MATEMATIKAREN

ZABALPENA

ARRASATEKO ESKOLA POLITEKNIKOA

Hezkuntza, Unibertsitate eta Ikerketa Sailak onetsia: 1992-IX-9

Lege-gordailua: NA. 1498/92
ISBN: 84-87114-83-0

Inprimatzailea: Lizarra inprimategia, S.L. Tafallarako bidea, 1. km. Lizarra (Nafarroa)

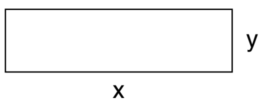
A U R K I B I D E A

1. FUNTZIO ALDAGAIANITZAK

1.1.- DEFINIZIOA

Askotan naturan aldagai bat beste baten menpe egon beharrean, bi edo gehiagoren menpe egoten da.

Adibidez: A = xy



Laukizuzenaren azalera, oinaren eta altueraren menpe dago.

1. definizioa: D eremuko (x,y) bakoitzari beste z balio bat dagokionean, z, x eta y bi aldagai askeen funtzio dela esango dugu eta honela ipiniko dugu:

$$z = f\,(x,y)$$

Askotan z ez dago x eta y-ren balio guztientzat definitua; OXY planoaren zati batean bakarrik baizik. Beraz, funtzio baten definizio-eremua edukiko dugu.

2. definizioa: z = f (x,y) funtzioa definitua dagoen (x,y) bikoteen multzoari, z = f (x,y) funtzioaren definizio-eremu deitzen zaio.

Adib.

1. $z = 2x - y$ bere definizio-eremua OXY plano osoa da.

2. $z = \sqrt{1 \quad x^2 \quad y^2}$ funtzio honek zentzua izan dezan,
   $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ bete behar du.
   $1 \geq x^2 + y^2$ 1 erradioko zirkulua da.

3. $z = \ln\,(x+y)$ → z-k balioa eduki dezan, $x+y > 0$ izan behar du,
   → $+x > -y$ → $y > -x$

Eremuak OXY planoaren zatiak dira, eta zati honen ertzei eremuaren "muga" esango diegu. Muga eremu barnean dagoenean, eremu itxia izango da.

F-k muga adierazten du.

$\forall x \in F \rightarrow x \in D \rightarrow$ Muga itxia

$x \in D$ eta $x \notin F \rightarrow$ x-i barne-puntu deituko diogu.

$\forall x \in D$, x barne-puntua $\Rightarrow$ D irekia

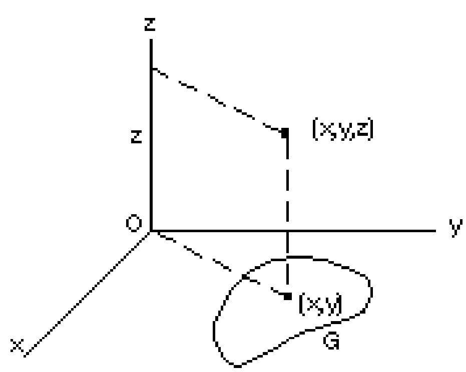
Adib.

1. $z = 2x - y$ funtzioaren eremua irekia da.
2. $z = z = \sqrt{1 \quad x^2 \quad y}$ funtzioaren eremua itxia da.
3. $z = \ln(x+y)$ funtzioaren eremua irekia da.

a) Bi aldagai dituzten funtzioen adierazpen grafikoa

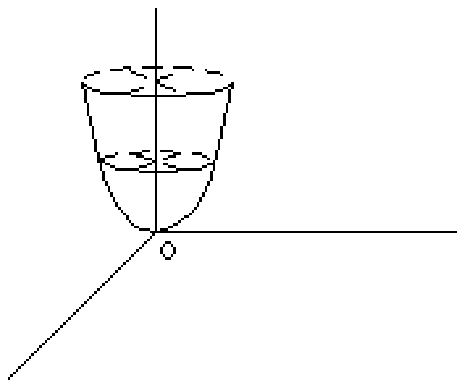
Izan bitez $z = f(x,y)$ funtzioa G eremu batean definitua eta OXYZ espazioko koordenatu cartesiarrak.

(x,y) puntu bakoitzari G eremuan, z bat dagokio eta (x,y) puntutik OXY planoarekiko elkartzut dagoen zuzen batean egongo da. $z = f(x,y)$ neurrikoa izango da. (x,y,z) puntu bat lortu dugu.



Adib.

$$z = x^2 + y^2$$



Hau paraboloidea da.

Oharra: Funtzioak bi aldagai baino gehiago baldin baditu, ezin da adierazpen grafikorik egin.

1.2.- FUNTZIO BATEN GEHIKUNTZA TOTALA ETA PARTZIALA

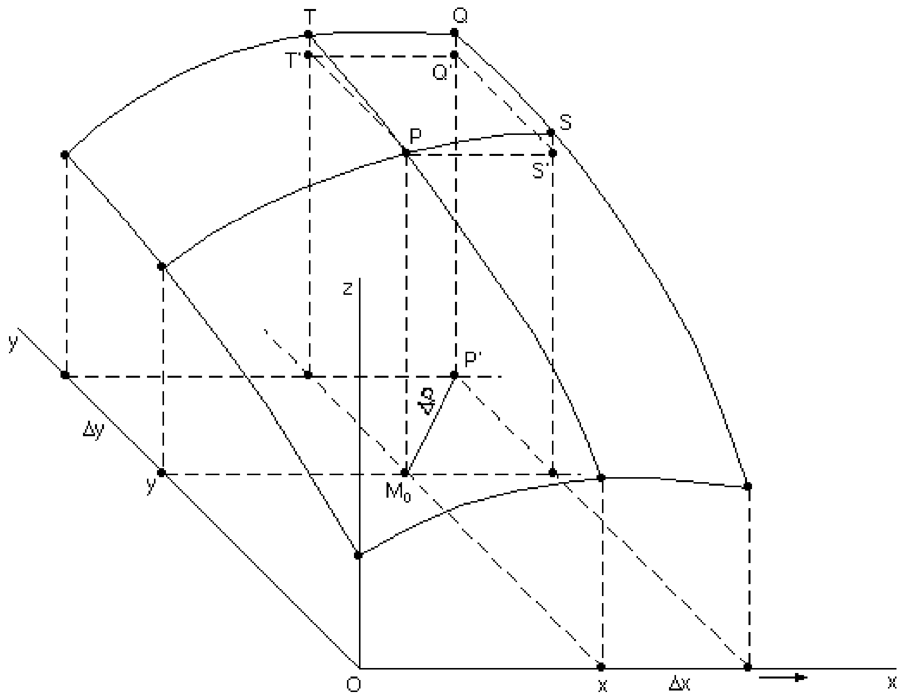
Izan bedi G eremuan definitutako $z = f(x,y)$ funtzio bat eta $y = k$ planoarekin duen elkargunea ikusiko dugu.

Zati honetan $y = k$ denez, z x-en funtzio bakarrik da. $x \rightarrow \Delta x$ aldatzen badugu, z ere aldatu egingo da. $\Delta_x z$ z-ren gehikuntza x-ekiko:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

Era berean, x kte bada y Δy aldatzen badugu, z ere $\Delta_y z$ aldatu egingo da eta: $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$. Azkenik, x eta y-k biek batera gehikuntza (Δx eta Δy) badute:

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ dugu eta honi z-ren gehikuntza totala deitzen zaio.



M_o (x,y) puntua izanik P (x,y,z)
$\Delta_x z$ SS' zuzenkia da
$\Delta_y z$ TT' zuzenkia da
Δz QQ' zuzenkia da

Adib.

z = xy funtzioa hartzen badugu:

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x$$
$$\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y$$
$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

Oharra: Konturatu $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$ orokorrean

Era berean kalkulatzen dira edozein aldagai-kopurutako funtzioen gehikuntzak. $f(x_1 \ldots x_n) = z$ funtzioaren gehikuntza x_i aldagaiarekiko hau da:

$$\Delta x_i\, z = f\,(x_1 \ldots x_i + \Delta x_i \ldots x_n) - f\,(x_1 \ldots x_n)$$

eta gehikuntza totala:

$$\Delta z = f\,(x_1 + \Delta x_1 \ldots x_n + \Delta x_n) - f\,(x_1 \ldots x_n)$$

1.3.– FUNTZIO ALDAGAIANITZEN JARRAITASUNA

Lehenbizi puntu baten ingurunea definituko dugu. M (x_o,y_o) puntuaren r erradioko ingurunea hau da:

$\left\{(xy) \in IR^2 \,/\, \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2} < r\right\}$ eta honela ipiniko dugu: $B_r\,(x_o,y_o)$.

Jarraitasuna aztertu aurretik limite-kontzeptua ere ikusi egin behar dugu.

Definizioa:

Izan bedi f (x,y) = z D eremu batean definitua, eta M (x_o,y_o) eremu horren barnean edo mugan dagoen puntu bat. Beraz:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \,/\, \forall\, x \in B\,\delta\,(x_o,y_o) \ \rightarrow\ |f\,(x,y) - A\,| < \varepsilon$$

betetzen bada, A f(x,y)-ren limitea dela esango dugu (x,y), (x_o,y_o) puntu-rantz doanean.

$$\lim_{(xy)\to(x_o y_o)} f\,(xy) = A$$

Definizioa:

Izan bedi M (x_o,y_o) f (x)-en eremuko puntu bat $\lim\limits_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} f(x,y) = f(x_o,y_o)$ betetzen bada f (x,y) (x_o,y_o) puntuan jarraia dela esango dugu.

Funtzio bat eremu bateko puntu guztietan jarraia baldin bada, eremuan jarraia dela esango dugu.

f (x,y) funtzioak jarraitasunaren definizioa N (x,y) puntu batean betetzen ez baldin badu, puntu horretan etena dela esango dugu.

1. propietatea

f $(x_1 \ldots x_n)$ definituta baldin badago eta D eremuan jarraia bada, D itxia eta mugatua izanik:

$$\exists\, (z_1 \ldots z_n) \,/\, f(z_1 \ldots z_n) \geq f(x_1 \ldots x_n) \text{ eta } \exists\, (y_1 \ldots y_n) \,/$$
$$/\, f(y_1 \ldots y_n) \leq f(x_1 \ldots x_n)\ \forall\, (x_1 \ldots x_n) \in D$$

2. propietatea

f $(x_1 \ldots x_n)$ D eremu itxi eta mugatu batean jarraia baldin bada eta M, N funtzioaren maximoa eta minimoa badira:

$$\forall\, a \in [N,M]\ \exists\, (x_1 \ldots x_n) \,/\, f(x_1 \ldots x_n) = a$$

1.4.– DERIBATU PARTZIALAK

f (x,y) funtzioan y konstantetzat hartzen badugu, x izango da aldagai bakarra eta f funtzioa deriba dezakegu. x-ekiko deribatu horri f-ren x-ekiko deribatu partzial deitzen zaio eta $\partial f/\partial x$ edo f_x (x,y) adierazten da.

x kte hartu eta y-rekiko deribatuz $\partial f/\partial y$ edo f_y (x,y) lortuko dugu.

Deribatuaren definizioa kontutan harturik:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(xy)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(xy)}{\Delta y}$$

Oso kontutan hartu behar da $\partial f/\partial x$-ek ez duela deribatuetan bezala diferentzialen zatidura adierazten eta oso kontuz ibili behar da eragiketak egitean.

Era berean f $(x_1 \ldots x_n)$ n aldagai baldin baditu, bakoitzeko deribatu partziala kalkula dezakegu:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1 \ldots x_i + \Delta x_i \ldots x_n) - f(x_1 \ldots x_n)}{\Delta x_i}$$

1.5.– ONDOZ ONDOKO DERIBATU PARTZIALAK

Aldagaianitzak dituzten funtzioen deribatu partzialak, aldagai berorien funtzio dira. Beraz, funtzio hauek ere deriba ditzakegu aldagai bakoitzeko.

f (x,y) funtzioaren deribatu partzial dira $\partial f/\partial x$ eta $\partial f/\partial y$, baina bakoitza x eta y-ren funtzio da eta honela kalkula dezakegu:

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \; , \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \; ,$$

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} \quad \text{eta} \quad \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

a) Shwarz-en teorema

f(x,y) funtzioa eta bere f'_x f'_y eta f''_{xy} f''_{yx} M (x,y) puntuan eta bere ingurune batean jarraiak baldin badira:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} \qquad \text{betetzen da.}$$

Era berean, hirugarren deribatu partzialak, laugarren deribatu partzialak eta abar kalkula ditzakegu.

1.6.– FUNTZIO ALDAGAIANITZEN DIFERENTZIALA

Lehenengo aldagai bat duten funtzio konposatuen deribatua gogoratuko dugu. f (u,v) = z funtzioa kontsideratuko dugu, bertan aldagai bakoitza (u eta v) x-en funtzio delarik.

$$f(u,v) = z \qquad u(x) = u \qquad v(x) = v$$

Garbi dago f aldagai bakar baten (x-en) funtzio dela. Beraz, kalkula dezakegu

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Lehenbizi $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ kalkulatuko dugu.

x, Δx aldatzen dugunean z, Δz aldatuko da, baina u, Δu eta v Δv

$$\Delta z = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u,v)$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u,v)}{\Delta x}$$

Izendatzaileari f (u,v + Δv) gehituz eta kenduz:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v) + f(u, v + \Delta v) - f(u,v)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta x} + \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u,v)}{\Delta x}$$

Lenengo zatikia Δu-z zatituz eta biderkatuz eta bigarrena Δv-z zatituz eta biderkatuz

$$\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u,v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u, v+\Delta v)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u, v+\Delta v)-f(u,v)}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Baina $\Delta x \to 0 \qquad \Delta u \to 0 \qquad \Delta v \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u, v+\Delta v)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u, v+\Delta v)-f(u,v)}{\Delta v}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=$$

$$=\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Bi aldeak dx-ez biderkatzen baditugu, geratzen zaiguna bi aldagai dituen funtzio baten espresio diferentziala da:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot dv$$

1.7.– FUNTZIO KONPOSATUEN DERIBATU PARTZIALAK

$z = f(u, v)$ funtzioan u eta v x eta y-ren funtzio badira, $u = u(x, y)$ $v = v(x, y)$ z-ren espresio diferentziala da:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot dv$$

Baina u eta v-ren espresio diferentzialak hauek dira:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy \qquad dv=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot dy$$

Ondorioz: $$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

Bestetik z x eta y-ren funtzio da z = z (x,y) eta espresio hau diferentziatuz:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

dz eta y-rekiko espresio bakarra edukiko duenez:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

1.8.– FUNTZIO KONPOSATUEN ONDOZ ONDOKO DERIBATU PARTZIALAK

1. kasua:

z = f (u,v) funtzioak u = u (x) eta v = v (x) badira,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

hauek ere x-en funtzio dira eta deribatu ahal izango ditugu:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = d\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}\right) / dx$$

eta honela geratzen da:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}$$

2. kasua:

z = f (u, v) funtzioan aldagai bakoitza x eta y-ren funtzio baldin bada, u = u (x,y) v = v (x, y)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Funtzio hauek deribatuz bigarren deribatu partzialak lortzen dira.

1.9.– MAILA HANDIAGOKO DIFERENTZIALAK

z = f (u v) bi aldagaiko funtzio bat baldin bada, badakigu:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

Espresio hau diferentziatuz, ondokoa lortuko dugu:

$$d^2 z = d\left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) du + \frac{\partial z}{\partial v} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{d^2 u}} + d\left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) dv + \frac{\partial z}{\partial v} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{d^2 v}}$$

$$= \left(du \frac{\partial}{\partial u} + dv \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 - z$$

deribatu partzialetan berretzaile bezala ulertu beharrean hurrengo mailako deribatu bezala ulertuz.

1.10.– FUNTZIO HOMOGENOAK

Bi aldagaiko z = f (x,y) funtzioa m mailako homogenoa dela esaten da ondokoa betetzen baldin badu:

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y)$$

Adib.

$z = x^2 + 2xy$ da bigarren mailako funtzio homogenoa

Teorema (Euler):

Izan bedi f(x,y) m mailako funtzio homogenoa. Ondokoa betetzen da:

$$x\frac{\partial f}{x} + y\frac{\partial f}{y} = mf\ (x,y)$$

Frogapena:

z = f (x,y) m mailako funtzio homogenoa baldin bada, honakoa betetzen du:

$f(tx, ty) = t^m f(x,y)$ aldagai-aldaketa bat eginez, $tx = u \quad ty = v$ $\rightarrow$ $f(u,v) = t^m f(x,y)$ espresio hau t-rekiko deribatuz:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt} = \frac{df(u,v)}{dt}$$

$$\frac{d\left\lfloor t^m f(x,y)\right\rfloor}{dt} = m\,t^{m-1} f(x,y) \qquad \rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt} = m\,t^{m-1} f(x,y)$$

$$\frac{du}{dt} = x \qquad \frac{dv}{dt} = y \qquad \rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot y = m\,t^{m-1} f(x,y)$$

t = 1 eginez u = x y = v

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot x + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot y = m\,f(x,y)$$

1.11.– FUNTZIO ALDAGAIANITZ BATEN TAYLOR-EN GARAPENA

Izan bedi z = f (x,y) bi aldagai dituen funtzio bat eta (x_o,y_o) funtzio honen izate-eremuko puntu bat.

Funtzio horretan $\left.\begin{array}{l} x = x_o + ht \\ y = y_o + kt \end{array}\right\}$ aldagai-aldaketa eginda (h, k) bikote bakoitzarentzat XY planoan zuzen bat edukiko dugu.

$z = f(x,y) = f(x_o + ht, y_o + kt)$. h eta k konstanteak direla suposatuz, f t-ren funtzio da:

$$f(x_o + ht, y_o + kt) = F(t)$$

F (t) Mac-Laurinen formulaz garatuz:

$$F(t) = F(0) + t F'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{t^n}{n!}F^{n!}(0) + R$$

F (t) = f (x,y) $x = x_o + ht$ $y = y_o + kt$ izanik

$$\frac{dx}{dt} = h \qquad \frac{dy}{dt} = k \qquad \text{eta hortik:}$$

$$F'(t) = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot h + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot K$$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot K^2$$

$$F^{(n)}(t) = \left[\frac{F}{x}h + \frac{F}{y}K\right]^{(n)} \qquad \text{eta } t = 0 \text{ eginez}$$

$$F(0) = f(x_o, y_o)$$

$$F'(0) = \left[\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} K\right]_{(x_o, y_o)}$$

.

.

.

$$F(t) = f(x_o + ht, y_o + Kt) = f(x_o, y_o) + t\left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} K\right]$$

$$+ \frac{t^2}{2!}\left[\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} K\right]^2_{(x_o, y_o)} + \ldots + \frac{t^n}{n!}\left[\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} K\right]^n_{(x_o, y_o)} + R$$

$t = 1$ eginez $\quad x = x_o + h$

$y = y_o + k$

$$f(x, y) = f(x_o, y_o) + \left[\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} K\right]_{(x_o, y_o)} +$$

$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_o) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_o)\right]^2_{(x_o, y_o)} + \ldots + \frac{1^n}{n!}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_o) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_o)\right]^n_{(x_o, y_o}$$

1.12.– DIFERENTZIALAREN ERABILERA HURBILKETA-KALKULUETAN

$z = f(x,y)$ funtzioan $x \to \Delta x$ eta $y \to \Delta y$ aldatuta z, Δz aldatu egingo da eta dakigunez $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$.

Taylorren garapenean oinarrituz:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right]_{(x_o, y_o)} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right]^2_{(x_o, y_o)} \cdots \to$$

$$\Delta z = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right]_{(x_o,y_o)} + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right]^2_{(x_o,y_o)} + \ldots$$

Guk nahi duguna Δz-ren balioa (x,y) puntuaren hurbiltasunean kalkulatzea baldin bada, bigarren batugaia oso txikia izango da, eta Δz hurbil dezakegu.

$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$ gaia hartuz, baina $\Delta x = dx$ $\Delta y = dy$ kontutan harturik:

$\Delta z \approx dz$, balio absolutuak hartuz.

Adib.

Triangelu zuzen baten "a" hipotenusa eta "b" katetua neurtzean, $|\Delta a| = 0,2$ $|\Delta b| = 0,1$ erroreak egon dira eta a = 75, b = 32 neurtu ditugu.

Kalkulatu B angelua neurtzean egingo dugun errorea.

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad \text{eta} \quad |\Delta z| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta y|$$

da = 0,2 db = 0,1 a = 75 b = 32

$$B = \arcsin\frac{b}{a}$$

$$\frac{\partial B}{\partial b} = \frac{1/a}{\sqrt{1-(b/a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\frac{\partial B}{\partial a} = \frac{-b/a^2}{\sqrt{1-(b/a)^2}} = \frac{-b/a}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$dz = \frac{1}{\sqrt{75^2-32^2}}0,1 + \frac{32}{75\sqrt{75^2-32^2}}0,2 =$$

$$= \frac{0,1}{67,83} + \frac{32}{75\cdot 67,83}0,2 = 1,47\cdot 10^{-3} + 1,26\cdot 10^{-3} = 2,73\cdot 10^{-3} \text{ radian}$$

1.13.–FUNTZIO INPLIZITUAK ETA BEREN DERIBAZIOA

Funtzio bat, aldagairik askatu ezin denean, inplizitua dela esaten da.

Adib.

$$e^{xy} + x \sin y = 0$$
$$e^{xy} + zx - y \sin z = 0$$

Bere deribatuak kalkulatzeko bi kasu bereiztuko ditugu:

1. kasua:

Bi aldagaiko f(x y) = 0 ekuazio bat, y, x-en menpe baldin badago, funtzioa f (x, y (x)) = 0 izango da eta x-ekiko deribatuz:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$$

Bigarren deribatua kalkulatzeko aurreko espresioa x-ekiko deribatuko dugu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \text{ eta hemendik } \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ isolatzen da.}$$

Adib.

$$x^2 + y^2 - 3\,x\,y = 0 \text{ funtzioan}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 3y}{2y - 3x} = \frac{3y - 2x}{2y - 3x}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(3\frac{dy}{dx} - 2\right)(2y - 3x) - (3y - 2x)\left(2 \cdot \frac{3y - 2x}{2y - 3x} - 3\right)}{(2y - 3x)^2}$$

2. kasua:

Bi aldagai aske eta menpeko bat ditugu: f (x y z) = 0. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ eta $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ kalkula ditzakegu f funtzioa funtzio konposatuaren erregelak kontutan edukirik x-ekiko deribatuz:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(\partial f / \partial x)}{(\partial f / \partial z)}$$

y-rekiko berdin eginda:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(\partial f / \partial y)}{(\partial f / \partial z)}$$

3. kasua:

Menpeko aldagai bat baino gehiago eta funtzio bat baino gehiago ditugunean:

$$f_1 (x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$
$$f_2 (x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

y_1, y_2 aldagai lotuak dira. x_1 eta x_2 aldagai askeak direla kontutan harturik eta funtzio konposatuaren erregelak aplikatuz:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0$$

eta $$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}}$$

Deribatu partzialen determinante hauei "jacobiar" deituko diegu.

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \quad \text{eta abar.}$$

Notazio hau erabiliz, ondokoa jar dezakegu:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{\frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, y_2)}}{\frac{D(f_1, f_2)}{D(y_1, y_2)}} \qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = -\frac{\frac{D(f_1, f_2)}{D(x_2, y_2)}}{\frac{D(f_1, f_2)}{D(y_1, y_2)}}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -\frac{\frac{D(f_1, f_2)}{D(y_1, x_1)}}{\frac{D(f_1, f_2)}{D(y_1, y_2)}} \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = -\frac{\frac{D(f_1, f_2)}{D(y_1, x_2)}}{\frac{D(f_1, f_2)}{D(y_1, y_2)}}$$

Jacobiarren propietateak:

1. $X = X(x, y, z) \quad Y = Y(x, y, z) \quad Z = Z(x, y, z)$

   Hiru funtzio baditugu eta gainera $x = x(u, v, w)$ $y = y(u, v, w)$ $z = z(u, v, w)$, ondokoa betetzen da:

$$\frac{D(X, Y, Z)}{D(u, v, w)} = \frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$$

2. $X = X(x, y, z)$ $Y = Y(x, y, z)$ $Z = Z(x, y, z)$ hiru funtzio izanik ondokoa betetzen da:

$$\frac{D(X,Y,Z)}{D(x,y,z)} = \frac{1}{\dfrac{D(x,y,z)}{D(X,Y,Z)}}$$

Adib.

$$e^{xy} z + u y = 0$$

$$\left(x^2 + y^2\right)z - \frac{u}{xy} = 0$$

$$\frac{D\left(f_1,f_2\right)}{D(z,u)} = \begin{vmatrix} e^{xy} & y \\ x^2 + y^2 & -1/xy \end{vmatrix} = \frac{-e^{xy}}{xy} - \left(x^2 + y^2\right)y$$

$$\frac{D\left(f_1,f_2\right)}{D(x,u)} = \begin{vmatrix} ye^{xy}z & y \\ 2xz + \dfrac{u}{x^2 y} & \dfrac{-1}{xy} \end{vmatrix} = \frac{e^{xy} z u}{x^2} - 2xyz$$

1.14.– SESTRA-AZALERAK

$\mathbb{R}^3$ espazioko D eremuan $u = (x, y, z)$ funtzioa definituta egonik, D eremuan "eremu eskalar" bat definituta dagoela esaten da.

Adib.

$u \in u(x, y, z)$-ko puntu bakoitzeko tenperatura adierazten badu, u funtzioa tenperaturen eremu eskalar bat izango da.

$\{(x, y, z) \in D / u(x, y, z) = C\}$ multzo hau azalera bat izango da eta C aldatuz beste azalera bat lortuko da. Azalera hauei "sestra-azalera" esaten zaie.

Adib.

$$u(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}.\ \text{Beraz,}\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=C$$

elipsoideak izango dira. Funtzioak bi aldagai baldin baditu, "sestra-azalerak" OXY planoko lerroak izango dira.

1.15.– NORABIDE BATI JARRAITUZKO DERIBAZIOA

u = (x,y,z) funtzioa bere D eremuko M (x,y,z) puntu batean. M-tik S bektorea marratuko dugu bere kosinu zuzentzaileak cos α, cos β, cos γ izanik. M_1 $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ S bektorearen gainean M-tik ΔS distantziara M_1 puntua hartzen badugu, non

$$\Delta S=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$$

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

Berdintzaren bi aldeak ΔS-z zatituz:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta S}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta S}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta S}$$

Berehalakoa da: $\frac{\Delta x}{\Delta S}=\cos\alpha\quad\frac{\Delta y}{\Delta S}=\cos\beta\quad\frac{\Delta z}{\Delta S}=\cos\gamma$ dira. Beraz:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Beraz, $$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S}=\frac{\partial u}{\partial S}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Funtzio baten deribatu partzialak ere, horrela har ditzakegu.

Adib.

Kalkulatu $u = 2x + y + z^2$ funtzioaren deribatua s = (2, 4, 3) norabidean M (2, 4, 6) puntuan.

S-ren kosinu zuzentzaileak hauek dira:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}} \qquad \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{29}} \qquad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z$$

$$\frac{\partial u}{\partial S} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} + 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} + 12 \cdot \frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{42}{\sqrt{29}}$$

1.16.– GRADIENTEA

Izan bedi u = (x,y,z) D eremuan definitutako funtzio bat.

$$\frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$$

bektoreari puntu bakoitzean grad u deitzen zaio eta D eremuan eremu bektorial bat definituta dagoela esango dugu; "gradienteen eremu bektoriala".

Teorema:

Izan bedi u = u (x,y,z) funtzio bat eta grad u bere eremu bektoriala. $\partial u/\partial S$ deribatua S-ren norabideari jarraituz, grad u bektorearen S-ren gainera egindako proiekzioa da.

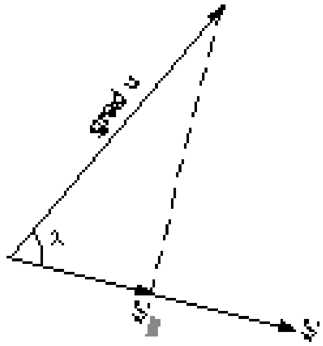
Frogapena:

S^o deituko diogu S-ren norabideko bektore unitarioari.

$$S^o = \cos\alpha \, \vec{i} + \cos\beta \, \vec{j} + \cos\gamma \, \vec{k} \qquad \text{Beraz,}$$

$$\text{grad}\, u \cdot S^o = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Eta $\quad \operatorname{grad} u \cdot S^{o} = \frac{\partial u}{\partial S}$



$$|\operatorname{grad} u| \cdot \underset{\underset{1}{\parallel}}{|S^{o}|} \cos\lambda = \frac{\partial u}{\partial S}$$

eta |grad u|. cos λ da grad u-ren proiekzioa S° norabidean. Beraz frogatuta dago.

Gradientearen propietateak:

1. u = u (x,y,z) funtzioaren deribatuak S norabidean, balio maximoa S-ren norabidea eta gradientearen norabidea berdinak direnean hartzen du.

   |grad u| . cos λ = ∂u/∂S berdintza jakinik, garbi dago honen balio maximoa λ = 0 denean beteko dela.

2. u = ω (x,y,z) funtzioaren deribatua (S-ren norabidean) S "sestra-azalearen" ukitzailea baldin bada, 0 da. Lehen bezala |grad u|. cos φ = ∂u/∂S jakinik, kasu honetan φ = π/2, beraz ∂u/∂S= 0. φ = π/2 dela frogatuko dugu u = u (x y) kasuan.

   u (x,y) =c "sestra-azalera" eta grad u elkartzut daudela frogatu behar dugu. Dakigunez, u (x,y) = c kurbaren ukitzailearen malda $k = \frac{-u_x}{u_y}$ da eta grad u bektorearen malda $k_2 = \frac{u_x}{u_x}$. Beraz elkartzut daude.

Adib.

$u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ funtzioaren M (2, 4) puntuko gradientea bilatu.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{2} \qquad \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{2y}{2} \qquad \text{grad}\, u = x\vec{i} + y\vec{i}$$

$$\frac{4}{2} + \frac{16}{2} = 10 \qquad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 10$$

1.17.– FUNTZIO BATEN MAXIMO ETA MINIMOAK

Definizioa:

$z = f(x,y)$ funtzioak $M_o (x_o,y_o)$ puntuan maximo bat duela esaten da, $f(x_o,y_o) > f(x,y); \forall (x,y) \in D$ eta (x_o,y_o)-ren hurbil eta $(x,y) \neq (x_o,y_o)$ betetzen denean.

Definizioa:

$z = f(x,y)$ funtzioak $M_o = M(x_o,y_o)$ puntuan minimo bat duela esaten da, $f(x_o,y_o) < f(x,y); \forall (x,y) \in Br (x_o,y_o)$ eta $(x,y) = (x_o,y_o)$ betetzen denean.

Adib.

$Z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$ funtzioak minimo bat du (1, 2) puntuan.

Maximo eta minimoaren definizioak beste era batera ere jar daitezke.

$(x, y) = (x_o + \Delta x, y_o + \Delta y)$ ipinita $\rightarrow f(x_o,y_o) > f(x,y)$ denean.
$f(x,y) = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) < f(x_o,y_o) \rightarrow$
$\rightarrow \Delta f$ negatiboa, eta $f(x_o,y_o)$ $f(x,y)$ da.

$\Delta f > 0$ baldin bada, Δx eta Δy nahikoa txikientzat f-k minimo bat onartzen du (x_o,y_o) puntuan.

Teorema: (Muturra izan dadin beharrezko baldintzak)

f (x,y) = z funtzio batek (x_o,y_o) puntuan erpin bat duenean, z funtzioaren deribatu partzialak edo zero dira edo ez dira existitzen.

Frogapena:

z = f (x,y) funtzioan y-ri y_o balioa eman badiogu, z = f (x,y_o) geratzen da eta hau aldagai bateko funtzioa da. (x_o,y_o) puntuan funtzioak mutur bat duenez, $\partial z/\partial x$ x = x_o denean zero izan behar du → $\partial z/\partial x = 0$. Orain x x_o-z ordezkatzen baldin badugu, arrazoi berdinagatik $\partial z/\partial y = 0$ izango da. Beraz, frogatuta dago.

Baldintza hau ez da nahikoa funtzioek mutur bat izan dezaten baina puntu hauei puntu kritiko deituko diegu.

Teorema: (Muturra izan dadin beharrezko baldintzak)

Izan bedi z = f (x,y) D eremu batean definitua. M_o (x_o,y_o) ∈ D kontsideratuko dugu:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_o,y_o)=0 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_o,y_o)=0 \qquad \text{Beraz:}$$

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$ H > 0 funtzioak minimo bat du (x_o,y_o) puntuan.

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$ H > 0 funtzioak maximo bat du (x_o,y_o) puntuan.

3) H < 0 funtzioak ez du ez maximorik ez minimorik.

4) H = 0 hirugarren deribatu partzialak aztertu behar dira.

$$H=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_o,y_o)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_o,y_o)-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(x_o,y_o)\right)^2 \qquad \text{izanik.}$$

Frogapena:

Dakigunez, $f\,(x_o + \Delta x,\, y_o + \Delta y) =$

$$= f(x_o, y_o) + \frac{\partial f\,(x_o, y_o)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f\,(x_o, y_o)}{\partial y}\Delta y +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_o, y_o)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_o, y_o)}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y + \frac{\partial^2 f(x_o, y_o)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] + R$$

Taylor-en garapenagatik:

$$\Delta f = f\,(x_o + \Delta x,\, y_o + \Delta y) - f\,(x_o, y_o)$$

$$\frac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial x} = 0 \quad \text{eta} \quad \frac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial y} = 0$$

$$\Delta f = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_o, y_o)}{\partial^2 x}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_o, y_o)}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_o, y_o)\Delta y^2\right] + R$$

$$R = \alpha_o(\Delta\rho)^3 \quad \text{eta} \quad \Delta\ell = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad \text{izanik}$$

Δx eta Δy nahi bezain txikiak aukera ditzakegu, R-k Δf-ren zeinuan eraginik eduki ez dezan.

$M\,(x_o + \Delta x,\, y_o + \Delta y)$ eta M_o lotzen dituen zuzenak OX ardatzarekin φ angelua betetzen badu:

$$= \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{\partial^2 f(x_o, y_o)}{\partial^2 x}(\cos\varphi)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_o, y_o)}{\partial x\,\partial y}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2 f(x_o, y_o)}{\partial y^2}(\sin\varphi)^2\right.$$

Eragiketak errazteko $\dfrac{\partial^2 f(x_o, y_o)}{\partial^2 x^2} = A$

$$\frac{\partial^2 f(x_o, y_o)}{\partial x\,\partial y} = B \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_o, y_o) = C \quad .\ \text{Beraz:}$$

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi\right]$$

Lehenengo $A \neq 0$ dela kontsideratuko dugu.

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{A^2\cos^2\varphi + 2AB\sin\varphi\cos\varphi + AC\sin^2\varphi}{A}\right]$$

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + \left(AC - B^2\right)\sin^2\varphi}{A}\right]$$

maximoa eta minimoa edukiko du funtzioak Δf-ren zeinuaren arabera.

$AC - B^2 > 0$ denean, zatiki honen zenbakitzailea beti positiboa da.

$A > 0$ denean minimoa edukiko dugu eta $A < 0$ denean maximoa edukiko dugu. $AC - B^2 = 0$ denean, Taylor gehiago garatu behar dugu.

$(AC - B^2) < 0$ denean, ez dago ez maximo ez minimorik. Horretarako, bi norabide desberdinetan zeinu desberdinak hartzen dituela ikusiko dugu.

$\varphi = 0$ denean $\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[\frac{A^2}{A}\right]$ adierazpenak A-ren zeinua izango du.

$\varphi = \arctan -\frac{A}{B}$ denean $\Delta f = \frac{1}{2}\left[\frac{AC - B^2}{A}\sin^2\varphi_o\right]$ adierazpenak A-ren kontrako zeinua izango du.

Beraz norabide batean A-ren zeinua du eta beste batean kontrakoa, eta ez dago ez maximorik eta ez minimorik.
φ txikia baldin bada:

$$A = 0 \quad \Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\sin\varphi\left[2B\cos\varphi + C\sin\varphi\right]$$

$$2B\cos\varphi + C\sin\varphi$$

2B-ren zeinua edukiko du, eta Δf-ren zeinua $\sin\varphi$-ren zeinuaren araberakoa izango da. Beraz, ez dago ez maximorik ez minimorik.

Adib.

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$

Puntu kritikoak aurkitu:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2$$

$$\begin{array}{ll} 2x - y = -3 & \qquad 2x - y = -3 \\ -x + y = 2 & \qquad \underline{-2x + 4y = 4} \\ 2x = -3 + \frac{1}{3} = \frac{8}{3} & \qquad 3y = 1 \quad \boxed{\mathbf{y = 1/3}} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbf{x = -4/3}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \ ; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1 \ ; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5$$

eta puntu honetan minimoa dago.

1.18.– MENPEKO MAXIMO ETA MINIMOAK

Orain funtzio baten maximo eta minimoak aurkitzeaz arduratuko gara, baina aldagaiak askeak izan ordez, elkarrekiko menpekotasunak izango dute.

Adib.

Aurkitu z = f (x,y) funtzioaren maximo eta minimoak, baina x+y = 0 betetzen dutelarik.

Hau bi eratara egin dezakegu: y, x-ekiko aska daitekenean, a x-en funtzio bakarrik izango da eta maximo eta minimoak aurki ditzakegu.

y, x-ekiko ezin dugula askatu suposatzen badugu, u = f (x,y) funtzioa eta φ (x,y) = 0 erlazioa dauzkagu.

Badakigu du/dx = 0 izan behar duela eta y, x-en funtzio dela kontutan harturik:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Bestetik y (x, y) = 0 denez, ondokoa beteko da:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Bigarren berdintza hau λ-z biderkatzen baldin badugu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \right) = 0 \quad \rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{dy}{dy} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{eta} \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{eta gainera } \varphi(x, y) = 0$$

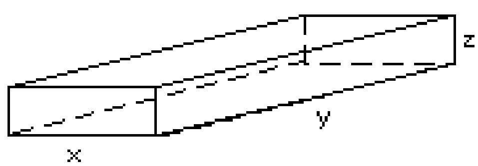
Hemen hiru ezezagun eta hiru ekuazio ditugu eta askatu egin beharko dira.

Baldintzak hauek dira:

F (xyλ) = f (x,y) + λφ (x, y) funtzio honen deribatu partziala x-ekiko, y-rekiko eta λ-rekiko berdin zero.

Adib.

Bilatu guztizko azalera 2a duten paralelepipedoetan bolumen maximoa zeinek duen?



V = x y z funtzio honen maximoa aurkitu behar dugu, baina

$$2xy + 2yz + 2xz = 2a \text{ izanik,}$$
$$xy + yz + xz = a$$

Aska dezakegu z, eta ordezkatu, baina orain ikusitako metodoaz ere egin dezakegu.

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + yz + xz - a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda(y + z) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda(x + z) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = yx + \lambda(y + x) = 0$$

$$yx + yz + xz = a$$

$yz + xz + xy + a = 0$ lehenengo ekuazioa x-ez, bigarrena y-z eta hirugarrena z-z biderkatuz:

$$x\,y\,z + \lambda(xy + xz) = 0$$
$$x\,y\,z + \lambda(xy + yz) = 0$$
$$x\,y\,z + \lambda(xz + yz) = 0 \text{ eta hirurak batuz.}$$

$$3\,xyz + \lambda(2xy + 2xz + 2yz) = 0 \qquad \lambda = \frac{-3xyz}{2a}$$
$$3\,xyz + \lambda(2a) = 0$$

$$yz + \left(\frac{-3xyz}{2a}\right)(y + z) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} yz\left(1 - \dfrac{3xy}{2a} - \dfrac{3xz}{2a}\right) = 0 \quad yz \neq 0 \text{ denez} \\ xz + \left(\dfrac{-3xyz}{2a}\right)(x + z) = 0 \\ xz\left(1 - \dfrac{3xy}{2a} - \dfrac{3yz}{2a}\right) = 0 \quad xz \neq 0 \text{ denez} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(1 - \dfrac{3xy}{2a} - \dfrac{3xz}{2a}\right) = 0 \\ \left(1 - \dfrac{3xy}{2a} - \dfrac{3yz}{2a}\right) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{kenketa eginez} \quad \frac{3z}{2a}(-x + y) = 0 \quad \rightarrow \quad x = y$$

Berdin eginez, ondokoa lortzen da $x = z \rightarrow$

$$1 - \frac{3x^2}{2a} - \frac{3x^2}{2a} = 0 \qquad 1 = \frac{3x^2}{a} \quad \rightarrow$$

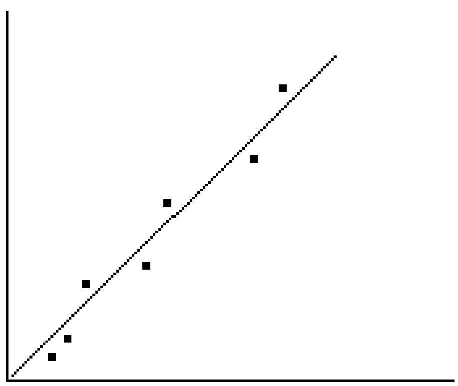
$$x = \sqrt{\frac{a}{3}} \qquad y = \sqrt{\frac{a}{3}} \qquad z = \sqrt{\frac{a}{3}}$$

1.19.– DATU ESPERIMENTALEN BIDEZ FUNTZIOA LORTZEA, KARRATU TXIKIENEN BIDEZ

Hau da, datu esperimentalak ditugunean funtzio bat lortzea edo x eta y bi aldagaien menpekotasuna lortzea.

x	x_1	x_2	. . .	x_n
y	y_1	y_2	. . .	y_n

adibidez:



Puntuak horrela kokatuta daudenean lehen mailako funtzioa izango dela pentsa dezakegu, esperimentalki erroreak egiten direla jakinik.

$y = \varphi\ (x)$ funtzioa lortzea nahi badugu, $\left(y_{i} \quad y_{(\varphi(x_{i}))}\right)^{2}$ honen batura minimoa egingo dugu.

$S = \Sigma\ (y_i - y)^2$ funtzio hau minimizatu.

$y = \varphi\ (x) = \varphi\ (x, a, b, ...)$ lehen mailako funtzioa izatea nahi badugu, $y = ax + b$ izango da eta a, b kalkulatu behar dugu.

$S = \Sigma\ (y_i - (a\ x_i + b))^2$ funtzioa a-rekiko eta b-rekiko deribatuz, hauek zero izan behar dute.

1.20.– KURBA BATEN PUNTU SINGULARRAK

Izan bedi F (x, y) = 0 kurba. $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ denean eta $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ denean, kurba honen ukitzailea definituta dago, baina $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ eta $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ batera direnean, kurba honen ukitzailea definituta dago, baina $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ eta $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ batera direnean, ukitzailea ez dago definitua; inderminatua da.

Definizioa:

Izan bedi F (x, y) = 0. Kurbako puntu baten $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ eta $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ betetzen direnean, kurbaren puntu singularra dela esango dugu. Kurba guztiek ez dute puntu singularrik.

Adib.

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ elipseak ez du puntu singularrik.

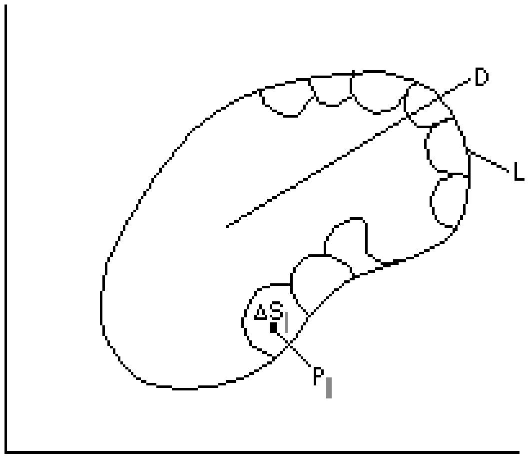
$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{2}$ $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{4}$ Deribatu partzialak (0, 0) puntuan anulatu egiten dira, baina hau ez da kurbako puntu bat.

2. INTEGRAL ANIZKOITZAK

2.1.- INTEGRAL BIKOITZA

Izan bedi D, OXY planoan L kurba batek mugatutako eremu itxi bat.

Izan bedi z = f (x, y) funtzio jarraia D eremuan. D eremua zatitu egingo dugu ΔS_i ... ΔS_n zatietan. Zati bakoitzean P_i bat aukeratuko dugu, eta $z_i = f(P_i)$ n balio edukiko ditugu.

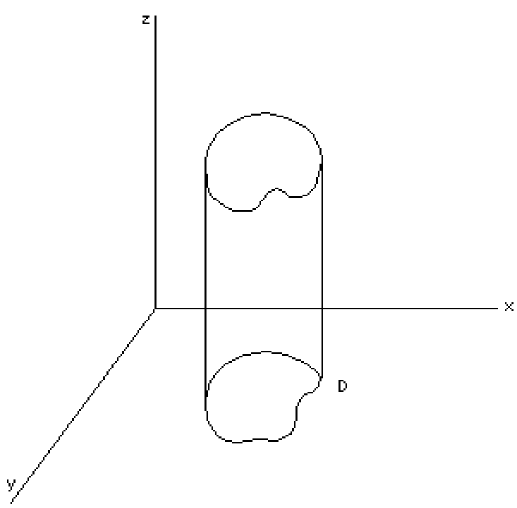


$$V_n = f(P_i)\,\Delta S_i + \ldots + f(P_n)\,\Delta S_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta S_i$$

Zilindro batzuen bolumenen batura da. $\Delta S_i \rightarrow 0$ eramaten badugu, $\forall$i-rentzat

$\lim\limits_{\substack{\Delta S_i \to 0 \\ n \to \infty}} f(P_i)\Delta S_i$ limite honi z = f (x,y) funtzioak D eremuan duen integral bikoitz deituko diogu.



D-ri integrazio-eremu deitzen zaio, eta integrala z = f (x,y) funtzioak z = 0 planoak eta z-rekiko paralelo den gainazalak mugatzen dute bolumena da.

Teorema:

$$\iint_D \left(f(xy) + g(xy)\right) ds = \iint_D f(xy)\,ds + \iint_D g(xy)\,ds$$

Teorema:

Edozein z = f (x,y) eta edozein a ∈ R zenbakirentzat

$$\iint_D a\,f(xy)\,ds = a\iint_D f(xy)\,ds$$

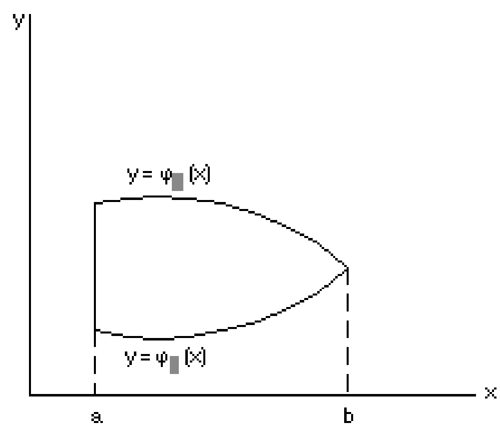
Teorema:

D eremua beste bi eremutan (D_1 eta D_2) zatitzen badugu, non Ebak($D_1 \cap D_2$) = 0

Beraz, $$\iint_D f(xy)\,ds = \iint_{D_1} f(xy)\,ds + \iint_{D_2} f(xy)\,ds$$

2.2.– INTEGRAL BIKOITZAREN KALKULUA

Izan bedi D OXY planoko eremu itxi bat. D eremua $y = \varphi_1(x)$ $y = \varphi_2(x)$ x = a eta x = b kurbek ixten dutela kontsideratuko dugu.



eta $y = \varphi_1(x)$ eta $\varphi_2(x)$ funtzio jarraiak [ab] tartean eta x norabidean edozein zuzenek bi puntutan bakarrik mozten duela. D eremuaren mugari begiratuko diogu.

$$I = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(xy)\,dy \right) dx$$

Integral honi integral berretu deitzen zaio.

Teorema:

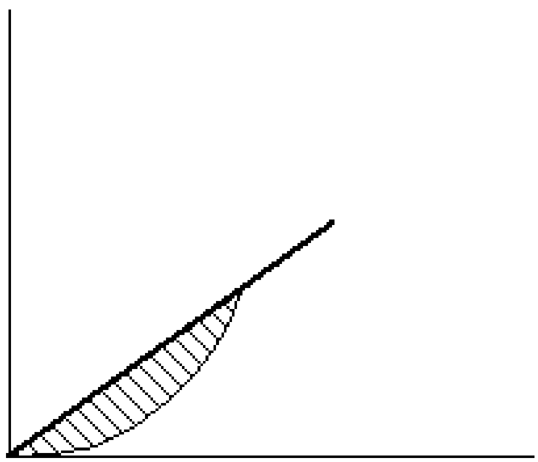
D eremuan z = f (x,y) integral bikoitza eta eremu berean integral berretua berdinak dira.

Azalpena:

Eremuak baldintzak betetzen ez dituenean zatitu egin beharko dugu, azpieremuak baldintzak bete arte.

Adib.

f (x) = $x^2 + y^2$ eta eremua y = x   y = x^2 x = 0 eta x = 1 kurbek mugatzen dutena.



$$\int_0^1\int_x^{x^2}\left(x^2+y^2\right)dy\,dx =$$

$$\int_0^1\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_x^{x^2}dx =$$

$$\int_0^1\left(x^4+\frac{x^6}{6}-x^3\frac{x^3}{3}\right)dx = \left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{42}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^4}{12}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{5}+\frac{1}{42}-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{-23}{210}$$

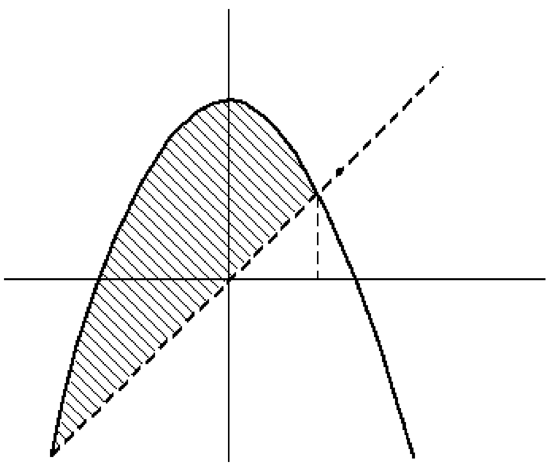
2.3.– AZALERA LAUNAREN KALKULUA

z = f (x,y) funtzioa f (x,y) =1 denean, $S = \sum_{i=1}^{n} 1\,\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$

$$S = \iint_D dx\,dy \qquad\qquad S = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx\,dy$$

Adib.

$y = 2 - x^2 \quad y = x$ kurbek mugatzen duten gainazalaren azalera kalkulatu:



$$x = 2 - x^2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}$$

Azalera hau izango da:

$$\int_{-2}^{1}\int_{x}^{2-x^2} dx\,dy = \int_{-2}^{1}\left(2 - x^2 - x\right)dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} =$$

$$= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2 = \frac{9}{2}$$

2.4.– INTEGRAL BIKOITZA KOORDENATU POLARRETAN

ρ, ω koordenatu polarreko sistema bat emanik, D eremua $\rho = \Phi_1(\omega)$ $\rho = \Phi_2(\omega)$ eta $\omega = \alpha$ $\omega = \beta$ kurbek mugatzen dutela kontsideratuko dugu, $\Phi_1(\omega) \leq \Phi_\omega(\omega)$ eta $z = F(\omega, \rho)$ funtzioa izanik. D eremua ΔS_i zatietan zatituko dugu.

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} F(P_k)\Delta S_i$$

$V = \iint_D F(\omega,\rho)\,ds$ eta integral hau kalkulatu beharko dugu.

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum F(P_{ik})\right)\Delta S_i$$

$$\Delta S_{ik} = \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \Delta\omega_K - \frac{1}{2}\rho_i^2\,\Delta\omega_K = \left(\rho_i + \frac{\Delta\rho_i}{2}\right)\Delta\rho_i\Delta\omega_k$$

$$\Delta S_{ik} = \rho_i\,\Delta\rho_i\,\Delta\omega_k$$

$$V_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_i F(\omega_k\,\rho_i)\rho_i\,\Delta\rho_i\,\Delta\omega_k\right) =$$

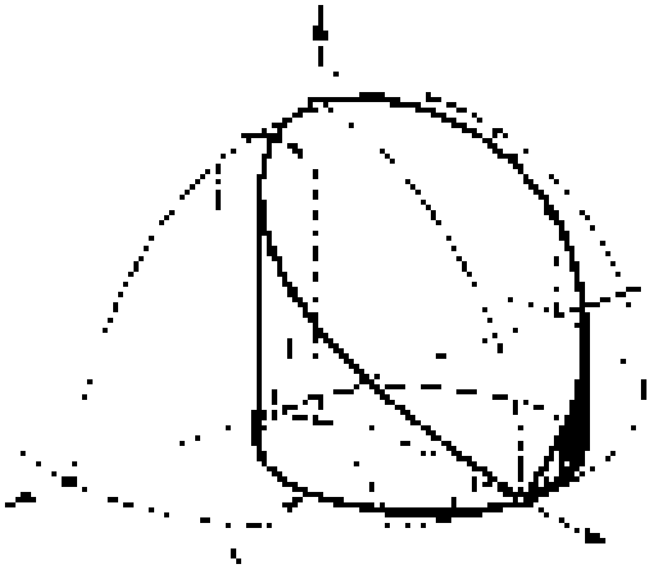
$$= V_n = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\sum^{n} F(\omega_k\,\rho_i)\rho_i\,\Delta\rho_i\right)}_{\parallel}\Delta\omega_k$$

$$\int_{\Phi_1(\omega)}^{\Phi_2(\omega)} F(\omega,\rho)\,\rho\,d\rho$$

$$V = \int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\Phi_1(\omega)}^{\Phi_2(\omega)} F(\omega,\rho)\,\rho\,d\rho\right)d\omega$$

Adib.

Kalkulatu $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ eta $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ gainazalek eta $z = 0$ planoak mugatzen duten bolumena.



Koordenatu polarretara pasatzen badugu:

$$x = \rho \cos \omega \qquad y = \rho \sin \omega$$

$$\rho^2 \cos^2\omega + \rho^2 \sin^2\omega - 2a\, \rho \sin\omega = 0$$

$$\rho^2 - (\cos 2a\, \rho \sin \omega) = 0$$

$$\rho = 0$$

$$\rho = 2a \sin \omega$$

$$z^2 + \rho^2 \cos^2\omega + \rho^2 \sin^2 \beta = 4a^2$$

$$z = \sqrt{4a^2 - \rho^2}$$

$$2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\sin\omega} \sqrt{4a^2 - \rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\omega$$

$$2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\sin\omega} \rho\sqrt{4a^2 - \rho^2}\, d\rho\, d\omega = 2\int_0^{\pi/2} -\left\lfloor 4a^2 - \rho^2 \right\rfloor_0^{2a\sin} d\omega =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{-\left[4a^2 - 4a^2 \sin^2\right]^{3/2} \left[4a^2\right]^{3/2} d}{3} = 2\int_0^{\pi/2} -\frac{8a^3}{3}\left(\cos^3 \omega - 1\right) d\omega =$$

$$\frac{16a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1 - \cos^3 \omega\right) d\omega = \frac{16a^3}{3} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{16a^3}{3}\int_0^{\pi/2} -\cos^3 \omega \, d\omega =$$

$$\frac{8a^3\pi}{3} - \frac{16a^3}{3}\left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{8a^3\pi}{3} - \frac{16a^3}{3}\left[1 - \frac{1}{3}\right] =$$

$$= \frac{8a^3\pi}{3} - \frac{32\,a^3}{9}$$

2.5.– INTEGRAL BIKOITZEKO ALDAGAI-ALDAKETA OROKORRA

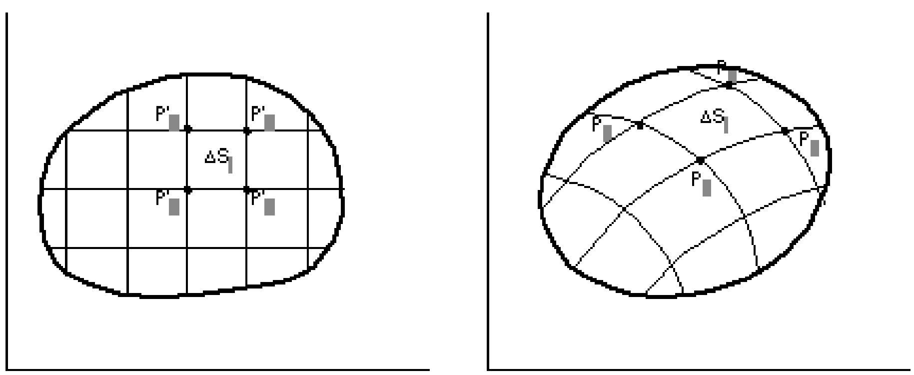
OXY plano batean D eremu bat dugula kontsideratuko dugu eta x eta y, u eta v-ren funtzio direla $x = \varphi_1\ (u,v)$ $y = \varphi_2\ (u,v)$. (u,v) balio bakoitzari x eta y bikote bat dagokio.

L, D eremuaren muga bada, L' izango da D' eremuaren muga. Ouv koordenatu berrietan.

$u = k_1$ $u = k_2$ konstanteen bidez eremua zatitzen badugu, OXY planoan zatidura kurbatua izango da.

$u = k_1$ kurba bat dagokio eta

$v = k_2$ beste kurba bat



$\Delta S' = \Delta u \, \Delta v$

$z = f(x,y)$	D eremuan funtzio jarraia bada
$z = f(u,v)$	D' eremuan jarraia izango da eta balio berdinak edukiko ditu.

$$F(u,v) = f[\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)]$$

Batura integralei begiratzen badiegu:

$$\Sigma f(x,y)\,\Delta S = \Sigma F(u,v)\,\Delta S$$

ΔS kalkulatuko dugu:

$\Delta S = (P_1 P_2 P_3 P_4)$ azalera

$P_1(x_1,y_1)$	$x_1 = \varphi_1(u,v)$	$y_1 = \varphi_2(u,v)$
$P_2(x_2,y_2)$	$x_2 = \varphi_1(u + \Delta\omega, v)$	$y_2 = \varphi_2(u + \Delta u, v)$
$P_3(x_3,y_3)$	$x_3 = \varphi_1(v + \Delta v)$	$y_3 = \varphi_2(u + \Delta u, v + \Delta v)$
$P_4(x_4,y_4)$	$x_4 = \varphi_1(u, v + \Delta v)$	$y_4 = \varphi_2(u, v + \Delta v)$

P_1 P_2 eta P_4 P_3 zuzen paraloeloak direla kontsideratuko dugu eta P_1 P_4 P_2 P_3 ere bai.

$$x_1 = \varphi_1(u,v) \qquad\qquad y_1 = \varphi_2(u,v)$$

$$x_2 = \varphi_1(u,v) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\Delta u \qquad\qquad y_2 = \varphi_2(u,v) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\Delta u$$

$$x_3 = \varphi_1(u,v) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\Delta v \qquad\qquad y_3 = \varphi_2(u,v) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\Delta v$$

$$x_4 = \varphi_1(u,v) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\Delta v \qquad\qquad y_4 = \varphi_2(u,v) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\Delta v$$

$$\Delta S \approx \left|(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\Delta v\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}\Delta v\right)\right|$$

$$= \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \Delta u \cdot \Delta v - \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \Delta u \cdot \Delta v \right| =$$

$$= \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right| \Delta u \cdot \Delta v =$$

$$= \left| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{matrix} \right| \Delta u \,.\, \Delta v = |I| \, \Delta u \,.\, \Delta v$$

$\rightarrow$ (Jakobiarra)

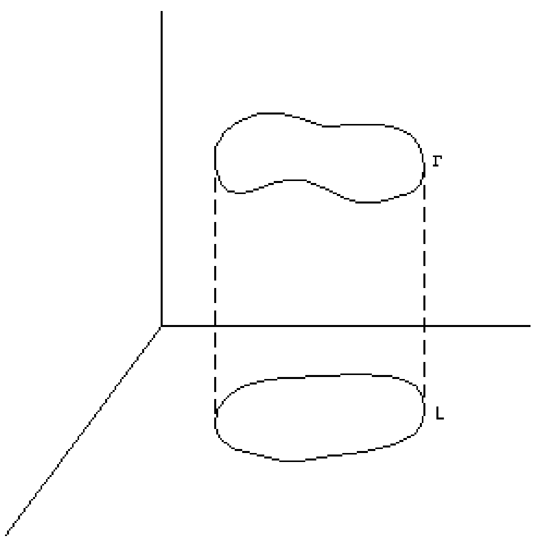
$$|I| = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta S'}$$

$$\lim \Sigma f(x, y) \Delta S \approx \lim \Sigma f(u, v) |I| \Delta S' \quad \rightarrow$$

$$\iint_{D'} f(x, y) \, dx \, dy \approx \iint_{D'} F(u, v) |I| \, du \, dv$$

2.6.– AZALEREN KALKULUA

Γ kurbak mugatzen duen gainazalaren azalera kalkulatu behar dugu.



Gainazala $z = f(x,y)$ funtzioak emango digu, $f(x,y)$ jarraia delarik eta bere deribatu partzialak ere bai.

Izan bedi L, Γ-ren proiekzioa OXY planoan eta D eremua, L-k mugatzen duen eremua. D eremuan ΔS_i zati bat hartzen badugu, ΔS_i-ko $P_i (\xi_i, n_i)$ puntu bati M_i puntu bat dagokio gainazalean $M_i [\xi_i, n_i, f(\xi_i, n_i)]$.

M_i puntutik gainazalera plano ukitzailearen ekuazioa:

$$z - zi = f'\, x_i\, (\xi_i, n_i)\, (x - \xi_i) + f'\, y\, (\xi_i, n_i)\, (y - \xi_i)$$

Plano honetan $\Delta\sigma_i$ eremu partzial bat aukeratuko dugu, non bere proiekzioa ΔS_i bait da.

$\sum_{i=1}^{n} \Delta \sigma_i$ baturaren limiteari $n \to \infty$ denean, gainazal horren azalera deituko diogu.

$$\sigma = \lim_{\Delta\sigma_i \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta \sigma_i$$

eta orain kalkulatu egingo dugu azalera hau: σ_i deituko diogu plano ukitzaileak eta OXY planoak osatzen duten angeluari. Beraz:

$$\Delta S_i = \Delta \sigma_i \cos\sigma_i \qquad \Delta\sigma_i = \frac{\Delta S_i}{\cos\sigma_i}$$

$$\cos\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x (\xi_i\, n_i) + f'^2_y (\xi_i\, n_i)}} \quad \text{Beraz:}$$

$$\Delta\sigma_i = \sqrt{1 + f'^2_x (\xi_i\, n_i) + f'^2_y (\xi_i\, n_i)}\, \Delta S_i$$

$$\sigma = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x (\xi_i\, n_i) + f'^2_y (\xi_i\, n_i)}\, \Delta S_i$$

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

Ardatzak alda ditzakegu $x = f(z,y)$

Horrela D eremua OZY planoan egongo da, eta

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}\, dy\,dz, \quad \text{edo era berean:}$$

y = f (x,z) funtzioarekin

Adib.

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ esferaren azalera

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

Integrazio-eremua edo esferaren OXY planorako proiekzioa $x^2+y^2 \leq R^2$ zirkulua da. Beraz:

$$\frac{1}{4}\sigma = \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dy \right) dx$$

Integral hau nahikoa zaila denez, era polarrera pasa dezakegu:

$$z^2 = R^2 - \rho^2 \qquad\qquad z = \sqrt{R^2 - \rho^2}$$

$$\frac{1}{8}\sigma = \int_0^{\pi/2}\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\, \rho\, d\rho\, d\omega = \int_0^{\pi/2}\int_0^R \frac{-2R\rho}{2\sqrt{R^2 - \rho^2}}\, d\rho\, d\omega$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-R\sqrt{R^2 - \rho^2} \right]_0^R d\omega$$

$$\frac{1}{8}\sigma = \int_0^{\pi/2} +R^2 d\omega = \frac{R^2\pi}{2} \qquad\qquad \sigma = 4\pi R^2$$

2.7.– DENTSITEATEA ETA INTEGRAL BIKOITZA

Materia bat D eremuan honela dagoela pentsatuko dugu. D eremuko unitate bakoitzean m_i materia-kantitatea dago.

ΔS_i, D-ren azpieremu bat hartuko dugu. Δm_i berari dagokion marra bada, $\Delta m_i/\Delta S_i$-ri gainazaleko dentsitate-unitate deitzen zaio. ΔS txikiagotzen badugu, $\lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S}$ begiratuko dugu. Limite hau existitzen bada, P-ren arabera egongo da:

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = f(P) = f(x,y)$$

Orain alderantziz kontsideratuko dugu: z = f (x,y) funtzioak puntu bakoitzeko dentsitatea adierazten duela. D eremuko masa totala jakitea nahi badugu, D eremua zatitu egingo dugu eta zati bakoitzean P_i puntu bat aukeratuko dugu. Beraz, f (P_i). ΔS_i-k, ΔS_i-ko materia totala adieraziko du eta $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i) = \Delta S_i$ D eremuko materiaren hurbilketa izango da. Eta

$\lim\limits_{\Delta S_i \to 0} f(P_i)\,\Delta S_i$ materia-kantitate osoa. Hortaz,

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ da materia-kantitate osoa.

2.8.– GAINAZAL LAUN BATEN INERTZI MOMENTUA

Badakigu m masako P puntu baten intertzi momentua 0 puntuarekiko $I = m\,r^2$ dela, non r OM distantzia den.

m_1 ... m_n puntu-sistema baten inertzi momentua, puntu guztien inertzi momentuen batura da.

$$I = \sum m_i r_i^2$$

D eremua zatitzen badugu, ΔS_i eta ΔS_i bakoitzean P puntu bat aukeratzen badugu eta dentsitatea 1 dela eta P_i puntuaren osagaiak (ξ_i,n_i) direla kontutan hartuz:

$$\Delta I_i = \left(\xi_i^2 + n_i^2\right)\Delta S_i \quad \text{eta} \quad \Rightarrow$$

$$I_o = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$$

$$I_{xx} = \iint_D y^2 dx\, dy \qquad\qquad I_{yy} = \iint_D x^2 dx\, dy$$

Adib.

Kalkulatu zirkuluaren inertzi momentua zentruarekiko.

$$x^2 + y^2 = 12^2$$

$I_o = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$ Polarretara pasatuz, $x^2 + y^2 = R^2$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^2 \cdot \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\theta = \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{R^4 \pi}{2}$$

Azalera unitateko dentsitatea uniformea ez denean, f (x,y) funtzio bat izango da, eta ΔS_i-ren masa f (ξ_i, n_i) ΔS_i izango da, eta

$I_o = \iint_D f(xy)\left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$ Era berean

$$I_{xx} = \iint y^2 \varphi(xy)\, dx\, dy \quad \text{eta} \quad I_{yy} = \iint x^2 \gamma(xy)\, dx\, dy$$

Beste edozein zuzenekiko inertzi momentua kalkulatzea nahi badugu:

$\iint_D \sigma^2 \varphi(xy)\, dx\, dy$ non σ^2 puntu bakoitzaren eta zuzenaren arteko distantzia den.

2.9.– GAINAZAL LAUN BATEN GRABITATE-ZENTRUAREN KOORDENATUAK

Fisikatik dakigunez, P_1 ... P_n puntuen grabitate-zentrua:

$$X_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} \qquad\qquad Y_c = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}$$

non m_i P_i-ren masa den.

D eremu baten grabitate-zentrua kalkulatzea nahi badugu, zatitu egingo dugu: ΔS_1 ... ΔS_n.

ΔS_i bakoitzean masatzat f (ξ_i,n_i) ΔS_i har dezakegu non f (ξ_i,n_i), P_i-ren masa den. Beraz, D-ren grabitate-zentruaren hurbilketa bat hau izango da:

$$X_c = \frac{\sum f(\xi_i, n_i)\xi_i \,\Delta S_i}{\sum f(\xi_i, n_i)\Delta S_i}$$

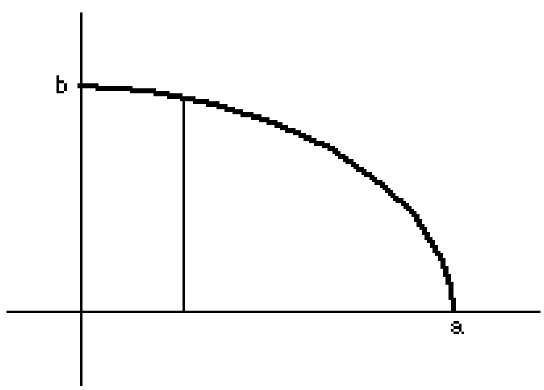
$$Y_c = \frac{\sum f(\xi_i, n_i)n_i \,\Delta S_i}{\sum f(\xi_i, n_i)\Delta S_i}$$

Limiteak hartuz $X_c = \dfrac{\iint f(x,y)\, x\, dx\, dy}{\iint f(x,y)\, dx\, dy}$ $\qquad Y_c = \dfrac{\iint f(x,y)\, y\, dx\, dy}{\iint f(x,y)\, dx\, dy}$

Masa uniformea denean $X_c = \dfrac{\iint x\, dx\, dy}{\iint dx\, dy}$ $\qquad Y_c = \dfrac{\iint y\, dx\, dy}{\iint dx\, dy}$

Adib.

Bilatu elipsearen laurdenaren grabitate-zentrua:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\int_0^a \int^{b/a\sqrt{a^2-x^2}} x\, dy\, dx}{\int_0^a \int^{b/a\sqrt{a^2-x^2}} dy\, dx} = \frac{\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, x\, dx}{\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx}$$

$$= \frac{\frac{b}{a}\frac{1}{3}\left[-\left(a^2-x^2\right)^{3/2}\right]_0^a}{\frac{\pi ab}{4}} = \frac{\frac{1}{3}\frac{b}{a}a^3}{\frac{\pi ab}{4}} =$$

$$= \frac{b\,a^2\,4}{3\pi\,a\,b} = \frac{4\pi}{3\pi}$$

$$Y_c = \frac{\int_0^a\int^{b/a\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\,dx}{\frac{\pi\,a\,b}{4}} = \frac{\int_0^a \frac{b^2}{a^2}\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx}{\frac{\pi\,a\,b}{4}}$$

$$= \frac{\frac{b^2}{2a^2}}{\frac{\pi\,a\,b}{4}}\int_0^a a^2 - x^2 dx = \frac{2b}{\pi\,a^3}\left[a^3 - \frac{a^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{4\,b a^3}{\pi\,3 a^3} = \frac{4\,b}{3\pi}$$

2.10.– INTEGRAL HIRUKOITZA

Espazioan V bolumena hartuko dugu. S gainazalak mugatua dago. f(x,y,z) puntu honetako dentsitatea dela kontsideratuko dugu.

V bolumena zatitzen badugu, ΔV_i i = 1 ... n eta ΔV_i bakoitzean P_i puntu bat hartuz Σ f (P_i) ΔV_i batura egin dezakegu. Zatiaren bolumena txikiagotuz, beste batura bat lortuko dugu eta

$$\lim_{\Delta V_i \to 0} \sum f(P_i)\,\Delta V_i$$

V eremuko integral hirukoitza deituko diogu.

$$\iiint_D f(x,y,z)dV$$

f (x,y,z) P puntuko bolumen-unitateko dentsitatea bada, integral hirukoitzak bolumen horren masa adieraziko du.

2.11.– INTEGRAL HIRUKOITZAREN KALKULUA

V eremuaren goi-muga Z = A (x,y) dela kontsideratuko dugu eta behe-muga Z = B (x,y) eta V-ren OXY planoarekiko proiekzioa D eremua eta bere mugak hauek:

$Y = \varphi_1 (x)$ $\qquad y = \varphi_2 (x)$ $\qquad x = a$ $\qquad x = b$

Hirugarren ordenako integral berretua defini dezakegu:

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{A(xy)}^{A(xy)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

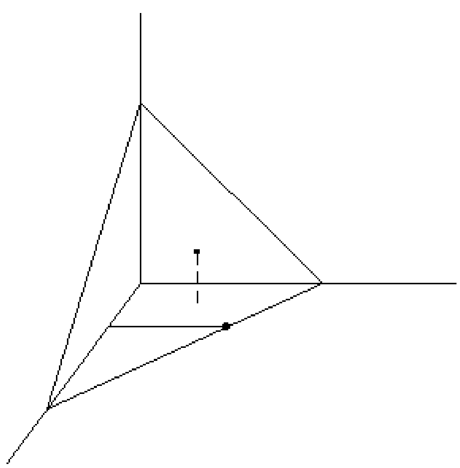
Bestetik V eremuan zatiketa kuboen bidez egiten badugu eta hiru limite egin, integral berretuaren berdina da:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{A(xy)}^{A(xy)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Adib.

Kalkulatu f (x,y,z) = xyz-ren integrala hurrengo eremuan:

$x = 0$ $\qquad y = 0$ $\qquad z = 0$ $\qquad x + y + z = 1$



$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz\,dz\,dy\,dx =$$

$$x + y = 1$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} xy \left[\frac{z^2}{3} \right]_0^{1-x-y} dy\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} xy (1 - x - y)^2 dy\, dx =$$

$$= \ldots = \int_0^1 \frac{x}{24} (1 - x)^4 dx = \frac{1}{720}$$

Propietatea:

V eremua zati daiteke V_1 ... V_n azpieremutan eta V eremuan integrala beste integralen batura izango da.

$$\iiint_V f\, dv = \iiint_{V_1} f(x, y, z)\, dV + \ldots + \iiint_{V_n} f(x, y, z)\, dV$$

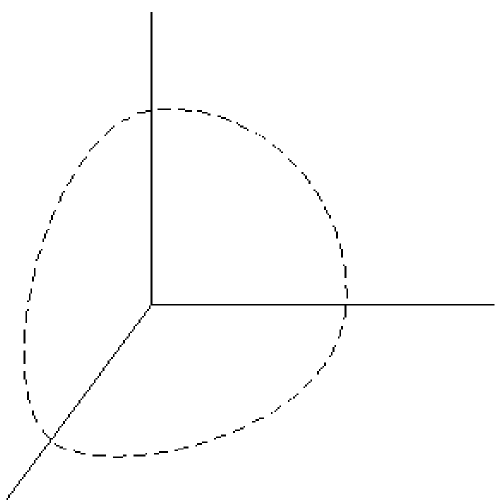
Propietatea:

f (x,y,z) = 1 denean integral hirukoitzak V eremuan bolumena ematen digu.

Adib.

Kalkulatu esfera baten bolumena

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$



$$\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dz\, dy\, dx$$

$$= 2\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy\, dx$$

Aldagai-aldaketa bat egingo dugu

$$\sqrt{a^2 - x^2}\sin t = y \quad \Rightarrow \quad dy = \sqrt{a^2 - x^2}\cos t\, dt$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad t = -\frac{\pi}{2} \quad y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad t = \frac{\pi}{2}$$

$$2\int_{-a}^{a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 - x^2 - \left(a^2 - x^2\right)\sin^2 t} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \cos t\; dt\, dx =$$

$$= 2\int_{-a}^{a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(a^2 - x^2\right)\cos^2 t\; dt\, dx = 2\int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos^2 t}{2}\, dt\, dx$$

$$2\int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right)\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin^2 t}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} dx =$$

$$= 2\int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right)\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{4}\frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi}{4}\right] dx =$$

$$= 2\int_{-a}^{a} \left(a^2 - x^2\right)\frac{\pi}{2}\, dx = \pi\int_{-a}^{a} a^2 - x^2\, dx = \pi\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} =$$

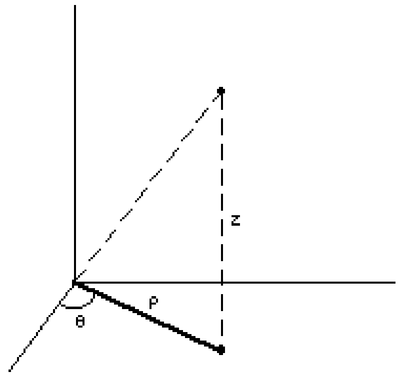
$$= \pi\left[a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3}\right] = \pi\left(2a^3 - 2\frac{a^3}{3}\right) = \frac{4a^3\pi}{3}$$

2.12.– INTEGRAL HIRUKOITZEKO ALDAGAI-ALDAKETA

Lehenengo bi kasu berezi ikusiko ditugu eta gero aladagai-aldaketa orokorra.

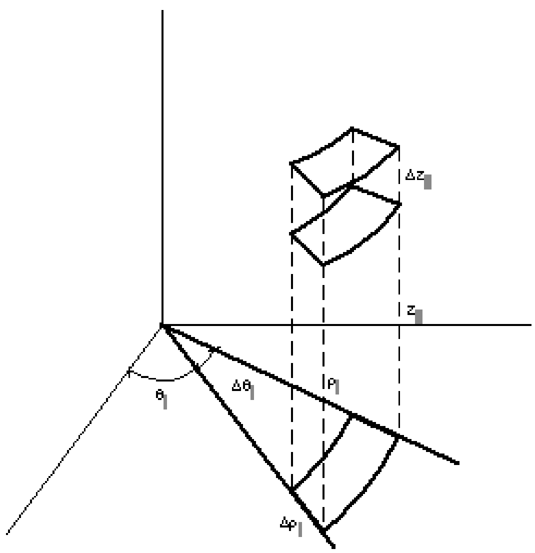
a) Koordenatu zilindrikoak

Koordenatu zilindrikoetan P puntuaren posizioa adierazteko hiru balio emango ditugu: ρ, θ, z non eta θ x eta y-ren koordenatu polarrak eta z P puntutik OXY planora dagoen distantzia bait dira.



V eremua koordenatu hauetan zatitzen badugu:

$\theta = \theta_i$ $\rho = \rho_j$ $z = z_k$

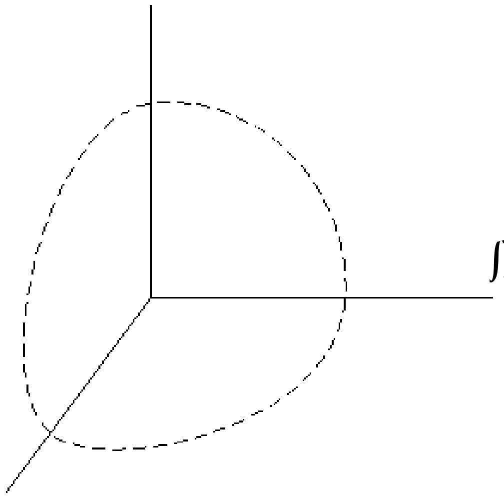


ΔV_i oinarriaren azalera bider altuera da. Oinarriaren azalera $\rho\Delta\theta\ \Delta\rho$ da eta altuera Δz_k. Beraz, $\Delta V_i = \rho\ \Delta\ \rho\ \Delta\theta\ \Delta z_k$ eta

$$I = \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_V F(\theta,\rho Z)\,d\theta\,d\rho\,dz$$

Adib.

Bilatu R erradioa eta zentrua koordenatu-jatorrian duen esferaerdi baten masa, puntu bakoitzean dentsitatea, puntu hori eta oinarrien arteko distantziarekiko proportzionala dela jakinez.



$$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} K\,z\,dy\,dx$$

Koordenatu zilindrikotara pasatuz:

$$z=\sqrt{a^2-\rho^2}$$

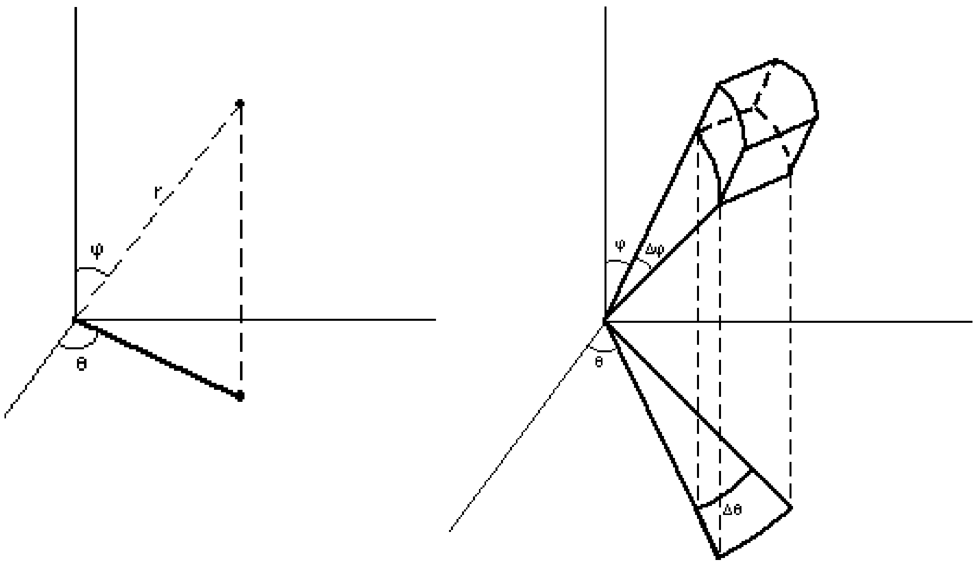
$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-\rho^2}} K\,z\,dz\,d\rho\,d\omega=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{a}\left[K\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}} d\rho\,d\omega=$$

$$=\frac{K}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{a} a^2-\rho^2\,\rho\,d\rho\,d\omega=\frac{K}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[a^2\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^a d\omega$$

$$=\frac{K}{2}\cdot\frac{a^4}{4}\int_{-\pi}^{\pi} d\omega=\frac{a\cdot K}{2\cdot 4}2\pi=\frac{a^4K}{4}\pi$$

b) Koordenatu esferikoak

Koordenatu esferikoetan P puntu baten koordenatuak (θ,r,φ) hiru zenbaki hauekin adieraziko ditugu. r, puntua eta jatorriaren arteko distantzia da; θ, P-ren proiekzioak ardatzarekin osatzen duen angelua eta φ, P-k z ardatzarekin osatzen duen angelua.



Δr, $r\Delta\varphi$, $r \sin \varphi \ \Delta\theta$, ertzak dituen paralelepipedo bat da kubo diferentzial hori.

$$\Delta V = r^2 \sin \varphi \ \Delta r \ \Delta\theta \ \Delta\varphi$$

$$\iiint_D dV = \iiint_D r^2 \sin\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

eta koordenatu cartesiarren adierazpen esferikoak hauek dira:

$$x = r \sin \varphi \cos \theta \qquad y = r \sin \varphi \sin \theta \qquad z = r \cos \varphi$$

c) Aldagai-aldaketa orokorra

$$x = \varphi_1 (t,u,v) \qquad y = \varphi_2 (t,u,v) \qquad z = \varphi_3 (t,u,v)$$

aldagai-aldaketa daukagunean, eta bi aldagai genituenean bezala.

$$\lim_{\Delta V' \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta V'} = |I|$$

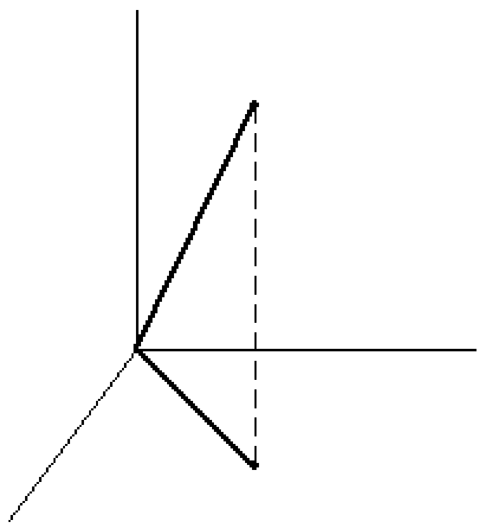
non $\quad I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial t} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix}$

eta koordenatu zilindrikoek eta esferikoek hau betetzen dute.

2.13.– INERTZI MOMENTUA ETA GRABITATE-ZENTRUA

a) Inertzi momentua

Gorputz baten inertzi momentua ardatz batekiko kalkulatzea nahi dugunean, gorputz honen puntutik ardatzera dagoen distantzia aurkitu beharko dugu.



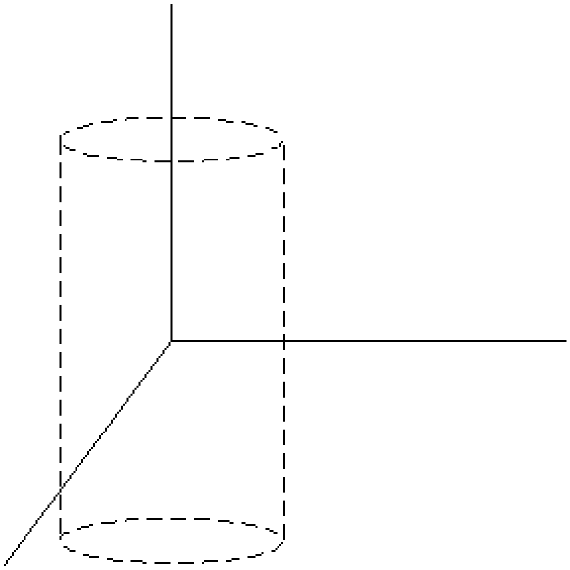
$$I_{zzz} = \iiint \left(x^2 + y^2\right)\varphi(xyz)\,dV$$

$$I_{xxx} = \iiint \left(y^2 + z^2\right)\varphi(xyz)\,dV$$

$$I_{yyy} = \iiint \left(x^2 + z^2\right)\varphi(xyz)\,dV$$

Adib.

Kalkulatu zilindro baten inertzi momentua bere erdiko ebakidurako diametro batekiko, bere altuera 2h eta erradioa r direnean eta dentsitatea φ_o izanik.



$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$I_{yy} = \iiint \left(x^2 + z^2\right)\varphi_o \, dV =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^R \int_{-h}^{h} \left(\rho^2 \cos^2 \omega + z^2\right)\varphi_o \, \rho dz \, d\rho \, d\omega =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^R \left(\rho^2 \cos^2 \omega \, 2h + \frac{2h^3}{3}\right) \varphi_o \, \rho dz \, d\rho \, d\omega =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\rho^4}{4}\cos^2\omega \;\; 2h + \frac{2h^3}{3}\rho\right]_0^R \varphi_o \, d\omega =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{R^4}{4}\cos^2\omega \;\; 2h + \frac{2h^3 \cdot R^2}{3 \cdot 2}\right] \varphi_o \, d\omega =$$

$$\left[2h\frac{R^4}{4}\frac{1}{2} + \left(\omega + \frac{\sin 2\omega}{2}\right) + \frac{2h^3 \cdot R^2}{3 \cdot 2}\omega\right]_{-\pi}^{\pi} \varphi_o =$$

$$\left[\frac{2hR^4}{4 \cdot 2} \cdot 2\pi + \frac{2h^3 R^2}{3 \cdot 2} 2\pi\right]\varphi_o = hR^2 \pi \varphi_o \left(\frac{R^2}{2} + \frac{2h^2}{3}\right)$$

b) Grabitate-zentruaren koordenatuak

Gainazal launetan egiten genuen bezala, bolumen baten grabitate--zentrua kalkulatzeko:

$$X_c = \frac{\iiint_V x\,\varphi(xyz)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V \varphi(xyz)\,dx\,dy\,dz}$$

$$Y_c = \frac{\iiint_V y\,\varphi(xyz)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \varphi(xyz)\,dx\,dy\,dz}$$

$$Z_c = \frac{\iiint_V z\,\varphi(xyz)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \varphi(xyz)\,dx\,dy\,dz}$$

Adib.

Kalkulatu esferaerdi baten grabitate-zentrua d dentsitateakoa dela jakinik.

$$X_c = \frac{\iiint_V x\,d\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V dx\,dy\,dz} \qquad Y_c = \frac{\iiint_V y\,d\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V dx\,dy\,dz}$$

$$Z_c = \frac{\iiint_V z\,d\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V dx\,dy\,dz}$$

$$X_c = \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^R\int_0^{\pi/2}\left(r\cos\sin r^2\sin\right)d\varphi\,d\tau\,d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^R\int_0^{\pi/2} r^2\sin d\,d\,d} = \frac{0}{\frac{2}{3}\pi R^3} = 0$$

$$Y_c = \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^R\int_0^{\pi/2}\left(r\sin\omega\sin\varphi\, r^2\sin\varphi\right)d\varphi\,d\tau\,d\omega}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{0}{\frac{2}{3}\pi R^3} = 0$$

$$Z_c = \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^R\int_0^{\pi/2}\left(r\cos\varphi\; r^2\sin\varphi\right)d\varphi\,d\tau\,d\omega}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3R}{8}$$

3. EKUAZIOA DIFERENTZIALAK

3.1.- DEFINIZIOAK

Definizioa:

x, y eta y-ren deribatuak x-ekiko lotzen dituen ekuazioari ekuazio diferentzial deritzo.

$$F\ (x, y, y' \dots y^n) = 0$$

Aldagai aske bat baino gehiago dagoenean, deribatu partzialeko ekuazioa da, eta aldagai aske bakarra dagoenean, ekuazio diferentzial arrunta.

Definizioa:

Maila handiena duen deribatuaren mailari, ekuazio diferentzialaren maila esaten zaio.

Adib.

$$y' - 5xy = 0$$

1. mailako ekuazio diferentziala da eta $y''' - 5xy' + y = 0$ 3. mailako ekuazio diferentziala.

Definizioa:

y = f (x) funtzioak, ekuazioan ordezkatutakoan identitate bat ematen badu, ekuazio diferentzialaren emaitza edo integrala dela esango dugu.

Adib.

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ekuazioan $y = \sin x$ emaitza da
$y = \cos x$ ere bai

3.2.– LEHEN MAILAKO EKUAZIO DIFERENTZIALAK

Lehen mailako ekuazio diferentzial batek itxura hau du:

$$F\ (x, y, y') = 0$$

y' aska daitekeenean ondoko eran idatz daiteke.

$$y' = f\ (x, y)$$

Ekuazio honentzat hurrengo teorema baliagarria da.

Teorema:

$y' = f\ (x,y)$ ekuazioan $f\ (x,y)$ eta $\partial f/\partial y$ D eremu batean jarraiak badira eta $(x_o,y_o) \in D$, emaitza bakarra dago $y = \varphi\ (x)$ puntu horretatik pasatzen dena:

Definizioa:

$y = \varphi\ (x, c)$ funtzioari, $F\ (x,y,y') = 0$ ekuazio diferentzialaren emaitza orokor deitzen zaio.

c bakoitzarentzat funtzio desberdina edukiko dugu eta (x_o,y_o) aurre-baldintzentzat c_o bat egongo da,

$y_o = \varphi\ (x_o, c_o)$ betetzen duena
$y = \varphi\ (x_o, c_o)$-ri, emaitza berezi deritzo.

3.3.– LEHEN MAILAKO EKUAZIO DIFERENTZIALEN ESANAHI GEOMETRIKOA

$y' = f\ (x,y)$ ekuazio diferentziala hartuz eta edozein (x_o,y_o)-rentzat bere emaitza orokorra $y = \varphi\ (x,c)$ delarik, ekuazio diferentzialak deribatuaren balioa ematen digu. Hori emaitzaren ukitzailearen malda da, hain zuzen. Ekuazio diferentzialak norabide batzuk ematen dizkigula esan nahi du horrek, eta norabide hauen multzoari norabide-eremu deitzen zaio. Puntu bakoitzean egin behar duguna kurba bat bilatzea da, bere ukitzailea eta norabide-eremuko balioa berdinak izan daitezen.

Nola aurkitu kurba-sorta baten ekuazio diferentziala?

$y = \varphi(x,c)$ funtzioa edukiko dugu. Bere deribatua x-ekiko hau da:

$y' = \varphi'_x(x,c)$. Edozein punturentzat aurki dezakegu. Berari dagokion c konstantea ordezkatuz, x eta y-ren funtzio bat edukiko dugu.

Adib.

$y = c\,x^2$ parabolak

$$\frac{dy}{dx} = 2cx \qquad c = \frac{Y}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x^2}x = \boxed{2\frac{y}{x}} \qquad x \neq 0$$

3.4.– EKUAZIO DIFERENTZIAL BANAGARRIAK

$y' = f(x,y)$ ekuazio diferentziala banagarria dela, $f(x,y) = f_1(x) \,.\, f_2(y)$ ipini dezakegunean esango dugu. Beraz:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y) \qquad \frac{1}{f_2(y)}dy = f_1(x)dx$$

hau bi diferentzialen berdintza da eta

$$\int \frac{dx}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C$$

Adib.

1) $x\,dx + y\,dy = 0$ $\qquad$ $x\,dx = -y\,dy$

$\frac{x^2}{2} + c = \frac{-y^2}{2}$ $\qquad$ $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c = 0$

$x^2 + y^2 = K$ Hauek zirkunferentziak dira

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ hau ipin dezakegu:

$\frac{dx}{y} = -\frac{dx}{x}$ bezala, banagarria da.

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x} + c$$

$$\ln y = -\ln x + c - \ln x + \ln k = \ln \frac{k}{x} \qquad \boxed{y = \frac{k}{x}}$$

3) $(1 + x)\,y\,dx + (1 - y)\,x\,dy = 0$

$(1 + x)\,y\,dx = (y - 1)\,x\,dy$

$\frac{(1 + x)}{x} dx = \frac{y - 1}{y} dy$

$x + \ln x = y - \ln y + c$

$\boxed{\ln |x.y| + x - y = c}$

4) Radioaren desintegrazioan abiadura masarekiko proportzionala dela jakinik, kalkulatu masaren aldaketa denborarekiko $t = 0$ denean, m_o masa dugula jakinik.

$\frac{dm}{dt} = K \cdot m$ $\qquad$ $\frac{dm}{m} = K\,dt$ $\qquad$ $\ln m = K \,.\, t + c$

$m = c\,e^{Kt}$ $\qquad$ $t = 0$ $\qquad$ $m = m_o$ $\qquad \rightarrow \qquad$ $m = m_o\,e^{Kt}$

K esperimentalki bilatzen da.

3.5.– LEHEN MAILAKO EKUAZIO HOMOGENOAK

Definizioa:

f (x,y) 0 mailako homogenoa denean, ekuazio diferentzial bat homogenoa dela esango dugu. Orokorki, f (x,y) n mailako homogeno dela esaten da f (tx, ty) = t^n . f (x,y) betetzen denean edozein t-rentzat.

$$\lambda = \frac{1}{x} \text{ eginez } \quad y' = f(x,y) = f(tx,ty) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

$$u = \frac{y}{x} \qquad \text{eginez, } y = u\,x$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \;\Rightarrow\; u + x\frac{du}{dx} = f(1,u) \;\Rightarrow\; \frac{x\,du}{dx} = f(1,u) - u$$

eta hau aldagai banagarriko ekuazioa da.

Adib.

1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2 \quad y^2}$

$$f(tx,ty) = \frac{tx\,ty}{t^2x^2 - t^2y^2} = \frac{x\,y}{x^2 - y^2} \qquad \text{Beraz homogenoa da.}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{x\,u\,x}{x^2 - u^2x^2} = \frac{u}{1-u^2}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1-u^2} - u = \frac{u^3}{1-u^2} \qquad \frac{1-u^2}{u^3}du = \frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right)du = \int\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln u = \ln x + K_1$$

$$-\frac{1}{2u^2} = \ln x + \ln u + \ln K$$

$$-\frac{1}{2u^2} = \ln x\, u K$$

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln y K$$

2) $(2x + 3y)\, dx + (x - 2y)\, dy = 0$

$(2x + 3y)\, dx = (2y - x)\, dy$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y}{2y - x}$$

$$\frac{2tx + 3ty}{2ty - tx} = \frac{2x + 3y}{2y - x} \qquad \text{Beraz}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2x + 3ux}{2ux - x} = \frac{2 + 3u}{2u - 1}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2 + 3u}{2u - 1} - u = \frac{2 + 4u + 2u^2}{2u - 1}$$

$$\frac{2u - 1du}{2 + 4u + 2u^2} = \frac{dx}{x} \qquad \frac{1}{2}\int\frac{2u - 1}{u^2 + 2u + 1}du = \int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2u - 1}{(u + 1)^2}du = \int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{A}{u + 1} + \frac{B}{(u + 1)^2} = \frac{2u - 1}{(u + 1)^2}$$

$(u + 1)\, A + B = 2u - 1$

$n = -1 \quad n = 0 \quad B = -3 \quad A - 3 = -1 \quad A = 2$

$$\ln(u + 1) + \frac{3}{u + 1} = \ln x + K_1$$

$$\frac{3}{u + 1} = \ln\frac{xK}{u + 1} \qquad \frac{3x}{y + x} = \ln\frac{x^2 \cdot K}{y + x}$$

3.6.– HOMOGENO BIHUR DAITEZKEEN EKUAZIO DIFERENTZIALAK

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$$

ekuazio diferentzialean c eta c_1 zero badira, homogenoa da, baina c eta $c_1 \neq 0$ bada, aldaketa batzuk eginez ekuazio hori, homogeno bihur daiteke. Horretarako:

$x = x_1 + h \quad y = y_1 + k$ aldagai-aldaketa egingo dugu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} \cdot \ \text{Beraz,} \ \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1}$$

eta h eta k aukeratuko ditugu:

$$\left.\begin{array}{l} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{ekuazioak betetzen dituztenak.}$$

Hortaz, ekuazio homogenoa da:

Bada ekuazio hauek emaitzarik ez duteneko kasu bat:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{denean, baina orduan:}$$

$a_1 = \lambda a \quad b_1 = \lambda b$ ipin dezakegu.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1} \qquad z = ax + by \ \text{eginez:}$$

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right)$$

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z + c}{\lambda z + c_1} \qquad \text{eta hau banagarria da.}$$

Adib.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-3}{x-y-1}$$

$x=x_1+u$

$y=y_1+k$ eginez

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1+u+k-3}{x_1-y_1+u-k-1}\quad\Rightarrow$$

$u+k-3=0$

$u-k-1=0$

$2u=4 \qquad u=2$

$\qquad\qquad k=1$

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}$$ eta hau homogenoa da

$$u+x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{x_1+ux_1}{x_1-ux_1}=\frac{1+u}{1-u}$$

$$x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1+u}{1-u}-u=\frac{1+u^2}{1-u}$$

$$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx_1}{x_1}$$

$$\int\left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{u}{1+u^2}\right)du=\int\frac{dx_1}{x_1}$$

$$\arctan u-\frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)=\ln x_1+k_1$$

$$\arctan\frac{y-1}{x-2}=\ln(x-2)k\sqrt{1-\left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2}=\ln k\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$$

Adib.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y-1}{4x+2y-5}$$ berdin eginez

$x=x_1+h \qquad y=y_1+k$

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{2x_1+y_1+2h+k-1}{4x_1+2y_1+4h+2k+5}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2h + k = 1 \\ 4h + 2k = -5 \end{array}\right\}$$ ekuazio-sistema honek ez du emaitzarik, baina

$a_1 = 2a \quad b_1 = 2b$ Beraz: $z = 2x + y$ eginez

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 1}{2(2x + y) + 5} = \frac{z - 1}{2z + 5} \qquad \frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} - 2 = \frac{z - 1}{2z + 5} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z - 1 + 4z + 10}{2z + 5} = \frac{5z + 9}{2z + 5}$$

$$\frac{2z + 5}{5z + 9} dz = dx$$

$$2\int \frac{z}{5z + 9} dz + \int \frac{5dz}{5z + 9} = x + k$$

$$\frac{2}{5} z + \frac{7}{25} \ln(5z + 9) = x + k$$

$$\frac{2}{5}(2x + y) + \frac{7}{25}\lfloor 5(2x + y) + 9 \rfloor = x + k$$

3.7.– EKUAZIO DIFERENTZIAL OSOAK

M (x,y) dx + N (x, y) dy = 0 ekuazio diferentziala osoa dela, M (x,y) eta N (x, y) funtzioak jarraiak eta deribagarriak direnean eta $\frac{\partial M}{y} = \frac{\partial N}{x}$ betetzen dutenean esango dugu.

Ekuazio hori u (x,y) = c-ren diferentziala dela kontsideratuko dugu. Beraz, M (x, y) dx + N (x, y) dy = du =

$$= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad \text{eta} \quad M = \frac{\partial u}{\partial x} \quad N = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \;\; \text{denez} \;\; u = \int_{x_o}^{x} f(x,y)dx + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{x_o}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x,y) \text{ eta orduan}$$

$$\int_{x_o}^{x} \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N$$

$$N(x,y) - N(x_o, y) + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$\varphi'(y) = N(x_o,y)$$

$$(y) = \int_{y_o}^{y} N(x_o,y)\,dy + c_1$$

$$u = \int_{x_o}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_o}^{y} N(x_o,y)\,dy + c_1$$

Adib.

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}$$

$$u = \int \frac{2x}{y^3} dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y)$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y^2} \qquad \varphi(y) = -\frac{1}{y} + c \quad ; \quad u(xy) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + c$$

$$\boxed{\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c}$$

3.8.– INTEGRAZIO-FAKTOREA

M (x,y) dx + N (x,y) dy = 0 ez dela ekuazio diferentzial osoa kontsideratuko dugu . M (x,y) eta N (x,y) funtzio batez biderkatuz ekuazio hori osoa izango dela pentsa dezakegu.

u (x,y) M (x,y) dx + u (x, y) N (x,y) dy = 0. Hau osoa izan dadin:

$$\frac{\partial(uM)}{\partial y} = \frac{\partial(uN)}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}M + u\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}N + u\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M\frac{\partial u}{\partial y} - N\frac{\partial u}{\partial x} = u\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \qquad \text{u-z zatituz}$$

$$M\frac{\partial \ln u}{\partial y} - N\frac{\partial \ln u}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

Hau deribatu partzialetan ekuazioa da eta askotan zailagoa da ekuazio diferentziala baino. Baina errazagoak diren kasuak ere badaude.

Funtzioa y-ren funtzio denean bakarrik:

$$\frac{\partial \ln u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \ln u}{\partial y} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \qquad \text{Eta hau,}$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \Rightarrow \qquad \text{y-ren funtzio denean gertatzen da.}$$

u, x-en funtzio denean:

$$\frac{\partial \ln u}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \ln}{\partial x} = \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}{N}$$

Azken funtzio hau x-en funtzio denean, integrazio-faktore erraz bat aurki dezakegu.

Adib.

$$(y + xy^2)\, dx - x\, dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \quad \text{ez dira berdinak}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -2 - 2xy \qquad \frac{-2-2xy}{y(1+xy)} = \frac{\partial \ln u}{\partial y} = -\frac{2}{y}$$

$$u = ny^2 \qquad \frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)} = \frac{\partial \ln u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \ln u}{\partial y} = -\frac{2}{y} \quad \rightarrow \quad u = \frac{1}{y^2} \text{ ; eta biderkatuz } \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{y} + x\right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C = 0$$

3.9.– EKUAZIO DIFERENTZIAL LINEALAK

Definizioa:

$y' = f\,(xy)$ ekuazio diferentziala lineala dela $y' + P\,(x)\,y = Q\,(x)$ eran ipin daitekeenean esango dugu.

$y = u\,(x)\,v\,(x)$ emaitza bilatzen saiatuko gara.

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + Puv = Q$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} + Pv\right) + v\frac{du}{dx} = Q \;\; ; \;\; \frac{dv}{dx} + Pv = 0 \qquad \text{bada}$$

$$\frac{dv}{dx} = -Pv \qquad \ln v = \int -P\,dx + c \qquad v = ke^{-\int P dx}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{Q}{V} \qquad u = \int \frac{Q(x)}{V(x)} dx + c$$

Aurrebaldintzak dituen kurba nahi badugu, baldintzak ekuazioan ipinita c aurkituko dugu.

Adib.

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3$$

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x+1}V=0$$

$$\frac{dv}{V}-\frac{2}{x+1}dx \qquad \ln V = e^{21n\,(x+1)}$$

$$V=(x+1)^2 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2\frac{du}{dx}=(x+1)^3$$

$$\frac{du}{dx}=x+1$$

$$u=\frac{(x+1)^2}{2}+c \quad \Rightarrow \quad y=(x+1)^2\left[\frac{(x+1)^2}{2}+c\right]$$

3.10.– BERNOULLIREN EKUAZIOAK

Definizioak

$y' = f(x,y)$ ekuazio diferentziala Bernoulliren ekuazioa dela esango dugu, $y' + P(x)y = Q(x)\,y^n$ denean $n \neq 0$ $\quad n \neq 1$. Bestela lineala dela esango dugu.

Dena y^n-z zatitzen baldin badugu:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{-n+1}=Q \quad \text{eta} \quad z=y^{-n+1} \quad \text{eginez,}$$

$$\frac{dz}{dx}=(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)Pz = (-n+1)Q$$ eta ekuazio hau lineala da.

Adib.

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3 \quad \Rightarrow \quad y^{-3}\frac{dy}{dx} + xy^{-2} = x^3$$

$$z = y^{-2} \qquad \frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} + xz = x^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3$$ Beraz, $z = uv$

eginez: $$\frac{dz}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - 2xuv = -2x^3$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} - 2xv\right) + v\frac{du}{dx} = -2x^3$$

$$\frac{dv}{dx} = 2xv \quad \Rightarrow \quad \ln v = x^2 \quad v = e^{x^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-2x^3}{e^{x^2}} \quad u = \int \frac{-2x^3}{e^{x^2}} + c \quad \Rightarrow \quad u = x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + c$$

$$z = e^{x^2}\left(x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + c\right) = x^2 + 1 + ce^{x^2}$$

$$y^{-2} = z \quad y^{-2} = x^2 + 1 + ce^{x^2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + ce^{x^2}}}$$

3.11.– KURBA-SORTA BATEN INGURATZAILEA

φ (x, y, c) = 0 ekuazioa hartzen badugu c-ren balioen arabera kurba desberdinak edukiko ditugu eta kurba-sorta bat dugula esango dugu.

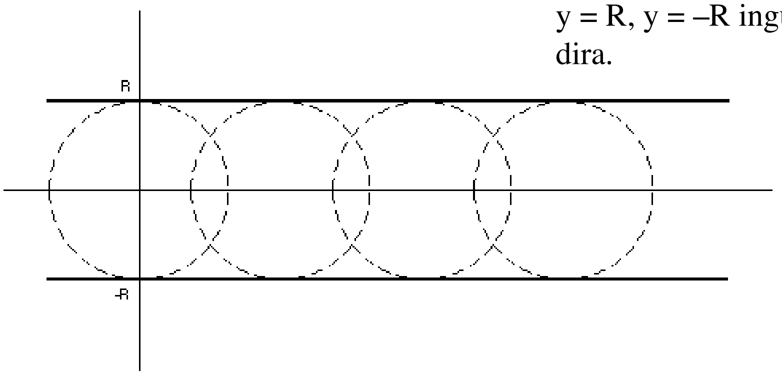
Definizioa:

L lerroa kurbaren ingurutzailea dela, bere puntu bakoitzean kurba bat ukitzen badu eta kurba desberdinek puntu desberdinetan ukitzen dutenean esango dugu.

Adib.

$(x + c)^2 + y^2 = R^2$ kurban c aldakorra

y = R, y = –R ingurutzaileak dira.



Kurba-sorta baten inguratzailea aurkitzeko egingo duguna hau da:

F (x, y, c) = 0 kurba-sorta hartuko dugu eta y = (x) inguratzailea dela kontsideratuko dugu.

M (x,y) inguratzailearen puntu batetik kurba-sortako kurba bat ere pasatuko da eta c-ren balio bat edukiko dugu. Balio horrek c = c (x,y) funtzio bat definitzen digu. Beraz, ingurutzaileko puntu guztientzat betetzen da:

F (x, y, c(x, y)) = 0 c deribagarria dela kontsideratuz eta x-ekiko deribatuz:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial c}\cdot\frac{\partial c}{\partial x}+\left[\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial C}\cdot\frac{\partial C}{\partial y}\right]y'=0$$

eta hau ipin dezakezu:

$$F'_x+F'_y\cdot y'+F'_c\left[\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial y}y'\right]=0$$

$F'_x + F'_y \cdot y' = 0$, kurba bakoitzean c kte delako. $y' \neq 0$ kontsideratuko dugu. Bestela, x hartu y-ren funtzio bezala.

$$F'_c\left(\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial y}y'\right)=0$$ c inguratzailean ≠ kte denez.

$$\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial y}y'\neq 0$$ Beraz, $F'c = 0$ izan behar du eta inguratzailea aurkitzeko erabiliko ditugu bi funtzio hauek:

$$\left.\begin{array}{l}F(x,y,c)=0\\ F'c(x,y,c)=0\end{array}\right\}$$ eta c kenduz $y = \varphi(x)$ funtzioa lortuko dugu.

Adib.

1) Bilatu $(x-c)^2 + y^2 = R^2$ zirkunferentzien inguratzailea, R kte dela jakinik.

$$\frac{\partial F}{\partial c}=2(x-c)=0 \quad \Rightarrow \quad c=x$$

$$y^2=R^2 \quad \Rightarrow \quad y=R \quad y=-R$$

2) Bila $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$ zuzenen inguratzailea, α parametroa izanik.

$$\frac{\partial F}{\alpha}=-x\sin\alpha+y\cos\alpha=0$$

$$x\cos^2\alpha+y\sin\alpha\cos\alpha-p\cos\alpha=0$$

$$x-p\cos\alpha=0 \quad x=p\cos\alpha \quad y=p\sin\alpha$$

$$\boxed{x^2+y^2=p^2}$$ zirkunferentzia

3.12.– LEHEN MAILAKO EKUAZIO DIFERENTZIALEN EMAITZA SINGULARRAK

Demagun $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ ekuazio diferentziala dugula eta G(x,y,c)=0 bere integrala dela.

Kurba-sorta honek inguratzaile bat edukiko du eta inguratzailea ere ekuazio diferentzialaren emaitza dela frogatuko dugu. G (x,y,c) = 0 kurba--sorta eta bere deribatua c-rekiko, $y = \psi(x,y)$ funtzioa, lortuko dugu. Funtzio honen puntu guztiak kurba-sortaren puntuak dira eta F (x, y, y') =0 bete behar dute. Beraz $y = \psi(x, y)$ ere ekuazio diferentzialaren emaitza da, eta emaitza honi emaitza singular deitzen zaio.

Adib.

$y(1 + y'^2) = R^2$ ekuazio diferentziala

$$y = \pm\sqrt{\frac{R^2 - y^2}{y}} \qquad \frac{y\,dy}{\pm\sqrt{R^2 - y^2}} = dx$$

$(x - c)^2 + y^2 = R^2$ eta $y = \pm R$ ere emaitzak dira.

3.13.– CLAIRAUT-EN EKUAZIO DIFERENTZIALAK

$y = xy' + \psi(y')$ ekuazioei Clairaut-en ekuazio deitzen zaie. Ekuazio diferentzial hauek ebazteko $y' = p$ egingo dugu.

$y = xp + \psi(p)$ ekuazio hau x-ekiko deribatzen badugu:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dp}{dx} + p + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

$\frac{dy}{dx} = p$ dela kontutan harturik $\Rightarrow$ $x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} = 0$ da $\Rightarrow$

$$\frac{dp}{dx}\lfloor x + \psi'(p) \rfloor = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{edo} \quad x + \psi'(p) = 0$$

a) $\frac{dp}{dx} = 0$ baldin bada $\Rightarrow$ $p = kte$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = kte$ $\Rightarrow$

$$y = cx + c_1$$
$$c_1 = \psi\,(c)$$

b) $x + \psi'\,(p) = 0$ ekuaziotik p x-en funtzio ipin dezakegu eta oinarriko ekuaziora eramanda:

$y = x\,p\,(x) + \psi\,[p\,(x)]$ eta hau ekuazioaren emaitza da, frogatuko dugunez:

$\frac{dy}{dx} = p + \lfloor x + \psi'(p) \rfloor \frac{dp}{dx} = p$ eta ondokoa daukagu.

$xp + \psi\,(p) = xp + \psi\,(p)$

emaitza hau ezin daiteke zuzen-sortatik atera. Beraz, emaitza singularra da. Gainera ekuazio hori lortzeko egiten duguna $y = xc + \psi\,(c)$ da.

eta $\frac{dy}{dx} = x + \psi' c = 0$ edo beste era batera ipinita

$y = xp + \psi\,(p)$ eta $x + \psi'\,(p) = 0$ eginez, beraz, zuzen-sortaren inguratzailea da.

Adib.

$y = x\,y' + \frac{a\,y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$ zuzen-sorta da $y = x\,c + \frac{a\,c}{\sqrt{1 + c^2}}$

eta $x + \dfrac{a\sqrt{1 + p^2} - ap2p\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + p^2}\right)^{-1/2}}{\sqrt{1 + p^2}} = 0$

$$x+\frac{a(1+p)^2-ap^2}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}=0$$

$$x+\frac{a}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}=0 \qquad \frac{a}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}=-x$$

$$\frac{-a}{x}=\left(1+p^2\right)^{3/2} \qquad \left(\frac{-a}{x}\right)^{2/3}=1+p^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{-a}{x}\right)^{2/3}-1=p^2$$

$$p=\pm\sqrt{\left(\frac{-a}{x}\right)^{2/3}-1}$$

$$y=x\left(\pm\sqrt{\left(\frac{-a}{x}\right)^{2/3}-1}\right)+\frac{a\pm\sqrt{\left(\frac{-a}{x}\right)^{2/3}-1}}{\sqrt{1+\left(\frac{-a}{x}\right)^{2/3}-1}}=$$

$$=x\left(\pm\sqrt{\frac{a^{2/3}-x^{2/3}}{x^{1/3}}}+\frac{a\left(\pm\sqrt{a^{2/3}-x^{2/3}}\right)}{\left(\frac{a}{x}\right)^{1/3}}\right)$$

3.14.– LAGRANGEREN EKUAZIOAK

$y = x\varphi(y') + \psi(y')$ era duen ekuazio diferentzialari Langrangeren ekuazio deitzen zaio. Ekuazio diferentzial hauek ebazteko $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ ekuazioan y'-ren ordez p jarriko dugu:

$y = x\varphi(p) + \psi(p)$ ekuazioa edukiko dugu. x-ekiko deribatuz:

$$\frac{dy}{dx}=p=\varphi(p)+\lfloor x\varphi'(p)+\psi'(p)\rfloor\frac{dp}{dx}$$

$$p-\varphi(p)=\lfloor x\varphi'(p)+\psi'(p)\rfloor\frac{dp}{dx}$$

$p - \varphi(p) = 0$ betetzen duten balio konstanteentzat

$dp/dx = 0$. Beraz, $y = x\varphi(p_o) + \psi(p_o)$

Orain emaitza orokorra bilatuko dugu:

$$\frac{dx}{dp} = x\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} + \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$$

Ekuazio hau lineala da, eta bere emaitza ondokoa izango da:

$x = \omega(p, C)$ hau eta $y = x\,\varphi(p) + \psi(p)$ ekuaziotik p kenduz, emaitza orokorra aurkituko dugu:

Adib.

$y = xy'^2 + y'^2$ $\quad y' = p$ eginez $\Rightarrow$ $y = xp^2 + p^2$

$$p = p^2 + x\,2p\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$

$$p - p^2 = (x\,2p + 2p)\frac{dp}{dx}$$ p = 0 eta p = 1 emaitzak dira.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = x+1 \end{array}\right\}$$ zuzenak, emaitzak dira.

$$\frac{dx}{dp} = x\frac{2}{1-p} + \frac{2}{1-p} \qquad \frac{dx}{dp} - \frac{2x}{1-p} = \frac{2}{1-p}$$

$$x = -1 + \frac{c^2}{(p-1)^2} \qquad y = \left(c + \sqrt{x+1}\right)^2 \qquad y = 0$$

$0 = c + \left(\sqrt{x+1}\right)^2$ eta edozein x eta y-rentzat, ez dago c-rik hau betetzen duenik, baina y = x+1 ordezkatuz:

$x + 1 = \left(c + \sqrt{x+1}\right)^2$ eta c=0 denean, hau bete egiten da. Beraz y=x+1 emaitza orokorrean dago.

3.15.– IBILBIDE ORTOGONALAK ETA ISOGONALAK

F (x, y, c) = 0 kurba-sorta hartzen badugu, kurba guztiak angelu berdinaz mozten dituen lerroari ibilbide isogonal deitzen zaio. Angelua zuzena denean ibilbide ortogonal deitzen zaio.

a) Ibilbide ortogonalak

Izan bedi F (x, y, c) = 0 kurba-sorta bat. x-ekiko deribatuz:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

ekuazio diferentziala lortuko dugu eta G(x,y,y') = 0 izango da. y'-k, (x,y)-k puntu bakoitzean ukitzailearen malda adierazten du. Hortaz, –1/y' izango da puntu horretan ibilbide isogonalaren ukitzailearen malda. Beraz, G(x,y,–1/y') = 0 ibilbide ortogonalen ekuazio diferentziala izango da eta ekuazio hau askatuz ibilbide ortogonalak lortuko ditugu.

Adib.

$y = c\,x^2$ parabola-sortaren ibilbide ortogonalak lortzeko:

$$\frac{dy}{dx}=2cx \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{y'}=\frac{2y}{x} \quad\Rightarrow$$

$$-\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{x} \quad\Rightarrow\quad x\,dx=-2y\,dy \quad\Rightarrow\quad y\,dy=-\frac{x\,dx}{2}$$

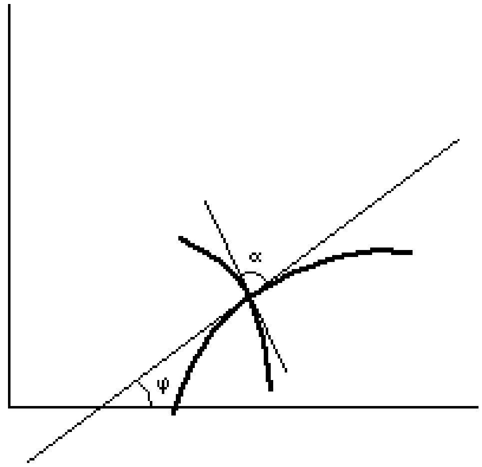
$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{4}+c$$

b) Ibilbide isogonalak

Ibilbideak kurba-sorta α angeluaz mozten duela eta tan α = k dela kontsideratuko dugu.

$$\frac{dy}{dx} = \tan\varphi$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy_T}{dx}\right) - K}{\left(K\frac{dy_T}{dx}\right) + 1} =$$



Hau G (x, y, dy/dx) = 0 ekuazio diferentzialera sartuz eta dy/dx askatuz lortuko ditugu ibilbide isogonalak.

Adib.

y = cx zuzen-sortaren ibilbide isogonalak kalkulatzeko tan α = K baldin bada.

$$\frac{dy}{dx} = c = \frac{y}{x} \qquad \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right) - K}{\left(\frac{dy}{dx}\right)K + 1} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} - K = \frac{y}{x}\ K\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(1 - \frac{y}{x}K\right) = \frac{y}{x}\ + K$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} + K}{1 - \frac{y}{x}K} = \frac{y + Kx}{x - yK}$$

ekuazio hau homogenoa da.

y = zx eginez,

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{zx + Kx}{x - Kzx} = \frac{z + K}{1 - Kz}$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{z + K}{1 - Kz} - z = \frac{z + K - z + kz^2}{1 - Kz}$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{K\left(1 + z^2\right)}{1 - Kz} \qquad \frac{1}{K}\frac{1 - Kz}{1 + z^2}dz = \frac{dx}{x}$$

$$\ln x = \frac{1}{K}\arctan z - \frac{K}{2K}\ln\left(1 + z^2\right) + c$$

$$\ln x = \frac{1}{K}\arctan z - \frac{\ln\left(1 + z^2\right)}{2} + c$$

$$\ln x\sqrt{1 + z^2} = \frac{1}{K}\arctan z + c$$

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{K}\arctan\frac{Y}{x} + c$$

3.16.– GOI-MAILAKO EKUAZIO DIFERENTZIALAK

n-garren mailako ekuazio diferentzial bat F (x, y, y', y'' ... $y^{n)}$) = 0 edo $y^{n)}$ = G (x, y, y' ... $y^{n-1)}$) idatz dezakegu, eta guk ikusiko ditugun guztiak era honetakoak izango dira.

Teorema:

$y^{n)} = f(x,y,y'...y^{n-1)})$ ekuazioan $f(x,...y^{n-1})$ eta bere deribatu partzialak jarraiak badira, D eremu batean $x = x_o$, $y = y_o$, $y' = y'_o$, ... $y^{n-1} = y^{n-1}_o$ baldintzak betetzen dituen emaitza bakarra du y = y (x) ekuazioan, non:

$y(x_o) = y_o$ ... $y^{n-1}(x_o) = y^{n-1)}_o$ hauei aurrebaldintza deitzen bait zaie. Teorema hau ez dugu frogatuko.

Definizioa:

$F(x, \ldots y^{n)}) = 0$ ekuazio diferentzial baten emaitza orokorra. $y=f(x_1,c_1 \ldots c_n)$ funtzioa dela esaten da edozein $c_1 \ldots c_{n-1}$-rentzat ekuazio diferentziala betetzen badu eta $(x_o \ldots y^{n-1)}{}_o)$ aurrebaldintza bakoitzarentzat $(c_1 \ldots c_n)$ bila dezakegunean, aurrebaldintza horiek betetzeko.

3.17.– $y^n = f(x)$ EKUAZIO DIFERENTZIALA

Hau da n-garren mailako ekuazio diferentzial errazena: $y^n = f(x)$ bada

$$y^{n-1} = \int f(x)dx + c \quad \Rightarrow \quad y^{n-2} = \int \left[\int f(x)\,dx + c \right] dx$$

eta abar y-raino heldu arte.

Adib.

$$y'' = \sin(k\,x) \qquad y_{x=o} = 0 \qquad y'_{x=o} = 1$$

$$y' = \int \sin(k\,x)\,dx = \frac{1}{k}\cos(x\,k) + c \qquad \text{Baina } y'_{x=o} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$1 = -\frac{1}{k}\cos 0 + c \qquad 1 + \frac{1}{k} = c$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{k}\cos(x\,k) + 1 + \frac{1}{k} \right) dx = -\frac{1}{k^2}\sin(x\,k) + \left(1 + \frac{1}{k}\right) x + c$$

$$0 = -\frac{1}{k^2}\sin 0 + \left(1 + \frac{1}{k}\right) 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y = -\frac{1}{k^2}\sin(k\,x) + \left(1 + \frac{1}{k}\right) x$$

3.18.– LEHEN MAILAKO EKUAZIO DIFERENTZIAL BIHUR DAITEZKEEN BESTE ERA BATEKO EKUAZIO DIFERENTZIALAK

a) $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x \ \frac{dy}{dx}\right)$ ekuazio diferentziala dugunean aldagai-aldaketa bat

egin dezakegu $\frac{dy}{dx} = p$ Beraz $y = \frac{dp}{dx}$ eta lehen mailako ekuazio diferentzial bihurtzen da.

Adib.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = p \qquad \text{eginez}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + p^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{a}$$

$$\ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = \frac{x}{a} + c \qquad p + \sqrt{1 + p^2} = e^{x/a+c}$$

$$\sqrt{1 + p^2} = e^{x/a+c} - p$$

$$1 + p^2 = \left(e^{x/a+c}\right)^2 - 2e^{x/a+c}p + p^2$$

$$p = \frac{\left(1 - e^{x/a+c}\right)^2}{2\,e^{x/a+c}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a+c} + e^{-x(x/a+c)}\right) + K$$

era berean egin dezakegu edozein mailatan $y^{n)} = f\,(x, y^{n-1})$ dugunean.

b) $y'' = f\,(y, y')$ dugunean $y' = p$ egingo dugu berriz:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

$$p\frac{dp}{dy} = f(y,p) \qquad \text{integratuz p y-rekiko lortuko dugu eta}$$

$$\frac{dy}{dx} = p(y,c) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{p(y,c)} = dx \text{ eta y lortuko dugu}$$

Adib.

$$3y'' = y^{-5/3} \qquad \frac{dy}{dx} = p \text{ egin} \qquad 3p\frac{dp}{dy} = y^{-5/3}$$

$$3p\,dp = y^{-5/3}dy \qquad \frac{3}{2}p^2 = -\frac{3}{2}y^{-2/3} + G$$

$$p^2 = -y^{-2/3} + c \qquad p = \pm\sqrt{c - y^{-2/3}} \quad \Rightarrow$$

$$x + K = \pm\frac{1}{c^2}\sqrt{c\,y^{2/3} - 1}\left(c\,y^{2/3} + 2\right)$$

3.19.– EKUAZIO LINEAL HOMOGENOAK

Definizioa:

$a_o y^n + a_1 y^{n-1} + ... + a_n\, y = f(x)$ ekuazio diferentzial lineala izango da; y eta bere deribatuekiko lehen mailakoa baldin bada, a_o ... a_n eta f (x) x-en funtzio direlarik.

f (x) = 0 denean ekuazio diferentzial lineal homogenoa izango dugu. Ekuazio diferentzial lineal homogenoen propietate batzuk ikusiko ditugu:

1. propietatea

y_1 eta y_2 ekuazio diferentzial homogeno baten emaitzak badira, y_1+y_2 ere emaitza da.

Froga: $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ ekuazio diferentzialaren emaitzak y_1 eta y_2 badira, honakoa beteko da: $y''_1 + a_1y'_1 + a_2y_1 = 0$ eta $y''_2 + a_1y'_2 + a_2y_2 = 0$. Beraz, $y''_2 + y''_1 + a_1\,(y'_1 + y'_2) + a_2\,(y_1 + y_2) = 0$ da eta batura ekuazio diferentzialaren emaitza.

2. propietatea

y_1 ekuazio diferentzial baten emaitza bada, c y_1 ere emaitza da.

3. propietatea

y_1 eta y_2 linealki lotuak badira, W $(y_1, y_2) = 0$. Hau frogatu aurretik, linealki aske diren funtzioak eta W (y_1, y_2) zer diren ikusiko dugu.

Definizioa:

f_1 eta f_2 bi funtzio linealki aske direla, $f_1 + \lambda f_2 \neq 0$ ($\forall$ λ-rentzat $\lambda \neq 0$) denean esango dugu. Era berean f_1 eta f_2 funtzioak linealki lotuak dira, $f_1 + \lambda f_2 = 0$ ($\lambda \neq 0$ denean) betetzen bada.

Definizioa:

y_1 eta y_2 funtzioen Wronskiarra honelaxe definitzen da:

$$W(y_1\, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

Frogapena:

y_1 eta y_2 lotuak badira $y_2 = \lambda\, y_1$ eta $y'_2 = \lambda\, y'_1$

$$W(y_1\, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y'_1 & \lambda y'_1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y'_1 & y'_1 \end{vmatrix} = 0$$

4. propietatea

Wronskiarra $x = x_o$ puntu batean ([ab] tartekoan) anulatzen ez bada eta tarte horretan koefizienteak jarraiak badira, Wronskiarra ez da tarte guztian anulatzen.

Frogapena:

y_1 eta y_2 ekuazioaren emaitzak direnez:

$$y''_2 + a_1\, y'_2 + a_2\, y_2 = 0 \quad \text{eta}$$
$$y''_1 + a_1\, y'_1 + a_2\, y_1 = 0$$

lehen ekuazioa y_1-ez biderkatuz eta bigarrena $-y_2$-z eta biak batuz, ondokoa daukagu:

$$y_1\, y''_2 - y''_1\, y_2 + a_1\, (y_1\, y'_2 - y'_1\, y_2) = 0$$

eta $\quad y_1\, y'_2 - y'_1\, y_2 = W\,(y_1, y_2)$

$y_1\, y''_2 - y''_1\, y_2 = W'\,(y_1, y_2)$ eta honakoa daukagu:

$$W' + a_1\, W = 0$$

Hau ekuazio lineala da, W-rena, eta aurrebaldintza gisa $x = x_o$ ipinita W_o aurkituko dugu.

$W \neq 0$ kontsideratuz, $\dfrac{dW}{W} = -a_1\, dx \quad \Rightarrow \quad W = c\, e^{-\int_{x_o}^{x} a_1 dx}$

$$c = W_o \ \text{ da eta } \ W = W_o\, e^{-\int_{x_o}^{x} a_1 dx}$$

$W_o \neq 0$ denez $W \neq 0$ da, x-en edozein baliorentzat.

Izan bedi $W = 0$ $\quad x = x_o$ izanik $W_o = 0$ da eta $W = 0$ da puntu guztietan.

5. propietatea

y_1 eta y_2 ekuazio diferentzial lineal homogeno baten emaitza askeak badira, $W\,(y_1, y_2) \neq 0$ da.

$W = 0$ dela kontsideratuz:

$y_1 \, y'_2 - y'_1 \, y_2 = 0 \qquad y_1 \neq 0$ bada

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_2}{y_1} = \text{kte} \;\; \text{dela}$$

$y_2 = \lambda y_1$, baina emaitza bakarra da $\Rightarrow$ $y_1 = 0$ den puntuetan ere $y_2 = \lambda y_1$ $\Rightarrow$ linealki aske ezingo litzateke izan. Beraz $W \neq 0$ da.

6. propietatea

y_1 eta y_2 ekuazio diferentzial lineal homogeno baten emaitzak badira, $y = c_1 \, y_1 + c_2 \, y_2$ ekuazio diferentzialaren emaitza da.

7. propietatea

Bigarren mailako ekuazio baten emaitza bat ezagutzen badugu, bestea ezagutu dezakegu.

Frogapena:

y_1 ekuazio diferentzialaren emaitza bada $\Rightarrow$ $y''_1 + a_1 \, y + a_2 \, y = 0$. Guk badakigu

$$y'_2 \, y_1 - y_2 \, y'_1 = ce^{-\int a_1 dx} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y'_2 \, y_1 - y_2 y'_1}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} ce^{-\int a_1 dx} \quad \Rightarrow$$

$$d\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2} c\, e^{-\int a_1 dx}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{c\, e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx + c_2$$

$$y_2 = y_1 = \int \frac{ce^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx$$

Adib.

$$(1-x^2)\, y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad y_1 = x \text{ ekuazioaren emaitza da}$$

$$a_1 = \frac{-2x}{1-x^2} \qquad y = x\int \frac{e^{\int \frac{2x\,dx}{\left(1-x^2\right)}}}{x^2}dx$$

$$= x\int \frac{e^{-\ln\left(1-x^2\right)}}{x^2}dx = x\int \frac{dx}{x^2\left(1-x^2\right)} =$$

$$= x\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)$$

$$y = C_1x + C_2\left(\frac{1}{2}x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$$

3.20.– KOEFIZIENTE KONSTANTEAK DITUZTEN BIGARREN MAILAKO EKUAZIO DIFERENTZIAL LINEAL HOMOGENOAK

Izan bedi $y'' + py' + q = 0$, non p eta q konstanteak diren. Frogatu dugunez, ekuazio honen emaitzak lortzeko bi lortzea nahikoa da.

$y = e^{kx}$ emaitzen bat lortzen saiatuko gara. Beraz, $y' = k\, e^{kx}$ $y'' = k^2e^{kx}$ ekuazioan ipinita:

$k^2\, e^{kx} + k\, e^{kx}\, p + q\, e^{kx} = 0$ eta $e^{kx}\,(k^2 + kp + q) = 0$ izan beharko du. e^{kx} zero ez denez $\Rightarrow k^2 + kp + q = 0$ izan beharko du. Ekuazio honi ekuazio diferentzialaren ekuazio karakteristiko deitzen zaio. Ekuazio karakteristikoaren erroen arabera emaitzak nolakoak diren ikusiko dugu.

1. Erroak desberdinak eta errealak dira: k_1 eta k_2. Bi emaitza ditugu $\left(e^{k_1x} \text{ eta } e^{k_2x}\right)$eta emaitza orokorra $y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$ da.

Adib.

$$y'' + y' - 2y = 0 \qquad\qquad k^2 + k - 2 = 0$$

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$y = c_1\, e^x + c_2\, e^{-2x}$$

2. Emaitzak desberdinak eta konplexuak dira:

$k_1 = \alpha + i\,\beta \qquad\qquad k_2 = \alpha + i$

$\alpha = -p/2 \qquad\qquad \beta = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}$

$y_1 = e^{(\alpha + i\,\beta)x} \qquad\qquad y_2 = e^{(\alpha + i\,\beta)x}$

$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta\, x + ie^{\alpha x} \sin \beta\, x$

$y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta\, x - ie^{\alpha x} \sin \beta\, x$

$y = u\,(x) + iv\,(x)$ funtzioak ekuazio diferentzial bat betetzen badu, $u\,(x)$ eta $v\,(x)$-ek ere ekuazioa beteko dutela ikusten da. Beraz:

$y_{11} = e^{\alpha x} \cos \beta\, x$ eta $y_{22} = e^{\alpha x} \sin \beta\, x$ eta

$y = c_1\, e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2\, e^{\alpha x} \sin \beta\, x$

Adib.

$y'' + 2y' + 5y = 0 \qquad\qquad k^2 + 2k + 5 = 0$

$$K = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

$y = c_1\, e^{-x} \cos 2x + c_2\, e^{-x} \sin 2x$

3. Erroak errealak eta berdinak dira: $k_1 = k_2$. Beraz, emaitza bat dago. $y = e^{k_1 x}$ da. Bestea ezin dugu horrela bilatu eta $y = u\,(x)e^{k\ x}$ emaitza bada $u\,(x)$-ek nolakoa izan behar duen ikusiko dugu.

$y_2 = u(x)e^{k_1 x}$ emaitza izatea nahi badugu,

$y'_2 = k_1 u(x)e^{k_1 x} + u'(x)e^{k_1 x}$ eta

$y''_2 = u(x)k_1^2 e^{k_1 x} + u'(x)k_1 e^{k_1 x} + k_1 u'(x)e^{k_1 x} + u''(x)e^{k_1 x}$

ekuazioan ipinita.

$$e^{k_1 x}\left(u(x)k_1^2 + 2u'(x)k_1 + u''(x)\right) + e^{k_1 x}p\left(u(x)k_1 + u'(x)\right) + q\,u(x)e^{k_1 x} = 0$$

$$e^{k_1 x}\left(u'' + (2k_1 + p)u' + \left(k_1^2 + pk_1 + q\right)u\right) = 0$$

k_1 ekuazio karakteristikoaren erroa denez, $k_1^2 + pk_1 + q = 0$ da. Gainera $k_1 = k_2 = -p/2$ eta $2\,k_1 + p = 0$ da. Beraz, honakoa gertatzen da:

$$e^{k_1 x}u'' = 0 \quad\Rightarrow\quad u'' = 0 \qquad u = Ax + B$$

Emaitza orokorraren bila ari ez garenez, u = x ipin dezakegu eta emaitza orokorra honela geratuko da:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2\,x e^{k_1 x}$$

Adib.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad\Rightarrow\quad k^2 - 4k + 4 = 0 \quad k = 2 \quad \text{eta}$$
$$y = c_1\,e^{2x} + c_2\,x\,e^{2x}$$

3.21.–n-GARREN MAILAKO EKUAZIO DIFERENTZIAL HOMOGENOAK

Ekuazio hauek ikusi aurretik, definizio batzuk emango ditugu.

1. definizioa:

[a,b] tarte bateko edozein x-entzat $\varphi(x) = A_{11}(x) + \dots + A_n\,\varphi_n(x)$ betetzen bada, $\varphi(x)$ funtzioa, $\varphi_1 \dots \varphi_n$ funtzioen konbinazio lineala dela esango dugu.

2. definizioa:

$\varphi_1 \ldots \varphi_n$ n funtzio linealki aske dira $A_1\varphi_1 + \ldots A_n\varphi_n = 0$ izateko $A_1 \ldots A_n$ konstanteak berdin zero badira. Ondorio gisa $A_1 \ldots A_n$ konstanteentzat $A_1 \varphi_1 + \ldots + A_n \varphi_n = 0$ bada, funtzioak linealki lotuak dira.

1. adib.

$y_1 = e^x$ $y_2 = e^{2x}$ $y_3 = 3^{ex}$ funtzioak lotuak dira, $A_1 = -3$ $A_2 = 0$ eta $A_3 = 1$ eginez

$-3\, e^x + 0\, e^{2x} + 1\, 3^{ex} = 0$ delako.

2. adib.

$y_1 = 1$ $y_2 = x$ $y_3 = x^2$ linealki aske dira.

$A_1 + A_2x + A_3x^2$ ez da $= 0\ \forall\ A_1\ A_2\ A_3$-rentzat

Teorema:

$y_1 \ldots y_n$ ekuazio diferentzial lineal homogeno baten emaitzak badira eta ekuazioa n-garren mailakoa bada, emaitza orokorra honela ipin dezakegu:

$y = c_1\, y_1 + \ldots + c_n\, y_n$, non $c_1 \ldots c_n$ konstanteak bait dira. Ez dugu frogatuko.

3.22.– n-GARREN MAILAKO EKUAZIO DIFERENTZIAL HOMOGENOAK KOEFIZIENTE KONSTANTEEKIN

$y^n + P_1\, y^{n-1} + ... + P_n\, y = 0$, bigarren mailako ekuazio diferentzialetan bezala $y = e^{kx}$ emaitzak dituela pentsatuko dugu. Honakoa edukiko dugu: $e^{kx}\,(K^n + P_1K^{n-1} + ...\, P_n) = 0$ $K^n + P_1K^{n-1} + ...\, P_n = 0$ ekuazio karakteristikoa izanik.

$K_1 ... K_n$ erroak badira eta K_i erro bakun bat bada

$y_i = e^{K_i x}$

$K_j = \alpha + \beta i$ eta $K_{j+1} = \alpha - \beta i$ erro konplexu bakunak badira:

$y_j = e^{\alpha x} \cos \beta x$ $y_{j+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x$

y_α r-garren mailako erroa bada, honakoak daude:

$y_\alpha = e^{K\alpha x}$ $y_{\alpha+1} = x\, e^{K\alpha x}$ $y_{\alpha+r-1} = e^{K\alpha x}\, x^{r-1}$

Ekuazio diferentzialaren emaitza hauek daude eta $K_i = \alpha + \beta i$ eta $K_{H+1} = \alpha - \beta i$ m-garren mailako erroak badira, ekuazio diferentzialaren 2m emaitza daude. Honelakoak, hain zuzen:

$y_H = e^{\alpha} \cos \beta\, x$ $y_{H+1} = e^{\alpha} \sin \beta\, x$

$y_{H+2} = x\, e^{\alpha} \cos \beta\, x$ $y_{H+2} = x\, e^{\alpha} \sin \beta\, x$

.

.

.

$y_K = x^{m-1}\, e^{\alpha} \cos \beta\, x$ $y_{K+1} = x^{m-1}\, e^{\alpha} \sin \beta x$

Adib.

$y^{IV)} - y = 0$ ekuazio diferentzialaren ekuazio karakteristikoa, $K^4 - 1 = 0$ da.

$K = \pm 1$ $\quad K = \pm i$ $\quad y_1 = e^x$ $\quad y_2 = e^{-x}$

$y_3 = e^{0x} \cos x$ $\quad y_4 = \sin x$ eta emaitza orokorra

$$y = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

3.23.– BIGARREN MAILAKO EKUAZIO DIFERENTZIAL EZ-HOMOGENOAK

Izan bedi $y'' + a_1\, y' + a_2\, y = f(x)$ bigarren mailako ekuazio diferentzial ez-homogenoa

Teorema:

Ekuazio ez-homogenoaren emaitza orokorra bi funtzioren batura bezala ipini daiteke; bata y ekuazio homogenoaren emaitza orokorra eta bestea y* ekuazio ez-homogenoaren emaitza bat izanik.

Frogapena:

$y = \overline{y} + y^*$ ekuazioaren emaitza orokorra dela frogatu behar dugu. Lehengo emaitza dela frogatuko dugu.

$$y' = \overline{y'} + y^{*\prime} \quad y'' = \overline{y''} + y^{*\prime\prime}. \text{ Beraz:}$$

$$\overline{y''} + y^{*\prime\prime} + p\,(\overline{y'} + y^{*\prime}) + q\,(\overline{y} + y^*) = f(x)$$

$$\underbrace{\overline{y''} + p\overline{y'} + q\overline{y}}_{(1)} + \overline{y^{*\prime\prime}} + py^{*\prime} + q\, y^* = f(x)$$

(1) berdin zero da, y ekuazio diferentzial homogenoaren emaitza delako eta $y^{*''} + py^{*'} + qy^* = f(x)$ betetzen da, y^* ekuazio ez-homogenoaren emaitza denez. Beraz, $y = \overline{y} + y^*$ emaitza da.

Orain ikusi behar duguna hau da: edozein aurrebaldintza emanik, funtzioak aurrebaldintza horiek bete ditzan konstanteak aurki ditzakegula.

$y = \overline{y} + y^* = c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + y^*$ eta c_1 eta c_2 aurkitu beharko ditugu.

Dakigunez:
$$c_1\, y_{10} + c_2\, y_{20} + y_o^* = y_o$$
$$c_1\, y'_{10} + c_2\, y'_{20} + y_o^{*'} = y'_o$$

$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} \neq 0$ Desberdin zero da. Beraz, sistema honek emaitza bakarra du.

Hemen ikusten dugunez, ekuazio ez-homogeno baten emaitza orokorra bilatzeko lan zailena y^* bilatzea da.

Orain y^* bilatzeko metodo bat ikusiko dugu: "Konstanteen aldakuntz metodoa". $\overline{y} = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$ ekuazio homogenoaren emaitza bada, $y^*=c_1y_1+c_2y_2$ era jartzen saiatuko gara c_1 eta c_2 x-en funtzio direla suposatuz.

$y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$ x-ekiko deribatuz

$y' = c'_1\, y_1 + c'_2\, y_2 + c_1\, y'_1 + c_2\, y'_2$ eta c_1 eta c_2 $c'_1\, y_1 + c'_2\, y_2 = 0$ izan dadin aukera ditzakegu

$y' = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 \Rightarrow y'' = c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + c_1 y''_1 + c_2 y''_2$ eta ekuazio diferentzialean ipiniz:

$$c_1\, y''_1 + c_2\, y'_2 + c'_1\, y'_1 + c'_2\, y'_2 + a_1(c_1 y'_1 + c_2 y'_2) + a_2\,(c_1 y_1 + c_2 y_2) = f(x)$$
$$c_1\,(y''_1 + a_1\, y'_1 + a_2\, y_1) + c_2\,(y''_2 + a_1 y'_2 + a_2 y'_2) + c'_1\, y'_1 + c'_2\, y'_2 = f(x)$$

y_1 eta y_2 ekuazio homogenoaren emaitzak direnez:

$c'_1\, y'_1 + c'_2\, y'_2 = f\,(x)$ beteko du. Horregatik:
$c'_1\, y_1 + c'_2\, y_2 = 0$
$c'_1\, y'_1 + c'_2\, y'_2 = f\,(x)$

$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = 0$ Beraz, hemendik c'_1 eta c'_2 aukera ditzakegu, eta integratuz: $c_1 = \varphi_1\,(x)$ eta $c_2 = \varphi_2\,(x)$

Adib.

$$y'' - \frac{y'}{x} = x$$

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0 \quad \text{ekuazio homogenoa izango da}$$

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \qquad \ln y' = \ln x + c \qquad y' = c\,x$$

$$y = c_1\, x^2 + c_2$$

$$c'_1\, x^2 + c'_2 = 0 \qquad c'_1\, 2x + c'_2\, 0 = x$$

$$c'_1 = \frac{1}{2} \qquad c_1 = \frac{1}{2}x + A_1 \qquad \frac{1}{2}x^2 + c'_2 = 0$$

$$c'_2 = -\frac{x^2}{2} \qquad c_2 = \frac{-x^3}{6} + A_2$$

$$y = c_1x^2 + c_2 + \frac{1}{2}x + A_1 - \frac{x^3}{6} + A_2 = c_1x^2 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} + K$$

Teorema:

Izan bedi $y'' + a_1\, y' + a_2\, y = f_1\,(x) + f_2\,(x)$ (1) ekuazio diferentzial ez--homogeno bat. y_1, $y'' + a_1\, y' + a_2\, y = f_1\,(x)$ ekuazioaren emaitza bada, eta y_2, $y'' + a_1\, y' + a_2\, y = f_2\,(x)$ ekuazioarena, $y_1 + y_2$ (1) ekuazioaren emaitza da.

$(y_1 + y_2)' = y'_1 + y'_2$ eta $(y_1 + y_2)'' = y''_1 + y''_2$ ekuazioan ipiniz.

$(y_1 + y_2)'' + a_1 (y_1 + y_2)' + a_2 (y_1 + y_2) =$
$= (y''_1 + a_1 y'_1 + a_2 y_1) + (y''_2 + a_1 y'_2 + a_2 y_2) = f_1 (x) + f_2 (x)$. Beraz, emaitza da.

3.24.– BIGARREN MAILAKO EKUAZIO DIFERENTZIAL LINEAL EZ-HOMOGENOAK, KOEFIZIENTE KONSTANTEEKIN

Izan bedi $y'' + py' + qy = f (x)$, p eta q zenbaki errealak izanik. $f (x)$ funtzio partikular batzuentzat emaitzak nolakoak diren ikusiko dugu:

I. $f (x) = P_n (x) e^{\alpha x}$ denean, P_n polinomio bat izanik,

a) α ez da ekuazio karakteristikoaren emaitza. Beraz,

$y^* = (A_o x^n + ... + A_n) e^{\alpha x}$ deribatuz eta ekuazioan ipiniz, n ekuazio eta n ezezagun garatzen dira.

Adib.

$y'' + 4y' + 3y = x$ ekuazio honen emaitza orokorra $y = \overline{y} + y^*$ izango da. $\overline{y}$ kalkulatzeko ekuazio karakteristikoaren erroak kalkulatuko ditugu.

$k^2 + 4k + 3 = 0$ $\qquad$ $k = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$

Eta $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$

$f (x) = x e^{0x}$, eta 0 ez da ekuazio karakteristikoaren erroa. Beraz:

$y^* = (Ax + B)$ izango da
$y^{*'} = A$
$y^{*''} = 0$

$4A + 3Ax + 3B = x \qquad 3A = 1 \qquad A = 1/3$

$4A + 3B = 0 \qquad \frac{4}{3} + 3B = 0 \qquad B = -\frac{4}{9}$

$y^* = \frac{-4}{9} + \frac{1}{3}x$ eta $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{x}{3} - \frac{4}{9}$

b) α ekuazio karakteristikoaren erro sinplea da. Kasu honetan ez da $Q_n e^{\alpha x}$ ipintzea nahiko koefizienteak kalkulatu ezin ditugulako, eta $x\, Q_n(x) e^{\alpha x}$ ipiniko dugu:

Adib.

$y'' - 9y = (x^2 + 1)\, e^{3x}$. Lehenbizi homogenoaren emaitza orokorra aurkituko dugu:

$$\overline{y}\ ;\ k^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad \overline{y} = c_1\, e^{3x} + c_2\, e^{-3x}$$

Kasu honetan α ekuazio karakteristikoaren erroa da $\Rightarrow$

$$y^* = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)\, e^{3x}$$
$$y^{*\prime} = (3Ax^2 + 2Bx + C)\, e^{3x} + 3\,(Ax^3 + Bx^2 + Cx)\, e^{3x}$$
$$y^{*\prime\prime} = (6Ax + 2B)\, e^{3x} + 3\,(3Ax^2 + 2Bx + C)\, e^{3x} + 9\,(Ax^3 + Bx^2 + Cx)\, e^{3x} + (9Ax^2 + 6Bx + 3C)\, e^{3x}$$

ekuazioa ipiniz: $y^{*\prime\prime} - 9y^* = (x^2 + 1)\, e^{3x}$

$$e^{3x}\,(6Ax + 2B + 9Ax^2 + 6Bx + 3C + 9Ax^3 + 9Bx^2 + 9Cx + 9Ax^2 + 6Bx + 3C - 9Ax^3 - 9Bx^2 - 9Cx) = (x^2 + 1)\, e^{3x}$$

$$(6A + 6B + 6B)\, x + (2B + 3C + 3C) + (9Ax^2 + 9Ax^2) = x^2 + 1$$

$$18Ax^2 + (6A + 12B)x + (2B + 6C) = x^2 + 1$$

$A = 1/18 \qquad 6A + 12B = 0$

$\qquad 1/3 + 12B = 0 \qquad B = -\,1/36$

$2B + 6C = 1$

$-1/18 + 6C = 1 \qquad 6C = 19/18 \qquad C = 17/108$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + \left(\frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{36} + \frac{19}{108} x\right) e^{3x}$$

c) α ekuazio karakteristikoaren erro bikoitza da. Beraz, $x\, Q_n (x)\, e^{\alpha x}$ ipinita ere ez dugu ezer lortzen, $x^2\, Q_n (x)\, e^{\alpha x}$ ipini beharko dugu:

Adib.

$y'' - 4y' + 4y = x\, e^{2x}$

$k^2 - 4k + 1 = 0 \qquad k = 2$. Beraz:

$\overline{y} = c_1\, e^{2x} + c_2\, x\, e^{2x}$

$y^* = x^2\, (Ax + B)\, e^{2x}$ bezala ipiniko dugu $\Rightarrow$

$y^{*\prime} = (3Ax^2 + 2Bx)\, e^{2x} + 2(Ax^3 + Bx^2)\, e^{2x}$

$y^{*\prime\prime} = (6Ax+2B)e^{2x} + (6Ax^2+4Bx)e^{2x} + 4(Ax^3+Bx^2)e^{2x} + (6Ax^2+4Bx)e^{2x}$

Ekuazioan ipiniz

$(6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4B + 4(Ax^3 + Bx^2) + (6Ax^2 + 4Bx)\, e^{2x} +$
$+ (-4)\, (3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} - 8\, (Ax^3 + Bx^2)\, e^{2x} + 4\, (Ax^3 + Bx^2)\, e^{2x} = x\, e^{2x}$

$6Ax + 2B + 6Ax^2 + 4Bx + 4Ax^3 + 4Bx^2 + 6Ax^2 + 4Bx - 12Ax^2 -$
$- 8Bx - 8Ax^3 - 8Bx^2 + 4Ax^3 + 4Bx^2 = x$

$(6A + 4B + 4B - 8B)\, x + 2B = x$

$B = 0 \qquad A = 1/6$

$$y = c_1\, e^{2x} + c_2\, x\, e^{2x} + 1/6\, x\, e^{2x}$$

II. Orain honakoa suposatuko dugu:

$f (x) = P_n (x)\, e^{\alpha x} \cos \beta\, x + Q_n (x)\, e^{\alpha x} \sin \beta\, x$

a) $\alpha + i\,\beta$ ekuazio karakteristikoaren erroa ez bada, $y^* = P^*_n(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + Q^*_n(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x$

Adib.

$y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x$

$k^2 + 2k + 5 = 0 \qquad k = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i$

Beraz, $y = c_1\, e^{-x} \cos 2x + c_2\, e^{-x} \sin 2x$

Ekuazio ez-homogenoaren ondoko motako soluzio partikularra bilatuko dugu.

$y^* = A \cos x + B \sin x$

$y^{*\prime} = -A \sin x + B \cos x$

$y^{*\prime\prime} = -A \cos x - B \sin x$ ekuazioan ipiniz:

$-A \cos x - B \sin x + 2(-A \sin x + B \cos x) + 5(A \cos x + B \sin x) = 2 \cos x$

$(-A + 2B + 5A) \cos x + (-B - 2A + 5B) \sin x = 2 \cos x$

$$\left.\begin{array}{l} 4A + 2B = 2 \\ 4B - 2A = 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} A = 2B \\ 8B + 2B = 2 \quad B = 1/5 \quad A = 2/5 \end{array}$$

$y^* = 2/5 \cos x + 1/5 \sin x$ eta

$y = c_1\, e^{-x} \cos 2x + c_2\, e^{-x} \sin 2x + 2/5 \cos x + 1/5 \sin x$

b) $\alpha + \beta i$ ekuazio karakteristikoaren erroa da.

Beraz, $y^* = x\, [P^*_n(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + Q^*_n(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x]$

Adib.

$y'' + 4y = \cos 2x$ Ekuazio karakteristikoa $k^2 + 4 = 0$ da $\Rightarrow$ $k = \pm 2i$ eta $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$. Eta $\alpha + \beta i$ ekuazio karakteristikoaren erroa denez:

$y^* = x\,(A \cos 2x + B \sin 2x)$

$y^{*'} = A \cos 2x + B \sin 2x + x\,(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)$

$y^{*''} = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x - 2A \sin 2x + 2B \cos 2x +$
$+ x(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x)$

Ekuazioan ipiniz:

$-2A \sin 2\,x + 2B \cos 2x - 2A \sin 2x + 2B \cos 2x +$
$+ x(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x) + 4x\,(A \cos 2x + B \sin 2x) = \cos 2x$

$(-2A - 2A) \sin 2x + (2B + 2B) \cos 2c = \cos 2x$

$A = 0 \qquad B = 1/4$

eta $\qquad y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + 1/4 \sin 2x$

3.25.– GOI-MAILAKO EKUAZIO DIFERENTZIAL EZ-HOMOGENOAK

Izan bedi $y^{n)} + a_1\, y^{n-1)} + ... + a_n\, y = f\,(x)$, non $a_1 ... a_n\, f\,(x)$ x-en funtzio jarraiak diren.

Teorema:

$\overline{y}$ ekuazio diferentzial homogenoaren emaitza orokorra bada:

$y = \overline{y} + y^*$, (y^* ekuazio diferentzial ez-homogenoaren emaitza da)

ekuazio diferentzialaren emaitza orokorra da. Ekuazio honen y^* emaitza aurkitzeko, bigarren mailakoekin egin genuen bezala konstanteak aldatu egingo ditugu.

$\overline{y} = c_1\, y_1 + ... + c_n\, y_n$ ekuazio homogenoaren emaitza bada, konstanteak aldakor bihurtzen baditugu:

$y^* = c_1\,(x)\, y_1 + ... + c_n\,(x)\, y_n$ honen deribatua hau da:

$$y^{*\prime} = \underbrace{c'_1 y_1 + \ldots + c'_n y_n} + c_1 y'_1 + \ldots + c_n y'_n$$

hau berdin zero eginez

$$y^{*\prime\prime} = \underbrace{c'_1 y'_1 + \ldots + c'_n y'_n} + c_1 y''_1 + \ldots + c_n y''_n$$

hau berdin zero eginez

$$y^{*\prime\prime\prime} = \underbrace{c'_1 y''_1 + \ldots + c'_n y''_n} + c_1 y'''_1 + \ldots + c_n y'''_n$$

0 eginez, eta abar.

Sistema hau edukiko dugu:

$$\left.\begin{array}{l} c'_1 y_1 + \ldots + c'_1 y_n = 0 \\ c'_1 y'_1 + \ldots + c'_1 y'_n = 0 \\ . \\ . \\ . \\ c'_1 y_1^{n-1} + \ldots + c'_1 y_n^{n-1} = f(x) \end{array}\right\}$$

Eta gero funtzio hauek integratuz, emaitza lortuko dugu.

Batzuetan sistema hau aurkitu beharrean y* nolakoa den ikus dezakegu,

I. $f(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}$ denean $P(x)$ polinomio bat

a) α ekuazio karakteristikoaren erroa ez bada $\Rightarrow$

$$y^* = Q_n(x)\, e^{\alpha x}$$

b) α ekuazio karakteristikoaren erroa r mailakoa bada,

$$y^* = x^r\, Q_n(x)\, e^{\alpha x}$$

II. $f(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_n(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x$ denean:

a) $\alpha + \beta i$ ez da ekuazio karakteristikoaren erroa. Beraz:

$$y^* = P^*_n(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + Q^*_n(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x$$

b) $\alpha + \beta i$ ekuazio karakteristikoaren erroa da, r mailakoa, orduan.

$$y^* = x^r \left(P^*_n(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + Q^*_n(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x\right)$$

Adib.

$y^{IV)} - y = 5 \cos x$. Bere ekuazio karakteristikoa,

$k^4 - 1 = 0$ da $\Rightarrow$ $k = 1$ $k = i$
$k = -1$ $k = -i$ $\Rightarrow$

$$\overline{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

$y^* = A \cos x + B \sin x$ $\qquad$ $y^{*\prime} = -A \sin x + B \cos x$

$y^{*\prime\prime} = -A \cos x - B \sin x$ $\qquad$ $y^{*\prime\prime\prime} = A \sin x - B \cos x$

$y^{*IV)} = A \cos x + B \sin x$

ekuazio karakteristikoaren erroa denez, ezin daiteke hau egin eta $y^* = x\, A \cos x + Bx \sin x$ begiratu beharko dugu. Hemendik $A = 0$; $B = -5/4$ lortuko digutu.

a) Ekuazio diferentzialezko sistemak

$y = f(x)$ funtzio baten ekuazio diferentziala eduki beharrean, $y_1 \ldots y_n$ n funtzio ditugunean eta n ekuazio diferentzial,

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots y_n) \qquad \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \ldots y_n)$$

$$\frac{dy_3}{dx} = f_3(x, y_1, \ldots y_n) \qquad \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots y_n)$$

ekuazio diferentzialezko sistema edukiko dugu.

Sistema hau ebazteko aldaketak egingo ditugu:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, \ldots y_n\right)$$

•

•

•

$$\frac{d^n y_1}{dx} = F_n\left(x, y_1, \ldots y_n\right)$$ eta ordezkaketa-metodoa erabiliz, ondokoa lortuko dugu:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y_1, y'_1, \ldots y_1^{n-1}\right)$$ eta hau ekuazio diferentzial arrunta da.

Adib.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y + z + x \\ \frac{dz}{dx} &= -4y - 3z + 2x \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 1 =$$

$$= y + z + x - 4y - 3z + 2x + 1 =$$
$$= - 3y - 2z + 3x + 1$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y + z + x \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -3y - 2z + 3x + 1 \end{aligned}\right\}$$

$$z = y' - y - x \Rightarrow$$
$$y'' = -3y - 2y' + 2y + 2x + 3x + 1$$
$$y'' + 2y' + y = 5x + 1$$
$$k^2 + 2k + 1 = 0 \qquad k = -1$$

$y = c_1\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x}$

$y^{*\prime} = A y^{*\prime\prime} = 0$

$$y^* = Ax + B$$
$$-2A + Ax + B = 5x + 1$$
$$A = 5$$
$$10 + B = 1 \rightarrow B = -9$$

$y^* = 5x - 9$

$y = c_1\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x} + 5x - 9$

$y' = -c_1\, e^{-x} - c_2\, x\, e^{-x} + c_2\, e^{-x} + 5$

$z = -c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-x} - c_2\, x\, e^{-x} + 5 - c_1\, e^{-x} - c_2\, x\, e^{-x} - 5x + 9 - x$

$z = -2c_2\, x\, e^{-x} - 6x + 14 - 2\, c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-x}$

y_1 ... y_n-ren espresioa aurkitu eta gero ekuazio diferentzialaren maila n baino txikiagoa izatea askotan gertatuko da.

Adib.

$$\frac{dx}{dt} = y + z \qquad \frac{dy}{dt} = x + z \qquad \frac{dz}{dt} = x + y$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 2x + y + z$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 2 + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 2 + x + z + y + x = 2 + 2x + z + y$$

$$\frac{dx}{dt} = y + z \qquad z = \frac{dx}{dt} - y$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 2 + 2x + z + y$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + \frac{dx}{dt} - y$$ eta ezin dugu z isolatu. Beraz:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 2x \qquad \begin{array}{l} x'' - x' - 2x = 0 \\ k^2 - k - 2 = 0 \end{array}$$

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2c_1 e^{2t} - 1c_2 e^{-t} \quad \Rightarrow \quad z = 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} - y$$

$$\frac{dy}{dt} = x + 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} - y = 3c_1 e^{2t} - y$$

$$\frac{dy}{dt} + y = 3c_1 e^{2t} \qquad y = -(c_1 + c_3)e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

Sistema batean ager daitezke maila handiagoko deribatuak. Guk ordea, bigarren mailakoak bakarrik ikusiko ditugu.

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = F_1\left(x, y_1, y_n, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_n}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2y_n}{dt^2} = F_n\left(x, y_1, y_n, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_n}{dt}\right)$$

Ekuazio hau askatzeko ondokoa egin dezakegu:

$$\frac{dy_1}{dx} = u_1 \qquad \frac{dy_2}{dx} = u_2 \; \ldots \; \frac{dy_n}{dx} = u_n$$

Eta 2n ekuazioko sistema izango dugu:

$$\frac{dy_1}{dx} = u_1 \qquad \frac{dy_2}{dx} = u_2 \qquad \frac{dy_n}{dx} = u_n$$

$$\frac{du_1}{dx} = F_1(x, y_1, y_n, u_1 \ldots u_n)$$

•

•

•

$$\frac{du_n}{dx} = F_n(x, y_1, y_n, u_1 \ldots u_n)$$

eta hemendik aurrera aurreko atalean bezala jarraitzen da.

Adib.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = z \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = y \qquad \frac{dy}{dx} = u_1 \qquad \frac{dz}{dx} = u_2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= u_1 \\ \frac{dz}{dx} &= u_2 \\ \frac{du_1}{dx} &= z \\ \frac{du_2}{dx} &= y \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= z \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{dz}{dx} = u_2 \\ \frac{d^4y}{dx^4} &= \frac{du_2}{dx} = y \end{aligned}$$

$$y^{IV)} - y = 0 \qquad k^4 - 1 = 0 \qquad k = \pm 1 \qquad k = \pm i$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

$$y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} - c_3 \sin x + c_4 \cos x$$

$$y'' = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x = z$$

b) Koefiziente konstanteak dituzten ekuazio diferentzialezko sistemak

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n$$

$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1} y_1 + \ldots + a_{nn} y_n$$

Sistema honi sistema homogeno deitzen zaio. Ondokoa kontsideratuko dugu: $x^*_1 = \alpha_1 e^{kt}$ ... $x^*_n = \alpha_n e^{kt}$ bilatu behar ditugu α_1 ... α_n eta k ekuazioan ordezkatuz.

$$(a_{11} - k)\, \alpha_1 + \ldots + a_{1n}\, \alpha_n = 0$$
$$a_{n1}\, \alpha_1 + \ldots + (a_{nn} - k)\, \alpha_n = 0$$

Sistemaren determinantea hau da:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{1n} \\ . & & \\ . & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Ekuazio karakteristiko deitzen zaio.}$$

1) Ekuazio karakteristikoaren erroak errealak eta ezberdinak direnean, $k_1 ... k_n$.

   k_i bakoitzarentzat $\alpha_1^{(i)}$ $\alpha_n^{(i)}$ aurkituko ditugu. Gainera $\alpha^{(i)}$ 1 dela pentsa dezakegu, eta:

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ldots x_n = \sum_{i=1}^{n} x_n c_i$$

   eta hau emaitza orokorra da.

Adib.

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2 \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2$$

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \qquad (2-k)(3-k) - 2 = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow k_1 = 1 \\ \searrow k_2 = 4 \end{array}$$

$k_1 = 1$ denean $\quad x_1^{(1)} = \alpha_1 e^t \qquad x_2^{(1)} = \alpha_2 e^t$

$(2-1)\,\alpha_1 + 2\,\alpha_2 = 0 \qquad \alpha_1 = -2\,\alpha_2$

$\alpha_1 + (3-1)\,\alpha_2 = 0 \qquad \alpha_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -2$

$x_1^{(1)} = -2e^t \qquad x_2^{(1)} = e^t$

$-2\,\alpha_1 + 2\,\alpha_2 = 0 \qquad \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = 1$

$x_1^{(2)} = e^{4t} \qquad x_2^{(2)} = e^{4t}$

$x_1 = -2\,c_1\,e^t + c_2\,e^{4t} \qquad x_2 = c_1\,e^t + c_2\,e^{4t}$

2) Erroak desberdinak dira, baina ez dira denak errealak:

$k_1 = \alpha + \beta\, i \qquad k_2 = \alpha - i\,\beta$

$y_1^{(1)} = \alpha_j^{(1)} e^{(\alpha + i\beta)x} \qquad y_j^{(1)} = \alpha_j^{(2)} e^{(\alpha + i\beta)x}$

Adib.

$$\frac{dx_1}{dt} = -7y_1 + x_2 \qquad \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2$$

$k_1 = -6 + i \qquad k_2 = -6 - i \quad$ Hemendik

$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 1 + i$

$x_1^{(1)} = 1\,e^{(-6+i)t} \qquad x_2^{(1)} = (1+i)\,e^{(-6+i)t}$

$k_2 = -6 - i \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 1 - i$

$$x_1^{(2)} = e^{(-6-i)t} \qquad x_2 = (1-i)e^{(-6-i)t}$$

$$x_1^{(1)} = e^{-6t}(\cos t + i \sin t)$$

$$x_2^{(1)} = e^{-6t}(\cos t - \sin t) + i\, e^{-6t}(\cos t + \sin t)$$

$$x_1^{(2)} = e^{-6t}(\cos t - i\, e^{-6t} \sin t)$$

$$x_2^{(2)} = e^{-6t}(\cos t - \sin t) - i\, e^{-6t}(\cos t + \sin t)$$

$$\overline{x}_1^{(1)} = e^{-6t} \cos t \qquad \overline{x}_2^{(1)} = e^{-6t}(\cos t - \sin t)$$

$$\overline{x}_1^{(2)} = e^{-6t} \sin t \qquad \overline{x}_2^{(2)} = e^{-6t}(\cos t + \sin t)$$

$$x_1 = c_1\, e^{-6t} \cos t + c_2\, e^{-6t} \sin t$$
$$x_2 = c_1\, e^{-6t} (\cos t - \sin t) + c_2\, e^{-6t} (\cos t + \sin t)$$

Berdin egin daiteke koefiziente konstanteak dituzten goi-mailako ekuazio diferentzialen sistemetan.

4. FOURIER-EN SERIEAK

4.1.- DEFINIZIOA

Lehenengo serie trigonometrikoa zer den ikusiko dugu.

$$\frac{a_o}{2} + a_1 \cos x + a_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots =$$

$$= \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$ serie honi serie trigonometriko deitzen zaio.

Seriea osatzen duen funtzioak periodikoak direnez, serie hau konbergentea baldin bada, bere baturak ere periodikoa izan beharko du.

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) = f(x) \quad \text{Beraz } f(x) = f(x + 2\pi)$$

Guk egitea nahi duguna, alderantzizkoa da: funtzio bat hartu eta serie trigonometriko gisa nola gara daitekeen ikustea. Horretarako Fourier-en formulak erabiliko ditugu, formula hauen bidez koefizienteak lortuz.

Guk f (x) funtzio periodiko bat hartzen badugu eta serie trigonometriko gisa gara daitekeela kontsideratzen badugu:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

Bi aldeak $-\pi$-tik π-ra integratuz:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_o}{2}\,dx \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_o}{2}\,dx \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = 0 \qquad \text{eta} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0 \quad \rightarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_o \pi \qquad \rightarrow \qquad a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

Beste koefizienteak aurkitzeko funtzioa cos kx-ez biderkatzen badugu:

$$f(x)\cos kx = \frac{a_o}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_k \cos nx \cos kx + b_k \cos kx \sin nx\right)$$

eta:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_o}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos nk \cos kx\,dx + \right.$$

$$\left. + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos kx\,dx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin(n+k)x + \frac{1}{2}\sin(n-k)x\right)dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx = 0$$

$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cos nx \cos kx\,dx$ kalkulatzeko bi kasu bereiztuko ditugu: $k = n$
$k \neq n$

$$k \neq n \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}\cos(n+k) + \frac{1}{2}\cos(n-k)\right]dx = 0$$

$$k = n \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2k}{2}dx = \pi$$

Eta:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k\pi \qquad \rightarrow \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

Orain sin kx-ez biderkatzen badugu:

$$f(x)\sin kx = \frac{a_o}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \cos nx\,dx +$$

$$+\sum_{n-1}^{\infty}b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \sin nx\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(n-k) - \cos(n+k)\right)dx$$

$$n \neq k \qquad = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \lfloor \cos(n-k) - \cos(n+k) \rfloor dx = 0$$

$$n = k \qquad = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [1 - \cos 2k] dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx = b_k \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx$$

Koefiziente hauei Fourierren koefiziente deitzen zaie eta garapenari Fourierren garapena.

Guk ikusi duguna, dagoenean garapena nolakoa den izan da eta orain zein baldintzatan dagoen ikusi beharko dugu.

Definizioa:

Funtzio bat zatika [a,b] tartean monotonoa dela esango dugu tarte horretan dauden eten-puntuen kopurua finitua baldin bada.

Gainera zati horietan monotonoa denez, eten-puntuetan alboko limiteak daude eta lehen jeneroko etenak dira.

Teorema:

f (x) funtzio periodiko bat zatika monotonoa baldin bada eta $[-\pi, \pi]$ tartean baldin badago, funtzioa jarraia den puntu guztietan atera daiteke Fourierren seriea eta funtzioa jarraia ez den puntuetan S batura ezker- eta eskuin-limiteen batezbestekoa da.

Funtzio periodikoen propietate bat

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) dx = \int_{\lambda\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x) dx$$ ψ (x) edozein λ-rentzat periodikoa bada.

Frogapena:

Badakigu ψ $(x + 2\pi) = \psi$ (x) edozein x-entzat $y = x + 2\pi$ egiten badugu $\rightarrow$ $y = x + 2\pi$ aldagai-aldaketa eginez:

$$\int_b^a \psi(y)\,dy = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} \psi(x+2\pi)\,dx = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} \psi(x)\,dx =$$

$$\int_{a-2\pi}^{b-2\pi} (y)\,dy.$$ Beraz a = π eta b = +2π eginez →

$$\int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\lambda} \psi(x)\,dx,$$ baina

$$\int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x)\,dx = \int_{\lambda}^{-\pi} \psi(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx + \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx$$ → edozein 2π luzerako tarte batean integrala berdina da.

Propietate honek askotan erraztu egiten du koefizienteen kalkulua.

4.2.– FOURIER-EN SERIEAK FUNTZIO PERIODIKOENTZAT

Funtzio bikoitien definizioak esaten digunez:

ψ (–x) = ψ (x). Beraz:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} \psi(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} \psi(x)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi} \psi(-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} \psi(-x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} \psi(x)\,dx$$

Funtzioa bakoitia baldin bada:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} \psi(-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} \psi(x)\,dx = 0$$

Funtzio bikoiti baten Fourierren seriea garatzeko:

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$ f (x) eta cos kx bikoitiak direnez, biderkadura ere bikoitia izango da.

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$ f (x) bikoitia baldin bada, f (x) sin kx bakoitia da.

$$\rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = 0$$ eta funtzio bikoitien garapenean kosinuak bakarrik azalduko dira.

f (x) funtzio bakoitia baldin bada:

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

f (x) bakoitia da eta cos kx bikoitia $\rightarrow$
f (x) cos kx bakoitia. Beraz, $a_k = 0$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

f (x) bakoitia bada eta sin kx bakoitia $\rightarrow$
f (x) sin kx bikoitia eta

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(k)\sin kx\,dx \;\rightarrow\; \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \;\rightarrow$$

funtzio bakoitien garapenean sinuak bakarrik agertzen dira.

4.3.– PERIODOA 2π-REN DESBERDINA DUTEN FUNTZIOEN GARAPENA

Izan bedi f (x) 2 ℓ periodoa duen funtzioa, $2\ell \neq 2\pi$ funtzio honen garapena egiteko.

$x = \frac{\ell}{\pi} t$ aldagai-aldaketa egiten baldin badugu $\rightarrow$

$f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)$-ren periodoa 2π da t aldagaiarentzat $\rightarrow$

$$f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right)$$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) dt \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) \cos kt\, dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) \sin kt\, dt$$

Orain aldagai hau berriz x-era eramango dugu:

$$x = \frac{\ell}{\pi} t \qquad t = x\frac{\pi}{\ell} \qquad dt = \frac{\pi}{\ell} dx$$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\frac{\pi}{\ell} dx = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right) \cos kt\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(k\frac{\pi}{\ell} x\right) \frac{\pi}{\ell} dx$$

$$= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right) \sin kt\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) \frac{\pi}{\ell} dx$$

$= \frac{1}{\ell}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) dx$ hauek dira 2ℓ periodoko funtzio baten garapenaren koefizienteak eta garapena.

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi}{\ell} x + b_k \sin\frac{k\pi}{\ell} x\right)$$

4.4.– FUNTZIO EZ-PERIODIKOEN GARAPENA

[a,b] tartean f(x) funtzioa zatika monotonoa dela kontsideratuko dugu. Garatuko dugun beste funtzio bat f_1 periodikoa eta [a,b] tartean f(x)-en berdina dena da → [a,b] tartean biak garapen berdina dute.

Demagun f(x) funtzio bat dugula; zatika monotonoa [a,b] tartean. Funtzio honek Fourierren serie bat onartzen du jarraia den puntuetan. Hori frogatzeko har dezagun funtzio periodiko zatikor monotono bat (edozein), f_1 (x), bere periodoa $2\mu \geq |b-a|$ izanik, eta [a,b] tartean f(x)-en balio berdinak hartzen dituelarik.

Gara dezagun $f_1(x)$ funtzioa, Fourierren serie batean. Serie honen batura, [a,b] tarteko puntu guztietan, eta f(x) berdinak dira eta honek Fourierren serie batean [a,b] tartean f(x) garapena lortu dugula esan nahi du.

Ikus dezagun garrantzi handiko beste kasu bat. Demagun f(x), $[o,\ell]$ tartean definituta. Funtzio honen definizioa osatuz $[-\ell,o]$ tartean (zatikako monotonia gordez), gara dezakegu f Fourierren serie batean.

Gainera, $-\ell \leq x \leq 0$ betetzen duten x-entzat f(x) = f(–x) badugu, funtzio bikoiti bat lortuko dugu. Fourierren seriea kosinuz osaturik egongo da. Aldiz, f(x) = –f(–x) betetzen bada, $[-\ell,o]$ tartean funtzioa bakoitia da eta Fourierren garapenean sinuak bakarrik agertzen dira.

Adib.

1. Garatu f(x) = x, $[o,\pi]$ tartean sinuen seirean funtzioaren luzapen bakoiti bat eginda:

$$x = 2\left[\frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right]$$

2. Garatu f(x) = x, $[o,\pi]$ tartean kosinuen seriean funtzioaren luzapen bikoiti bat egin ondoren:

$$f(x) = |x| \qquad -\pi < x \leq \pi$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right]$$

5. KALKULU OPERAZIONALA

5.1. Oinarrizko funtzioa eta bere eredua
5.2. Funtzioen irudia
5.3. Aldagaia aldatua duten funtzioen irudia
5.4. Irudiaren linealtasuna
5.5. Desplazamendu-teorema
5.6. Irudiaren deribazioa
5.7. Deribatuen irudia
5.8. Ekuazio diferentzial baten ekuazio lagungarria
5.9. Deskonposizio-teorema

5.1.- OINARRIZKO FUNTZIOA ETA BERE IRUDIA

Izan bedi f (t), t-ren funtzio bat, $t \geq 0$. f zatika jarraia dela kontsideratuko dugu eta $|f(t)| < M e^{s_o t}$ $\forall t \geq 0$ dela. f (t) e^{-pt} funtzioa aztertuko dugu, non p zenbaki konplexua bait da, eta

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-at} f(t) \cos bt\,dt - i \int_0^\infty e^{-at} f(t) \sin bt\,dt$$

$a > S_o$ denean integral hauek existitzen dira eta honen p-ren funtzio bat emango digu

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$$

eta F (p)-ri, f (t)-ren Laplaceren transformatu deituko diogu.

Hau adierazteko ondokoa egin daiteke:

$$F(p) \rightarrow f(t)$$
$$f(t) \leftarrow F(p)$$

Horrela eragiketa asko sinplifikatuko dugu.

Teorema:

Bi funtziok φ (t) eta ψ (t) irudi berdina baldin badute, berdinak dira.

5.2.– FUNTZIOEN IRUDIAK

Orain funtzio batzuen irudiak kalkulatuko ditugu:

1) $f(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ funtzio honi funtzio unitario deitzen zaio.

$$\int_0^\infty e^{-pt} 1\,dt = -\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^\infty \frac{1}{p}.\text{Beraz, } \frac{1}{p} \;\dot{\rightarrow}\; 1$$

2) f (t) = sint

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}\sin t\,dt = \frac{1}{p^2+1} \quad ; \quad \frac{1}{p^2+1} \;\div\!\!> \; \sin t$$

3) f (t) = cost

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}\cos t\,dt = \frac{p}{p^2+1} \quad ; \quad \frac{p}{p^2+1} \;\div\!\!> \; \cos t$$

5.3.– ALDAGAIA ALDATUA DUTEN FUNTZIOEN IRUDIA

f (at) funtzioentzat, non a > 0, irudia nolakoa den ikusiko dugu.

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(at)\,dt \qquad\qquad \begin{array}{l} z = at \text{ eginez} \\ dz = a\,dt \end{array}$$

$$\rightarrow \int_0^{\infty - pz/a} f(z)\frac{1}{a}dz = \frac{1}{a}\int_0^{\infty - p/az} f(z)dz$$

eta F (p) $\div\!\!>$ f (t) betetzen bada $\rightarrow$ 1/a F (p/a) $\div\!\!>$ f (at)

Adib.

sin at-ren irudia hau izango da:

$$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{(p/a)^2+1}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{p^2/a^2+1}\right) = \frac{a}{p^2+a^2}$$

cos at-ren irudia kalkulatzeko:

$$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) = \frac{1}{a}\left(\frac{p/a}{(p/a)^2+1}\right) = \frac{p}{p^2+a^2}$$

5.4.– IRUDIAREN LINEALTASUNA

Teorema:

N funtzioen konbinazio lineal bat badugu:

$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t) = f(t)$ Beraz, f(t)-ren irudia $F(p) = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(p)$

$F_i(p) \div\!\!> f_i(t)$ den.

Frogapena:

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-pt} \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)\,dt = \int_0^\infty \sum_{i=1}^{n} e^{-pt} c_i f_i(t)\,dt =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty e^{-pt} c_i f_i(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_0^\infty e^{-pt} f_i(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(p) = F(p)$$

Adib.

f (t) = 3 – cos 2t-ren irudia kalkulatzeko, f (t) = 3 1 + (–1) cos 2t

$$F(p) = 3\frac{1}{p} + (-1)\frac{1}{2}\frac{p/2}{(p/2)^2 + 1} = \frac{3}{p} + (-1)\frac{p}{p^2+4} =$$

$$= \frac{3(p^2+4) - p^2}{p^3 + 4p} = \frac{2p^2 + 12}{p^3 + 4p}$$

Hau alderantziz ere egin dezakegu:

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(p). \text{ Beraz, } f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)$$

$F(p) \div\!\!> f(t)$ $F_i(p) \div\!\!> f_i(t)$

Adib.

$$F(p) = \frac{2p}{(p^2+4)(p^2+q)}$$

$$\frac{Mp + N}{p^2 + 4} + \frac{Ap + B}{p^2 + q} = \frac{2p}{(p^2+4)(p^2+q)}$$

$$M = \frac{2}{5} \qquad N = 0 \qquad A = -\frac{2}{5} \qquad B = 0$$

$$F(p)\frac{2}{5}\frac{p}{p^2+4} + \left(-\frac{2}{5}\right)\frac{p}{p^2+q}$$

$$f(t) = \frac{2}{5}\cos 2t - \frac{2}{5}\cos 3t$$

5.5.– DESPLAZAMENDU-TEOREMA

Teorema:

F (p), f (t)-ren irudia baldin bada, F (p + α) $\rightarrow e^{-\alpha t}$ f (t)

Frogapena:

$$\int_0^\infty e^{-pt}e^{-\alpha t}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(p+\alpha)t}f(t)dt = F(p+\alpha)$$

Hemendik ondokoa ateratzen da:

$$\frac{1}{p+\alpha} \doteq e^{-\alpha t} \qquad \frac{1}{p-\alpha} \doteq e^{\alpha t}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p+\alpha}\right) \doteq \frac{1}{2}\left(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}\right) = \sinh \alpha t$$

Era berean $\frac{p}{p^2-\alpha^2} \rightarrow \cosh \alpha t$

eta $\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2} \rightarrow e^{-\alpha t}\sin at$

eta $\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2} \rightarrow e^{-\alpha t}\cos at$

Adib.

$$F(p) = \frac{7}{p^2 + 10p + 41} \quad \text{zein funtzioren irudia den kalkulatu}$$

$$\frac{7}{p^2 + 10p + 41} = \frac{7}{(p+5)^2 + 16} = \frac{7}{4}\frac{4}{(p+5)^2 + 4^2} = \frac{7}{4}e^{-5t}\sin 4t$$

5.6.– IRUDIAREN DERIBAZIOA

Teorema:

Izan bedi $F(p) \;\dot{\supset}\; f(t) \;\rightarrow\; (-1)^n \frac{t^n F(p)}{dp^n} \;\dot{\supset}\; t^n f(t)$

Frogapena:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt \quad = \int_0^\infty e^{-pt}(-t)^n \cdot f(t) \cdot dt =$$

$$= \frac{d^n}{dp^n} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt \quad \Rightarrow (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} f(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^n f(t)$$

Hau funtzio batzuen irudiak kalkulatzeko aplikatuko dugu.

$$\frac{1}{p} \;\dot{\supset}\; 1$$

$$-\left(\frac{1}{p}\right)' \;\dot{\supset}\; t \;\Rightarrow\; -\left(-\frac{1}{p^2}\right) \;\dot{\supset}\; t \;\Rightarrow\; \frac{1}{p^2} \;\dot{\supset}\; t$$

$$-\left(\frac{1}{p^2}\right)' \;\dot{\supset}\; t^2 \;\Rightarrow\; \frac{2}{p^3} \;\dot{\supset}\; t^2$$

.

.

.

$$\frac{n!}{p^{n+1}} \;\dot{\supset}\; t^n$$

5.7.– DERIBATUEN IRUDIA

Ondokoa kalkulatu behar dugu: $\int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt =$

$$= \left\lfloor e^{-pt} f(t) \right\rfloor_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = -f(0) + pF(p)$$

$$p\,F(p) - f(0) \quad \dot{\rightarrow} \quad f'(t)$$

Era berean $p\,[p\,F(p) - f(0)] - f'(0) \quad \dot{\rightarrow} \quad f''(t)$

$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) \quad \dot{\rightarrow} \quad f''(t)$

$p\,[p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)] - f''(0) \quad \dot{\rightarrow} \quad f'''(t)$

$p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0) \quad \dot{\rightarrow} \quad f'''(t)$

$p^3 F(p) - [p^2 f(0) + pf'(0) + f''(0)] \quad \dot{\rightarrow} \quad f'''(t)$

.

.

.

$p^n F(p) - [p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) ...+ f^{n-1}(0)] \quad \dot{\rightarrow} \quad f^n(t)$

5.8.– EKUAZIO DIFERENTZIAL BATEN EKUAZIO LAGUNGARRIA

$a_o\, x^{n)} + ... + a^n\, x = f(t)$ ekuazio diferentzialen $x = x(t)$ emaitza aurkitzeko $x(0) = x_o \quad x^{n-1)}(0) = x_o^{n-1}$

$\overline{x}(p) \quad \dot{\rightarrow} \quad x(t)$ kontsideratuko dugu.

Ekuazio diferentziala e^{-pt} gaiaz biderkatuz eta integratuz:

$$\int_0^\infty \left(a_o e^{-pt} x^{n)} + ... + a_n e^{-pt} x\right) dt =$$

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = a_o\left[p^n\overline{x}(p) - \left(p^{n-1}x_o + \ldots + x_o^{n-1)}\right)\right] + a_1\left[p^{n-1}\overline{x}(p) - \left(p^{n-2}x_o + \ldots + x_o^{n-2)}\right)\right]$$

$$_2\left[p^{n-2}\overline{x}(p) - \left(p^{n-3}x_o + \ldots + x_o^{n-3)}\right)\right] + \ldots + a_n\overline{x}(p) = F(p) \;\Rightarrow\; x(p)\left(p^n a_o + \ldots + a_n\right.$$

$$-a_0\left(p^{n-1}x_o + \ldots + x_o^{n-1}\right) + a_1\left(p^{n-2}x_o + \ldots + a_{n-1}x_o + F(p)\right)$$

$$\overline{x}\,(p)\; \varphi_n\,(p) = \varphi_{n-1}\, p + F\,(p)$$

$$\overline{x}(p) = \frac{\varphi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)} + \frac{F(p)}{\varphi_n(p)}$$ eta hemendik x (t) atera dezakegu.

Adib.

Bilatu $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 1$ ekuazio diferentzialaren emaitza orokorra:

$t = 0 \qquad x\,(0) = B \qquad x'\,(0) = A \qquad \overline{x}\,(p) \qquad 1 \leftrightarrow \frac{1}{p}$

$$p^2\overline{x}(p) - px'(0) - x(0) + 9\overline{x}(p) = \frac{1}{p}$$

$$\overline{x}(p)\left(p^2 + 9\right) = Ap + B + \frac{1}{9}$$

$$x(p) = \frac{Ap + B}{p^2 + q} + \frac{1}{p\left(p^2 + q\right)} = \frac{Ap}{p^2 + q} + \frac{B}{p^2 + q} + \frac{1}{9p} - \frac{1}{9}\frac{p}{p^2 + q}$$

funtzioa kalkulatzeko taula erabiliko dugu:

$$x(t) = \frac{1}{9} + B\left(-\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{1}{3}\sin 3t + A\cos 3t$$

$$x(t) = -\frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{9}$$

5.9.– DESKONPOSIZIO-TEOREMA

Funtzioak frakzioen deskonposaketaren arabera nolakoak diren ikusiko dugu.

I. $\dfrac{A}{p-\alpha} \;\dot{\to}\; A e^{\alpha t}$

II. $\dfrac{A}{(p-\alpha)^k} \;\dot{\to}\; A \dfrac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\alpha t}$

III. $\dfrac{Ap+B}{p^2+a_1 p+a_2}$

non $p^2 + a_1\, p + a_2$ polinomioaren erroak konplexuak bait dira.

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2} = \frac{Ap+B}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 \left(\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right)^2}$$

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2} \;\to\; e^{-\frac{a_1}{2}} \left[A\cos t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}} + \frac{B-A\frac{a_1}{2}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}} \sin t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}} \right]$$

Adib.

1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sin 3t \qquad x_0 = 0 \qquad x_0 = 0 \qquad t = 0$ denean

$$\bar{x}(p)\left(p^2+4\right) = \frac{3}{p^2+9}$$

$$\bar{x}(p) = \frac{3}{\left(p^2+4\right)\left(p^2+9\right)} =$$

$$\frac{Ap+B}{p^2+4} + \frac{Cp+D}{p^2+9} = \frac{3}{\left(p^2+4\right)\left(p^2+9\right)}$$

$$A = 0 \qquad C = 0 \qquad B = \frac{3}{5} \qquad D = -\frac{3}{5}$$

$$\overline{x}(p) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{p^2+4} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{p^2+9} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2+4} - \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{p^2+9} =$$

$$= \frac{3}{10}\sin 2t - \frac{1}{5}\sin 3t$$

2) $$\left.\begin{array}{l} 3\dfrac{dx}{dt} + 2x + \dfrac{dy}{dt} = 1 \\ \dfrac{dx}{dt} + 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0 \end{array}\right\} \qquad x = 0 \quad y = 0 \quad t = 0$$

$\overline{x}(p) \quad \div\!\!> \quad x(t) \qquad \overline{y}(p) \quad \div\!\!> \quad y(t)$ irudia

$$3p\,\overline{x}(p) + 2\overline{x}(p) + p\,\overline{y}(p) = \frac{1}{p}$$

$$p\overline{x}(p) + 4\,p\overline{y}(p) + 3\,\overline{y}(p) = 0$$

$$3p\,\overline{x}(p) + 2\overline{x}(p) + p\,\overline{y}(p) = \frac{1}{p}$$

$$p\overline{x}(p) + (4p+3)\,\overline{y}(p) = 0$$

$$\overline{x}(p) = \frac{\begin{vmatrix} 1/p & p \\ 0 & 4p+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3p+2 & p \\ p & 4p+3 \end{vmatrix}} = \frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{5(p+1)} - \frac{3}{10(11p+6)}$$

$$\overline{y}(p) = \frac{\begin{vmatrix} 3p+2 & 1/p \\ p & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3p+2 & p \\ p & 4p+3 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{(11p+6)(p+1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{11}{11p+6}\right)$$

beraz:

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{3}{10}^{-\frac{6}{11}t}$$

$$y(t) = \frac{1}{5}\left(e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t}\right)$$

	$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)pt$	f (t)
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
3	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
4	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
5	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$\sin h\ \alpha t$
6	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$\cos h\ \alpha t$
7	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t}\sin at$
8	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t}\cos at$
9	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
10	$\frac{2pa}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$t\sin at$
11	$-\frac{a^2-p^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$t\cos at$
12	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$t\,e^{-\alpha t}$
13	$\frac{1}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
14	$(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)$	$t^n f(t)$
15	$F_1(p)\,F_2(p)$	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(f-\tau)d\tau$