliz, 7.23 eta 7.24 irudietako erantzunak lortzen dira hurrenez hurren.

Kontsignaren arrapala-aldaketa bakoitzari jarraitzen dion egoera iragankorraren ostean, θ_1 posizio angeluarrak ederki jarraitzen dio ezarritako erreferentzia-arrapala berriari. Emaidza ez da harritzekoa; izan ere, kontroladore bien k irabazia arrapala erako sarrerei gehienez % 1eko egoera iraunkorreko erroreaz erantzuteko finkatu da. Bestetik, espero zen bezala, aurreratze-konpentsadoreak eragindako iragankorrak atzeratzekoak sortzen dituenak baino nabarmen laburragoak dira.

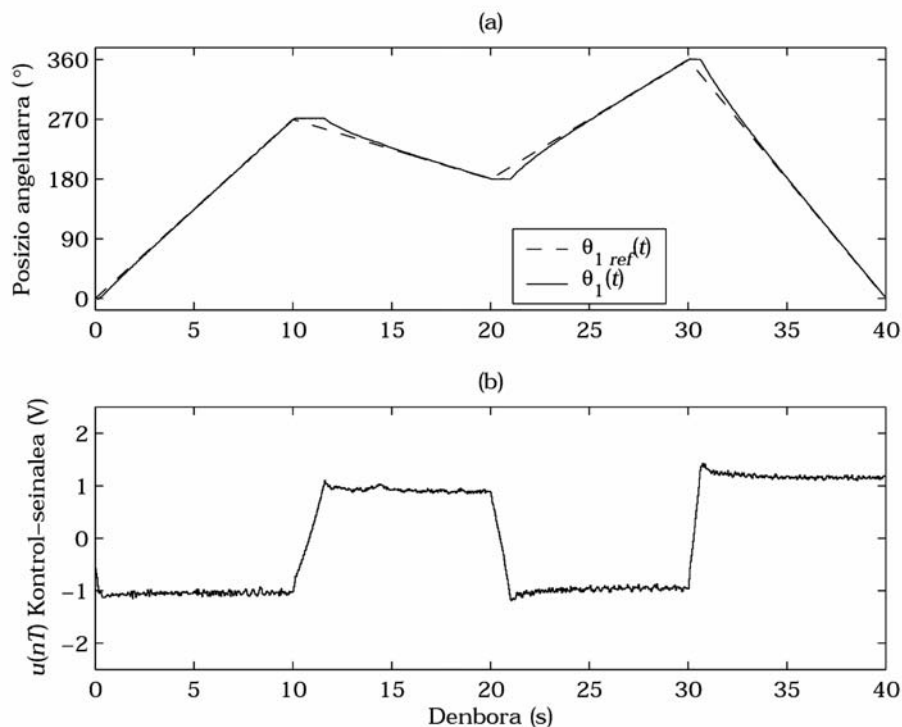


7.23 irudia. Aurreratze-kompentsadoreaz arrapala erako sarrerei emandako erantzuna.

7.23(b) nahiz 7.24(b) irudietako kontrol-seinaleei erreparatuz, egiaztatzen da saiakuntza osoan zehar asetzetik urrun mantentzen direla, maila erako kontsigna-aldaketak aplikatutakoan ez bezala. Emaita hori ere guztiz logikoa da, pixkanaka aldatzen den kontsigna batek bat-batean aldatzen den beste batek baino kontrol-esfortzu txikiagoa behar baitu.

7.2.6 ONDORIOAK

Korronte zuzeneko motor baten posizionatze-sistema digitalaren bi aldaki diseinatu eta modu esperimentalean gauzatu ostean, ondorio nagusi hauek atera daitezke:



7.24 irudia. Atzeratze-konpentsadoreaz arrapala erako sarrerei emandako erantzuna.

1. Eredutzapenari dagokionez, egoera iragankorreko erantzun esperimentalak informazio oso baliagarria eskaintzen du sistemaren zenbait parametro adierazgarri identifikatzeko — J eta K_p kasu—.
2. Fase-tarte eta errorearen zehaztapen berak betetzen dituzten arren, aurreratze-konpentsadoreak atzeratzekoak baino banda-zabalera nabarmen handiagoa du, eta, ondorioz, erantzun azkarragoa eragiten du.
3. Erantzun iragankor azkarrena berez erakargarria bada ere, laginketa-periodo laburragoa behar du, eta, horretaz gain, eragingailua maizago asearazten du.
4. Kontrol-algoritmoa programatzean, horren konputazio-denbora laginketa-periodoarekiko gaitzesgarria den ala ez egiaztatzeaz gain,

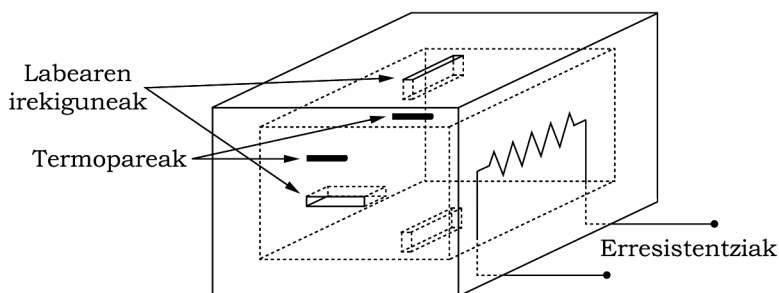
ezinbestekoa da eragingailuaren mugak kontsideratzea, 'wind-up' fenomenoa saihestearren.

7.3 MATERIAL-SAIAKUNTZAKO LABE BATEN TENPERATURA-KONTROLA

Bigarren kasu honetan, gobernatu nahi den sistema material-saiakuntzak egiteko erabiltzen den labea da. Zehazki, aztertzen den ekipoa *Donostiako Unibertsitate Eskola Politeknikoan* dago, *Materialen Laborategian*, hain zuzen. Ondoren, sistemaren kontrola egin ahal izateko, batetik, labea bera, eta, bestetik, kontrol-algoritmoak ezartzeko erabiliko den hardwarea aztertuko ditugu.

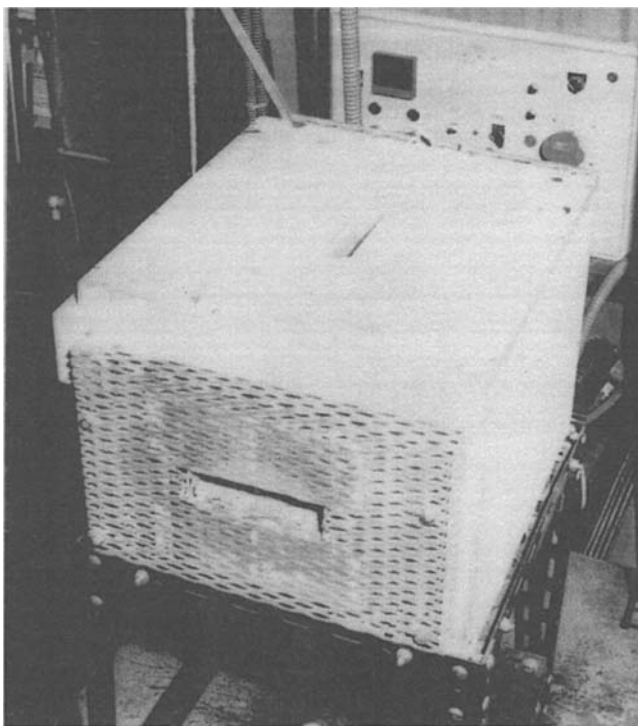
7.3.1 LABEAREN DESKTRIBAPEN FISIKOA

Eskuarki, material-saiakuntzak ijezketa-produktuekin egin ohi dira, eta INSTRUM izeneko makinaren laguntzaz konpresio laua eta beroko konformazio deritzon tratamendua aplikatzen zaie. Labeak 4 kW-eko potentzia du, eta, 7.25 irudiko eskeman ikus daitekeenez, serieran ipinitako 1,2 Ω -eko Crusilitezko lau erresistentziaz osaturik dago. Bestalde, labe barruan gehienez 1250 °C-ko tenperatura irits daiteke, eta hori neurtzeko Pt % 13-Pt-Rh motako bi termopare erabiltzen dira.



7.25 irudia. Labearen deskribapena.

Gainera, 7.26 irudiko argazkian ikus daitekeen bezala, labeak bi irekigune mota ditu. Labearen goiko eta beheko aldeetan dauden bietan INSTROM makinaren erremintak sartzen dira; albo batean dagoen irekigunean, berriz, probatu beharreko materialak —probetak— sartzen dira. Hortaz, zer motatako saiakuntza egin nahi den erabakitzen denean, labeko tenperatura finkatzen da eta alboko irekigunetik probeta barruan sartzen da. Gero, goiko eta beheko irekiguneeetatik erreminta egokia sartu, eta aukeratutako prozedura mekanikoa aplikatzen zaio probetari denbora-tarte jakin batez. Denbora hori igarotakoan, probeta labetik atera eta ur hotzetan sartzen da, labe barruan emandako tratamenduaren ondorioz materialak bereganatu dituen propietate fisikoak mantentzen dituzten.



7.26 irudia. Labearen argazkia.

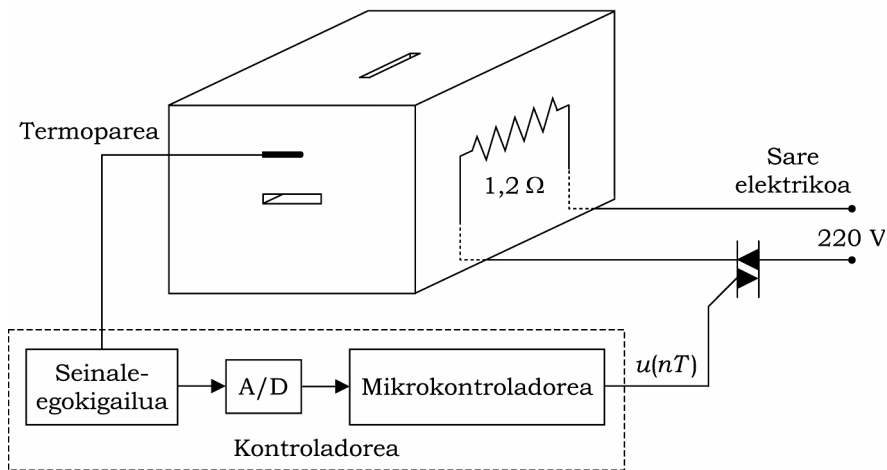
Horrenbestez, saiakuntza probetxugarria izan dadin, eta, beraz, emaitza egokiak lortzeko, labe barruko tenperatura konstante mantendu behar da

—gehienez, $\pm 0,5$ °C arteko aldaketak onartzen dira— edozein egoeratan. Zehaztapen hori lortzeko, ezinbestekoa da, batetik, tenperaturak gora ez egitea erreminta sartzearen ondorioz goiko eta beheko irekiguneak estaltzen direnean, eta, bestetik, probetaren tamainak tenperatura-aldaketarik ez eragitea.

Aurrekari horiek oinarritzat hartuta, bistakoa da labe barruko tenperatura erregulatzeko kontrol-legeren bat aplikatzea beharrezkoa dela, eta, labea dagoen laborategiko beste hainbat kondizio kontuan hartuz, *Intel* etxeko 8051 *mikrokontroladorean* oinarrituriko konpentsadore sinple bat ezartzea erabakitzen da.

7.3.2 HARDWAREA

Esan den bezala, proposatutako erregulazio-sistemaren muina *Intel* etxeko 8051 *mikrokontroladorea* da, eta, horrenbestez, seinale laginduekin arituko da. Kontrol-sistemaren eskema funtzionala 7.27 irudian azaldu da.



7.27 irudia. Kontrol-sistemaren eskema funtzionala.

Labe barruko tenperatura neurtzen duten bi termopareek emandako seinale elektrikoak egokitu, eta A/D bihurgailu batez lagintzen dira.

Mikrokontroladorean ezarritako kontrol-legeak triac-aren sarrera gobernatzen du, eta, hala, labeak kontsumitzen duen potentzia elektrikoa kontrolatzen da.

Hortaz, labe barruan iritsi nahi den tenperaturaren arabera, zabalera ezberdineko pultsuak sortzen dira kontrol-seinale gisa; izan ere, pultsu-zabalera aldatuz, triac-aren eroapen-denbora eta, ondorioz, labeari emandako potentzia ere aldatzen dira.

7.3.3 KONTROL-BEGIZTAREN EGINKIZUNAK

Labe barruko tenperatura kontrolatzeko begiztak bete behar dituen zereginak hauek dira:

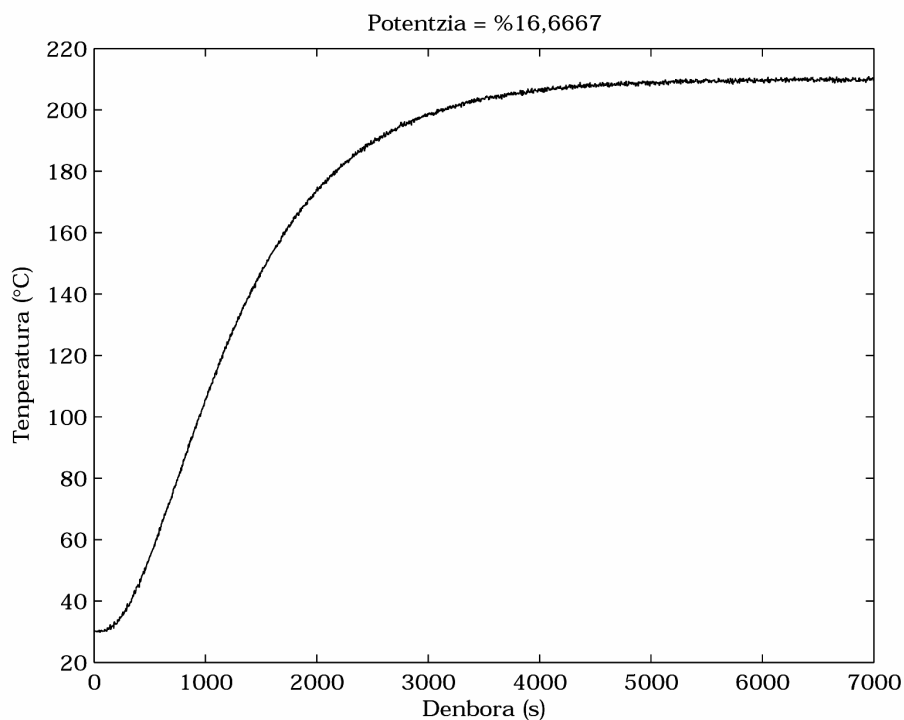
1. Tenperaturen neurriak laginketa-abiadura egokia erabiliz hartu
2. Neurtutako seinale analogikoa digital bihurtu —A/D bihurgailuaz baliatuz—, dagokion tenperaturaren baliora egokitu ahal izateko
3. Lortu nahi den eta benetan lortzen ari den labe barruko tenperaturen arteko konparaketa egin, errore-seinalea kalkulatzeko
4. Kontrol-seinalea sortzearen, errorea kontrol-legeari jarraituz prozesatu
5. Kontrol-seinalea egokitu ostean, hori potentzia-zirkuitura transferitu

7.3.4 LABEAREN EREDUZZAPEN MATEMATIKOA

Labearen eredu-zapen matematikoa egitean, edozein sistema fisikotan egiten den bezala, bi metodo aplika daitezke: analitikoa eta esperimentalak.

Kasu honetan, metodo analitikoaren erabilera oso konplexua gerta daiteke, labeko osagai guztien portaera termikoa adieraziko duen eredu-zapen matematikoa ez ezik, sistemaren parametro anitzen identifikazioa ere egitea exijitzen baitu. Horretaz gain, inguruko osagaien portaera termikoa ere aztertu beharko litzateke; hau da, labea dagoen gelako tenperatura, ate nahiz leihoetatik sar daitezkeen haize-boladak, probeten saiakuntzak egiteko erabiltzen diren erreminten tamaina eta tenperatura, etab.

Horiek horrela, metodo esperimentalaren aplikazioa askoz errazagoa denez, horixe hautatu da labearen eredu tapena osatzeko. Sistemaren portaera modu esperimentalean karakterizatzeko, kondizio ezberdinetan saiakuntza anitz eginez aztertzen da labearen benetako denbora-erantzuna. Adibide gisa, 7.28 irudian ikus daiteke labearen erantzuna potentzia totalaren seirena aplikatzen denean.

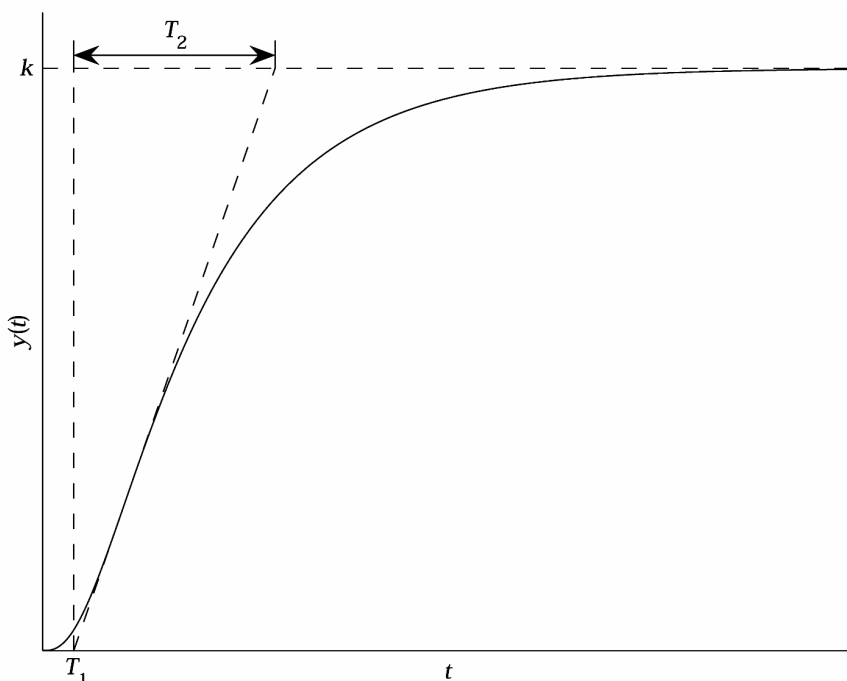


7.28 irudia. Labearen erantzuna potentzia totalaren seirena aplikatzen zaionean.

Dakigunez, P prozesu ezezagun batek maila unitarioko sarrera bati begizta irekian emandako erantzuna ezaguna bada, T_1 atzerapena duen lehen ordenako transferentzia-funtzio honen bidez aurkez daiteke:

$$G(s) = \frac{k}{1 + T_2 s} e^{-T_1 s}$$

baldin eta aipatutako erantzuna egonkorra eta gainditzerik gabekoa bada (Åström eta Hägglund, 1995). P prozesuak begizta irekian duen denbora-erantzunetik ondorioztatzen dira k , T_1 eta T_2 parametroak, 7.29 irudian ikus daitekeen bezala.



7.29 irudia. k , T_1 eta T_2 parametroen kalkulua, P prozesuak maila unitarioko sarrera bati emandako erantzunetik abiatuz.

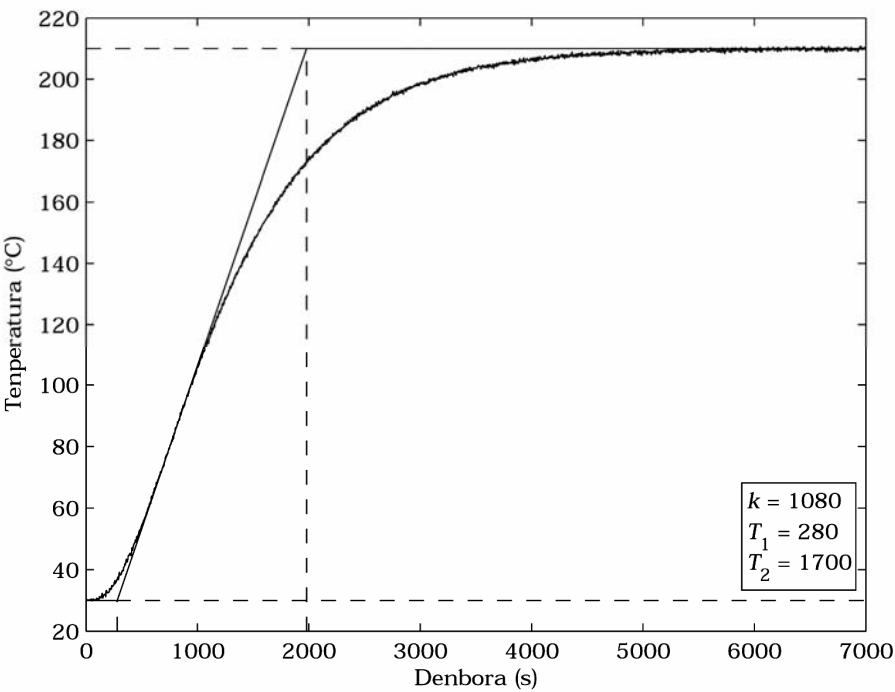
Horrenbestez, saiakuntzako labearen ereduztapena egiteko, horri ezarritako potentzia-maila aldatuz, balio ezberdinetako maila erako sarrerak aplikatzen zaizkio, eta lortzen den tenperaturaren denbora-erantzunak erregistratzen dira.

Potentzia-maila ezberdinentzat lortutako erantzunetatik ondorioztatzen diren k , T_1 eta T_2 parametroen balioak ere ezberdinak gertatzen dira; hau da, 7.5 taulan islatu den bezala, aplikatutako potentzia bakoitzeko parametro-joko bat lortzen da. Ikus daitekeen bezala, parametroak errorerik gabe kalkulatu ahal izateko, berotze- nahiz hozte-saiakuntzak egiten dira. 7.30 eta 7.31

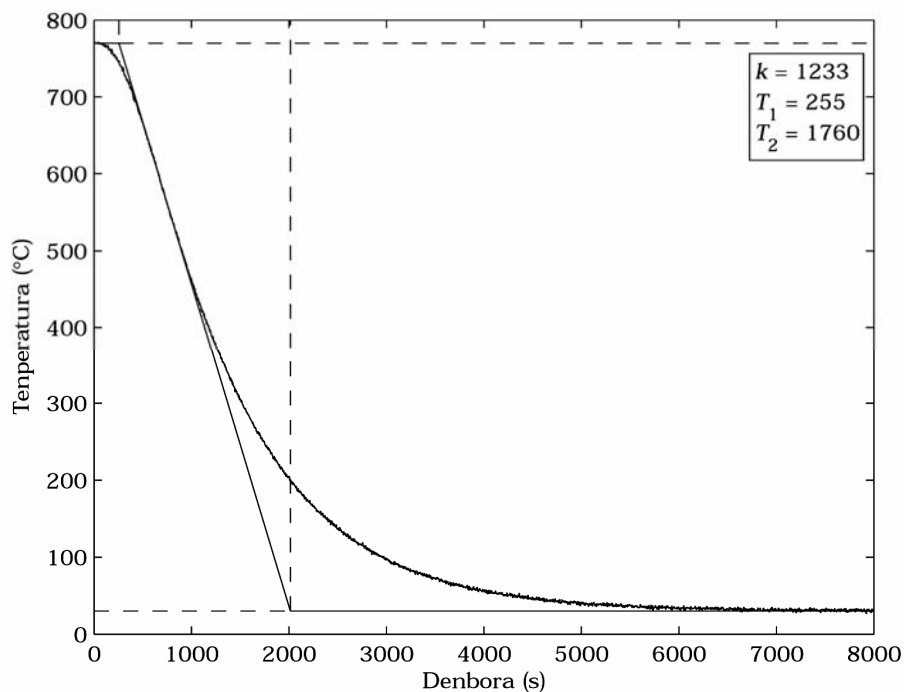
irudiek berotze- eta hozte-saiakuntzen adibide bana erakusten dute, hurrenez hurren.

7.5 taula. Proba batzuen laburpena.

Aplikaturako potentzia (%)	Hasierako temperatura (°C)	Bukaerako temperatura (°C)	<i>k</i> (°C/hainbesteko bateko)	<i>T</i> ₁ (s)	<i>T</i> ₂ (s)
0 – 16,6667	30	210	1080	280	1700
0 – 50	98	715	1234	265	1745
0 – 80	57	1060	1254	270	1740
80 – 0	1045	50	1244	280	1780
60 – 0	770	30	1233	255	1760



7.30 irudia. Labeari bere potentziaren seirena aplikatuz lortutako tenperaturaren erantzuna.



7.31 irudia. 770 °C-tik abiatzen den hozte-prozesuan erregistratutako temperaturaren erantzuna.

7.5 taulan ageri diren parametro-jokoen arteko aldeak, besteak beste, ondoren aipatzen diren arrazoiek eragindakoak direla baieztatu daiteke:

1. Berotze-sistemaren eta horrek daukan karga termikoaren arabera berotzen da labea.
2. Labearen isolamendu-sistemaren arabera hozten da labea.
3. Egindako saiakuntzak labe barruko hainbat kargarekin egin dira; hots, probeten tamainak aldatuz.
4. Labe barruan ere ez-linealtasunak azaltzen dira.
5. Sare elektrikoko tentsio-mailak ezberdinak dira egunean zehar.

Saiakuntzetan lortutako parametroen batezbestekoak kalkulatu, labearen eredu matematikoa transferentzia-funtzio honen bidez aurkeztea erabakitzen da:

$$G(s) = \frac{1250}{1 + 1740s} e^{-270s} \quad (7.18)$$

Horrenbestez, labearen kontrola gauzatzeko ondoren proposatuko diren PI eta PID kontroladoreen parametroak doitzeko egokia da lortutako ereduaren egitura. Hori dela eta, 7.6 taulan eman dira PID motako kontroladoreen parametroak Ziegler-Nichols metodoari jarraituz doitzeko formulak (Ziegler eta Nichols, 1942), non $L = T_1$ eta $R = \kappa/T_2$ baitira.

7.6 taula. Ziegler-Nichols metodoari dagozkion sintonizatzeko-formulak.

Kontroladore-mota	κ_c	T_I	T_D
P	$1/(RL)$		
PI	$0,9/(RL)$	$3L$	
PID	$1,2/(RL)$	$2L$	$0,5L$

7.3.5 KONTROL-LEGEAREN DISEINUA

Labean aplikatu beharreko kontrol-legeak diseinatzeko, lehendabizi kontroladore jarraituak diseinatzen dira, eta, ondoren, 5. kapituluaz azaldu den bezala, haien diskretizazioari ekiten zaio.

7.3.5.1 Kontroladore jarraituen diseinua

Labearen portaera dinamikoa adierazten duen (7.18) transferentzia-funtzioa oinarritzat harturik, Ziegler-Nicholsen doitze-formulak aplikatuz, PI eta PID motako kontroladoreen parametroak kalkulatu dira.

PI kontroladorea

Dakigunez, PI kontroladorearen egitura transferentzia-funtzio hau erabiliz adieraz daiteke:

$$D(s) = k_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$

7.6 taulako Ziegler-Nicholsen doiketa-formulei jarraituz, k_c eta T_I konstanteak sistemaren begizta irekiko erantzuna karakterizatzen duten k , T_1 eta T_2 parametroetatik kalkulatzeko dira; izan ere,

$$L = T_1 = 270 \quad \text{eta} \quad R = \frac{k}{T_2} = \frac{1250}{1740} = 0,7184$$

balioak hartzen dituztenez, PI kontroladorearen transferentzia-funtzioa honako hau dela ondorioztatzen da:

$$D(s) = 0,00464 \left(1 + \frac{1}{810s} \right) \quad (7.19)$$

PID kontroladorea

Era berean, PID kontroladorearen diseinuari ekiteko, horri dagokion transferentzia-funtzio orokor hau hartuko da abiapuntu gisa:

$$D(s) = k_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

Hala, PI kontroladorearen kasuan egin den bezala, k_c , T_I eta T_D parametroak Ziegler-Nicholsen formulak aplikatuz doituz gero, PID kontroladore hau lortzen da:

$$D(s) = 0,006187 \left(1 + \frac{1}{540s} + 135s \right) \quad (7.20)$$

7.3.5.2 Diseinatutako kontroladoreen diskretizazioa

Dagoeneko aipatu den bezala, diseinatu berri diren kontrol-lege jarraituak 8051 *mikrokontroladorean* ezartzekoak direnez, kontroladoreen egiturek diskretuak izan behar dute. Diskretizaziorako aplikatu daitezkeen metodoetatik, oraingoan ere Tustinen

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

hurbilketa trapezoidala erabiltzea hautatu da.

PI kontroladorea

(7.19) ekuazioko transferentzia-funtzio jarraituari Tustinen hurbilketa trapezoidala aplikatuz, baliokide digital hau lortzen da:

$$\begin{aligned} D(z) &= 0,00464 \frac{1620(z-1) + T(z+1)}{1620(z-1)} = \\ &= \frac{0,00464}{1620} \frac{1620 + T - (1620 - T)z^{-1}}{1 - z^{-1}} \end{aligned} \quad (7.21)$$

eta mikrokontroladorean ezarri beharreko kontrol-legea $U(z) = D(z)E(z)$ eginez ondorioztatzen da. Hala, (7.21) transferentzia-funtziotik

$$(1 - z^{-1})U(z) = \frac{0,00464}{1620} [1620 + T - (1620 - T)z^{-1}]E(z)$$

adierazpena lortzen da, eta, hortik, kontrol-algoritmo digitalari dagokion diferentzia-ekuazio hau:

$$u_n = u_{n-1} + \frac{0,00464(1620 + T)}{1620} e_n - \frac{0,00464(1620 - T)}{1620} e_{n-1} \quad (7.22)$$

PID kontroladorea

PI konpentsadorearen kasuan emandako pausoei jarraituz, (7.20) transferentzia-funtzioko PID kontroladore jarraituaren baliokide digital hau lortzen da:

$$D(z) = 0,006187 \frac{2T(z^2 - 1) + 0,00185T^2(z + 1)^2 + 540(z - 1)^2}{2T(z^2 - 1)}$$

eta, hortik, mikrokontroladorean ezarri beharreko algoritmoa honako hau dela ondoriozta daiteke:

$$\begin{aligned} u_n = u_{n-2} &+ \frac{0,006187(540 + 2T + 0,00185T^2)}{2T} e_n - \\ &- \frac{0,006187(540 - 0,00185T^2)}{T} e_{n-1} + \\ &+ \frac{0,006187(540 - 2T + 0,00185T^2)}{2T} e_{n-2} \end{aligned} \quad (7.23)$$

Azkenik, laginketa-periodoa hautatutakoan, kontrol-legearen diseinu-prozesua osatuta geratuko litzateke.

7.3.6 LAGINKETA-PERIDOAREN HAUTAKETA

5. kapituluari adierazi dugun bezala, laginketa-periodoa hautatzeko prozedura bat baino gehiago erabil daiteke. Labearen tenperatura-kontrola gauzatzean, hauetako bi metodo aztertu eta horien baliagarritasuna frogatzen da.

1. *irizpidea*: Laginketa-maiztasunak $\omega_s > 10\omega_c$ kondizioa bete behar du, non ω_c begizta itxiko kontrol-sistema jarraituaren banda-zabalera baita.
2. *irizpidea*: Laginketa-periodoak $T < T_1/4$ kondizioa beteko du.

7.3.6.1 Banda-zabaleraren kalkulua

Laginketa-periodoa hautatzeko proposatzen den lehen irizpidea begizta itxiko banda-zabalera ezagutzean oinarritzen denez, banda-zabalera kalkulatzeari ekingo diogu ondoren. Horretarako, begizta irekiko $D(s)G(s)$ transferentzia-funtziotik abiatu eta, berrelikadura unitarioa gauzatzen dela onartuz, begizta itxiko transferentzia-funtzioa kalkulatu da lehenbizi, PI nahiz PID kontroladoreen kasurako.

PI kontroladorea

Kasu honetan, begizta irekiko transferentzia-funtzioa hau da:

$$D(s)G(s) = 0,00464 \left(1 + \frac{1}{810s} \right) \frac{1250e^{-270s}}{1 + 1740s}$$

eta begizta itxikoa, berriz,

$$\begin{aligned} M(s) &= \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)} = \frac{1250 \cdot 0,00464 e^{-270s} (1 + 810s)}{810s(1 + 1740s) + 1250 \cdot 0,00464 e^{-270s} (1 + 810s)} = \\ &= \frac{5,8(810s + 1)e^{-270s}}{1409400s^2 + 810(1 + 5,8e^{-270s})s + 5,8e^{-270s}} \end{aligned}$$

7.32 irudiak begizta itxiko $M(s)$ transferentzia-funtzioaren Bode diagrama islatzen du, eta, hor, banda-zabalera $\omega_c = 0,0075$ rad/s dela egiazta daiteke. Ondorioz, lehen irizpidearen arabera, T laginketa-periodoak $2\pi/(10\omega_c) = 83,7758$ segundo baino txikiagoa izan beharko luke.

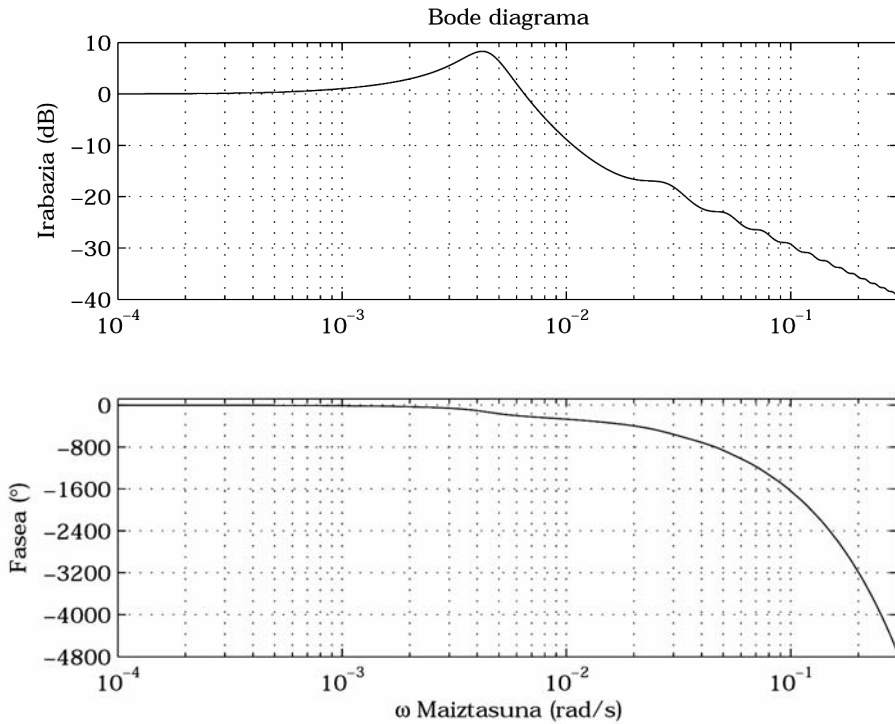
PID kontroladorea

Aurreko kasuan egin den bezala, PID kontroladorea erabiliz, oraingoa begizta irekiko transferentzia-funtzio hau lortzen da:

$$D(s)G(s) = 0,006187 \left(1 + \frac{1}{540s} + 135s \right) \frac{1250e^{-270s}}{1 + 1740s}$$

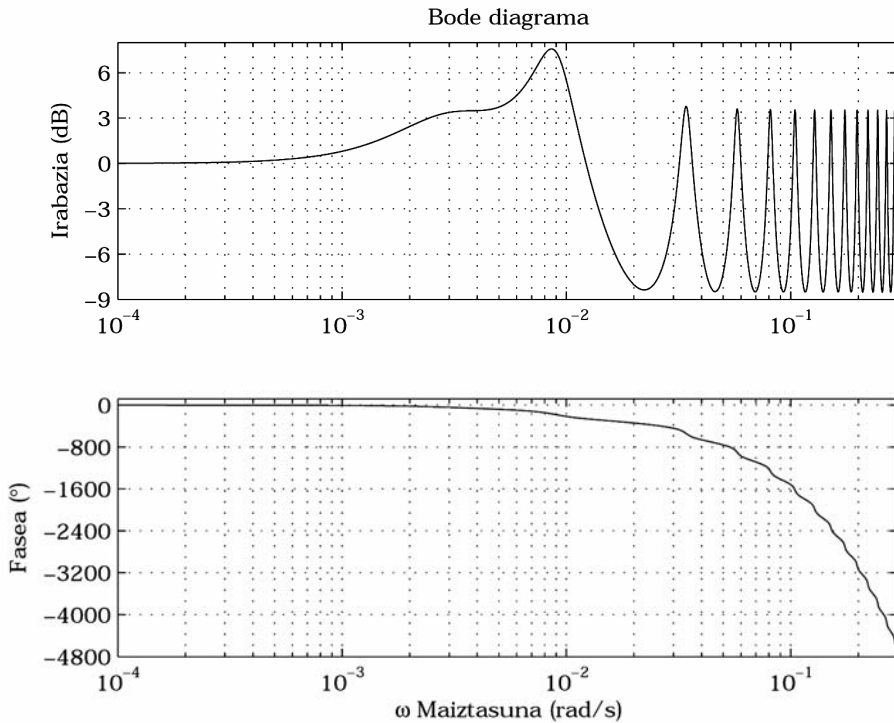
eta, ondorioz, begizta itxiko beste hau:

$$\begin{aligned}
 M(s) &= \frac{D(s)G(s)}{1+D(s)G(s)} = \\
 &= \frac{1250 \cdot 0,006187 e^{-270s} (1 + 540s + 135 \cdot 540s^2)}{540s(1 + 1740s) + 1250 \cdot 0,006187 e^{-270s} (1 + 540s + 135 \cdot 540s^2)} = \\
 &= \frac{7,73375 (72900s^2 + 540s + 1) e^{-270s}}{(939600 + 563790,375 e^{-270s}) s^2 + 540(1 + 7,73375 e^{-270s}) s + 7,73375 e^{-270s}}
 \end{aligned}$$



7.32 irudia. Labe barruko tenperatura PI kontroladoreaz gobernatuz lortzen den begizta itxiko Bode diagrama.

Begizta itxiko azken transferentzia-funtzio horri dagokion 7.33 irudiko Bode diagramari erreparatuz, ondorioztatzen da $0,015 \text{ rad/s}$ inguruko ω_c banda-zabalera lortzen dela. Hortaz, oraingoan erabili beharreko laginketa-periodoak $2\pi/(10\omega) = 41,8879$ segundo baino txikiagoa izan beharko du lehen irizpidea betetzearren.



7.33 irudia. Labe barruko tenperatura PID kontroladoreaz gobernatuz lortzen den begizta itxiko Bode diagrama.

Laburbilduz, lehen irizpideari jarraituz, PI kontroladorearen kasuan laginketa-periodoak gehienez 83 segundo ingurukoa izan behar du; PIDarenean, ostera, 41,8879 segundo baino handiagoko laginketa-periodoak onartezinak gertatzen dira. Proposatutako bigarren irizpideak, aldiz, dio bietako edozein kontroladorentzako laginketa-periodoak 67,5 segundo baino txikiagoa izan behar duela.

Laginketa-periodoaren hiru balio posible horiek ordena berekoak badira ere, diseinua osatzeko, guztietan txikiena — $T = 40$ segundo— aukeratzen da. Horretaz gain, $T = 10$ segundokoa ere aztertzen da, kontrol-legeen diskretizazioa egin eta bi laginketa-periodoek eragindako portaerak konparatzeko. T -ren balio biok (7.22) eta (7.23) adierazpenetan ordezkatzuz, mikro-kontroladorean ezarri beharreko algoritmoak lortzen dira.

$T = 40$ segundo kontsideratuz

1. PI kontroladorea

$$u_n = u_{n-1} + 0,004755e_n - 0,004525e_{n-1}$$

2. PID kontroladorea

$$u_n = u_{n-2} + 0,048178e_n - 0,083067e_{n-1} + 0,035804e_{n-2}$$

$T = 10$ segundo kontsideratuz

3. PI kontroladorea

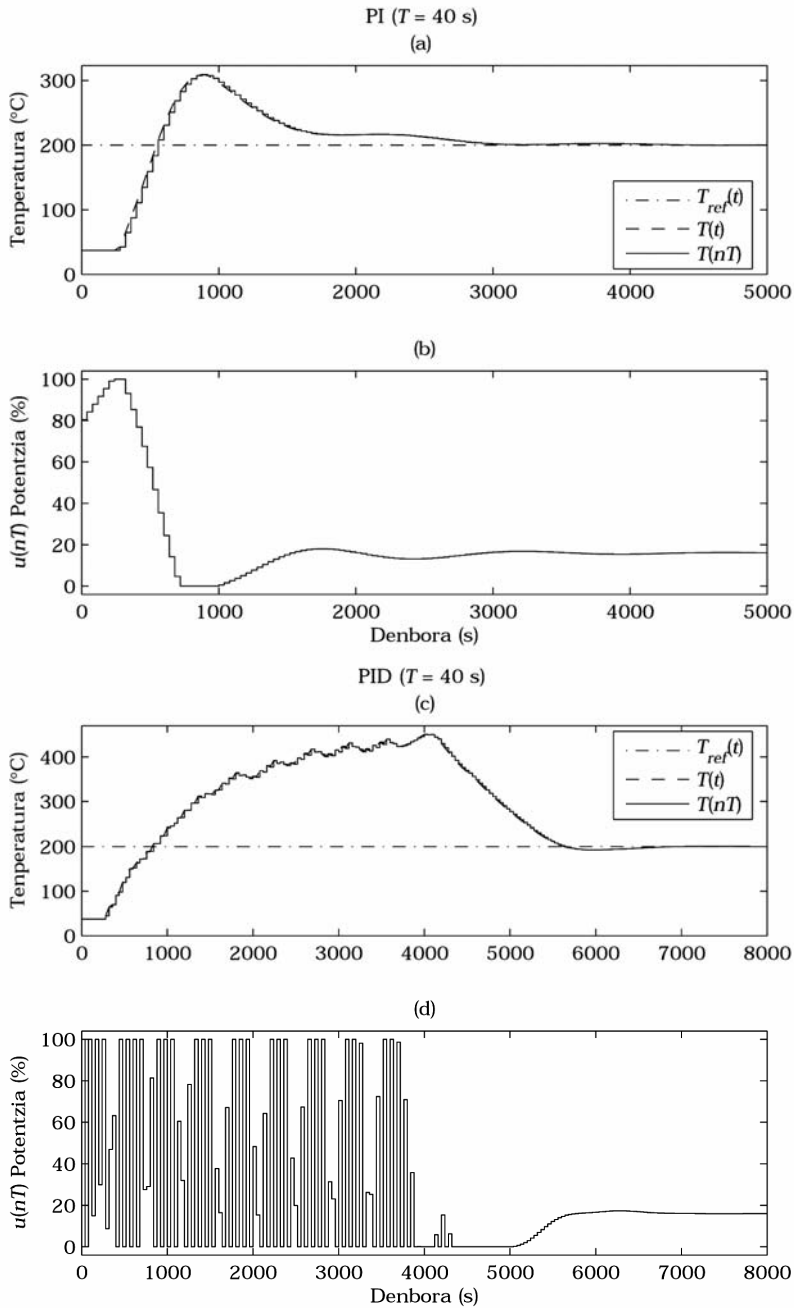
$$u_n = u_{n-1} + 0,004669e_n - 0,004611e_{n-1}$$

4. PID kontroladorea

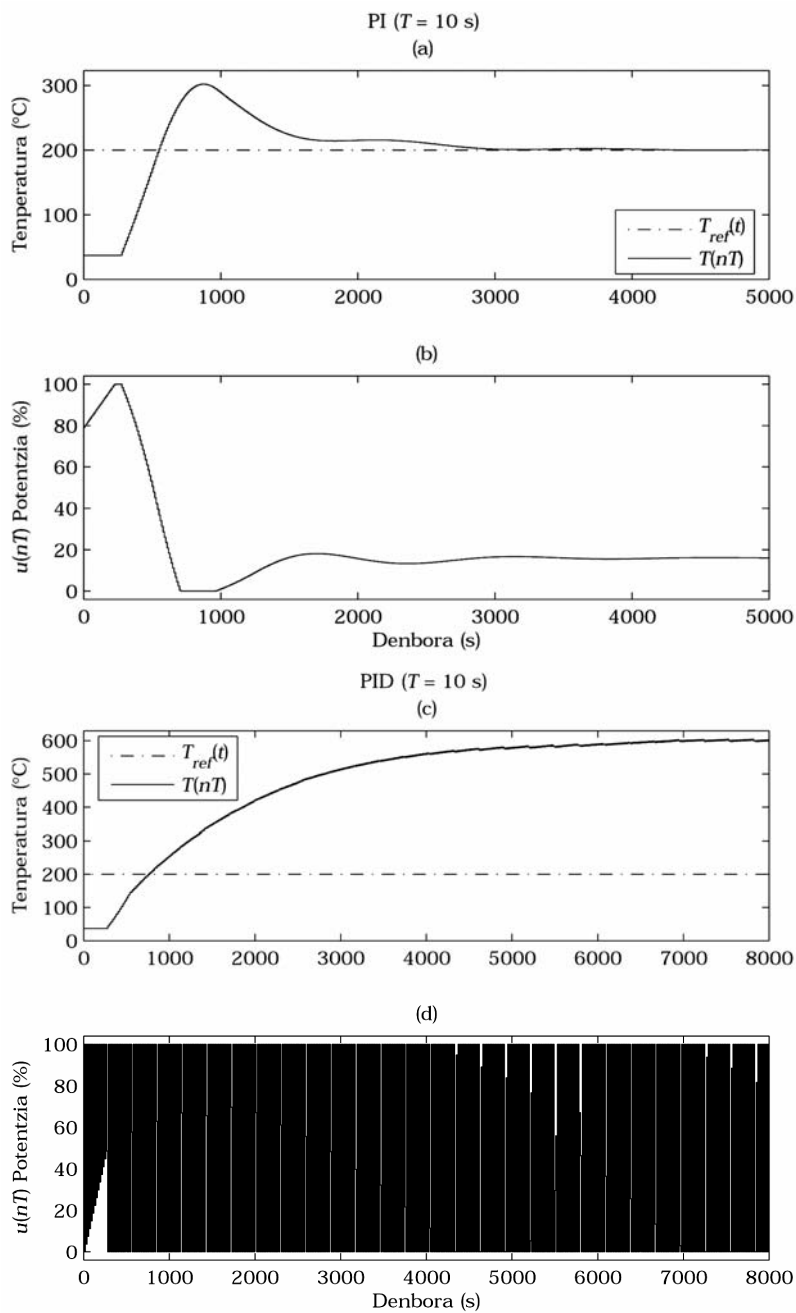
$$u_n = u_{n-2} + 0,173293e_n - 0,333983e_{n-1} + 0,160919e_{n-2}$$

7.3.7 EMAITZAK

(7.18) transferentzia-funtzioaz emandako labearen simulazio-ereduaren gain diseinatu diren PI kontroladoreak aplikatuz gero, erreferentzia-tenperaturaren maila-aldaketei, oro har, gaintitze handiegiz erantzuten zaiela erakusten dute 7.34(a) nahiz 7.35(a) irudiek. Eraitza hori ez da harritzekoa, Ziegler eta NicholSEN sintonizatze-formulak karga-aldaketen eragina gutxitzeko baitira aproposak, eta ez erreferentzia-aldaketei egoki erantzuteko.



7.34 irudia. Labe barruko temperatura eta kontrol-seinalearen erantzun simulatua, $T = 40$ segundo izanik.



7.35 irudia. Labe barruko temperatura eta kontrol-seinalearen erantzun simulatua, $T = 10$ segundo izanik.

Bestalde, ez-linealtasunak ere agerikoak dira 7.34(a) eta 7.35(a) irudietako tenperaturaren denbora-erantzunetan. Simulazio-saiakuntza zehatz hauetan, labeari emandako potentzia negatiboa ezin izateak eragiten ditu aipatutako ez-linealtasunak, eta 7.34(b) nahiz 7.35(b) irudietako kontrol-seinaleak zero balioan —potentziarik eza— asetzen diren denbora-tarteetan gertatzen dira.

Horrenbestez, kontsigna-aldaketen aurrean gertatzen diren tenperatura-gainditze onartezinak eragotzi nahian, benetako labean aplikatu aurretik, Ziegler eta Nicholsen formulen aplikazio hutsez lortutako PI kontroladoreen parametroak finago doitu beharko lirateke.

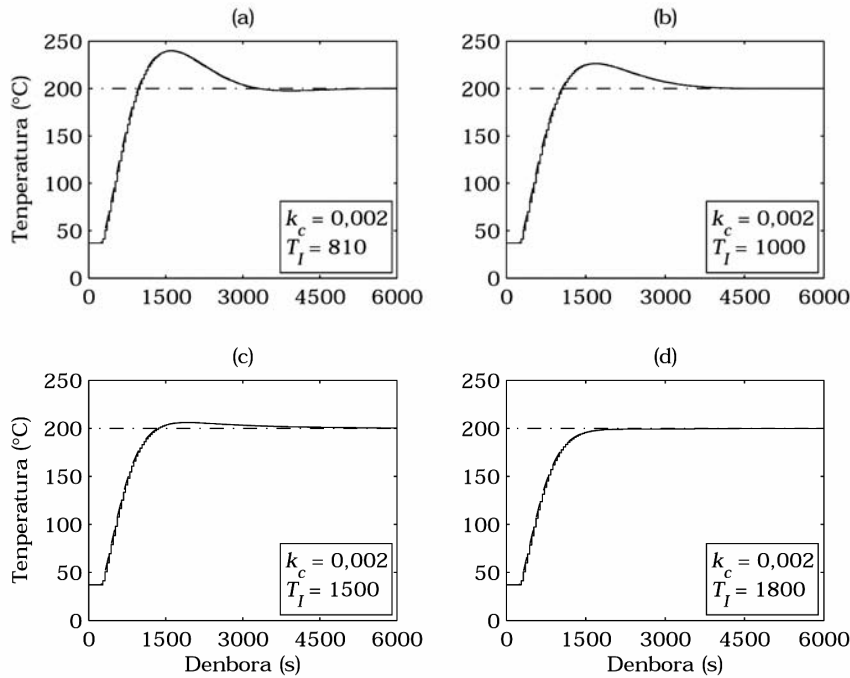
PID kontroladoreari dagokionez, ostera, $T = 40$ segundoko laginketa-periodoaz lortutako 7.34(c) irudiko tenperaturaren denbora-erantzuna arras desagokia bada ere, $T = 10$ segundoraino jaistean ez da egonkorra izatea ere lortzen, 7.35(c) irudiak erakusten duen bezala. Egoera hori oraindik argiago islatzen da sortutako kontrol-seinalea azaltzen duen 7.35(d) irudian; izan ere, labeari emandako potentziaren % 0tik % 100era doazen etengabeko gorabeherak hala ematen dute aditzera. Hortaz, 7.35(c) irudiko tenperatura etengabe hazten ez bada, labeari eman dakioken potentzia 0 eta 4 kW artean mugaturik dagoelako da.

7.34(c) eta (d) nahiz 7.35(c) eta (d) irudiek nabarmentzen duten begiztaren ezegonkortasunerako joera hori laginketa-prozesuak eragiten du, diseinaturiko (7.20) PID jarraituak begizta itxiko kontrol-sistemaren egonkortasuna bermatzen baitu. Gainera, T laginketa-periodoa jaisteak ez du egoera okerragotu baino egiten. Arazoaren jatorria 7.33 irudian erakusten den begizta itxiko sistema jarraituari dagokion Bode diagramari erreparatuz identifika daiteke. Bertan, banda-zabalera gisa definitutako $\omega_c = 0,015$ rad/s-ko maiztasunetik gora irabazia etengabe ez ahultzeaz gain, maiztasun altuko osagaietako asko amplifikatu ere egiten direla uzten da agerian.

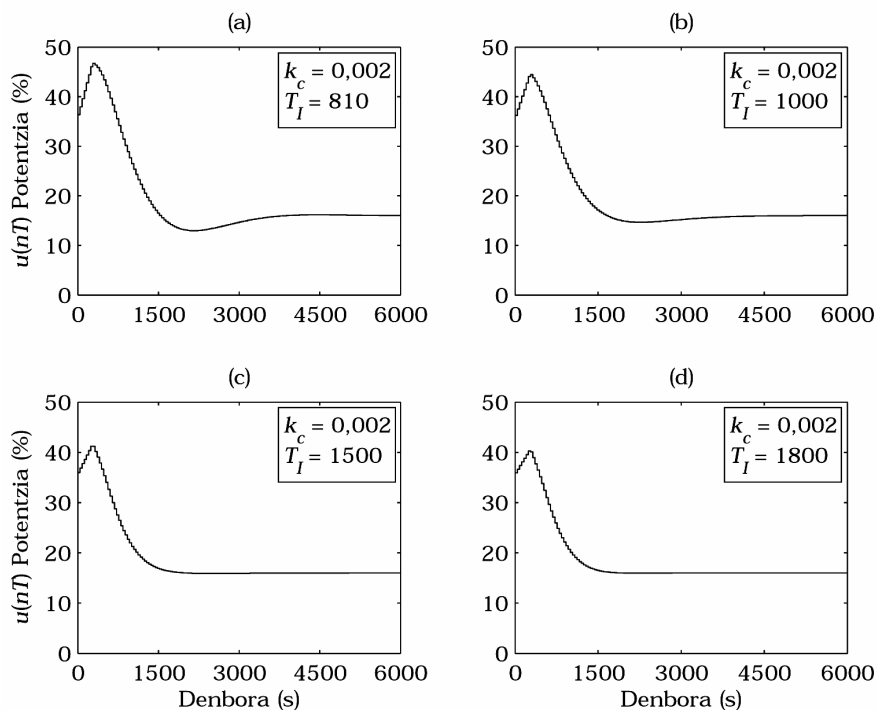
Ondorioz, laginketa-prozesuak ‘aliasing’ fenomenora darama ezinbestean, maiztasun altuko osagai horiek banda-zabalera barruko maiztasun baxukoei gainjartzen baitzaizkie, eta ezegonkortasuna eragin. Eragozpen hori

berrelikadura-seinalea pasa-baxu iragazki egoki batez tratatuz gaindi daiteke, ‘antialias’ iragazkia deritzonaren bidez, hain zuzen ere. PID kontroladorearen ezarpen digitalak dakarren beste behar horretaz gain, ekintza deribatiboak sor ditzakeen arazo ezagunek bultzaturik, benetako labearen temperatura gobernatzeko PI kontroladorea aukeraten da.

$T = 40$ segundo izanik, Ziegler eta NicholSEN formulak bere horretan aplikatuz kalkulatzaren diren PIaren konstanteen doiketa fina egiten bada, nabarmen hobe daiteke labe barruko temperaturak kontsigna-aldaketei ematen dien erantzuna, 7.36 irudiak islatzen duen bezala. Bertako denbora-erantzunak lortzeko labeari aplikatu zaizkion n kontrol-seinalearen —potentzia totalaren ehunekoaren— bilakaerak, berriz, 7.37 irudikoak dira. 7.36(d) irudiko erantzun egokiaren bistan, erabakitzen da han adierazitako PIari dagozkion parametroen balioak benetako kontrol-algoritmorako abiapuntu gisa hartzea.



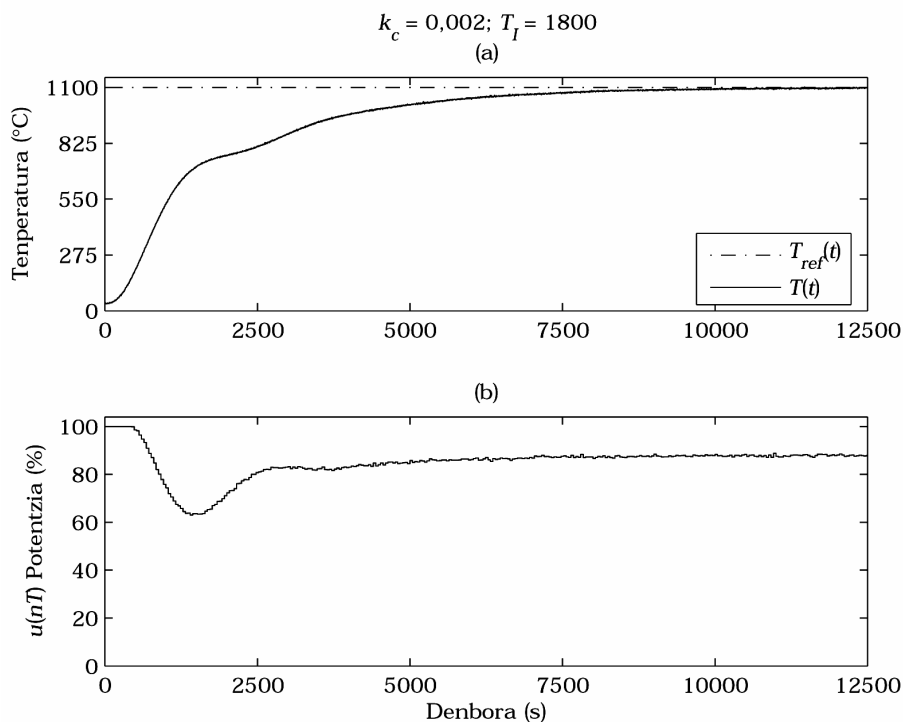
7.36 irudia. PIaren ekintza proportzionala nahiz integrala aldatuz lorturiko temperaturaren erantzun simulatuak.



7.37 irudia. 7.36 irudiko denbora-erantzunak eragiten dituzten kontrol-seinaleak.

Horiek horrela, k_c eta T_I parametroen doiketa fina egin ostean lortutako azken PI kontroladorea benetako labeari aplikatuz gero, 7.38 irudiak jasotzen dituen tenperatura nahiz kontrol-seinalearen denbora-bilakaerak lortzen dira. Ikus daitekeenez, tenperatura baxuagoko tartetan denbora-erantzun egokiak eragiten dituen PI berak erantzun motelegira darama, kontsigna gisa labearen tenperatura maximotik gertu den 1100 °C-koa ezartzean.

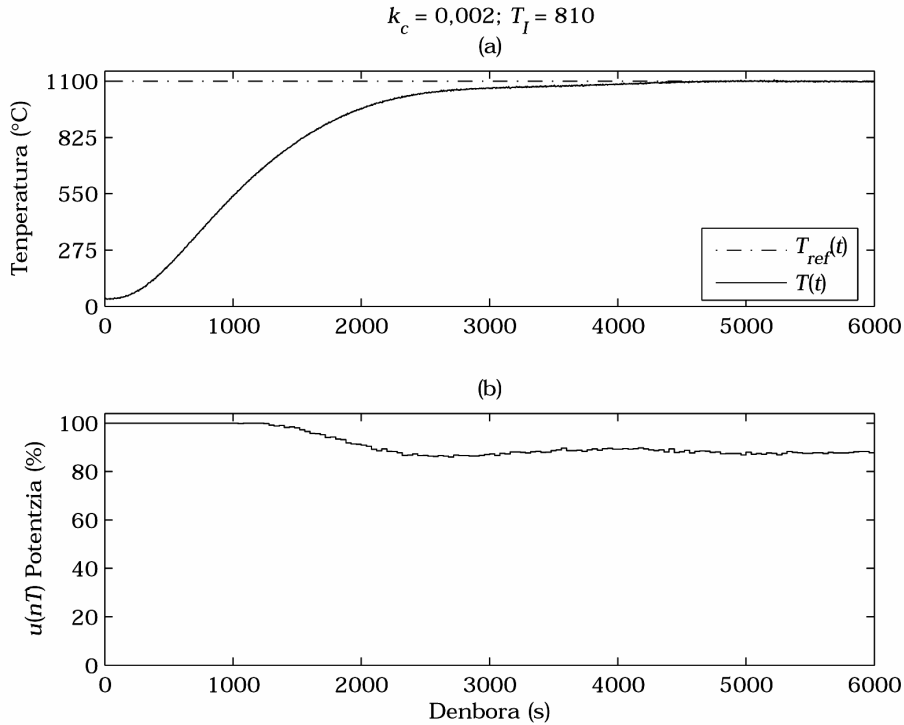
1100 °C-ko kontsignak tenperatura-aldaketa handia eskatzen duenez, 7.38(b) irudiak erakusten duen bezala, saiakuntza-hasieran kontrol-seinlea ase egiten da, eta gehiago hazteko duen berezko joera eten egiten da, tenperaturaren erantzun mantoegia eraginez. Eragingailua asetasunean sarrarazten ez duten kontsigna-aldaketa apalagoentzat, aldiz, denbora-erantzun aproposak lortzen dira PI honen bidez.



7.38 irudia. 7.36(d) irudiko PI kontroladoreaz modu esperimentalean lortutako temperatura nahiz kontrol-seinalearen bilakaera.

Saiakuntza 7.36(a) irudiko PI kontroladorea erabiliz errepikatuz gero, 7.39 irudian erregistratutako temperatura eta kontrol-seinalearen denbora-bilakaerak lortzen dira. Oraingoan, saiakuntza-hasieran eragingailuak denbora gehiagoan irauten du ase, eta temperatura aurreko Plaz baino askoz arinago haztea eragiten du. Gainera, aurreko saiakuntzan gertatu den bezala, asetasunaren iraupena nabarmena den arren, ez dira *'wind-up'* fenomenoari loturiko gaitzitze tipikoak inondik ageri, ezarritako kontrol-algoritmoak kontuan baititu eragingailuaren mugak.

Aitzitik, 7.36(a) irudiak adierazten duen bezala, azken PI horrek gaitzitze onartezinak eragiten ditu temperatura baxuagoko tartetan; izan ere, kontrol-seinlea asetzera iristen ez denez —ikus 7.37(a) irudia—, 7.39 irudiko erantzuna leuntzeaz arduratzen den *'anti-wind-up'* sistema ez da aktibatzen.



7.39 irudia. 7.36(a) irudiko PI kontroladoreaz modu esperimentalean lortutako temperatura eta kontrol-seinalearen bilakaera.

Ondorioz, eraginkorra dirudi kontroladorearen eragiketa-eremu osoa temperatura-tarteetan banatzea eta horietako bakoitzean PI ezberdin bat erabiltzea. *Irabaziaren plangintza* izenez ezagutzen den teknika erraz hori *Egokitze-kontrolaren* aitzindaritzat har daiteke.

7.3.8 ONDORIOAK

Amaitzeko, hauexek dira bigarren kasu praktikoko honen azterketak ekarritako funtsezko ondorioak:

1. Eredutzapen esperimentala oso baliagarria da, eta, ahal denean behintzat, erabiltzea komeni da.

2. Ziegler-Nichols metodoak, bestetik, erabili beharreko parametroen balioen nondik norakoari buruzko ideia garbia ematen du.
3. Dena den, oro har, formulen aplikazio hutsez lortutako parametroen doiketa finak egin behar izaten dira horiek benetako sisteman ezarri aurretik.
4. Kontroladore digitalak diseinatzean, laginketa-periodoaren hautaketa kritikoa gerta daiteke, eta, ondorioz, kontroladorea ezarri osteko sistemaren egonkortasuna bera ere baldintzatuta gera daiteke.

Bibliografia

ACKERMANN, J.: *Sampled Data Control Systems*, Springer-Verlag, New York, AEB, 1985.

ÅSTRÖM, K.J.; HÄGGLUND, T.: *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*, ISA, The International Society for Measurement and Control, Ipar Carolina, AEB, 1995.

ÅSTRÖM, K.J.; WITTENMARK, B.: *Computer Controlled Systems: Theory and Design*, 3. argit., Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, AEB, 1996.

AUSLANDER, D.M.; SAGUES, P.: *Microprocessors for Measurement and Control*, Osborne/McGraw-Hill, Berkeley, Kalifornia, AEB, 1989.

BENNET, S.: *Real-Time Computer Control: An Introduction*, Prentice Hall, New York, AEB, 1988.

BENNET, S.; LINKENS, D.A.: *Computer Control of Industrial Processes*, IEE Control Engineering Series, 21. zk., Peter Peregrinus, Stevenage, EB, 1982.

BEQUETTE, D.W.; BEQUETTE, W.B.: *Process Control: Modelling, Design and Simulation*, Pearson Education Inc., New Jersey, AEB, 2003.

.....

- BILLINGSLEY, J.: *Controlling with Computers*, McGraw-Hill, New York, AEB, 1989.
- BISHOP, A.B.: *Introduction to Linear Discrete Control*, Academic Press, New York, AEB, 1975.
- BURRUS, C.S.; MCCLELLAN, J.H.; OPPENHEIM, A.V.; PARKS, T.W.; SCHAFER, R.W.; SCHUESSLER, H.W.: *Computer-based Exercises for Signal Processing using MATLAB*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, AEB, 1994.
- CARR, J.J.: *Designing Microprocessor-based Instrumentation*, Reston Publishing Company, Reston, Virginia, AEB, 1982.
- DORF, R.C.; BISHOP, R.H.: *Modern Control Systems*, 8. argit., Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Reading, Massachusetts, AEB, 1998.
- EVANS, W.R.: "Control System Synthesis by Root Locus Method", *AIEE Transactions Part II*, 69 lib. (1950), 66-69.
- FORSYTHE, W.; GOODALL, R.M.: *Digital Control*, MacMillan, Londres, EB, 1991.
- FRANKLIN, G.F.; POWELL, J.D.; WORKMAN, M.: *Digital Control of Dynamic Systems*, 3. argit., Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Reading, Massachusetts, AEB, 1997.
- FRANKLIN, G.F.; POWELL, J.D.; EMAMI-NAEINI, A.: *Feedback Control of Dynamic Systems*, 4. argit., Prentice-Hall International Editions, Upper Saddle River, New Jersey, AEB, 2002.
- FREEMAN, H.: *Discrete-Time Systems*, John Wiley & Sons, Inc., New York, AEB, 1965.
- GIBSON, G.A.; LIU, Y.: *Microcomputers for Engineers and Scientists*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, AEB, 1981.
- GOPAL, M.: *Digital Control Engineering*, New Age International Ltd. Publishers, Bangalore, India, 2003.

- HANSELMANN, H.: "Implementation of Digital Controllers - A Survey" *Automatica*, 23 lib., 1. zk. (1987), 7-32.
- HOROWITZ, E.; SAHNI, S.: *Fundamentals of Computer Algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, Alemania, 1978.
- HOSTETTER, G.H.: *Digital Control System Design*, Holt, Reinhart & Winston, New York, AEB, 1988.
- HOUPI, C.H.; LAMONT, G.B.: *Digital Control Systems*, McGraw-Hill, New York, AEB, 1985.
- IBRAHIM, D.: *Microcontroller Based Applied Digital Control*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, West Sussex, EB, 2006.
- ISERMANN, R.: *System Identification*, IFAC Tutorial, Pergamon Press, Oxford, EB, 1981.
- ISERMANN, R.: *Digital Control Systems*, I eta II lib., Springer-Verlag, Berlin, Alemania, 1989.
- ISTEPANIAN, R.S.H.; WIDBORNE, J.F.: *Digital Controller Implementation and Fragility: A Modern Perspective*, Springer-Verlag London Ltd., Londres, EB, 2001.
- JACKSON, L.B.: *Digital Filters and Signal Processing*, 2. argit., Kluwer Academic Publishers, 7. berrinprimaketa, Norwell, Massachusetts, AEB, 1993.
- JURY, E.I.: "Hidden Oscillations in Sampled-Data Control Systems", *AIEE Transactions Part II*, 75 lib. (1956), 391-395.
- JURY, E.I.: *Sampled-Data Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc., New York, AEB, 1958.
- JURY, E.I.: "A General Z-Transform Formula for Sampled-Data Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-12 (1967), 606-608.
- KAILATH, T.: "A View of Three Decades of Linear Filtering and Prediction Problems", *IEEE Transactions on Information Theory*, 20 lib. (1974), 146-181.

- KALMAN, R.E.; BERTRAM, J.E.: "A Unified Approach to the Theory of Sampling Systems", *Journal of the Franklin Institute*, 267 lib. (1959), 405-436.
- KALMAN, R.E.; FALB, P.L.; ARBIB, M.A.: *Topics in Mathematical System Theory*, McGraw-Hill, New York, AEB, 1969.
- KATZ, P.: *Digital Control Using Microprocessors*, Prentice-Hall International, Inc., Londres, EB, 1981.
- KUCERA, V.: *Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach*, John Wiley, New York, AEB, 1979.
- KUO, B.C.: *Digital Control Systems*, 3. argit., The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering, Oxford University Press, New York, AEB, 1995.
- LEIGH, J.R.: *Applied Control Theory*. IEE Control Engineering Series, 18. zk., Peter Peregrinus, Stevenage, EB, 1982.
- LEIGH, J.R.: *Applied Digital Control: Theory, Design and Implementation*, 2. argit., Prentice Hall International, UK, Ltd., Hemel Hempstead, Hertfordshire, EB, 1992.
- MIDDLETON, R.; GOODWIN, G.: *Digital Control and Estimation - A Unified Approach*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, AEB, 1990.
- NYQUIST, H.: "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory", *Transactions of the AIEE*, 47 lib. (1928), 617-644.
- NYQUIST, H.: "Regeneration Theory", *Bell System Technical Journal*, 11 lib. (1932), 126-147.
- NARDONE, M.S.: *Direct Digital Control Systems: Application - Commissioning*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Herbehereak, 1999.
- OGATA, K.: *Discrete-Time Control Systems*, 2. argit., Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, AEB, 1995.
- OGATA, K.: *Modern Control Engineering*, 4. argit., Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, AEB, 2001.

- OGATA, K.: *System Dynamics*, 4. argit., Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, AEB, 2003.
- OPPENHEIM, A.V.; SCHAFER, R.W.; BUCK, J.R.: *Discrete-Time Signal Processing*, 2. argit., Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, AEB, 1999.
- PARASKEVOPOULOS, P.N.: *Digital Control Systems*, Prentice Hall International, UK, Ltd., Hemel Hempstead, Hertfordshire, EB, 1996.
- PHILLIPS, C.L.; NAGLE, H.T.: *Digital Control System Analysis and Design*, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, AEB, 1984.
- PROAKIS, J.G.; MANOLAKIS, D.G.: *Tratamiento Digital de Señales: Principios, Algoritmos y Aplicaciones*, 3. argit., Prentice Hall, Madril, 1998.
- ROBERTS, R.A.; MULLIS, C.T.: *Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, AEB, 1987.
- REID, J.G.: *Linear Systems Fundamentals, Continuous and Discrete, Classic and Modern*, McGraw-Hill, New York, AEB, 1983.
- ROSENWASSER, E.N.; LAMPE, B.P.: *Computer Controlled Systems - Analysis and Design with Process-orientated Models*, Springer-Verlag London Ltd., Londres, EB, 2000.
- SANTINA, M.S.; STUBBERUD, A.R.; HOSTETTER, G.H.: *Digital Control System Design*, 2. argit., The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering, Oxford University Press, New York, AEB, 1994.
- SHANNON, C.E.; WEAVER, W.: *The Mathematical Theory of Communication*, University of Illinois Press, Urbana, Illinois, AEB, 1972.
- THERRIEN, C.W.: *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, Prentice Hall International, UK, Ltd., Hemel Hempstead, Hertfordshire, EB, 1992.
- THOMPSON, S.: *Control Systems: Engineering and Design*, Longman Scientific & Technical Publishing Co., Harlow, Essex, EB, 1989.

VANLANDINGHAM, H.F.: *Introduction to Digital Control Systems*, MacMillan Publishing Company, New York, AEB, 1992.

VAS, P.: *Sensorless Vector and Direct Torque Control*, Oxford University Press, Inc., New York, AEB, 1998.

VIRK, G.S.: *Digital Computer Control Systems*, MacMillan Education Ltd., Basingstoke, Hampshire, EB, 1991.

WOODSON, H.H.; MELCHER, J.R.: *Electromechanical Dynamics. Part II: Fields, Forces & Motion*, Wiley, New York, AEB, 1968.

ZIEGLER, J.G.; NICHOLS, N.B.: "Optimum Settings for Automatic Controllers", *Transactions of the ASME*, 64 lib. (1942), 759-768.



ELHUYAR Edizioak

Unibertsitateko gaiak

- Enpresa-zientziak
- Giza zientziak
- Ingeniaritza
- Kimika
- Matematika
- Osasuna
- Teknologia elektrikoa
- Teknologia mekanikoa



ELHUYAR
edizioak