



ELHUYAR
edizioak

ZIRKUITU ELEKTRIKOAK

Joxe Epelde



ELHUYAR
edizioak

ZIRKUITU ELEKTRIKOAK

Injinerutza Teknikoa

Egilea: **Joxe Epelde**

Azala: **Mari Karmen Urdangarin**

Maketa: **Olatz Rico**

Hezkuntza, Unibertsitate eta Ikerketa Sailaren laguntzaz argitaratu da. (1996-IX-19)

© Elhuyar Fundazioa. Zelai Haundi, 3. Osinalde industrialdea
20170 Usurbil(Gip.) (1996)
elhuyar@elhuyar.com - www.elhuyar.org

AURKIBIDEA

	Or.
I. KORRONTE ZUZENARI BURUZKO LABURPENA	7
1.1. MAGNITUDEAK	7
1.1.1. Karga elektrikoa (Q)	7
1.1.2. Intentsitatea (I)	7
1.1.3. Tentsioa (V)	8
1.1.4. Erresistentzia elektrikoa (R)	8
1.1.5. Ohmen legea	9
1.1.6. Energia elektrikoa	9
1.1.7. Potentzia elektrikoa (P)	9
1.2. KORRONTE-MOTAK	10
1.3. KONEXIO-MOTAK	11
1.4. KIRCHHOFF-EN ARAUAK	13
1.4.1. Arau hauen erabilera	14
1.4.2. Zirkuituak ebazteko urratsak	15
1.4.3. Adibidea (maila batekoa)	17
1.4.4. Adibidea (Kirchhoff)	19
1.5. MAILEN METODOA	19
1.6. ARIKETAK	20
 II. KORRONTE ALTERNOA – Magnitudeak	 23
2.1. UHIN ALTERNOAREN EZAUGARRIAK	23
2.2. UHIN SINUSOIDALAREN NEURRIAK	24
2.2.1. Anplitudea	24
2.2.2. Periodoa (T)	24
2.2.3. Zikloa (T)	24
2.2.4. Maiztasuna	24
2.2.5. Abiadura angeluarra edo maiztasun angeluarra	25
2.2.6. Desfasea	25
2.2.7. Bi uhinen arteko desfasea	26
2.2.8. Batezbesteko balioa	26
2.2.9. Uhin sinusoidalaren batez besteko balioa	26
2.2.10. Balio efikaza	27

2.3.	FASOREAK	28
2.3.1	Uhin sinusoidalen batuketa.....	29
2.4.	ARIKETAK.....	30
III.	ELEKTRIZITATEKO EREDU MATEMATIKOAK.....	31
3.1.	DEFINIZIOAK	31
3.2.	ERRESISTENTZIA (R).....	32
3.3.	AUTOINDUKZIOA (L).....	33
3.3.1.	Harilaren energia magnetikoa	35
3.3.2.	Harilaren inpedantzia (korronte alternoan).....	35
3.4.	KONDENTSADOREA (C)	36
3.4.1.	Adibidea	37
3.4.2.	Kondentsadorearen energia	38
3.4.3.	Kondentsadorearen inpedantzia (korronte sinusoidalean)	38
3.5.	ARIKETAK.....	39
3.5.1.	Emaitzak	41
IV.	ZIRKUITU SINUSOIDALAK	43
4.1.	INPEDANTZIEN LABURPEN-TAULA	43
4.2.	SERIEKO ZIRKUITUA (ADIBIDEA)	43
4.3.	PARALELOKO ZIRKUITUA (ADIBIDEA).....	45
4.4.	SERIE/PARALELOKOA (ADIBIDEA)	46
4.5.	DIAGRAMA FASORIALAK.....	47
4.6.	KIRCHHOFF-EN ARAUEN ADIBIDEA.....	48
4.7.	ARIKETAK.....	49
V.	POTENTZIA MONOFASIKOA	53
5.1.	ALDIUNEKO POTENTZIA	53
5.2.	POTENTZI KORRANTE SINUSOIDALEAN.....	53
5.2.1.	Potentzia aktiboa (P).....	54
5.2.2.	Potentzia erreaktiboa (Q)	55
5.2.3.	Itxurazko potentzia (S)	55
5.3.	POTENTZI TRIANGELUA.....	56
5.3.1.	Karga induktiboa	56
5.3.2.	Karga kapazitiboa	56

5.4. POTENTZIA MONOFASIKOAREN ADIBIDEAK	58
5.4.1. Makina	58
5.4.2. Eraikina.....	58
5.4.3. Transformadorea	60
5.4.4. Linea eta karga.....	61
5.4.5. Zirkuitua	63
5. 5 ARIKETAK.....	64
 VI. KIRCHHOFF-EN ARAUAK KORRONTE ALTERNOAN	
(determinanteak)	67
6.1. DETERMINANTEAK	67
6.1.1. Adjuntua	68
6.1.2. Osagai txikiena	68
6.2. KIRCHHOFF-EN ARAUEN ADIBIDEA.....	69
6.3. ARIKETA.....	70
 VII. SAREEN TEOREMA OROKORRAK	71
7.1. GAINEZARMEN-TEOREMA	71
7.1.1. Adibidea	71
7.1.2. Ariketa.....	73
7.2. THEVENINEN TEOREMA.....	73
7.2.1. Theveninen tentsioa (V_{th})	74
7.2.2. Theveninen inpedantzia (Z_{th}).....	74
7.2.3. Adibidea	74
7.3. NORTONEN TEOREMA.....	76
7.3.1. Nortonen inpedantzia.....	76
7.3.2. Nortonen korrante-iturria (I_N)	76
7.3.3. Adibidea	76
7.4. THEVENIN ETA NORTONEN ARTEKO ALDERAKETA	78
7.5. THEVENIN ETA NORTONEN TEOREMEN ADIBIDEAK	78
7.6. ARIKETAK.....	84
 VIII. SARE TRIFASIKOAK.....	87
8.1. SARE TRIFASIKOA	87

8.2.	ITURRIETAKO KONEXIOA	89
8.2.1.	Izar konexioa	89
8.2.2.	Izendapena	89
8.2.3.	Triangelu konexioa.....	91
8.3.	KARGA IZAR KONEXIOAN	92
8.3.1.	Lau eroaleko sarea (karga desorekatua).....	92
8.3.2.	Lau eroaleko sarea (karga orekatua)	93
8.3.3.	Hiru eroaleko sarea (karga desorekatua)	94
8.4.	KARGA TRIANGELU KONEXIOAN	96
8.4.1.	Karga desorekatua	96
8.4.2.	Karga orekatua.....	97
8.5.	POTENTZIA TRIFASIKA	98
8.5.1.	Karga orekatua triangelu konexioan	98
8.5.2.	Karga orekatua izar konexioan	99
8.6.	POTENTZIA TRIFASIKOAREN NEURKETA	99
8.6.1.	Lau eroaleko zirkuituko potentzia (karga desorekatua)	100
8.6.2.	Hiru eroaleko karga-2 watmetroko metodoa (karga desorekatua)	100
8.7.	DEFASEA (KARGA OREKATUA).....	102
8.8.	ADIBIDEAK	103
8.8.1.	Konexioak	103
8.8.2.	Eraikina.....	104
8.8.3.	Eraikina eta sarea	105
8.8.4.	Fasoreak	107
8.8.5.	Karga	109
8.8.6.	Kutxa beltza	110
8.9.	ARIKETAK.....	112

1. KORRONTE ZUZENARI BURUZKO LABURPENA

1.1. MAGNITUDEAK

Materiak ezaugarri garrantzitsu hauek ditu: *masa* eta *karga elektrikoa*.

Biek antzeko jokaera dute: beren artean indarrak azaltzen dira, eta ondorioz energia ere era hauetan azal daiteke:

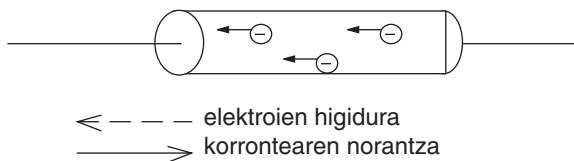
1.1.1. Karga elektrikoa (Q)

Bere unitatea coulomba da eta elektroiei kopuru baten karga azaltzen du. "C" letraz izendatzen da; $1\text{C} = 6,24 \times 10^{28}$ elektroiei.

1.1.2. Intentsitatea (I)

Karga higitzen ari denean, denbora-unitatean zenbat dabilen adierazten du; karga elektrikoaren emaria, hain zuzen.

$$I(\text{A}) = \frac{Q(\text{C})}{t(\text{s})}$$



1.1. irudia.

Unitatea:

$$\text{Amperea} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1\text{s}}$$

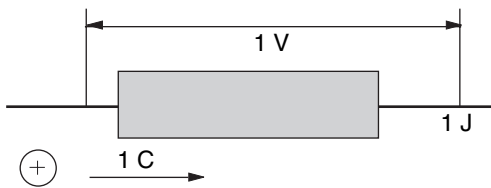
– Definizioa:

Amperea: eroalean segundoko coulomb bateko karga igarotzen bada, ampere bateko intentsitatea dago.

1.1.3. Tentsioa (V)

Elektrizitatearen energi maila azaltzen du (eremu grabitatorian altuera geometrikoaren antza edukiko luke).

Unitatea volta da: coulomb bakoitzak eman dezakeen energia azaltzen du:



$$V(\text{volt}) = \frac{W(\text{joule})}{Q(\text{coulomb})}$$

1.2. irudia.

Definizioa:

Eroale bateko bi punturen artean 1 volteko tentsioa edo potentzial-diferentzia dago (bi puntuen arteko energi mailaren arteko diferentzia), bi puntuen artean 1 coulombeko karga igaroz 1 jouleko energia ematen badu.

1.1.4. Erresistentzia elektrikoa (R)

Eroaleak bertatik karga igarotzeagatik jartzen duen oztopoa adierazten du.

– Unitatea: Ohma (Ω)

– Definizioa:

Eroale baten bi puntutatik 1 ampereko korronea igarotzeko 1 volteko potentzial-erorketak egon behar badu, eroale-zati horren erresistentzia 1 ohmekoa da.

1.1.5. Ohm en Legea

Intentsitate eta tentsioaren arteko erlazioa azaltzen du:

$$I(A) = \frac{V(\text{volt})}{R(\text{ohm})}$$

1.1.6. Energia elektrikoa

Voltaren definiziotik sortzen da ondorengo ekuazioa, eta bere neurria, fisikan bezala, joulea da. Beraz:

$$W(\text{joule}) = V(\text{volt}) \times Q(\text{coulomb}) \quad (1)$$

Beste neurri bat ere erabiltzen da elektrizitatean: kW.h: kilowatt (kW) bateko potentziak ordubetea ematen duen energia da. Beraz:

$$\text{kW.h} = 1000(\text{W}) \times 60 \times 60(\text{s}) = 3,6 \times 10^6 \text{ joule}$$

1.1.7. Potentzia elektrikoa (P)

Fisikan bezala definitzen da: $P(W) = \frac{W(J)}{t(s)}$

Unitatea: watta (W) $1W = \frac{1 \text{ joule}}{1 \text{ segundo}}$

Beste unitate batzuk: $1 \text{ mW} \dots 10^{-3} \text{ W}$
 $1 \text{ kW} \dots 10^3 \text{ W}$
 $1 \text{ MW} \dots 10^6 \text{ W}$

Energia elektrikoaren adierazpena kontuan hartuz, potentzia elektrizitatean honela azalduko da :

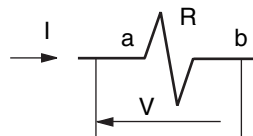
(1) ekuazioaren bi aldeak t-z zatituz, hau dugu:

$$\frac{W}{t} = \frac{V Q}{t} ; I = \frac{Q}{t} \text{ denez eta } P = \frac{W}{t}$$

$$P = V I$$

Erresistentzia erabiliz eta Ohmen legearen bitartez, beste itxura hauek ditu potentziaren formulak:

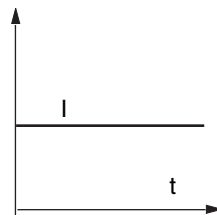
$$P = V I = \frac{V^2}{R} = R I^2$$



1.3. irudia.

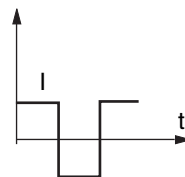
1.2. KORRONTE-MOTAK

– Korronte Zuzena. Intensitate elektrikoaren *neurria* eta *norantza* mantentzen badira, korronte zuzena dela esaten da. Grafikoki honela azaltzen da denboraren arabera (1.4. irudia).



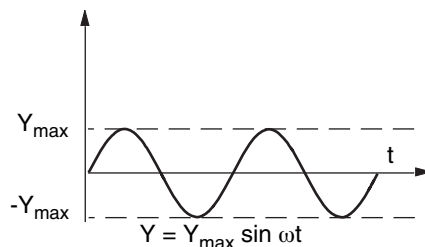
1.4. irudia.

– Korronte Alternoa. Korrontea denboran zehar norantzaz beti aldatzen ari bada, korronte alternoa dela esaten da.



1.5. irudia.

– Korronte Sinusoidala. Denboran zehar korrontearen adierazpen grafikoa sinua bada, korronte sinusoidala dela esaten da, nahiz eta gehienetan "korronte alternoa" dela esan.

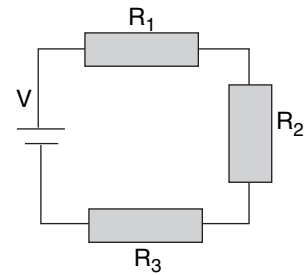


1.6. irudia.

1.3. KONEXIO-MOTAK

– Zirkuitu elektrikoa: Elementu elektriko desberdinak konektaturik ibilbide itxia osatzen bada, zirkuitu elektrikoa dela esaten da.

– Serieko konexioa: Bi elementuren artean konexio bakarra badago eta konexio horretan beste elementurik konektatuta ez badago, hori serieko konexioa dela esaten da. Adibidea:

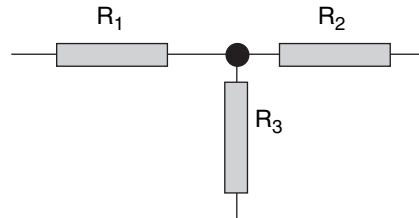


1.7. irudia.



Serieko konexioa

1.8. irudia.



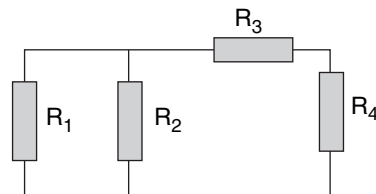
Seriekoa ez den konexioa

1.9. irudia.

Erresistentzien serieko konexioen multzoa beste erresistentzia batez ordezka genezake eta kanpotik begiratuta erresistentzia horrek multzoaren jokabide berdina edukiko du:

$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

– Paraleloko konexioa: Elementuen bi muturrak elkarri konektatuta badaude, tresna horiek paraleloan daudela esango dugu. Adibidez: R_1 eta R_2 paraleloan daude eta R_3 eta R_4 , aldiz, seriean.



1.10. irudia.

– Erresistentzia baliokidea:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (2)$$

– Ondorioak

* Konduktantzia (G)

Erresistentziaren alderantzizkoa da eta elementu batek korronte elektrikoa eramateko duen gaitasuna azaltzen du:

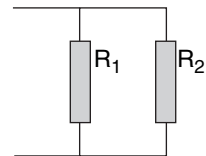
$$G = 1 / R$$

Beraz (2) adierazpena honela gelditzen zaigu:

$$G_p = G_1 + G_2 + \dots + G_n$$

* Bi erresistentzia direnean, aurreko emaitza honela geldituko zaigu:

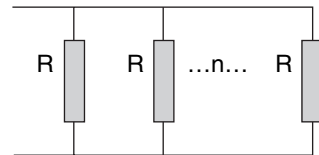
$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



1.11. irudia.

* Paraleloan n erresistentzia berdin badaude, (2) adierazpena honela geldituko zaigu:

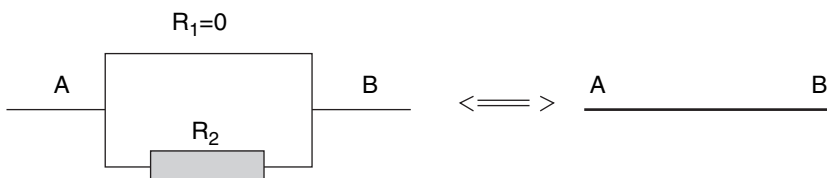
$$R_p = \frac{R}{n}$$



1.12. irudia.

* Erresistentzia bat, hari batekin ($R = 0$) paraleloan konektatuta badago, bien erresistentzia baliokidea haria da:

$$R_1 = 0; \quad R_p = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{0 \times R_2}{0 + R_2} = 0 \quad \text{Beraz, emaitza hariaren erresistentzia da.}$$



1.13. irudia.

Korronte handiena erresistentzia txikiena duen bidetik joaten da. Erresistentzia handiko bideak eragin txikia du erresistentzia txikiagoko beste bide batekin paraleloan badago.

Erresistentzien balioen artean diferentzia handia badago, erresistentzia handiko bidea ireki edo kenduta zirkuitua sinplifikatu egin daiteke.

1.4. KIRCHHOFF-EN ARAUAK

1. Korapiloen araua

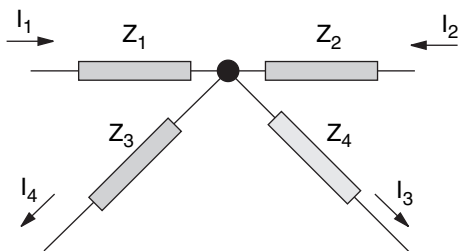
Hiru edo elementu gehiago elkartzen direneko puntuari "korapiloa" deritzo. Arauak honela dio:

"Korapilo batera sartzen diren korronte-intentsitateen batura algebraikoa zero da"

$$\Sigma I = 0$$

Puntu batean karga elektrikoa pilatzen ez denez, sartzen diren korronteen batura irteten direnen berdina dela azaltzen du aurreko adierazpenak:

$$\Sigma I = I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$



1.14. irudia.

2. Mailen araua

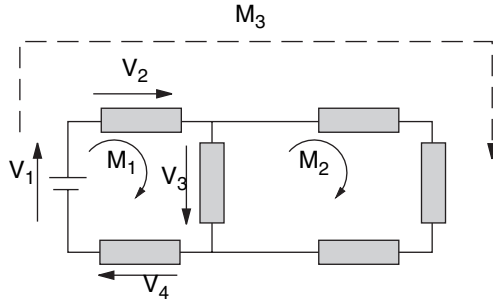
Maila edozein ibilbide itxiri deitzen diogu. 1.15. irudian 3 maila azaltzen dira: M_1 , M_2 , M_3

"Maila baten ibilbidean, tentsioen batura algebraikoa zero da" dio Kirchhoffen bigarren arauak:

$$\Sigma V = 0$$

$$\Sigma V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0$$

Beste era batera hau ikus genezake: mailaren puntu batetik hasi eta ibilbide itxi bat egiten badugu, ibilbide horretan puntu batetik hasita potentzialak gora eta behera egin dezake, baina ibilbidea amaitutakoan potentzial-diferentzia hasierako puntu berean zero da.



1.15. irudia.

1.4.1. Arau hauen erabilera

– Maila bakoitzean Kirchhoffen araua aplikatuz, berdintza bat lortuko dugu; baina berdintzak elkarren menpekoak ez izateko har ditzakegun mailak, dauden guztiak ken bat dira:

$$\text{Berdintza independenteak} = \text{maila-kop.} - 1$$

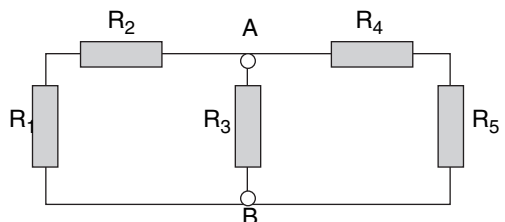
Aurreko adibidean hiru maila daudelako, bi edozein har ditzakegu.

– Hasieran zirkuituan korronteak edozein norantzarekin ipiniko ditugu. Adar bakoitzean korronte ezberdina izango dugu. Emaitzaren zeinua negatiboa bada, korronteari hasieran ipinitako norantza aldatu egin behar dela esan nahi du.

* Adarra: 2 korapilo elkartzen dituen ibilbideari deritzo.

A eta B korapiloen artean hiru adar daude:

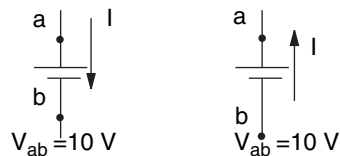
R_1 — R_2 k osaturiko adarra
 R_3 k — osaturiko adarra
 R_4 — R_5 ek osaturiko adarra



1.16. irudia.

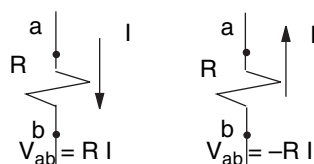
– Korapilo bakoitzeko beste berdinketa bat lortuko dugu, baina korrante ezberdinak azaltzen diren korapiloek bakarrik balio dute. Aurreko irudian A edo B korapiloak har ditzakegu, baina biak ez.

– Sorgailu edo piletan a puntuan potentzial positiboa dago eta b puntuan potentzial negatiboa eta korrontearen norantzak ez dauka zerikusirik.



1.17. irudia.

– Erresistentzian aldiz, korrontea potentzial handiko puntutik potentzial txikiko puntura joaten da. Beraz, potentzial handiena erresistentziaren zein muturretan dagoen korrontearen norantzak esango digu.



1.18. irudia.

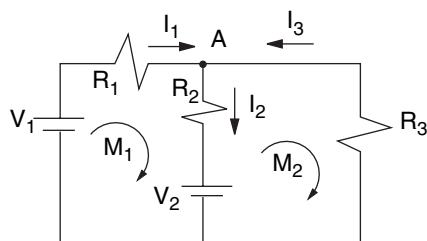
Tentsioaren neurria berriz, Ohmen legeak adierazten du:

Adibidea:

$$\text{A korap.)} \quad I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$\text{M}_1: \text{maila)} \quad -V_1 + I_1 R_1 + I_2 R_2 + V_2 = 0$$

$$\text{M}_2: \text{maila)} \quad -I_3 R_3 - R_2 I_2 - V_2 = 0$$

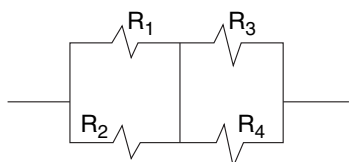


1.19. irudia.

1.4.2. Zirkuituak ebazteko urratsak

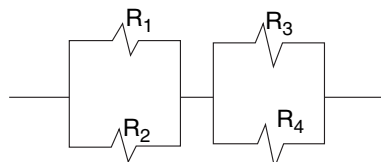
Zirkuitua ahal den gehiena sinplifikatzeko ekintzak dira:

- Serie eta paraleloko konexioak erresistentzia baliokideaz ordezkatu. Itxura hau duen zirkuitua honela ulertzen da:



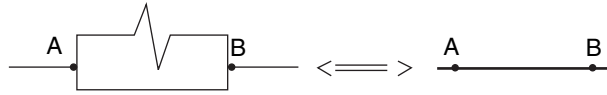
1.20. irudia.

$\Leftrightarrow$



1.21. irudia.

- b. Zirkuitulaburrarekin paraleloan dauden erresistentziak kendu:

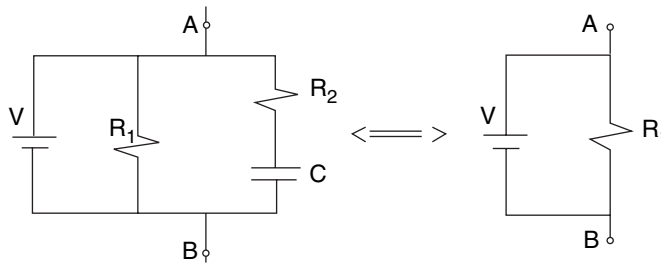


1.22. irudia.

- c. Korrante zuzenean bakarrik:

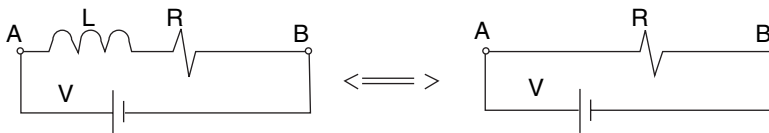
Kondentsadoreek, erregimen iraunkorrean eta korrante zuzenean zirkuitua irekita balego bezala jokatzen dute.

$$i = C \frac{dV}{dt} = 0$$



1.23. irudia.

Harilak, aldiz, erregimen jarraian zirkuitulaburrak dira $e = L \frac{di}{dt} = 0$



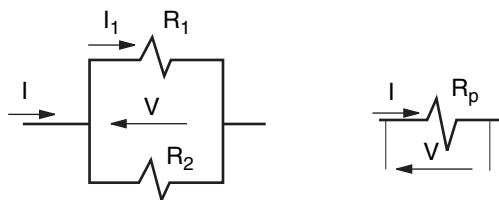
1.24. irudia.

- d. Beste aholku batzuk:

Sinplifikatu ondoren maila bakarra badugu, Ohmen legea erabiltzea nahikoa dugu. Bestela beti erabil daitezke Kirchhoffen arauak.

Adar nagusietako korronteak bilatu ondoren, serie eta paraleloaren barruan ditugun korronte eta tentsioak aurkitzeko honela egingo dugu:

Paraleloko adar baten korrontea (I_1):



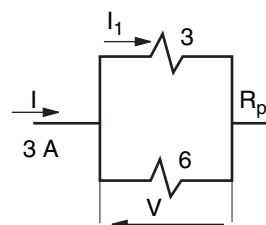
1.25. irudia.

- 1) R baliokidearen muturren arteko tentsioa lortu; tentsioa berdina baita adar bakoitzean: $V = I R_p$

- 2) Ondoren multzoa berriro garatuz, tentsio hori adarretako erresistentzia zatituz, adarreko korrontea emango digu: $I_1 = V / R_1$

$$V = 3 \text{ (A)} \times 2 \text{ (}\Omega\text{)} = 6 \text{ V}$$

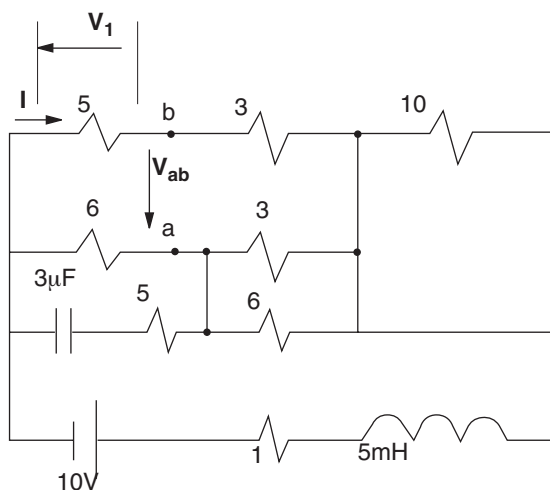
$$I_1 = 6 \text{ V} / 3 \Omega = 2 \text{ A}$$



1.26. irudia.

1.4.3. Adibidea (maila batekoa)

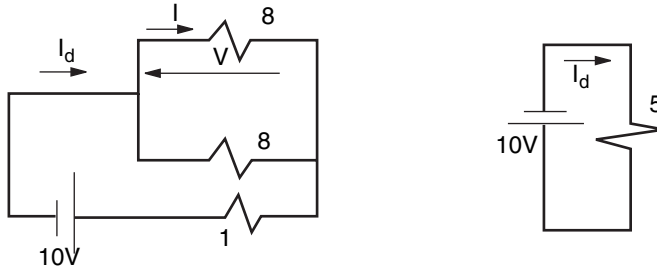
Ondoko zirkuituan I korrontea, V_1 eta V_{ab} tentsioak bilatu nahi dira:



1.27. irudia.

Sinplifikatu ondoren zirkuitua beste era honetara edukiko dugu:

$$I_d \text{ korrontea hau dugu: } I_d = -10 / 5 = -2 \text{ A}$$

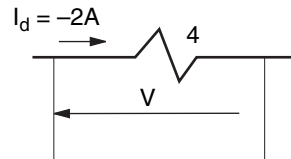


1.28. irudia.

I lortzeko, aurreko zirkuituan paraleloko multzoan, V tentsioa lortu behar dugu eta horretarako zirkuitu hau erabiliko dugu:

$$V = -2 \text{ (A)} \times 4 \text{ (}\Omega\text{)} = -8 \text{ V}$$

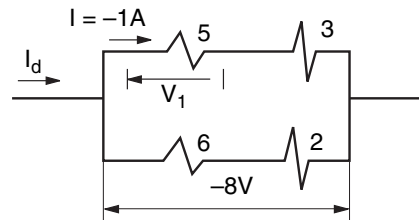
$$I = -8 \text{ V} / 8 \Omega = -1 \text{ A}$$



1.29. irudia.

Zirkuitua berriro garatuz, V_1 bilatuko dugu :

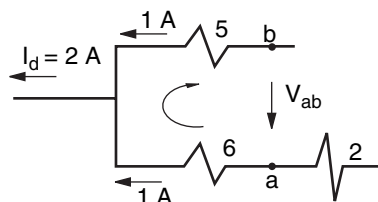
$$V_1 = -1 \text{ (A)} \times 5 \text{ (}\Omega\text{)} = -5 \text{ V}$$



1.30. irudia.

V_{ab} tentsioa bilatzeko berriz, Kirchhoffen mailen araua aplikatuko genuke, baina ibilbide itxiaren ordezkari **a** eta **b**ren arteko edozein ibilbide eginik:

$$V_{ab} = 1 \text{ (A)} \times 6 \text{ (}\Omega\text{)} - 1 \text{ (A)} \times 5 \text{ (}\Omega\text{)} = 1 \text{ V}$$



1.31. irudia.

1.4.4. Adibidea (Kirchhoff)

Ondoko irudiko zirkuituan I_1 , I_2 , I_3 korronteak eta V_{ab} tentsioa eskatzen dira:

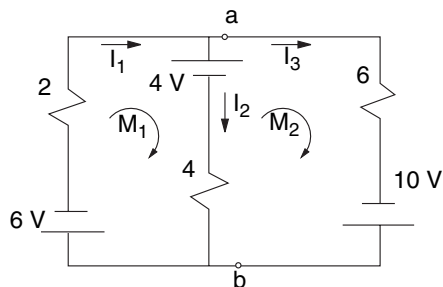
A korapiloa eta M_1 , M_2 mailak hartuz berdintza hauek ditugu:

$$\text{A kor:} \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$M_1 \text{ (maila)} \quad 6 + 2 I_1 + 4 + 4 I_2 = 0$$

$$M_2 \text{ (maila)} \quad -4 I_2 - 4 + 6 I_3 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow I_2 = I_1 - I_3$$



1.32. irudia.

I_2 ordezkatzuz, bi ekuazioko sistema gelditzen zaigu:

$$6 + 2 I_1 + 4 + 4 I_1 - 4 I_3 = 0$$

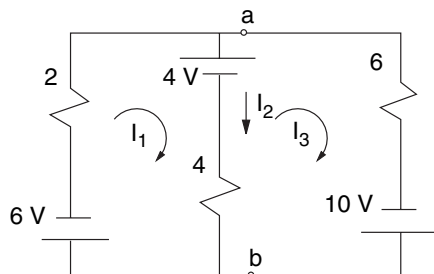
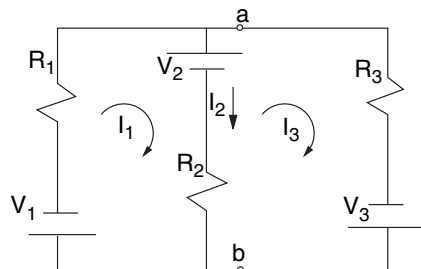
$$4 I_3 - 4 I_1 - 4 + 6 I_3 - 10 = 0$$

1.5. MAILEN METODOA

I_2 ordezkatzean oinarritzen da. Kirchhoffen arau bera da, baina korapiloak kontuan hartu gabe. Horrela ekuazio gu-txiago sortzen dira. Aurreko ekuazioak ikusiz bi mailen arteko adar komuneko korrontea ez da azaltzen, eta mailen metodoa honela azal daiteke:

Adarretako korronteak erabili ordez, mailako korronteak erabiliko ditugu. Korronte hauek beste mailekin loturarik ez duten adarrenak dira.

Mailen tentsioak aurkitzeko, kontuan izan bi mailena den adarra bi mailetako korronteek zeharkatzen dutela (I_1 eta I_3 -k) eta bi korronteek sortutako tentsioak azaldu behar ditugula.



1.33. irudia.

$$\begin{aligned} V_1 + R_1 I_1 + V_2 + R_2 I_1 - R_2 I_3 &= 0 \\ -R_2 I_1 + R_2 I_3 - V_2 + R_3 I_3 - V_3 &= 0 \end{aligned}$$

Adibidez, neurriak jarritz ekuazio hauek aterako ditugu:

$$\begin{aligned} 6 + 2 I_1 + 4 + 4 I_1 - 4 I_3 &= 0 \\ 4 I_3 - 4 I_1 - 4 + 6 I_3 - 10 &= 0 \end{aligned}$$

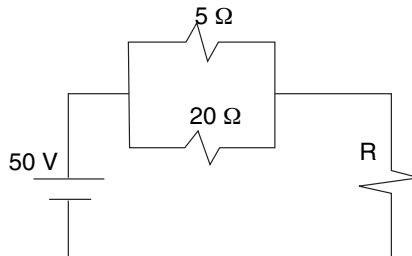
Beraz, aurreko ekuazio berdinak eman dizkigu eta ebatzi ondoren emaitzak hauek dira: ($I_1 = -1 \text{ A}$; $I_2 = -2 \text{ A}$; $I_3 = 1 \text{ A}$)

$$V_{ab} = 4 + 4 I_2 = -2 I_1 - 6 = 6 I_3 - 10 = -4 \text{ V}.$$

Hiru adarretan tentsio berdina ematen digu.

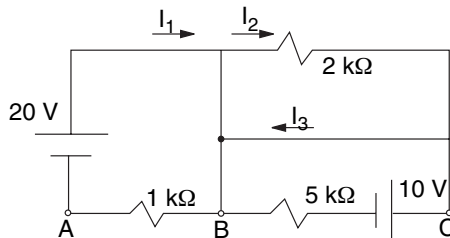
1.6. ARIKETAK

- 1.1. Atera ezazu R-ren balioa ondoko zirkuituan, bertan 45 V-eko tentsioa badago.
(Emaitza: 36Ω)



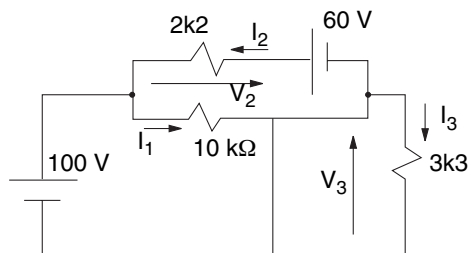
1.34. irudia.

- 1.2. Zenbatekoak dira I_1 , I_2 , I_3 korronteak eta V_{ab} , V_{bc} tentsioak.
(Emaitzak: 20 mA / 0 mA / 2 mA / -20 V / 0 V)



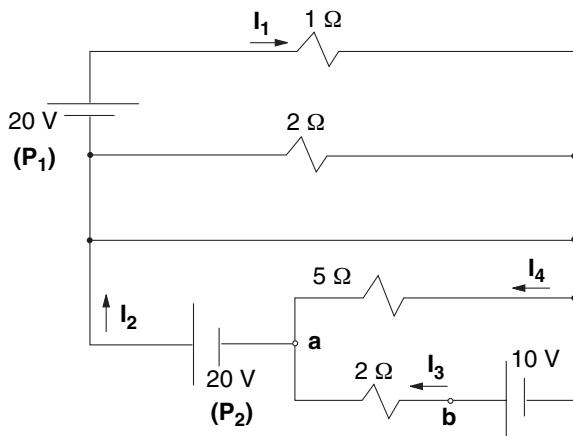
1.35. irudia.

- 1.3. Hurrengo zirkuituan aurki itzazu I_1 , I_2 , I_3 korronteak eta V_2 , V_3 tentsioak.
(Emaitzak: 10 mA / - 18 mA / 0 mA / - 40 V / 0 V)



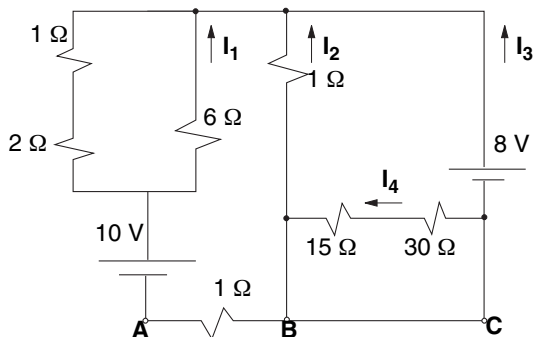
1.36. irudia.

- 1.4. Ondoko zirkuituan balio hauek eskatzen dira: I_1 , I_2 , I_3 , I_4 korronteak eta V_{ab} tentsioa eta P_1 eta P_2 potentziak.
(Emaitzak: 20 A / 19 A / 15 A / 4 A / - 30 V / 400 W / 380 W)



1.37. irudia.

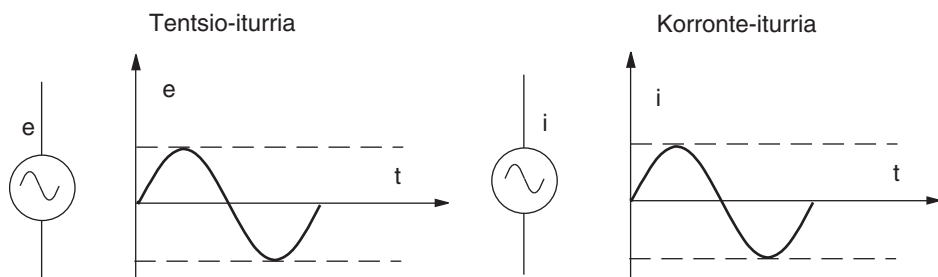
- 1.5. Ondoko zirkuituan kalkula itzazu : I_1 , I_2 , I_3 , I_4 korronteak eta V_{ab} , V_{bc} tentsioak.
(Emaitzak: 0,67 A / - 4 A / + 2 A / 0 A / - 2 V / 0 V)



1.38. irudia.

2. KORRONTE ALTERNOA. MAGNITUDEAK

Denborarekiko tentsioak edo intentsitateak sinuaren legeari segitzen badio, korronte alternoa dela esaten da. Hau da: $e = V_{\max} \sin(\omega t)$ edo $I = I_{\max} \sin(\omega t)$ eta honela irudikatzen dira:

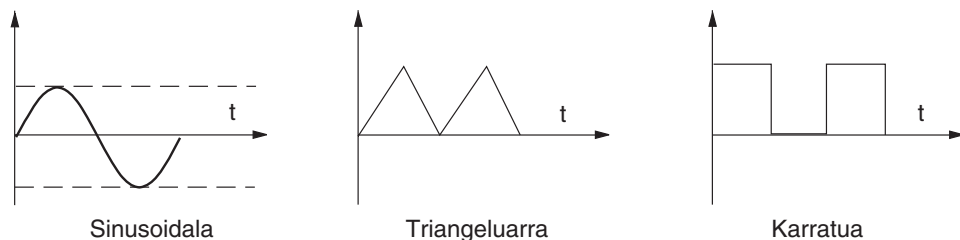


2.1. irudia.

2.1. UHIN ALTERNOAREN EZAUGARRIAK

Uhin-itxura

Aldagai bat beste aldagai baten arabera marrazten dugunean (tentsioa denboraren arabera, adibidez) lerroak duen itxurari esaten zaio. Adibidez:



2.2. irudia.

Aldiuneko balioa:

Denboraren arabera aldatzen den aldagai batek, une bakoitzean duen balioa ematen duen adierazpen matematikoari deritzo. Letra minuskulaz adieraziko dugu:

$$e = V_{\max} \sin(\omega t)$$

2.2. UHIN SINUSOIDALAREN NEURRIAK

2.2.1. Anplitudea

Uhin periodikoaren balio maximoa da ($Y_{\max}$)

2.2.2. Periodoa (T)

Uhin-itxurako adierazpenean ondoz ondo dauden bi puntu berdinen arteko denborari deritzo. Segundotan neurtzen da: $f(t) = f(t+T)$

2.2.3. Zikloa (T)

Periodo bitartean dagoen uhin-zatia da.

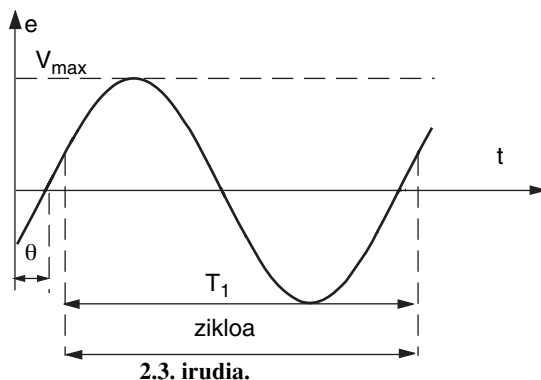
2.2.4. Maiztasuna (f)

Segundoan zenbat ziklo egiten diren adierazten du. Ziklo bakoitza T segundotan igarotzen bada, erlazio hau beteko da maiztasunaren eta periodoaren artean:

$$f = 1 / T$$

Unitatea: Hertza da (Hz) eta s^{-1} dimentsioa du. Europan korrante alfernoak 50 Hz ($T = 20$ ms) ditu sarean eta Ameriketara, aldiz, 60 Hz.

Gure etxeko entxufeara, tentsioak segundoan 50 aldiz betetzen du uhin sinusoidala. Beraz, entxufeko zulo bat, bestearerikoa, batzuetara positiboa da eta bestetara negatiboa.



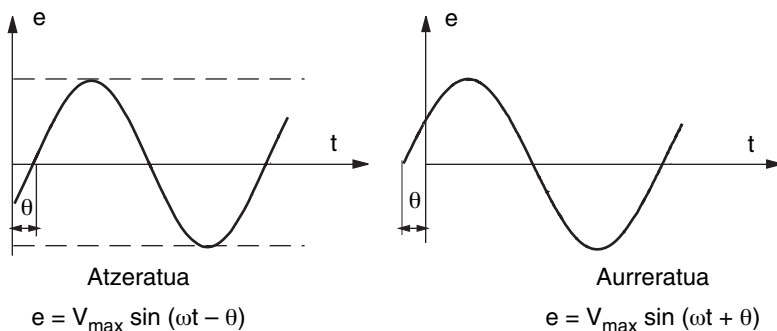
2.2.5. Abiadura angeluarra edo maiztasun angeluarra (ω)

Maiztasunaren esanahi berdina du, baina honek zikloak segundoko azaldu beharrean, radian segundokotan neurtzen du. Sinu-funtzioak zikloa betetzeko 2π radian behar dituzenez, honako adierazpena du:

$$\omega = \frac{\theta \text{ (rad)}}{s} = 2\pi / T = 2\pi f$$

2.2.6. Desfasea

Denbora zero ($t=0$) eta uhin-hasieraren bitartean dagoen angeluari deritzo. Gehienetan radianetan neurtzen da:



2.4. irudia.

2.2.7. Bi uhinen arteko desfasea

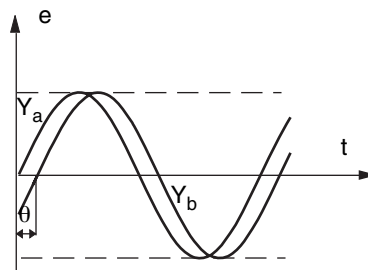
Bi uhinei dagokien puntu berdinen arteko distantzia angeluarra da.

Beren arteko desfaseaz hitz egiteko, bi uhinek abiadura angeluar berdina eduki behar dute, zeren bestela desfasea denboran zehar aldatuz joango baita.

$$Y_A = Y_{A \max} \sin(\omega t)$$

$$Y_B = Y_{B \max} \sin(\omega t - \theta)$$

Y_B uhina, Y_A rekiko, θ angelua atzeratuta dago.



2.5. irudia.

2.2.8. Batezbesteko balioa

Uhin periodiko baten batez besteko balioa honela definitzen da:

$$Y_{bb} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

Polimetroaren konmutadorea D.C. eremuan jartzen denean, sarrerako seinalearen batez besteko balioa irakurtzen dugu.

2.2.9. Uhin sinusoidalaren batez besteko balioa

$$Y_{bb} = \frac{1}{T} \int_0^T y_{\max} \sin \omega t dt$$

Beste era batera azalduta:

t aldagaia $\rightarrow \omega t = \theta$ ordezkatuko dugu eta horrela:

T muga $\rightarrow \omega T = 2\pi$ muga bihurtzen da

$\omega dt = d(\omega t)$ eta $1/T \rightarrow \omega / 2\pi$ denez

$$Y_{bb} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_{\max} \sin(\omega t) dt$$

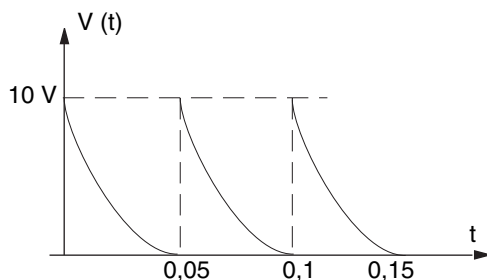
$$Y_{bb} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_{\max} \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{Y_{\max}}{2\pi} [-\cos \omega t]_0^{2\pi} = 0$$

Edozein uhin t ardatzarekiko simetrikoa bada, bere batezbesteko balioa zero da.

Adibidea:

Marrazkian azaltzen den periodo bakoitzaren irudia honela definitzen da: $(0 \div 0,05 \text{ s})$

$$\rightarrow Y(t) = 10 e^{-200t}$$



2.6. irudia.

$$Y_{bb} = \frac{1}{0,05} \int_0^T 10e^{-200t} dt = \frac{10}{0,05(-200)} [e^{-200t}]_0^{0,05} \\ = (-1) [e^{-10} - e^0] = 1 \text{ V}; \quad (1 / e^{-10} \cong 0 \text{ hartuz})$$

2.2.10. Balio efikaza

Honela definitzen da: balioen berbiduren batezbestekoaren erro karratuari deritzo.

$$y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt}$$

Fisikan beste ikuspegi batetik hartzen da:

Korronte periodikoaren balio efikaza: R erresistentzia zeharkatuz eta periodo baten barruan, korronte periodikoaren batezbesteko energia berdina emango lukeen korronte zuzenaren balioa da. Beraz:

$$W_{K.A.} = \int_0^T p dt = \int_0^T i^2(t) R dt = W_{K.Z.} = T I_{ef}^2 R$$

Ondorioz, aurreko emaitzaren berdina da $I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int^T i^2 dt$

Maiuskulaz bereiziko dugu neurri hau: v = aldiuneko balioa; V = v -ren balio efikaza.

Adibidea (uhin sinusoidalaren balio efikaza):

$$V_{ef}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_{max}^2 \sin^2 \omega t d(\omega t) = \frac{V_{max}^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\omega t) d\omega t$$

ardatzarekiko $\cos 2\omega t$ simetrikoa dugunez, honen batezbesteko balioa (integrala) zero da. Beraz:

$$V^2 = \frac{V_{max}^2}{4\pi} [\omega t]_0^{2\pi} = \frac{2\pi V_{max}^2}{4\pi} = \frac{V_{max}^2}{2}$$

$$V_{ef} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$$

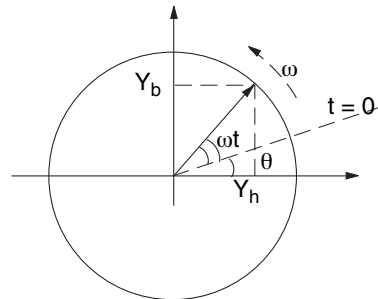
2.3. FASOREAK

Uhin sinusoidala, ω abiadura angeluarreko eta Y_{max} -ko balioa duen bektoreak X edo Y ardatzean duen proiektzioaz azal daiteke.

ω abiadura angeluarrean biratzen duen bektoreari **fasorea** deritzo. Honela irudika daiteke:
 $Y = Y_{max} \sin(\omega t + \theta)$

Y ardatza: $Y_b = Y_{max} \sin(\omega t + \theta)$;

X ardatza: $Y_h = Y_{max} \cos(\omega t + \theta)$



2.7. irudia.

Matematikoki **Euler-en identitateaz** ere azaltzen da:

$$Y = Y_{max} e^{j(\omega t + \theta)} = Y_{max} [\cos(\omega t + \theta) + j \sin(\omega t + \theta)]$$

Beraz:

$$Y_{\max} \sin(\omega t + \theta) = P. \text{ Irud. } [e^{j(\omega t + \theta)}] \quad (P. \text{ Irud.} = \text{ parte irudikaria})$$

Modulu/argumentu-eran: $Y = |Y| \angle \theta$

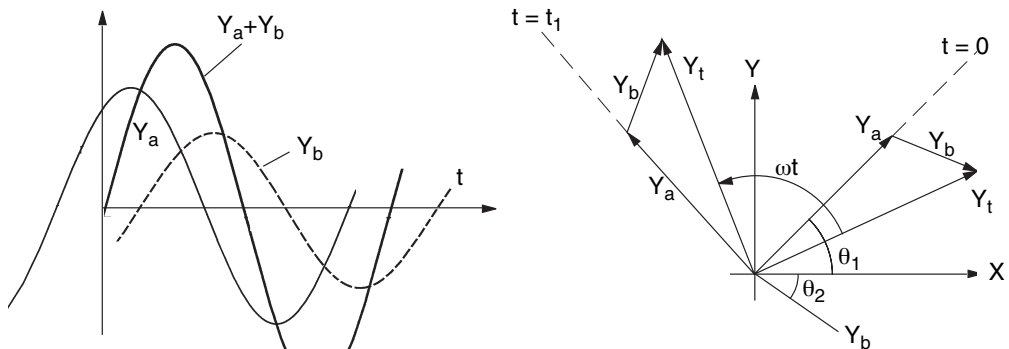
2.3.1. Uhin sinusoidalen batuketa (ω berdinean)

Sinuen batura bektoreen baturaz egin nahi dugu, hau da:

$$Y_t = Y_a + Y_b = Y_{\max 1} \sin(\omega t + \theta_1) + Y_{\max 2} \sin(\omega t + \theta_2)$$

Uhin sinusoidalak ardatz koordinatueta fasoreek dituzten proiektzioak direnez eta fasoreak (ω) abiadura berdinean badoaz, "une guztietan" beren arteko desfasea mantendu egingo da ($\theta_1 - \theta_2$). Batura berdina emango du edozein posizio espazialean eta, noski, baita beren proiektzioak ere. Beraz: "Sinuen batura bi bektoreen batura geometrikoaz atera genezake, eta ω abiaduran dabilen beste fasore bat emango digu."

Hortaz batuketa trigonometriaren bidez egin ordez, errazagoa dugu bektoreen bidez egitea:



2.8. irudia.

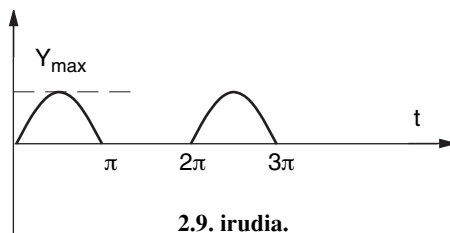
2.4. ARIKETAK

- 2.1. Atera ezazu ondoko uhin-erdiko artezgailuaren batezbesteko balioa eta balio efikaza.

(Emaitzak: $Y_{bb} = 0,318 Y_{max}$;
 $Y_{ef} = 1/2 Y_{max}$)

$$0 < \omega t < \pi \quad y = Y_{max} \sin \omega t$$

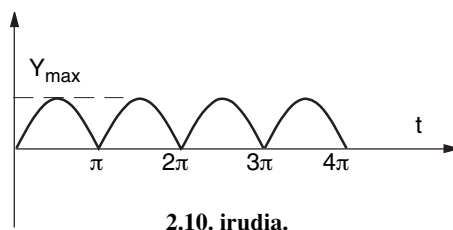
$$\pi < \omega t < 2\pi \quad y = 0$$



- 2.2. Uhin osoko artezgailuaren batezbesteko balioa eta balio efikaza bila itzazu.

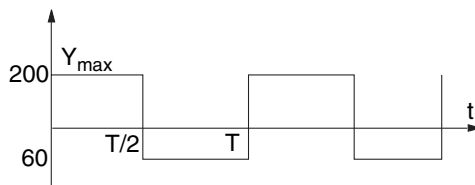
(Emaitzak: $Y_{bb} = 0,637 Y_{max}$;
 $Y_{ef} = 0,707 Y_{max}$)

$$0 < \omega t < \pi; y = \sin \omega t$$



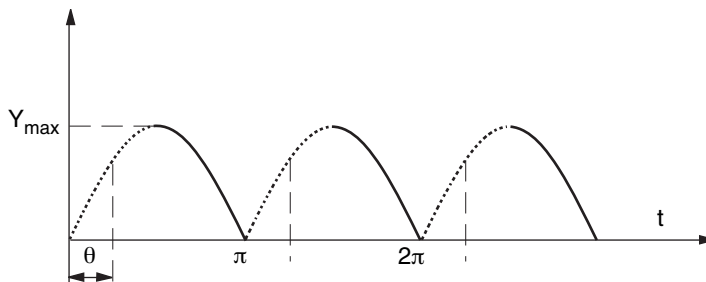
- 2.3. Ondoko uhin karratuaren batezbesteko balioa eta balio efikaza bila itzazu.

(Emaitzak: $Y_{bb} = 70$; $Y_{ef} = 147,6$)



- 2.4. Tiristoreak emandako uhina ondoko hori duzu. Zein da horren batezbesteko balioa.

(Emaitzak: $Y_{bb} = [Y_{max} / \pi] (1 + \cos \theta)$)



3. ELEKTRIZITATEKO EREDU MATEMATIKOAK

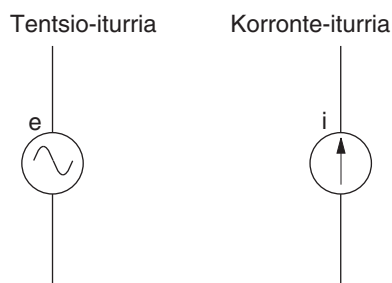
3.1. DEFINIZIOAK

Elementu aktiboa

Potentzia elektrikoa emateko gai den elementuari deritzo. Beraz, hauek elikatzaileak edo sorgailuak dira.

Beste era batera esanda: energi mota bat energia elektriko bihurtzen duena da (tentsio-eta korrante-bihurgailuak ere talde honetakoak dira).

Irudi hauekin azalduko ditugu:



3.1. irudia.

Elementu pasiboa

Denbora infinituan ez dute energia elektrikorik sortzen. Motoreak, hozkailuak, berogailuak... elementu pasiboak dira eta eredu matematiko hauetaz ordezka genitzake: (R) erresistentziaz; (L) autoindukzioaz; eta (C) kondentsadoreaz.

Inpedantzia (Z)

Fisikoki honela azaltzen da: "elementu elektriko batek korronteari kontra jartzen dion oztopoa da"

Tentsio-fasorearen eta korrante-fasorearen arteko erlazioa azaltzen du; Z zenbaki konplexua da:

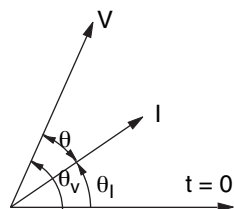
$$Z = \frac{V}{I} = |Z|_{<\theta}$$

Z-ren modulua : $|Z| = |V|/|I|$

eta Z-ren desfasea : $\theta = \theta_V - \theta_I$

Beraz $\theta = V$ eta I-ren arteko angelua da:

$$\theta = \bigwedge V, I$$



3.2. irudia.

3.2. ERRESISTENTZIA (R)

Tresna elektriko batek energia elektrikoa beste energi mota bihurtzen badu, zirkuitu elektrikoan elementu hori **R** eredu matematikoaz irudikatzen da.

Adibidez, Motorea, R erresistentziaz ordezkaturko dugu eta honek erretzen duen energia, motoreak ateratzen duen energia mekanikoa da.

R-ren inpedantzia:

Erresistentzia (R), $v = V_{\max} \sin(\omega t + \theta)$ rekin elikatzen bada, une bakoitzean Ohmen legea beteko da eta zirkuituan dagoen korrontea hau dugu:

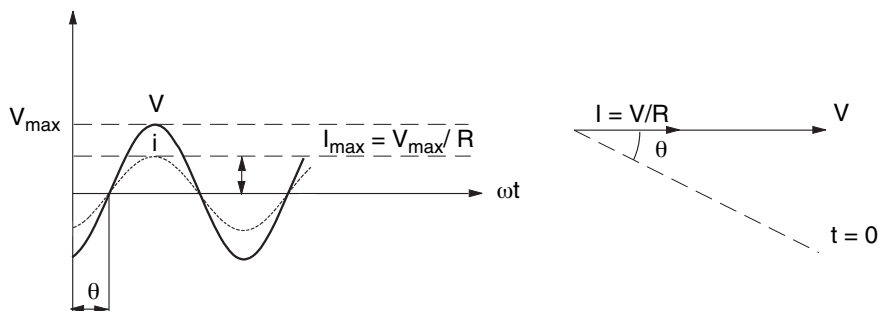
$$i = \frac{V}{R} = \frac{V_{\max}}{R} \sin(\omega t + \theta) = I_{\max} \sin(\omega t + \theta)$$

Beraz uhinaren neurri maximoa: $I_{\max} = V_{\max} / R$ da. Balio maximoekin bezala, balio efikazekin ere berdin gertatzen da:

$$I_{\text{ef}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{V_{\text{max}}}{\sqrt{2}}}{R} = \frac{V_{\text{ef}}}{R} \quad I = \frac{V}{R} ; \quad V \text{ eta } I \text{ balio efikazak izanik.}$$

Beraz korrontea beste uhin bat da, (ω) abiadura berdina duena eta tentsioarekin fasean dagoena.

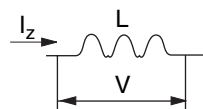
Fasoreen bidez honela azaltzen zaigu: $Z_R = \frac{V_{<\theta}}{I_{<\theta}} = R_{<0^\circ}$



3.3. irudia.

3.3. AUTOINDUKZIOA (L)

Energia elektrikoa energia magnetiko bihurtzen denean, eredu matematikotzat **L** autoindukzioa erabiltzen da. Harilak korrontearen denborarekiko aldaketari jartzen dion oztopoa, **L** autoindukzioaz azaltzen da.



3.4. irudia.

L-ren neurria **Henry** da eta **H** letraz adierazten da; milihenrya (mH) berriz, 10^{-3} H da. Magnitude hauen menpe dago autoindukzioa.

$$L = \frac{N^2}{R}; \quad R = \frac{1}{\mu} \frac{L}{S}$$

N: harilaren bira-kopurua

R: zirkuitu magnetikoaren erreluktantzia magnetikoa

μ : iragazkortasun magnetikoa

L: zirkuitu magnetikoaren luzera (m)

S: zirkuitu magnetikoaren ebakiduraren azalera (m²)

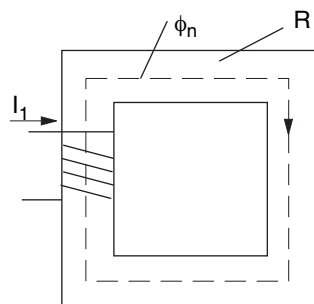
Erresistentzian bezala, L-ren balioa neurri geometrikoek eta ingurunearen ezaugarri magnetikoek erabakitzen dute.

Faradayren legean oinarritzen da: denboran zeharko fluxu-aldaketak, tentsioa sortzen du; fluxu-aldeketaren aurka doana, hain zuzen.

$$e = N \frac{d\Phi}{dt}$$

Φ : fluxua
N: bira-kopurua

Korronte alternoak, fluxu magnetiko alternoa sortzen du; ondorioz harilaren muturretan tentsio alternoa sortzen da, eta harila zeharkatzen duen korronteari aurka egiten dio. Faradayren legea garatuz, (L) autoindukzioaren jokaera honela azal genezake:

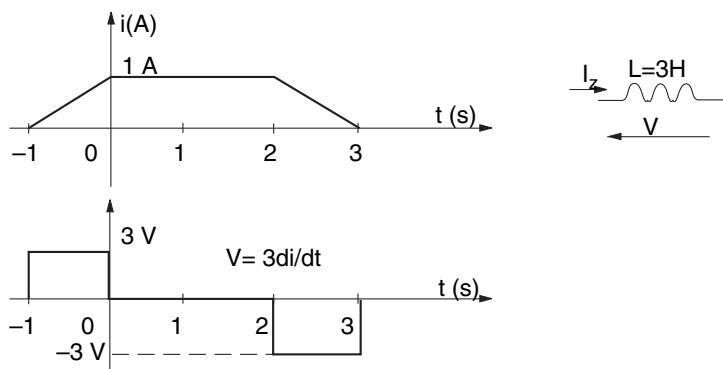


3.5. irudia.

$$V(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Adibidea:

Ondoko harilaren muturretan tentsioak zein itxura edukiko du, irudiko korronteak zeharkatzen baldin badu?



3.6. irudia.

Ondorioak:

- Korronte zuzenean $I = kte.$ denez, $V = 0$ da. Beraz, harilak zirkuitulabur gisa jotatzen du.
- Maila-erako korrontean (malda infinitua), harilak tentsio infinitua sortzen du. Hauxe bera gertatzen da etengailuetan. Bat-batean zirkuitua irekitzen dugunean, tentsio

handia sortzen da eta honek txinparta saltarazten du. Kasu honetan kaltegarria bada ere, tentsio hau zenbaitetan baliagarria da. Automobiletako harilean, adibidez banagailuak korronea eteten duenean txinparta sortzen du bujietan. Berdin gertatzen da lanpara fluoreszenteak piztean.

3.3.1. Harilaren energia magnetikoa

$$p = v_L \cdot i_L = L \frac{di}{dt} i \quad \text{eta energia} \quad W_L = \int p dt = \int L i \frac{di}{dt} dt$$

$$W_L(t) = 1/2 L I^2$$

3.3.2. Harilaren inpedantzia (korrante alternoan)

Korrante sinusoidalak zeharkatzen badu, hau da: $i = I_{\max} \sin \omega t$, bertan sortuko den tentsioa hau dugu:

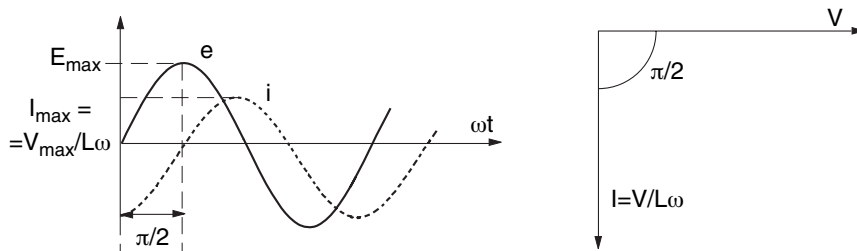
$$v_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d(I_{\max} \sin \omega t)}{dt} = L \omega I_{\max} \cos \omega t$$

$$\text{Beraz: } v_L = L \omega I_{\max} \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$Z_L = \frac{v_L}{i_L} = L \omega_{<\pi/2} = L \omega j$$

Tentsioa korrantearekiko $\pi/2$ aurreratuta dagoela eman digu, baina gehiagotan esaten da *korronea tentsioarekiko $\pi/2$ atzeratuta dagoela*.

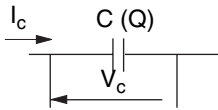
Balio efikazekin honako hau gertatuko da: $V_L = L \omega I_L$; maximoekin hori gertatzen baita. Fasoreen bidez azalduta, bi bektore elkarzut ditugu:



3.7. irudia.

3.4. KONDENTSADOREA (C)

Elementu honetan energia elektrikoa pilatzen da. Kondentsadore baten kapazitatea honela zehazten da:



3.8. irudia.

$$C \text{ (faraday)} = \frac{Q \text{ (coulomb)}}{V \text{ (volt)}} \quad (1)$$

Unitatea: faradaya (F)

Faradaya: kondentsadore 1 coulombeko karga emanik 1 volt-eko tentsiora jartzen bada, bere kapazitatea faradaya da. "F" letraz adierazten da.

Beste unitate batzuk:

$$\begin{aligned} 1 \text{ mF} &= 10^{-3} \text{ F} & 1 \text{ nF} &= 10^{-9} \text{ F} \\ 1 \text{ }\mu\text{F} &= 10^{-6} \text{ F} & 1 \text{ pF} &= 10^{-12} \text{ F} \end{aligned}$$

Bestalde $dq = i \, dt$ denez, (1) adierazpena honela geldituko zaigu:

$$C = \frac{\int i \, dt}{V} \quad \text{edo} \quad dv = \frac{1}{C} i \, dt$$

i eta V -ren arteko erlazioa honela ipintzen da:

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

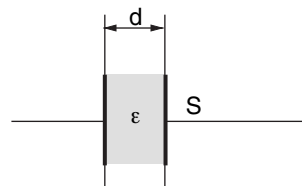
C -ren balioa, R -rena bezala, neurri geometrikoen eta ingurunearen arabera da:

$$C = \epsilon \frac{S}{d}$$

ϵ : isolatzailearen konstante dielektrikoa izanik

S : eroalearen azalera

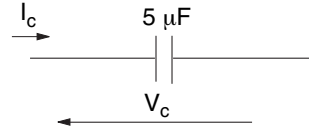
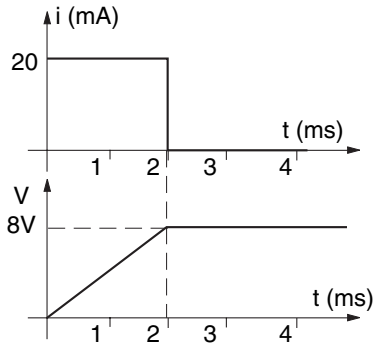
d : eroaleen arteko distantzia



3.9. irudia.

3.4.1. Adibidea

Kondentsadore bati ondoko irudiko uhin-formako korronea sartzen badiogu, zein forma edukiko du sortzen den tentsioak?



3.10. irudia.

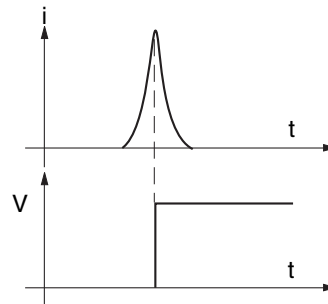
$$V = \frac{1}{C} \int i \, dt = \frac{1}{C} \cdot \text{grafikoko azalera}; \text{Azalera} = 20 \cdot 10^{-3} \times 2 \cdot 10^{-3} = 40 \cdot 10^{-6} \text{ A s}$$

$$V = \frac{1}{5 \cdot 10^{-6}} \times 40 \cdot 10^{-6} = 8 \text{ V}$$

Ondorioak:

Kondentsadorean tentsioa konstantea izateko korroneak zero izan behar du. Beraz, korrone zuzenean kondentsadorea zirkuitu irekia da.

Tentsioak malda-erakoa izateko, intentsitateak infinitu izan behar du. Kondentsadorean bat-batean kargatzeko (tentsioa igotzeko) korroneak infinitu izan behar du.



3.11. irudia.

3.4.2. Kondentsadorearen energia

$$i = C \frac{dV}{dt} \quad \text{da eta potentzia:}$$

$$W = \int p \, dt = \int v_c \cdot i_c \, dt = \int v_c C \frac{dV_c}{dt} \, dt = \int \frac{1}{2} C V^2$$

$$W_c(t) = \frac{1}{2} C V^2(t)$$

3.4.3. Kondentsadorearen inpedantzia (korrante sinusoidalean):

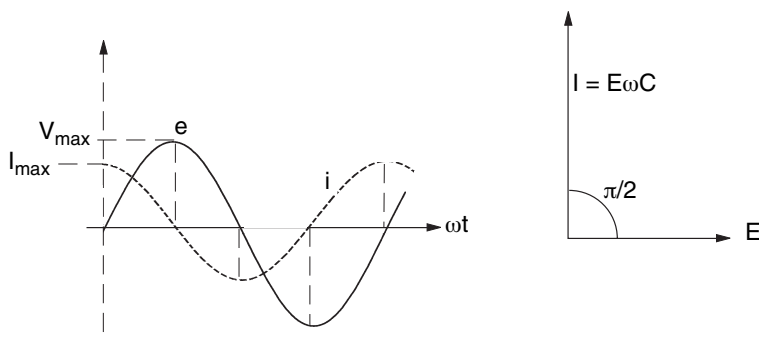
Tentsioa $V = V_{\max} \sin \omega t$ bada:

$$i_c = C \frac{dV}{dt} = C \frac{d(V_{\max} \sin \omega t)}{dt} = C \omega V_{\max} \cos \omega t$$

Beraz, $i_c = C \omega V_{\max} \sin(\omega t + \pi/2)$. Beraz, orain *korrantea tentsioarekiko $\pi/2$ aurreratuta dago* eta $I_{\max} = V_{\max} C \omega$ dugu.

$$Z_c = \frac{1}{C \omega} \angle -\pi/2 = \frac{-1}{C \omega} j ; I = \frac{V}{1/\omega C} = V C \omega$$

Fasoreen bidez honela azalduko dugu:



3.12. irudia.

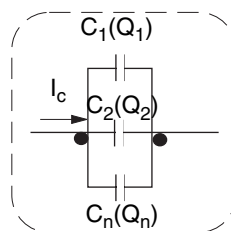
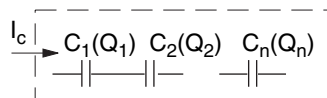
Korronte altxanoan korronte zuzeneko arau guztiak betetzen dira, zeren une bakoitzean korronte zuzenean gaudela har baikenezake. Hango serie eta paraleloko erlazioak hemen ere beteko dira:

$$1 / C_t = 1 / C_1 + 1 / C_2 + \dots + 1 / C_n$$

$$Q_t = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$$

$$C_t = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

$$Q_t = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

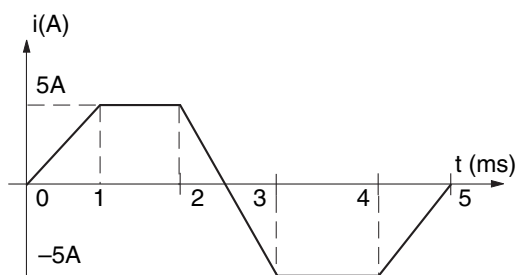


3.13. irudia.

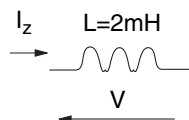
3.5. ARIKETAK

- 3.1. Haril batek 2 mH-ko autoindukzio-koefizientea du, eta bertatik, ondoko irudiak azaltzen duen korrontea doa. Marraz ezazu harilaren muturretan sortzen den tentsioa, potentzia denboran zehar, eta batezbesteko potentzia P_{bb} .

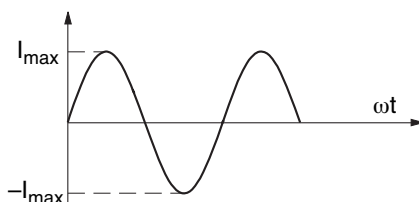
(Emitza: $P_{bb} = 0$)



3.14. irudia.

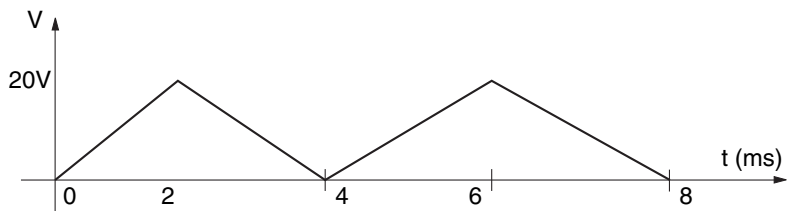


- 3.2. L autoindukzio-koefizientea duen harila, $I = I_{\max} \sin \omega t$ korronteak zeharkatzen du. Marraz ezazu aldiuneko potentzia eta energia.



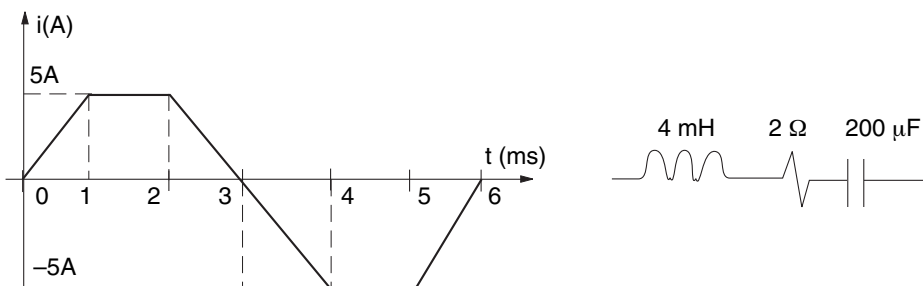
3.15. irudia.

- 3.3. $20\ \mu\text{F}$ -ko kondentsadore bati ondoko uhin-tentsioa ezartzen zaio. Marraz itzazu:
 $i(t)$, $p(t)$, $I_{\max}$ eta $P_{\max}$.
 (Emitza: $0,2\ \text{A}$; $4\ \text{W}$)



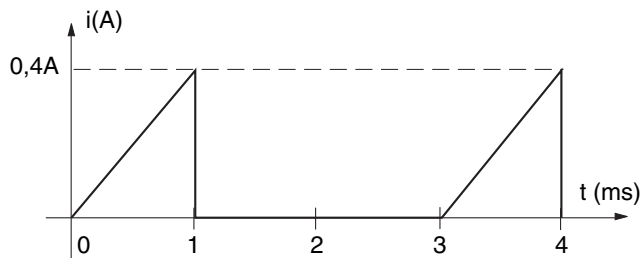
3.16. irudia.

- 3.4. Seriean konektaturik dauden R , L , C zirkuitua, ondoko adierazpen grafikoa duen korranteak zeharkatzen du. Bila itzazu elementu bakoitzean sortzen diren tentsioak (V_R , V_L , V_C) eta kondentsadorean denboran zehar pilatzen den (Q) karga elektrikoa.



3.17. irudia.

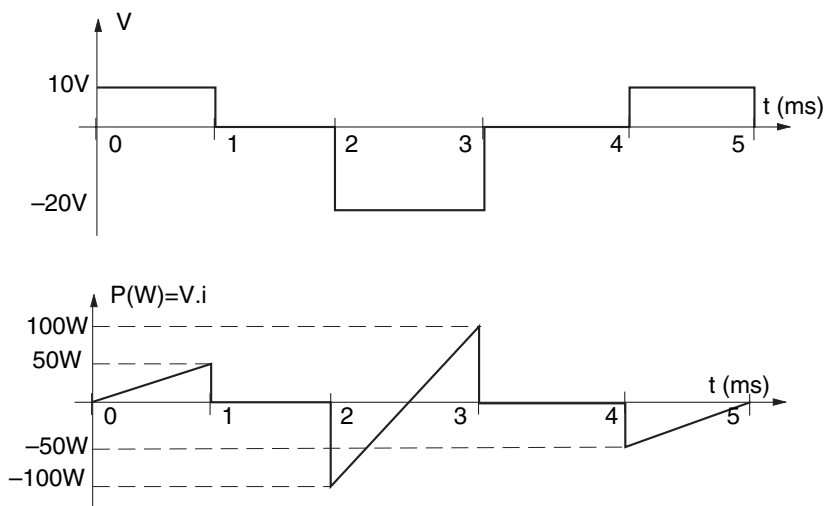
- 3.5. L autoindukzioa duen haril batek, ondoko irudian erakusten den korrantea darama. Sortzen den tentsio maximoa $50\ \text{V}$ -ekoa bada, bila ezazu L -ren balioa eta marraztu uhin-tentsioa.
 (Emitza: $L = 0,125\ \text{H}$)



3.18. irudia.

3.5.1. Emaitzak

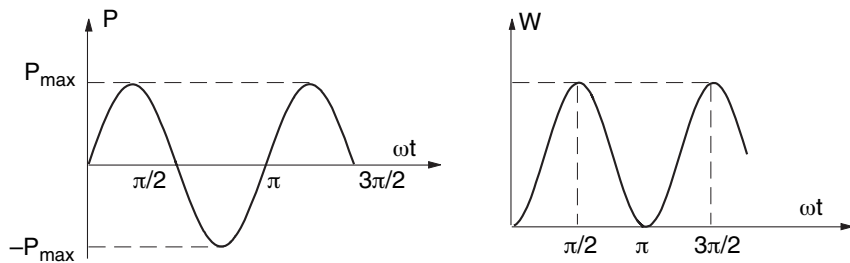
$$3.1. \quad V = L \frac{di}{dt}$$



3.19. irudia.

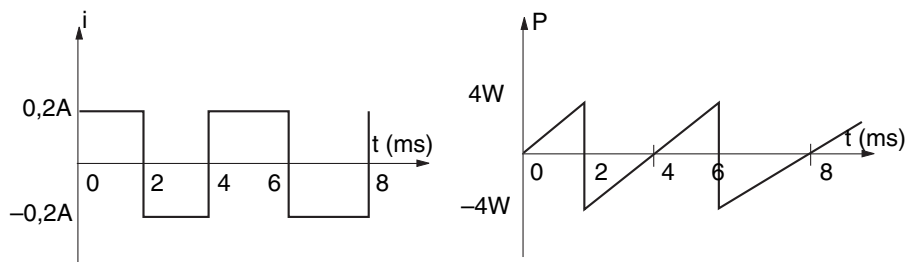
$$3.2. \quad P_L = \frac{1}{2} L \omega I_{\max}^2 \sin 2\omega t$$

$$W_L = \frac{1}{2} L I_{\max}^2 \sin^2 \omega t$$



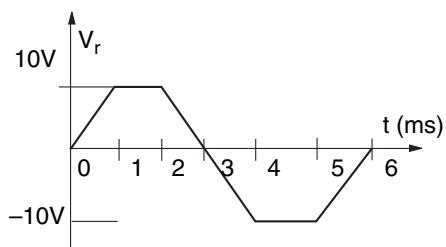
3.20. irudia.

3.3.

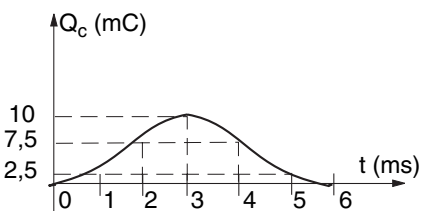
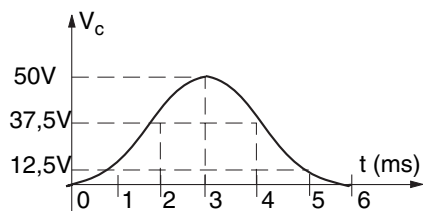
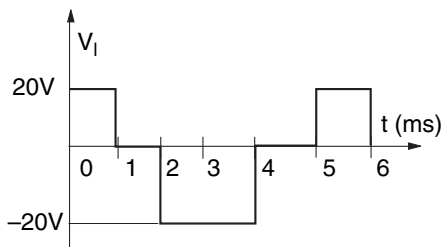


3.21. irudia.

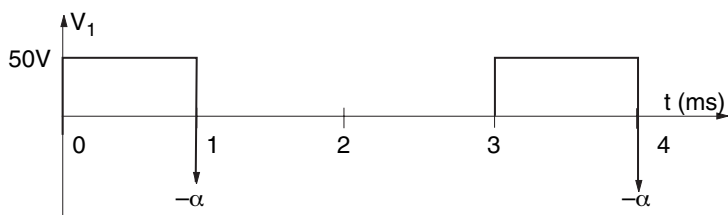
3.4. $V_R = IR$



$V_L = L \frac{di}{dt}$



3.22. irudia.

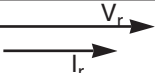
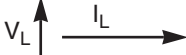
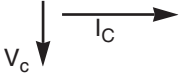


3.23. irudia.

4. ZIRKUITU SINUSOIDALAK

Uhin sinusoidalez elikatutako zirkuitu elektrikoetako eredu batzuk ebatziko ditugu adibide gisa eta horretarako elementu elektriko bakoitzaren inpedantzia hartuko dugu oinarritzat.

4.1. INPEDANTZIEN LABURPEN-TAULA

EREDUAK	INPEDANTZIA	FASOREAK	ZENB. KONPLEX.
Erresistentzia (R)	$R < 0^\circ$		R
Autoindukzioa (L)	$L\omega < \pi/2$		$L \omega j$
Kapazitatea (C)	$\frac{1}{C\omega} < -\pi/2$		$\frac{1}{C\omega j}$

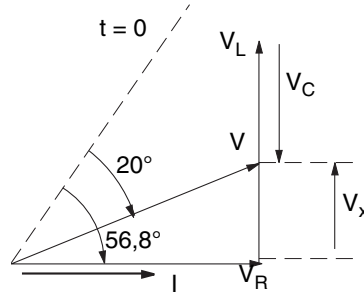
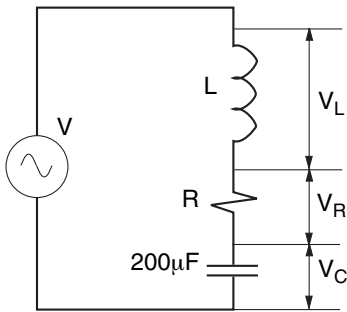
4.2. SERIEKO ZIRKUITUA (ADIBIDEA)

Irudiko serieko zirkuituan, kondentsadorearen kapazitatea 200 μF -koa da. Tentsioa eta korronea hauek dira: $V = 707 \sin(1000t - 20^\circ)$ V eta $I = 28,3 \sin(1000t - 56,8^\circ)$ A.

Bila itzazu:

1. Maiztasuna, tentsio efikaza, eta korrone efikaza.
2. Zero denborarekiko V eta I-ren defaseak eta beren diagrama fasoriala.
3. R eta L-ren neurriak
4. V_R , V_L eta V_C balioak matematikoki eta fasoreen bidez.

Ebazpidea:



4.1. irudia.

$$V_x = V_L - V_C = (L\omega - 1/C\omega) j. I_{<0^\circ}$$

$$1. \quad V = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{707}{\sqrt{2}} = 500 \text{ V};$$

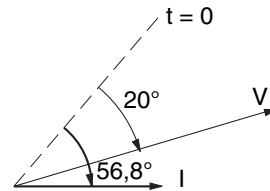
$$I = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{28,3}{\sqrt{2}} = 20 \text{ A}$$

$$\omega = 2\pi f; \quad f = \frac{1000}{2\pi} = 159 \text{ Hz}$$

2. Defaseak zero denborarekiko:

V-ren desfasea: **20° atzera**;

I-ren desfasea : **56,8° atzera**



4.2. irudia.

3. R eta L

$$V_R = V \cos (56,8 - 20) = 500 \cos 36,8^\circ = 400 \text{ V}$$

$$R = \frac{V_R}{I} = \frac{400}{20} = 20 \Omega$$

$$V_X = V \sin 36,8^\circ = 300 = (L\omega - 1/C\omega) \cdot I \Rightarrow L\omega - 1/C\omega = 300/20 = 15 \Omega$$

$$L \cdot 1000 - \frac{1}{C \cdot 1000} = 15 \quad ; \quad L = \frac{1}{1000} \left(15 + \frac{1}{200 \times 10^{-6} \times 10^3} \right) = 20 \text{ mH}$$

$$L = 20 \text{ m H}$$

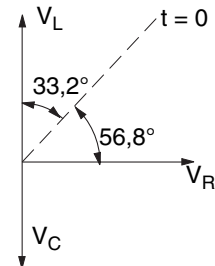
4. V_R, V_L, V_C

$$V_R = \sqrt{2} \cdot 400 \cdot \sin(1000t - 56,8^\circ); \quad V_L = L\omega I = 20 \times 10^{-3} \times 1000 \times 20 = 400 \text{ V}$$

$$V_C = \frac{1}{C\omega} I = \frac{1}{200 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^3} \times 20 = 100 \text{ V}$$

$$V_C = 141 \sin(1000t - 146,8^\circ)$$

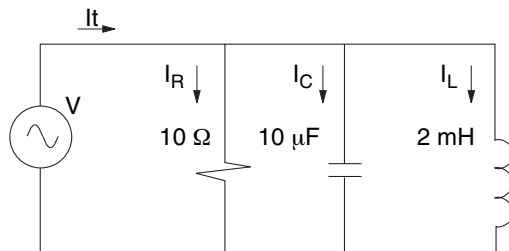
$$V_L = 565,7 \sin(1000t + 33,2^\circ)$$



4.3. irudia.

4.3. PARALELOKO ZIRKUITUA (ADIBIDEA)

Ondoko irudiko zirkuituan, elikatze-tentsioa $V = 100 \sin(2000t + 30^\circ)$ koa da. Bila itzazu adar bakoitzeko korrontea (I_T, I_R, I_C, I_L) eta beren diagrama fasoriala.



4.4. irudia.

Ebazpidea:

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{100}{10} \sin(2000t + 30^\circ) = 10 \sin(2000t + 30^\circ) \text{ A}$$

$$I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{1}{L\omega j} = \frac{100_{<30^\circ}}{2 \times 10^{-3} \times 2000 j} = 25 \sin(2000t - 60^\circ) \text{ A}$$

$$I_C = \frac{V_{<30^\circ}}{1/C\omega j} = C\omega V j = 100 \times 10 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^3 = 2 \sin(2000t + 120^\circ) \text{ A}$$

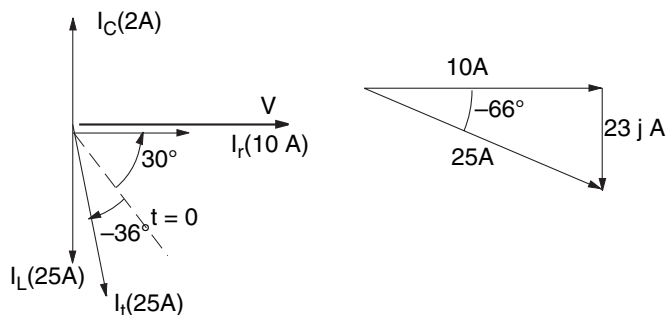
$$I_T = 10 \angle 0^\circ + 25 \angle -90^\circ + 2 \angle 90^\circ = 10 - 23j = 25,6 \angle -66^\circ$$

$$|I_T| = \sqrt{10^2 + 23^2} = 25,6A \quad ; \quad \tan \alpha = \frac{-23}{10} = -2,3; \quad \alpha = -66^\circ$$

Beraz: $\theta = -66 + 30 = -36^\circ$

$$I_T = 25 \sin(2000t - 36^\circ) A.$$

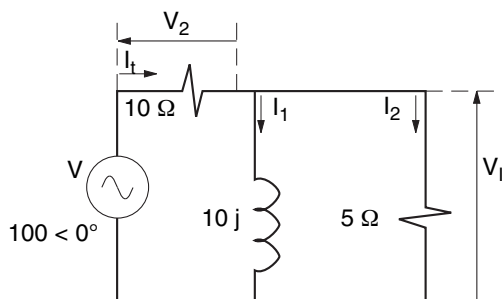
Diagrama fasoriala:



4.5. irudia.

4.4. SERIE/PARALELOKOA (ADIBIDEA)

Ondoko zirkuituan bila itzazu adar bakoitza zeharkatzen duen korronea eta bere ertzen arteko tentsioa. Hauen diagrama fasoriala ere eman ezazu.



4.6. irudia.

Ebazpidea:

$$Z_p = \frac{5 \times 10j}{5 + 10j} = \frac{50j}{5 + 10j} = \frac{10j(1 - 2j)}{(1 + 2j)(1 - 2j)} = \frac{10j(1 - 2j)}{1 + 4} = 4 + 2j;$$

$$Z_T = 10 + Z_p = 14 + 2j = 14,14 \angle 8,14^\circ$$

$$I_T = \frac{V}{Z_T} = \frac{100 \angle 0^\circ}{14,14 \angle 8,14^\circ} = 7,07 \angle -8,14^\circ$$

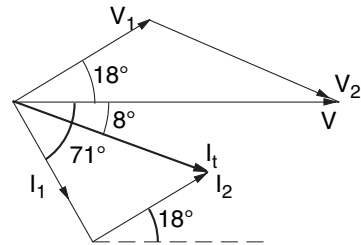
$$V_1 = I_T Z_p; V_1 = 7,07 \angle -8,14^\circ (4 + 2j) = 7,07 \angle -8,14^\circ \times 4,5 \angle 26,6^\circ =$$

$$V_1 = 32 \angle 18,5^\circ \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{V_1}{10j} = \frac{32 \angle 18,5^\circ}{10j} = 3,2 \angle -71,5^\circ \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{V_1}{5} = \frac{32 \angle 18,5^\circ}{5} = 6,4 \angle 18,5^\circ \text{ A}$$

$$V_2 = I_T 10 = 7,07 \angle -8,14^\circ \times 10 = 70,7 \angle -8,1^\circ \text{ V}$$



4.7. irudia.

4.5. DIAGRAMA FASORIALAK

Ondoko paraleloko zirkuituan, 6 ohmeko erresistentziaren muturretan jarritako voltmetro batek 60 volt adierazten ditu. Zenbateko korronea iragarriko du amperemetroak? Eman ezazu V_1 , I_1 , I_2 eta I_t -ren diagrama fasoriala.

Ebazpidea:

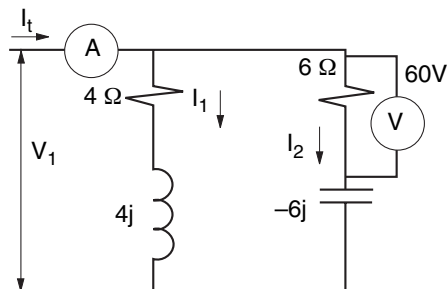
Erresistentzian (6Ω):

$$I_2 = 60 / 6 = 10 \text{ A}$$

$$V_1 = V_R + V_C;$$

$$V_R = 60 \angle 0^\circ \text{ V};$$

$$V_C = I_2 (-6j) = 10 \angle 0^\circ \times (-6j) = 60 \angle -90^\circ \text{ volt}$$



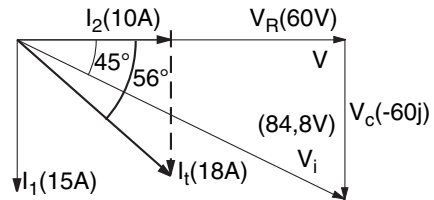
4.8. irudia.

$$V_1 = 60 - 60j = 84,8 \angle -45^\circ \text{ volt}; \quad I_1 = \frac{V_1}{4 + 4j} = \frac{60\sqrt{2} \angle -45^\circ}{4\sqrt{2} \angle 45^\circ} = 15 \angle -90^\circ \text{ A}$$

....

$$I_T = I_1 + I_2 = 10 \angle 0^\circ + 15 \angle -90^\circ =$$

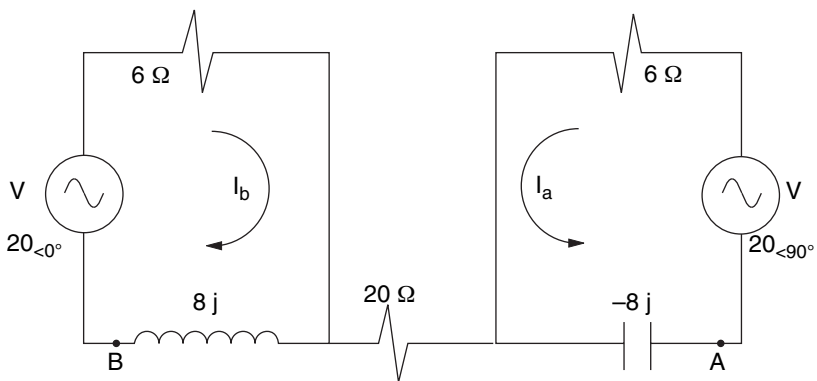
$$= 10 - 15j = 18 \angle -56^\circ \text{ A}$$



4.9. irudia.

4.6. KIRCHHOFFEN ARAUEN ADIBIDEA

Ondoko zirkuituan, bi maila independentez osaturiko zirkuituan, bila ezazu V_{AB} tentsioa.

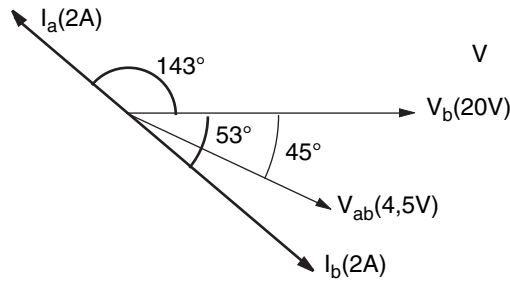


4.10. irudia.

Ebazpidea:

$$V_{AB} = -I_A(-8j) + 0 + I_B(8j);$$

$$I_B = \frac{20 \angle 0^\circ}{6 + 8j} = \frac{20 \angle 0^\circ}{10 \angle 53,1^\circ} = 2 \angle -53,1^\circ \text{ A}$$



4.11. irudia.

$$\mathbf{I}_A = \frac{20_{\angle 90^\circ}}{6 - 8j} = \frac{20_{\angle 90^\circ}}{10_{\angle -53,1^\circ}} = 2_{\angle 143^\circ} \text{ A}$$

$$V_{AB} = (8j) \times 2_{\angle 143^\circ} + (8j) \times 2_{\angle -53,1^\circ} = 16j (1_{\angle 143^\circ} + 1_{\angle -53,1^\circ}) =$$

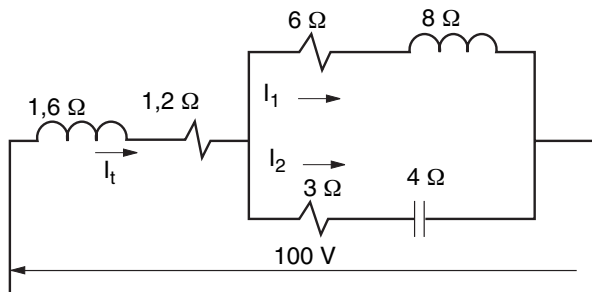
$$= 16j (-0,8 + 0,6j + 0,6 - 0,8j) = 16j (-0,2 - 0,2j) = 16 \times 0,2 \times \sqrt{2} \angle 90 + (-90 - 45)^\circ$$

$$V_{AB} = 4,5 \angle -45^\circ \text{ V}$$

4.7. ARIKETAK

4.1. Ondoko zirkuituan atara ezazu:

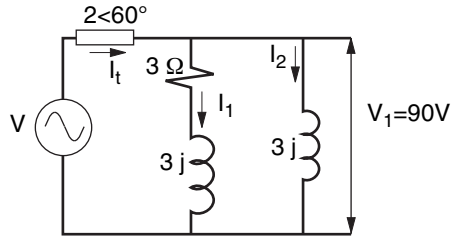
- Zirkuitu osoaren inpedantzia konplexua ($5,87 \angle -4,58^\circ \Omega$)
 - Inpedantzia bakoitza zeharkatzen duen korronea eta erretzen duen potentzia
 - Zirkuitu osoaren potentzia (P_t : 1697 W; Q_t : -136 VAR)
- (I_t : $17 \angle 4,6^\circ$ A; I_1 : $8,7 \angle -72,4^\circ$ A; I_2 : $17,4 \angle 33,6^\circ$ A)



4.12. irudia.

- 4.2. Ondoko zirkuituan $V_1=90$ voltekoea da. Atera ezazu V -ren neurria eta I_1 , I_2 , I_T , V -ren diagrama fasoriala.

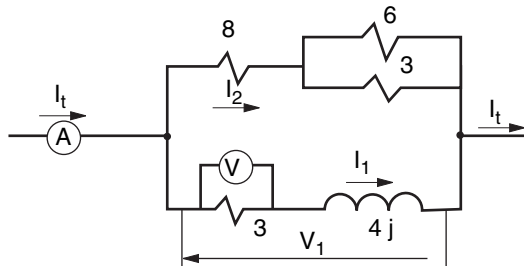
(Emaitzak: $184 \angle -5^\circ$ V; $21,2 \angle -45^\circ$ A; $30 \angle -90^\circ$ A; $47,4 \angle -72^\circ$ A.)



4.13. irudia.

- 4.3. Ondoko irudian voltmetroak 30 volt iragartzen badu, zenbatekoa da amperemetroaren neurria? I_1 , I_2 , V_1 -ren diagrama fasoriala marraz ezazu.

(Emaitzak: $13,6 \angle 17^\circ$ A; 10 A; $5 \angle 53^\circ$ A; $50 \angle 53^\circ$ V)



4.14. irudia.

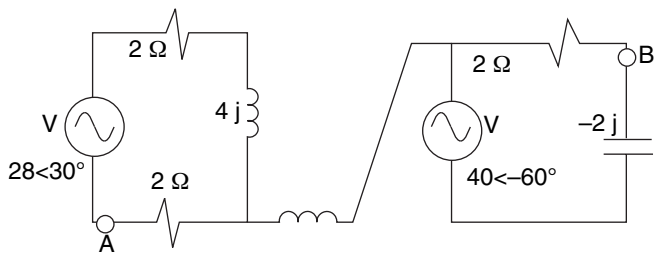
- 4.4. Kondentsadore bat eta $R = 6 \Omega$ -eko erresistentzia bat seriean konektaturik daude. Erresistentziaren ertzetan $V_R = 30 \sin(3000t + 45^\circ)$ daude eta korronea (I_T), 60° aurreratuta dago tentsioarekiko (V_T). Zein da C -ren balioa? Marraztu: V_R , V_C , V_T eta I fasoreak balio maximoetan.

(Emaitzak: $C = 32 \mu\text{F}$; 30 V; 52 V; 60 V; 5 A)

- 4.5. Bobina bat $L = 50$ mH eta kondentsadore bat $C = 10 \mu\text{F}$ -koa paraleloan daude eta $v = 100 \sin 1000t$ volteko tentsioa ezartzen zaie. Marraztu zirkuitu elektrikoa. Bila ezazu zirkuituak izango duen korrone totala. Korrone guztien diagrama fasoriala atera ezazu.

(Emaitzak: $I_T = \sin(1000t - 90^\circ)$ A)

- 4.6. Bila ezazu V_{AB} tentsioa ondoko zirkuituan.
(Emitza $V_{AB} = 18 \angle -15^\circ \text{V}$)



4.15. irudia.

5. POTENTZIA MONOFASIKOA

5.1. ALDIUNEKO POTENTZIA

Honela definitzen da:

$$p(t) = v(t) i(t)$$

Normalean tentsioa eta korrontearen denboran zehar aldatuz joango dira eta korronte zuzenean bezala une bakoitzean dugun potentzia $p = v i$ da. Biderkaketa honetan emaitza batzuetan positiboa eta bestetan negatiboa izango da eta esanahi fisiko hau du:

Potentzia positiboa: iturriak tresna elektrikoari energia ematen diola esan nahi du.

Potentzia negatiboa: alderantziz, iturriak zirkuitutik energia hartu egiten duela esan nahi du. Horretarako energiak zirkuituan pilatuta egon behar du (kondentsadorean edo harilean) edo motore bat izan beharko du (energia mekanikoa elektriko bihurtzen duena).

5.2. POTENTZIA KORRONTE SINUSOIDALEAN

Zirkuitua $V = V_{\max} \sin \omega t$ tentsioaz elikatuta korrontearen ere sinusoidala dugu: $i = I_{\max} \sin(\omega t + \theta)$. Beraz:

$$p = v \cdot i = V_{\max} I_{\max} \sin \omega t \sin(\omega t + \theta)$$

Baina $\sin A \sin B = 1/2 [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$ dela kontuan izanik,

$$p = 1/2 V_{\max} I_{\max} [\cos(\omega t - (\omega t + \theta)) - \cos(\omega t + (\omega t + \theta))]. \text{ Beraz,}$$

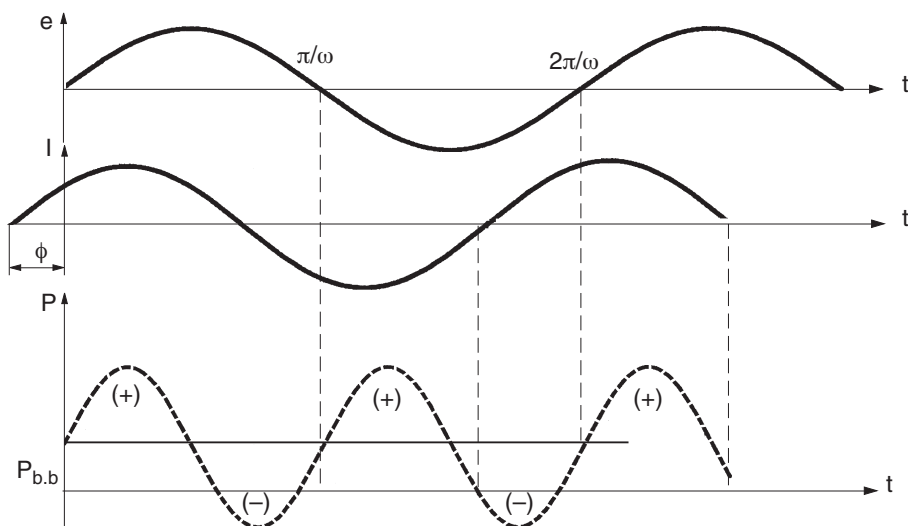
$$p = 1/2 V_{\max} I_{\max} \cos \theta - 1/2 V_{\max} I_{\max} \cos(2\omega t + \theta)$$

- a. Adierazpen honetan **potentziaren** zati bat **konstantea** dela azaltzen zaigu eta potentzia aktiboa deritzaio. $V = V_{\max} / \sqrt{2}$ denez, balio efikazetan potentzia honela azaltzen zaigu:

$$P = p_{b,b} = V \cdot I \cdot \cos \hat{VI}$$

- b. Potentzia aldakorra, uhin sinusoidala dugu, 2ω abiaduran doana eta fase bateko motoretan dardara sortzen duena. Dardararen maiztasuna, korronteak duenaren bikoitza da. Bere batezbesteko potentzia, noski, zero da.

$$P_t = V \cdot I \cos (2 \omega t + \theta)$$



5.1. irudia.

5.2.1. Potentzia aktiboa (P)

Zati konstanteari potentzia aktiboa deritzo, eta iturri eta zirkuituaren artean dagoen benetako transferentzi potentzia azaltzen du. *Potentzi faktorea: $\cos \hat{VI}$ -ri deritzo:*

$$P = V \cdot I \cdot \cos \hat{VI}$$

Unitateak:

Wata (W) eta kilowatta (kW)

1 CV = 736 W

1 HP = 746 W

5.2.2. Potentzia erreaktiboa (Q)

Ez da benetako potentzia. V eta I-ren arteko desfasea kontuan hartzeko erabiltzen da eta honela definitzen da:

$$Q = V \cdot I \cdot \sin \hat{VI}$$

Unitateak:

Voltampere erreaktiboa (VAR)

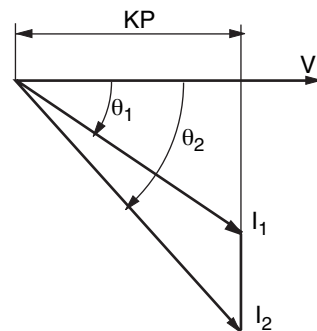
Kilovoltampere erreaktiboa (kVAR)

Eraikinetan V tentsioa konstantea da. Beraz, iturritik ateratzen den potentzia aktiboa, I-k V-rengan duen proiektzioarekiko proportzionala da.

Beraz, θ angeluaren arabera, korrante ezberdinek potentzia berdina eman dezakete.

Ondorioz, potentzia berdina emateko garraio-kableek eta transformadoreek handiagoak izan behar dute.

Galera hauek kontuan hartzeko, potentzia erreaktiboaren kontzeptua erabiltzen da.



5.2. irudia.

5.2.3. Itxurazko potentzia (S)

Aurreko bi potentzi moten batura bektoriala izango litzateke. Potentzia aktiboa eta erreaktiboa bi ardatz elkarzutetan proiektatuta ikus litezke eta osatzen den triangeluari *potentzi triangelua* deritzo.

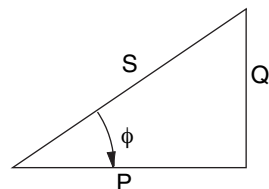
Honela definitzen da:

$$S = V \cdot I$$

Unitateak:

Voltamperea (VA)

Kilovoltamperea (kVA)



5.3. irudia.

Potentzi triangelua

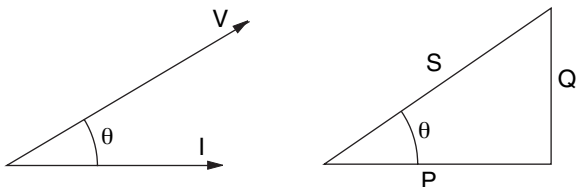
Potentzia ezberdinen balioak ikusiz, hiru potentziak triangelu batean irudika daitezke, eta erlazio hau azalduko da:

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

5.3. POTENTZI TRIANGELUA

5.3.1. Karga induktiboa

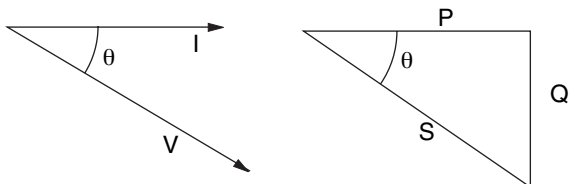
Korrontea, tentsioarekiko atzetik doa eta honen potentzia errektiboa, hitzarmenez, positibotzat hartuko dugu, hau da, kargak Q errektiboa erretzen duela esaten da.



5.4. irudia.

5.3.2. Karga kapazitiboa

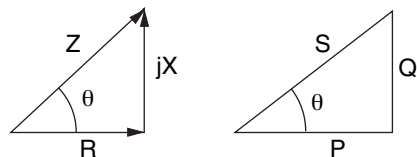
Korrontea tentsioarekiko aurretik doa. Q errektiboa ematen duela azalduko dugu eta bere balioa Q negatibotzat hartuko dugu. Beste era batera, kondentsadoreak potentzia errektiboa ematen duela esaten da; harilak eta kondentsadoreak zeinu ezberdinekoa Q baitute.



5.5. irudia.

Inpedantziaren angeluak V eta I -ren arteko desfasea ezartzen duenez, *inpedantzi triangelua* eta potentzi triangelua antzekoak dira, hau da, angelu berdinak dituzte.

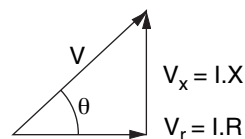
$$I = \frac{V_{<0^\circ}}{Z_{<0^\circ}} = \frac{|V|}{|I|_{<-\theta}}$$



5.6. irudia.

Tentsioen triangelua ere antzekoa da, zeren inpedantzi triangelua I -z biderkatuz *tentsio-triangelua* ematen baitigu.

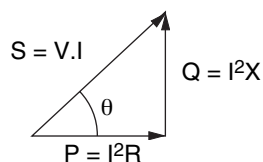
Tentsio-triangelua, berriz, III -z biderkatuz potentzi triangelua dugu: $S = V \cdot I$ $P = I^2 R$ $Q = I^2 X$



5.7. irudia.

Laburtuz, erabilgarri diren adierazpen hauek ditugu:

$$P = V \cdot I \cos \theta = I^2 R; \quad Q = V \cdot I \sin \theta = I^2 X$$



5.8. irudia.

$$S = P + Qj = \frac{V^2}{Z}; \quad P = \frac{V^2}{Z} \cos \theta; \quad Q = \frac{V^2}{Z} \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{R}{Z} = \frac{P}{S}$$

5.4. POTENTZIA MONOFASIKOAREN ADIBIDEAK

5.4.1. Makina

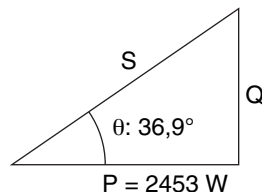
Indukzioko motore batek (3) zaldiko potentzia (3ZP) du eta bere errendimendua % 90ekoa da. Potentzi faktorea 0,8 atzeratutakoa du. Bila itzazu P, Q, S

Ebazpidea:

$$P_{\text{sar}} = \frac{P_{\text{irt}}}{\eta} = \frac{3(ZP) \cdot 736 \text{ W} / ZP}{0,9} = 2453 \text{ W}$$

$$\cos \theta = 0,8 \Rightarrow \theta = 36,9^\circ$$

$$S = \frac{2453}{0,8} = 3067 \text{ VA}$$



5.9. irudia.

$$\text{eta } Q = 3067 \tan 36,9^\circ = 2302 \text{ VAR}$$

5.4.2. Eraikina

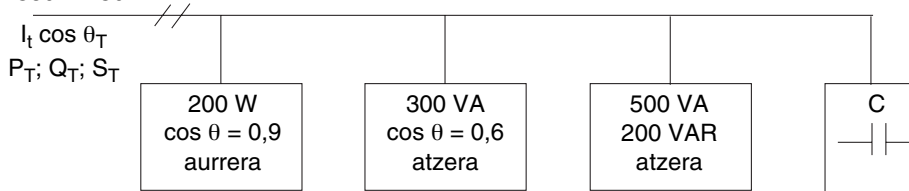
Eraikin batek, 380 V-eko tentsioa du eta ondoko karga hauek elikatzen ditu:

- | | | |
|-----------|--------|------------------------------|
| 1. karga: | 200 W | $\cos \theta = 0,9$ aurrera. |
| 2. karga: | 300 VA | $\cos \theta = 0,6$ atzera. |
| 3. karga: | 500 VA | 200 VAR atzera. |

Kalkulatu:

1. Sareak ematen dituen potentzia totalak: P_T ; Q_T ; S_T
2. Sareko korronea (I_T) eta potentzi faktorea ($\cos \theta_T$)
3. Potentzi faktorea $\cos \theta = 1$ izatea nahi badugu, kondentsadoreen bidez zenbateko potentzia erreaktiboa (Q_C) sartu behar dugu? Aurkitu kondentsadore horien kapazitatea $f = 50 \text{ Hz}$ -ekoa bada.

380V – 50Hz



Ebazpidea:

Potentzia aktibo guztiak batuz, erretzen den potentzia guztia aterako dugu. Potentzia erreaktibo guztiak "Y" ardatzean doazenez, hauek ere batu ditzakegu. Itxurazko potentziak, aldiz, ardatz berean ez daudenez, ezin ditzakegu aritmetikoki batu:

1. P, Q, S

1. karga:

$$\cos \theta_1 = 0,9 \Rightarrow \theta_1 = 25,8^\circ$$

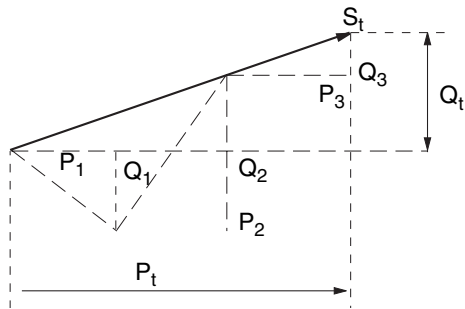
$$P_1 = 200 \text{ W}$$

$$Q_1 = 200 \tan 25,8^\circ = -97 \text{ VAR}$$

2. karga:

$$\cos \theta_2 = 0,6 \Rightarrow \theta_2 = 53^\circ$$

$$P_2 = 300 \times 0,6 = 180 \text{ W}$$



5.10. irudia.

$$Q_2 = 300 \times \sin 53^\circ = 240 \text{ VAR}$$

3. karga:

$$P_3 = \sqrt{500^2 - 200^2} = 458 \text{ W}$$

$$Q_3 = 200 \text{ VAR}$$

$$P_T = 200 + 180 + 458 = 838 \text{ W};$$

$$Q_T = -97 + 240 + 200 = 343 \text{ VAR}$$

$$S_T = \sqrt{P^2 + Q^2} = 905,5 \text{ VA}$$

$$\cos \theta_T = \frac{P_T}{S_T} = \frac{838}{905,5} = 0,93 \text{ atzera}$$

2. I_T

$$P = V \cdot I \cdot \cos \theta_T; \text{ beraz}$$

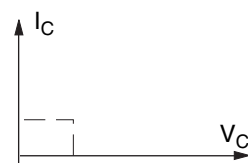
$$I_T = \frac{838}{380 \times 0,93} = 2,4 \text{ A}$$

3. $\cos \theta = 1 \Rightarrow Q_T = 0; \text{ beraz}$

$$Q_C = 343 \text{ VAR}$$

$$Q_C = V I \sin \theta = V \frac{V}{|Z|} \sin 90^\circ = \frac{V^2}{1/C\omega} = C\omega V^2; \text{ beraz,}$$

$$C = \frac{Q_C}{\omega V^2} = \frac{343}{380^2 \times 314} = 7,6 \mu\text{F}$$



5.11. irudia.

5.4.3. Transformadorea

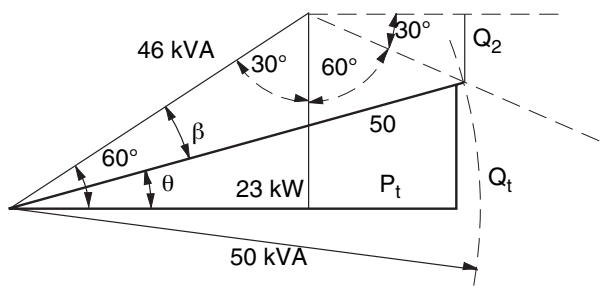
Fase bateko transformadore batek 50 kVA ditu eta 23 kW, $\cos \theta = 0,5$ atzera duen karga elikatzen du. Beste karga bat $\cos \theta = 0,866$ aurreratua duena, erantsi nahi diogu. Transformadorearen karga onargarria ez gainditzeko (ez erretzeko) beste karga horrek gehienez zenbat kVA eduki ditzake?

Ebazpidea:

Hasierako karga: $P = 23 \text{ kW}$; $S_1 = P / \cos \theta = 23 / 0,5 = 46 \text{ kVA}$
 $\theta = \arccos 0,5 = 60^\circ$; $Q = 23 \times \tan 60^\circ = 40 \text{ kVAR}$ atzera

Karga berria: $\cos \theta_2 = 0,866$ $\theta_2 = 30^\circ$ aurrera

1. Ebazpen grafikoa:



5.12. irudia.

2. Ebazpen trigonometrikoa

$$\alpha = 30 + 60 = 90^\circ$$

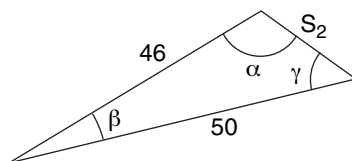
$$\frac{50}{\sin 90} = \frac{46}{\sin \gamma}$$

$$\gamma = 67^\circ ; \beta = 180 - (90 + 67) = 23^\circ$$

$$\theta = 60 - 23 = 36,9^\circ$$

$$P_T = 50 \cos (36,9^\circ) = 40 \text{ kW}$$

$$Q_T = 50 \cdot \sin (36,9^\circ) = 30 \text{ kVAR}$$



5.13. irudia.

Beraz karga berriak balio hauek ditu:

$$P_2 = 40 - 23 = 17 \text{ kW}; \quad Q_2 = 30 - 40 = -10 \text{ kVAR}; \quad S_2 = 19,7 \text{ kVA}$$

3. Ebazpen matematikoa:

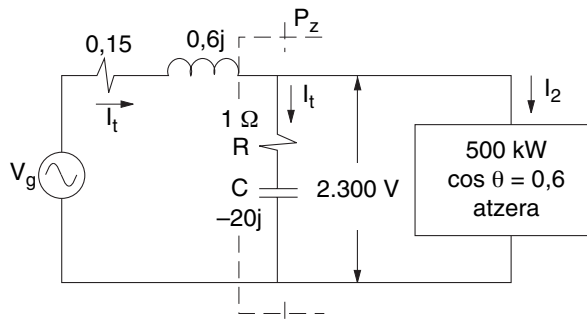
$$\begin{aligned} P_T &= 23 \text{ kW} + P_2; & Q_T &= 40 \text{ kVAR} - Q_2; \\ S_T &= (50 \text{ kVA})^2 = P_T^2 + Q_T^2; & Q_2 &= P_2 \tan 30^\circ = 0,577 P_2 \end{aligned}$$

$$50^2 = (23 + P_2)^2 + (40 - 0,577 P_2)^2 \Rightarrow P_2 = 17 \text{ kW} \quad S_2 = 19,7 \text{ kVA} \quad Q_2 = -10 \text{ kVAR}$$

5.4.4. Linea eta karga

Eraikin industrial batean 500 kW eta $\cos \theta = 0,6$ atzera duen karga dago. Tentsioa 2300 voltetkoa da makinetan. Elikatzen duen hariaren inpedantzia $0,15 + 0,6j$ -koa da. Gainera, ondoko zirkuituan azaltzen den bezala, kondentsadore-multzo bat ezarri zaio, $(1 - 20j)$ inpedantzia duena, potentzi faktorea hobetzeko. Atera itzazu:

1. I_T , I_1 , I_2 eta iturriaren tentsioa V_g ;
2. Iturriak ematen duen potentzia (P , Q , S) eta potentzi faktorea



5.14. irudia.

Ebazpidea:

Kondentsadore-adarra:

$$Z_2 = 1 - 20j = \sqrt{1^2 + 20^2} \angle_{\tan^{-1}(-20/1)} = 20 \angle_{-87^\circ}$$

I_2 :

$$P = VI \cos \theta \Rightarrow 500 \text{ kW} = 2300 \cdot I_2 \cdot 0,6 \Rightarrow I_2 = 362,3 \text{ A}$$

$$\theta = \cos^{-1} 0,6 = -53,13^\circ \Rightarrow Q = P \tan \theta = 500 \cdot \tan 53,1 = 664 \text{ kVAR}$$

I_1 :

$$I_1 = \frac{V}{Z} = \frac{2300_{<0^\circ}}{20_{<-87^\circ}} = 115_{<87,1^\circ} \text{ A}$$

$$P_C = I^2 R = 115^2 \cdot 1 = 13,2 \text{ kW}; \quad Q_C = I^2 X = 115^2 \cdot 20 = 264,5 \text{ kVAR}$$

$$P_Z = 500 \text{ kW} + 13,2 \text{ kW} = 513,2 \text{ kW}; \quad Q_Z = 664 - 264,5 = 399,5 \text{ kVAR}$$

I_T :

$$\theta_T = \tan^{-1} (399,5 / 513,2) = 37,9^\circ \quad I_T = \frac{513,200}{2300 \cos 37,9^\circ} = \frac{513,200}{1814} = 282 \text{ A}$$

$$I_T = 282_{<-37,9^\circ} \text{ A}$$

V_g :

$$V_g = V_1 + 2300_{<0^\circ} \quad V_1 = Z_1 \cdot I_T \quad Z_1 = 0,15 + 0,6j = 0,61_{<76^\circ} \Omega$$

$$V_1 = 0,61_{<76^\circ} \times 282_{<-37,9^\circ} = 172_{<39^\circ} \text{ volt} \quad V_g = 172_{<39^\circ} + 2300_{<0^\circ}$$

$$V_g = 2445 \text{ V}$$

Energiarekin aterata:

Hariaik hartzen duen potentzia:

$$P_L = (0,15 \cdot 282^2) 10^{-3} = 11,928 \text{ kW}; \quad Q_L = 0,6 \cdot 282^2 \cdot 10^{-3} = 47,714 \text{ kVA}$$

Potentzia iturrian:

$$P_g = 513,2 + 11,93 = 525,13 \text{ kW} \quad Q_g = 399,5 + 47,71 = 447,2 \text{ kVAR}$$

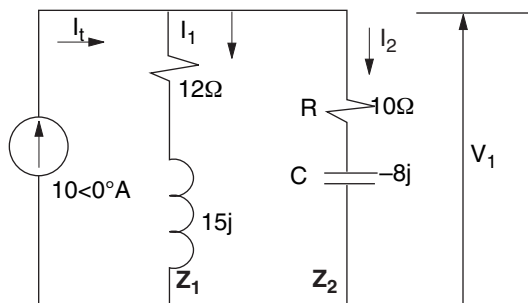
$$\tan \theta_g = \frac{447,2}{525,13} = \tan^{-1} 0,85 = 40,41^\circ; \quad \cos \theta_g = 0,76$$

$$V_g = \frac{P}{I_T \cos \theta} = \frac{525,13}{282 \cdot 0,76} = 2445 \text{ volt}$$

$$S = \frac{P}{\cos \theta} = \frac{525,13}{0,76} = 691 \text{ kVA}$$

5.4.5. Zirkuitua

Ondoko zirkuituan, bila ezazu bost elementu horien potentzia konplexua (potentzia aktiboa eta erreaktiboa) eta elikatzailearen potentzi faktorea.



5.15. irudia.

Ebazpidea:

$$Z_1 = 12 + 15j = 19,2 \angle 51^\circ$$

$$Z_2 = 10 - 8j = 12,8 \angle -38,6^\circ$$

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_1} = \frac{I_T \cdot Z_T}{Z_1} = \frac{I_T \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}}{Z_1} = I_T \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$I_1 = I_T \frac{10 - 8j}{(12 + 15j) + (10 - 8j)} = 10 \angle 0^\circ \frac{12,8 \angle -38,6^\circ}{22 + 7j} = \frac{128 \angle -38,6^\circ}{23 \angle 17^\circ} = 5,6 \angle -55^\circ \text{ A}$$

I_2 rekin berdin:

$$I_2 = I_T \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$I_2 = 10 \angle 0^\circ \frac{12 + 15j}{23 \angle 17^\circ} = \frac{192 \angle 51^\circ}{23 \angle 17^\circ} = 8,3 \angle 34^\circ \text{ A}$$

$$P_{12} = 5,6^2 \times 12 = 31,36 \times 12 = 376,3 \text{ W}; P_{10} = 8,3^2 \times 10 = 690 \text{ W}$$

$$Q_{15} = 5,6^2 \times 15 = 470 \text{ VAR};$$

$$Q_{-8} = -8,3^2 \times 8 = -551 \text{ VAR}$$

Korronte-iturrian:

$$P_T = 376,3 + 690 = \mathbf{1066,3 \text{ W}};$$

$$Q_T = 470 - 551 = \mathbf{-81 \text{ VAR}}$$

$$\tan \theta_T = \frac{-81}{1066,3} = 7,6 \times 10^{-2};$$

$$\theta = -4,34^\circ; \cos \theta = \mathbf{0,997 \text{ aurrera}}$$

5.5. ARIKETAK

- 5.1. Karga, 1500 W, p.f. = 0,75 atzera duten indukziozko motoreez eta 500 VA, p.f. = 0,65 aurrera duten motore sinkronoez osatuta dago. Atera ezazu kondentsadoreen bidez jarri behar den potentzia erreaktiboa, potentzi faktorea 0,95era iritsi dadin.

(Emitza: 347 VAR)

- 5.2. Indukziozko fase bateko motore batek karga osoan ari denean 5 ZP ematen ditu 230 V eta 60 Hz-ekin elikatzen denean. Egoera horretan, motorearen inpedantzia ordezkatzailerak $8,17 + j5,22 \Omega$ -ekoa da. Potentzi faktorea $\cos \theta = 1$ izan dadin motorearen ertzetan kondentsadore batzuk ipini dira, eta hauetako galerak potentzi faktorea $\cos \theta_c = 0,5$ -ren bidez ematen dira. Bila ezazu multzo osoaren potentzia aktiboa, erreaktiboa eta itxurazkoa eta kondentsadoreen kapazitatea.

(Emitza: $P = 4719 \text{ W}$; $Q_T = 0$; $C = 147,9 \mu\text{F}$)

- 5.3. Tentsio-iturri batek $V = 220 \angle 10^\circ \text{ V}$ ditu eta paraleloan dauden hiru inpedantzia elikatzen ditu: $Z_1 = 20 \angle 15^\circ \Omega$; $Z_2 = 30 \angle -10^\circ \Omega$; $Z_3 = 10 \angle 90^\circ \Omega$. Adar bakoitzaren eta multzo osoaren potentzi triangela eman itzazu.

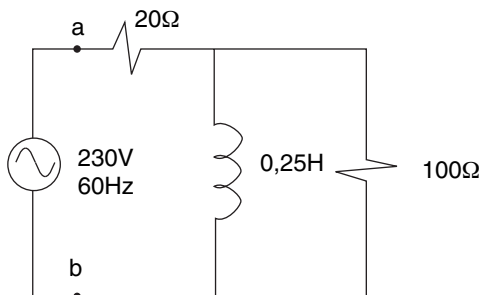
(Emitzak:

$$P_1 = 2337 \text{ W}; \quad Q_1 = 626 \text{ VAR}; \quad P_2 = 1588 \text{ W}; \quad Q_2 = -280 \text{ VAR}; \quad P_3 = 0$$

$$Q_3 = 4840 \text{ VAR}; \quad P_T = 3925 \text{ W}; \quad Q_T = 5186 \text{ VAR}; \quad \cos \theta_2 = 0,6 \text{ atzera}$$

- 5.4. Ondoko zirkuituan a eta b-ren eskuinean dagoen kargaren potentzi faktorea kalkula ezazu. Zenbateko kapazitatea sartu beharko litzateke a eta b-ren artean potentzi faktorea 0,95 atzera izan dadin?

(Eraitza: $\cos \theta = 0,8$ atzera; $C = 10,6 \mu\text{F}$)



5.16. irudia.

- 5.5. Eraikin batean ondoko kargak daude. Bila ezazu multzo osoaren potentzi triangelua eta potentzi faktorea:

1. karga: 100 VA $\cos \theta = 0,6$ atzera

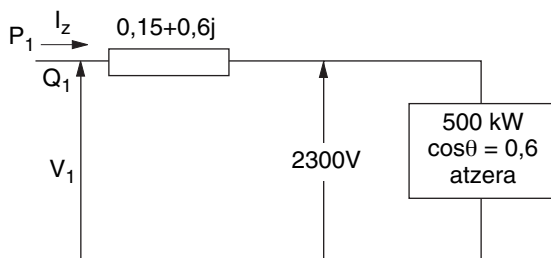
2. karga: 350 VA $\cos \theta = 0,9$ atzera

3. karga: 275 VA $\cos \theta = 1$

(Eraitzak: $P = 650 \text{ W}$; $Q = 232 \text{ VAR}$ atzera; $S = 690 \text{ VA}$; $\cos \theta = 0,94$ atzera)

- 5.6. Industria bateko karga indukzioko motore-talde batez osatuta dago. Guztira 500 kW eta potentzi faktorea 0,6koa atzera dago. Elikatzeko hariak $0,15 + 0,6j$ ohm ditu. Motoreak 2300 V-era elikatzen dira. Bila ezazu kargako korrontea (I_L), iturriak ematen dituen P , Q , S potentziak eta elikatzailean dagoen tentsioa.

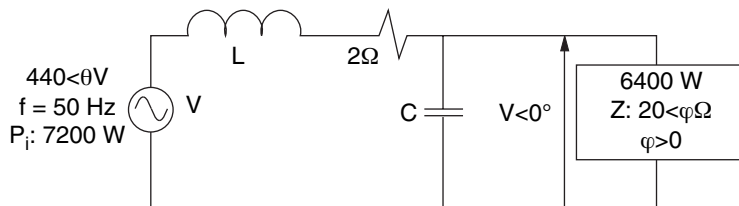
(Eraitzak: $I_L = 362 \text{ A}$; $P_1 = 519,6 \text{ kW}$; $Q_1 = 743 \text{ kVAR}$; $S = 907 \text{ kVA}$; $V_1 = 2504 \text{ V}$)



5.17. irudia.

5.7. Kargaren tentsioa oinarritzat hartuz, ondokoak kalkulatu:

1. Kargaren korronea eta $\cos \theta$: ($I_z = 20 \text{ A}$; $\cos \theta_z$: 0,8 atzera)
2. L-ren neurria eta iturriaren $\cos \theta$: (2 mH; $\cos \theta_g$: 0,818)
3. Tentsio eta korroneen diagrama bektoriala
4. Potentzi faktorea 0,9 igotzeko paraleloan zenbateko kondentsadorea jarri behar den: (C: 33,8 μF)

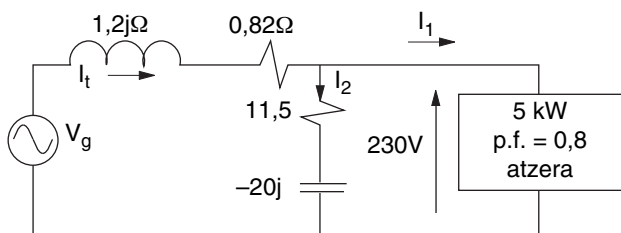


5.18. irudia.

5.8. Sareak bi karga 230 V-era paraleloan elikatzen ditu: bata 5 kW $\cos \theta = 0,8$ atzera eta bestea 11,5 – 20 j-koa. Elikatzeko hariak $Z = 0,82 + 1,2 \text{ j-ko}$ inpedantzia du.

Kalkula ezazu:

1. Iturriaren tentsioa, potentzia aktiboa eta erreaktiboa (P, Q) eta potentzi faktorea: (262,2 V; 6746 W; 2672 VAR; $\cos \theta = 0,93$)
2. Tentsioen eta korroneen digrama fasoriala.



5.19. irudia.

6. KIRCHHOFF-EN ARAUAK KORRONTE ALTERNOAN (determinanteak)

Korronte alternoan Kirchhoffen arauak korronte zuzenean bezala erabiliko ditugu, baina ebaztean zenbaki konplexuekin arituko gara eta hauek erabiltzeko bide errazena determinantez baliatzea da.

6.1. DETERMINANTEAK

Bi erataria ebatz daiteke matrize karratuaren determinantea:

1. Hiru bider hiruko matrizearen determinantea honela aterako dugu:

Marrek adierazten duten elementuen biderkaketa egin behar da eta ondoren hauen batuketa, ondoan azaltzen den bezala:

$$\begin{vmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & x & x \\ & \diagup & \diagdown \\ x & x & x \\ & \diagdown & \diagup \\ x & x & x \end{array} - \begin{array}{ccc} x & x & x \\ & \diagdown & \diagup \\ x & x & x \\ & \diagup & \diagdown \\ x & x & x \end{array} \end{array}$$

Adibidez

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 4 \times 8 \times 3 - [3 \times 5 \times 7 + 6 \times 8 \times 1 + 4 \times 2 \times 9] = 0$$

2. n heineko matrize baten determinantea, edozein lerro edo zutaberen elementuak hartuz eta elementu bakoitza bere adjuntuaz biderkatu ondoren denen batura algebraikoa eginez ere lortzen da.

6.1.1. Adjuntua

(A_{ij}) : i, j elementuaren adjuntua: ij elementuaren Osagai txikiena bere zeinuarekin hartuta lortzen da:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} O_{ij}$$

Adibidez:

a_{12} elementuaren adjuntua hau da: $(-1)^{1+2} O_{12}$;

O_{12} : a_{12} elementuaren osagai txikiena izanik.

6.1.2. Osagai txikiena

n heineko matrize karratuko a_{ij} elementuaren osagai txikiena, $n-1$ heineko matrize baten determinantea da; aurreko matrizeari i lerroa eta j zutabea kenduz osatzen den matrizearen determinantea. Adibidez: "2" zenbakiaren adjuntua hau dugu:

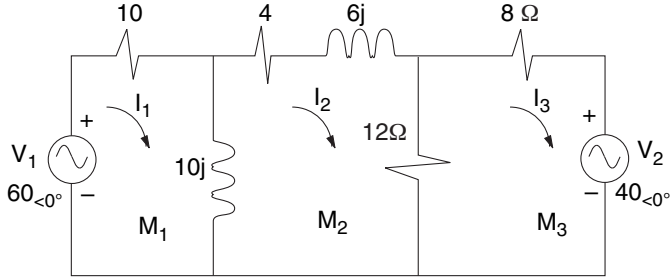
$$O_{12} = \begin{array}{cc|c} & a_{12} & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \quad (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Aurreko determinantea, lehenengo lerroaren adjuntuaz garatuta honela gelditzen da:

$$\begin{aligned} & 1x(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2x(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3x(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \\ & = 1 \times (9 \times 5 - 6 \times 8) - 2 (4 \times 9 - 6 \times 7) + 3 \times (4 \times 8 - 5 \times 7) = \\ & = -3 + 12 - 9 = 0 \end{aligned}$$

6.2. KIRCHHOFFEN ARAUEN ADIBIDEA

Ondoko zirkuituan bila ezazu $4 + 6j$ adarrean dagoen korronea:



6.1. irudia.

Ebazpidea:

Kirchhoffen mailei buruzko araua erabiliz eta mailako korronteak hartuz, hau dugu:

$$\begin{array}{lclclclcl} M_1) & (10 + 10j)I_1 & & -10j I_2 & + & 0 I_3 & = & 60_{<0^\circ} \\ M_2) & -10j I_1 & + & (16 + 16j) I_2 & - & 12 I_3 & = & 0 \\ M_3) & 0 & & -12 I_2 & + & 20 I_3 & = & -40_{<0^\circ} \end{array}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 + 10j & 60_{<0^\circ} & 0 \\ -10j & 0 & -12 \\ 0 & -40_{<0^\circ} & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 + 10j & -10j & 0 \\ -10j & 16 + 16j & -12 \\ 0 & -12 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{10x2x20}{10x2x4} \frac{20x}{10x} \frac{\begin{vmatrix} 1+j & 6_{<0^\circ} & 0 \\ -5j & 0 & -6 \\ 0 & -2_{<0^\circ} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+j & -j & 0 \\ -5j & 8+8j & -6 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix}}$$

Izendatzaileko edo inpedantzien determinantea deritzona hau dugu:

$$8(1+j)^2 \times 5 - [-25 + 18(1+j)] = 8 \times 2j \times 5 + 25 - 18(1+j) = 7 + 62j$$

Zenbakitzailearen determinantea berriz:

$$-[6 \times 2 \times (1+j) - 6 \times 5 \times 1j] = -12 + 18j$$

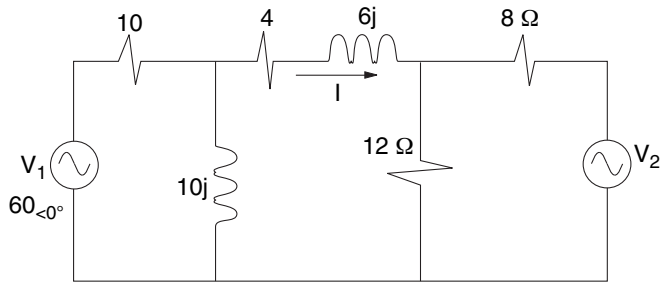
Beraz I_2 :

$$I_2 = \frac{5x(-12 + 18j)}{7 + 62j} = \frac{18_{<123^\circ}}{62_{<83^\circ}} = 1,74_{<41^\circ} \text{ A}$$

6.3. ARIKETA

Ondoko zirkuituak bi tentsio-sorgailu daramatza: $V_1 = 60_{<0^\circ}$ eta V_2 . Bila ezazu V_2 -ren neurria, $4 + 6j$ adarrean korronea zero izan dadin.

(Emitza $70_{<45^\circ} \text{ V}$)



6.2. irudia.

7. SAREEN TEOREMA OROKORRAK

7.1. GAINEZARMEN-TEOREMA

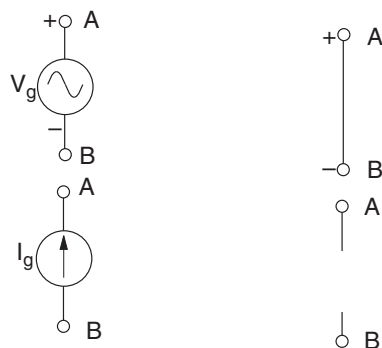
Zirkuitu bat lineala eta bilateral bada, zirkuituaren edozein gunetan dagoen tentsioa eta korrontea, iturri bakoitza bera bakarrik egonik (beste guztiak zeroan jarritz) gune horretan emango lukeen tentsio edo korrontea hartuz eta ondoren iturri guztien ekintzak gune horretan batuz lortuko litzateke.

Tentsio-iturria zeroan jartzea:

Bere ertzen artean zirkuitulaburra egitea da.

Korronte-iturria zeroan jartzea:

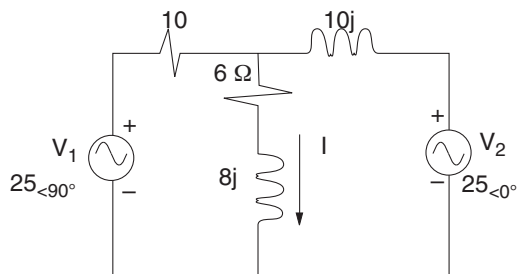
Korronte-iturriaren ertzak irekitzea da.



7.1. irudia.

7.1.1. Adibidea

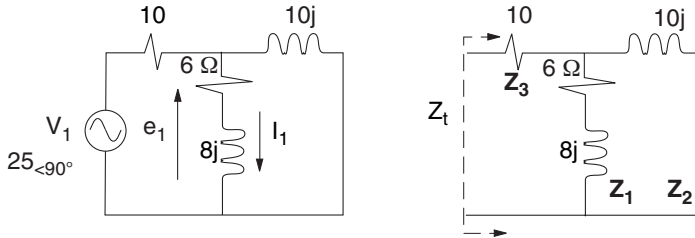
Gainezarmen-teorema erabiliz $(6 + 8j)$ adarrean dagoen korrontea atera ezazu.



7.2. irudia.

Ebazpidea:

V_1 -en sarea:



7.3. irudia.

$$I_1 = \frac{e_1}{Z_1} ; e_1 = I_T \cdot Z_p ; Z_p = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} ; I_1 = \frac{I_T \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}}{Z_1}$$

$$I_1 = I_T \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} ; I_T = \frac{V_1}{Z_T} ; Z_T = Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_3(Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

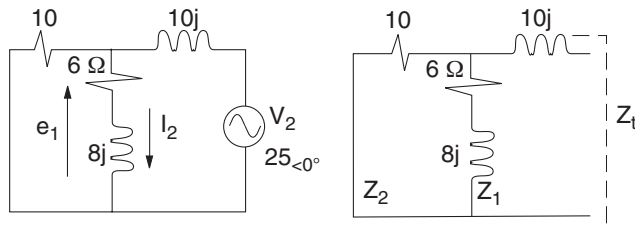
$$I_1 = \frac{V_1(Z_1 + Z_2)}{Z_3(Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{V_1 Z_2}{Z_3(Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2}$$

Balioak ordezkatzuz:

$$I_1 = \frac{25j \times 10j}{10(6 + 8j + 10j) + (6 + 8j)10j} = \frac{-25}{-2 + 24j} = \frac{25 \angle 180^\circ}{24,1 \angle 95^\circ}$$

$$I_1 = 1,03 \angle 85^\circ \text{ A}$$

V_2 -ren sarea:



7.4. irudia.

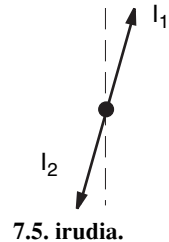
Berdin jotatuz:

$$I_2 = \frac{25 \angle 0^\circ \times 10}{10j(6 + 8j + 10) + (6 + 8j)10} = \frac{25}{-2 + 24j} = 1,03 \angle -94,7^\circ$$

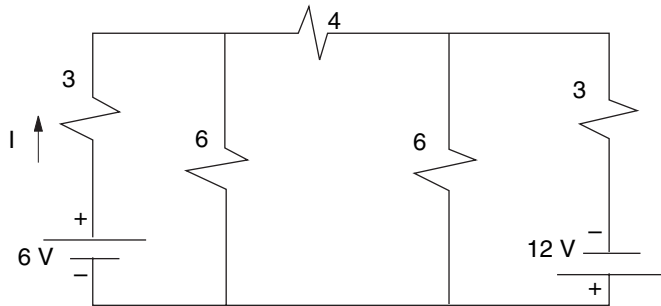
$$I_{IT} = I_1 + I_2 = 1,03 \angle 85,3^\circ + 1,03 \angle -94,7^\circ = 0;$$

aurkako bektoreak baitira.

7.1.2. Ariketa



Gainezarmen-teorema erabiliz, bila ezazu I korronea. Emaitza: $I = 1,66 \text{ A}$

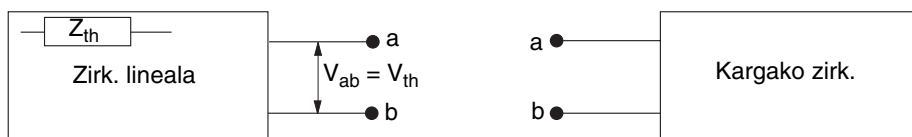
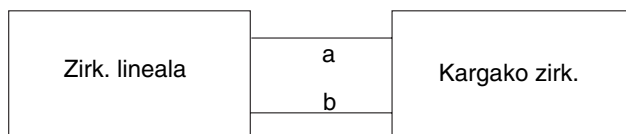


7.6. irudia.

7.2. THEVENINEN TEOREMA

Zirkuituaren zati batek, ω maiztasun angeluar berdineko eta menpekoak ez diren iturriak baditu eta zirkuitua lineala ($y = k x$) bada, zirkuitu-zati hori tentsio-iturri eta inpedantzia batez ordezka genezake.

Theveninen teorema erabiliz, zirkuituaren a eta b puntuen artean eta ezker aldera dagoen zirkuitua ordezkatu nahi bada, eskuineko zatia edo kargako zirkuitua kendu egin behar da.



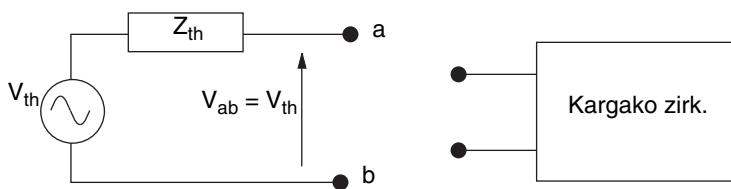
7.2.1. Theveninen tentsioa (V_{th})

Ordezkatu nahi dugun zirkuitua, a eta b puntuen artean eta kargako zirkuitua irekita egonik sortzen duen tentsioari (V_{ab} -ri) "Theveninen" tentsioa deritzo.

7.2.2. Theveninen inpedantzia (Z_{th})

Kargako zirkuitua kendu eta zirkuitu linealaren iturri guztiak zeroan jarri ondoren (tentsioei zirkuitulaburra eginez eta korrante-iturriak irekiz) a eta b puntuen artean azaltzen den inpedantziari *Theveninen inpedantzia* esaten zaio.

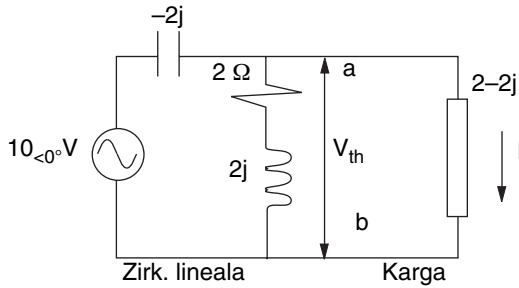
Horrela ordezkatu nahi dugun zirkuitua, ondoko Thevenin zirkuitu ordezkatzaile bihurtzen da.



7.7. irudia.

7.2.3. Adibidea

Ondoko zirkuituan, a eta b-ren artean dagoen ezker aldeko zatia, Theveninen zirkuituaz ordezka ezazu. Ondoren, kargako zirkuitua erantsi eta I korrontea bilatu.



7.8. irudia.

Ebazpidea:

Urrats hauek eman behar dira Theveninen teorema erabiltzeko:

- a. **a** eta **b** puntuak ezarri ondoren, karga gisa dagoen zirkuitua kendu.

- b. Gelditzen den zirkuitu-zatian V_{ab} tentsioa atara:

$$V_{AB} = \frac{2 + 2j}{-2j + 2j + 2} 10_{\angle 0^\circ} = 10(1 + j)V$$

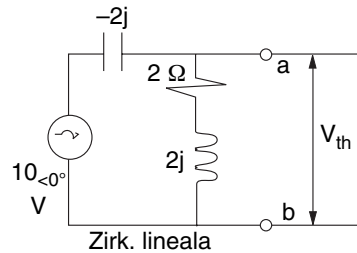
$$V_{AB} = V_{th} = 10\sqrt{2}_{\angle 45^\circ}$$

- c. (Z_{th}) Iturriak zeroan jarri ondoren, zirkuituaren inpedantzia bilatu.

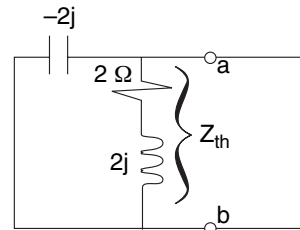
$$Z_{th} = \frac{(-2j)(2 + 2j)}{(-2j) + (2 + 2j)} = 2 - 2j$$

- d. Theveninen zirkuituari karga erantsi eta eskatutakoa bilatu (I):

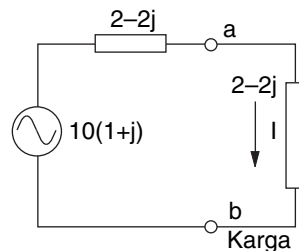
$$I = \frac{10\sqrt{2}_{\angle 45^\circ}}{(2 - 2j) + (2 - 2j)} = \frac{10\sqrt{2}_{\angle 45^\circ}}{4\sqrt{2}_{\angle -45^\circ}} = 2,5_{\angle 90^\circ} A$$



7.9. irudia.



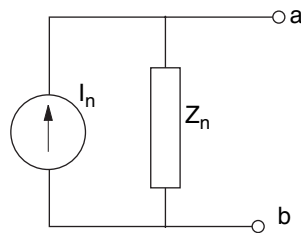
7.10. irudia.



7.11. irudia.

7.3. NORTONEN TEOREMA

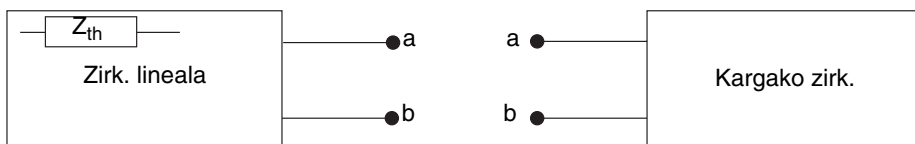
Edozein zirkuitu-zati, lineala bada, menpekoak ez diren iturriak eta ω maiztasun angeluar berdinak baditu, korrante-iturri batez eta paraleloan jarritako inpedantzia batez ordezkua daiteke:



7.12. irudia.

7.3.1. Nortonen inpedantzia

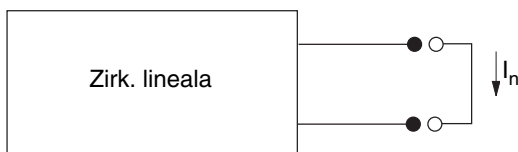
Theveninen inpedantziaren berdina da. Ordezkatu nahi dugun zirkuituan iturri guztiak zeroan jarri ondoren, a eta b-tik ikusita azaltzen den inpedantziari deritzo.



7.13. irudia.

7.3.2. Nortonen korrante-iturria (I_N)

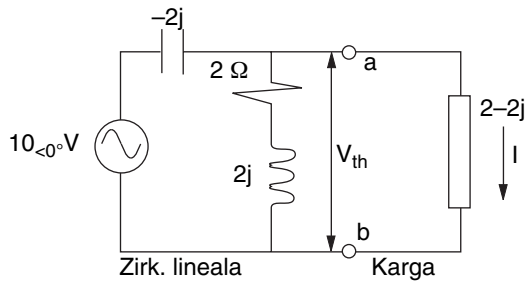
Kargako zirkuitua kendu ondoren eta a eta b artean zirkuitulaburra eginez bertan azaltzen den korronteari Nortonen korrante-iturria esaten zaio.



7.14. irudia.

7.3.3. Adibidea

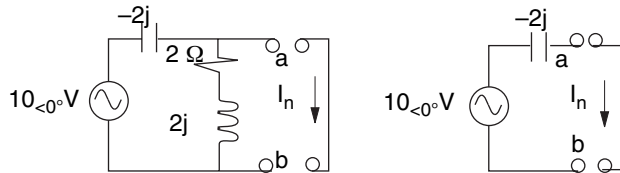
Aurreko adibidean zirkuituko a eta b puntuen artean Nortonen zirkuitu ordezkatzaila bila ezazu eta ondoren I korrontea eman.



7.15. irudia.

Urrats hauek eman behar ditugu:

1. I_N : Ertzen artean zirkuitulaburra eginez



7.16. irudia.

$$I_N = \frac{10_{\angle 0^\circ}}{-2j} = 5_{\angle 90^\circ} \text{ A}$$

2. Z_N : Nortonen inpedantzia:

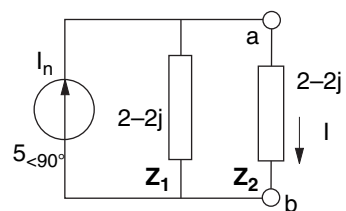
Theveninen inpedantzia gisa ateratzen denez, biek emaitza berdina dute:

$$Z_{th} = Z_N = 2 - 2j \, \Omega$$

3. Zirkuitu ordezkatzaila eta kargako korrontea (I):

$$I = I_N \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} =$$

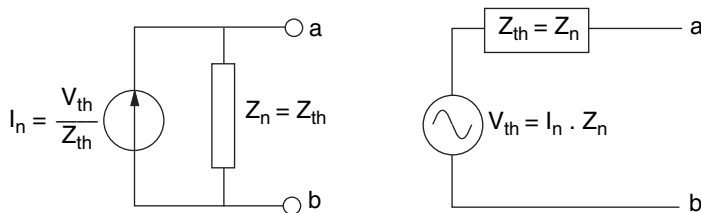
$$= 5_{\angle 90^\circ} \frac{2 - 2j}{(2 - 2j) + (2 - 2j)} = 2,5_{\angle 90^\circ} \text{ A}$$



7.17. irudia.

7.4. THEVENIN ETA NORTONEN ARTEKO ALDERAKETA

Iturriak maiztasun berdinean baldin badaude, erlazio hauek betetzen dira:

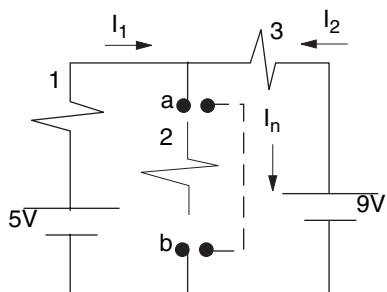


7.18. irudia.

7.5. THEVENIN ETA NORTONEN TEOREMEN ADIBIDEAK

1. adibidea

Ondoko zirkuituan, a eta b ertzetan Nortonen zirkuitu ordezkatzailerik ezazu. Ondoren puntu horien artean $2\ \Omega$ -eko erresistentzia jartzen bada, zenbateko korronteak zeharkatuko du?

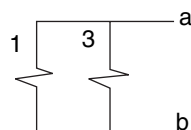


7.19. irudia.

Ebazpidea:

$$I_N = I_1 + I_2 = 5 / 1 + 9 / 3 = 8\text{ A}$$

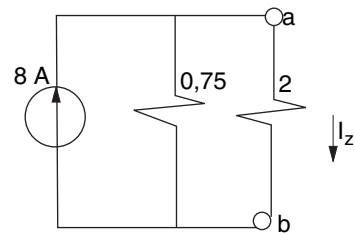
$$Z_N = \frac{1 \times 3}{1 + 3} = 0,75\ \Omega$$



7.20. irudia.

Kargako korrontea:

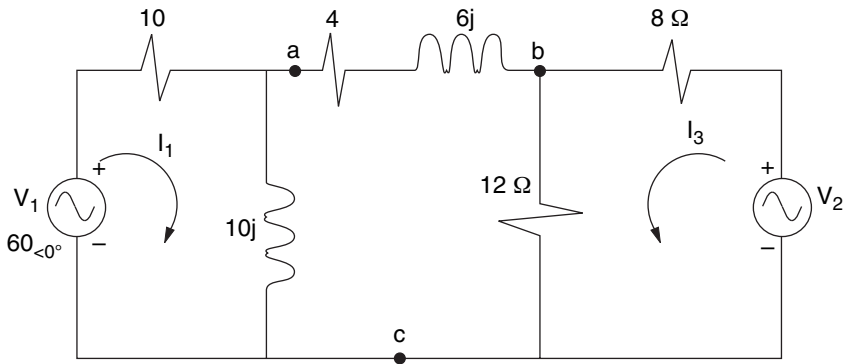
$$I_z = 8 \frac{0,75}{2 + 0,75} = 2,18 \text{ A}$$



7.21. irudia.

2. adibidea

Ondoko zirkuituan zenbatekoa izan behar du V_2 -ren balioak $(4 + 6 j)$ adarrean korrontea zero izan dadin?



7.22. irudia.

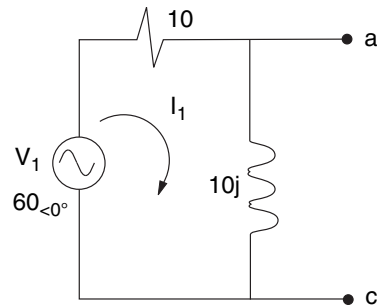
Ebazpidea:

a eta c-ren arteko Theveninen zirkuitu ordezkatzaila bilatuko dugu eta b eta c-ren artean berdin egingo dugu.

1. Ezkerreko aldea:

$$V_{th1} = \frac{60_{<0^\circ} \times 10j}{10 + 10j} = \frac{60j}{1 + j} = \frac{60}{\sqrt{2}}_{<45^\circ}$$

$$Z_{T1} = \frac{10 \times 10j}{10 + 10j} = 10 / \sqrt{2}_{<45^\circ} \Omega$$

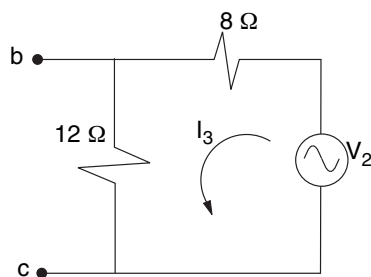


7.23. irudia.

2. Eskuineko aldea:

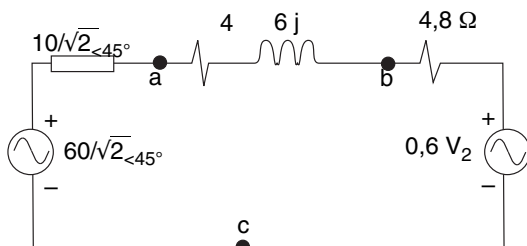
$$V_{th2} = V_2 \frac{12}{12 + 8} = 0,6 V_2$$

$$Z_{T2} = \frac{8 \times 12}{8 + 12} = 4,8 \Omega$$



7.24. irudia.

3. Zirkuitua kargarekin:



7.25. irudia.

I korronea zero izan dadin $(4+6j)$ adarrean hau bete behar da:

$$\frac{60}{\sqrt{2}} <45^\circ = 0,6 V_2$$

$$\text{Beraz, } V_2 = \frac{60}{0,6 \times \sqrt{2}} <45^\circ = 70,7 <45^\circ V$$

3. adibidea

Ondoko zirkuituan I korronea eta a eta b puntuen arteko Thevening eta Nortonen zirkuitu ordezkatzailak bila itzazu. Iturriak hauek dira:

$$V = 20 \sin 1000 t \text{ (V) eta } I_s = 6 \sin 1000 t \text{ (mA)}$$

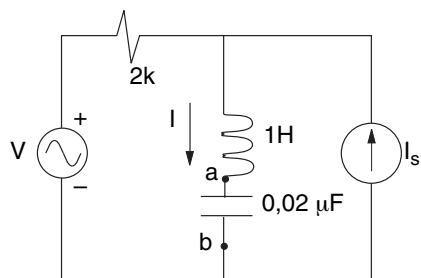
Ebazpidea:

Inpedantziak: $\omega = 1000 \text{ rad/s}$;

1 H: ---- $L\omega j = 1 \times 1000 = 1 j \text{ k}\Omega$

0,02 μF : ---- $1 / (C\omega j) =$

$$= \frac{1}{2 \times 10^{-2} \times 10^{-6} \times 10^3 j} = -50j \text{ k}\Omega$$



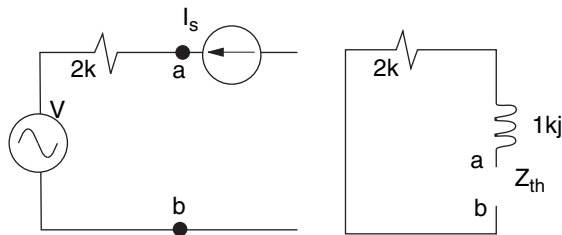
7.26. irudia.

Oharrak:

- Korrontea mA-tan hartzen badugu eta inpedantzia $k\Omega$ -etan, tentsioa voltetan aterako da.
- Nahiz eta gehienetan balio efikazak erabili, hemen neurri maximoekin egingo dugu lan.

I. V_{th} (Thevenin):

Zirkuitua irekiz hau geldituko zaigu:



7.27. irudia.

$$V_{ab} = 2 I_s + V = 6 \times 2 \angle 0^\circ + 20 \angle 0^\circ$$

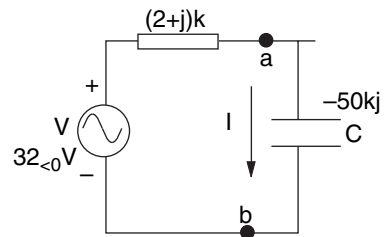
$$V_{ab} = 32 \angle 0^\circ \text{ V}; Z_{th} = (2 + 1j) k\Omega$$

$$(I)_{\max} = \frac{32}{(2 + j) - 50j} = \frac{32}{2 - 49j} = 0,65 \angle 88^\circ$$

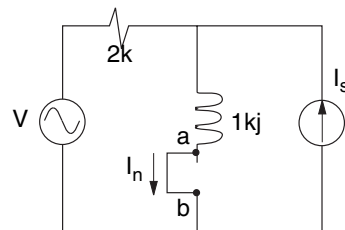
$$(I)_{ef} = 0,65/\sqrt{2} = 0,46 \angle 88^\circ \text{ mA}$$

II. Nortonen bidezko ebazpidea:

I_N : a eta b ertzen artean zirkuitulaburra eginda, zirkuitu hau dugu:



7.28. irudia.



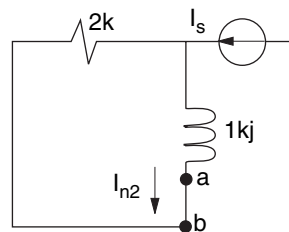
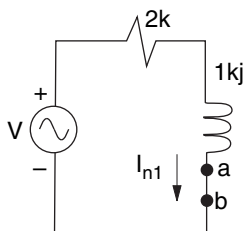
7.29. irudia.

Gainezarmen-teorema erabiliz:

$$I_N = I_{N1} + I_{N2}$$

$$I_{N1} = \frac{V}{(2 + j)k\Omega};$$

$$I_{N2} = I_s \frac{2}{(2 + j)}$$



7.30. irudia.

$$I_N = \frac{1}{(2 + j)} (V + 2I_s) = \frac{20_{<0^\circ} + 6 \times 2_{<0^\circ}}{(2 + j)} = \frac{32}{(2 + j)} \text{ mA}$$

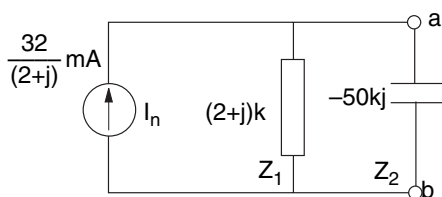
$$Z_N = Z_{th} = (2 + j) (k\Omega)$$

Zirkuitu osoa kargarekin:

$$I = I_N \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$I = \frac{32}{2 + j} \frac{2 + j}{(2 + j) - 50j} = \frac{32}{2 - 49j}$$

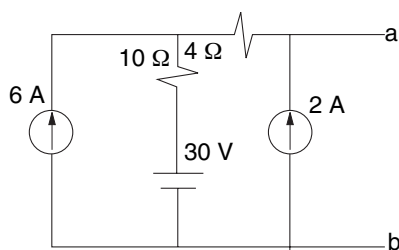
$$I_{ef} = \frac{I}{\sqrt{2}} = 0,46_{<88^\circ} \text{ mA}$$



7.31. irudia.

4. adibidea

Ondoko zirkuituan a eta b-ren arteko Theveninen zirkuitu ordezkatzaila bila ezazu.

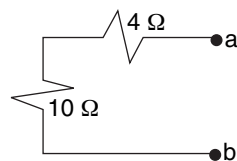


7.32. irudia.

Ebazpidea:

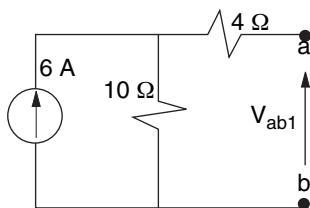
Z_{th} : Korrante-iturriak irekiz eta tentsiokoen zirkuitu-laburra eginez, honela gelditzen zaigu:

$$Z_{th} = 10 + 4 = 14 \Omega$$



V_{th} ; Gainezarmen-teorema erabiliko dugu:

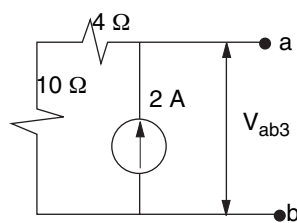
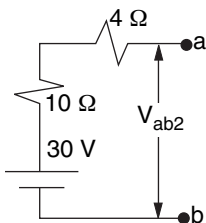
$$V_{ab1} = 10 \, \Omega \times 6 \, (A) = 60 \, V$$



7.33. irudia.

$$V_{ab2} = 30 \, V$$

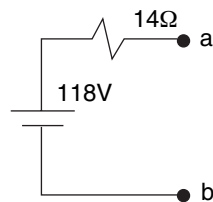
$$V_{ab3} = 2 \, (A) \times 14 \, (\Omega) = 28 \, V;$$



7.34. irudia.

Beraz, $V_{th} = 60 + 30 + 28 = 118 \, V$

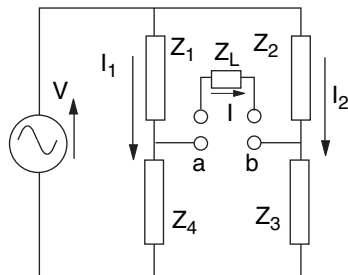
Theveninen zirkuitu osoa:



7.35. irudia.

5. adibidea

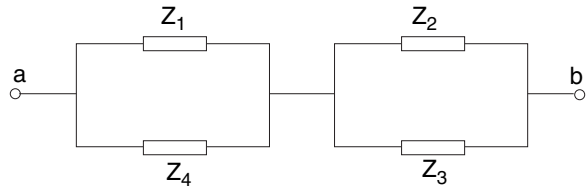
Ondoko zubi-zirkuitu deitutakoari, bila iezaiozu a eta b-ren arteko Theveninen zirkuitu ordezkatzaila. Nahiz edozein inpedantziarekin a eta b puntuak elkartu, bertako korrontea (I) zein baldintzatan zero izango den aurki ezazu.



7.36. irudia.

Ebazpidea:

$$Z_{th} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} + \frac{Z_1 Z_4}{Z_1 + Z_4}$$



$$V_{th} = V_{ab} = Z_4 I_1 - Z_3 I_2 = V_g \left(\frac{Z_4}{Z_1 + Z_4} - \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} \right) =$$

$$= V_g \frac{Z_4 Z_2 - Z_3 Z_1}{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)}$$

eta edozein kargarekin I_{ab} zero izan dadin, V_{ab} -k zero izan behar du. Beraz,

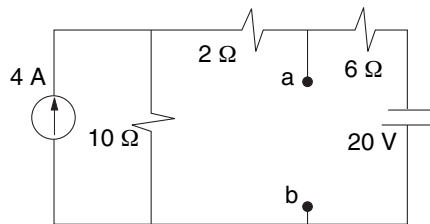
$$V_{th} = 0 \Rightarrow Z_2 Z_4 = Z_1 Z_3$$

Zubi-sistemako balioen mamia berdinketa honetan oinarritzen da:

7.6. ARIKETAK

7.1. Ondoko zirkuituan a eta b-ren artean Theveninen zirkuitu ordezkatzaila bila ezazu.

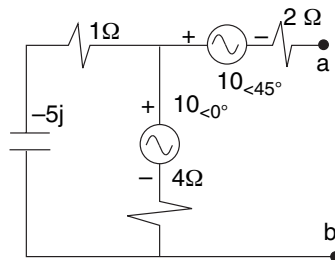
(Emitza: $Z_{th} = 4 \Omega$; $V_{th} = 0 \text{ V}$)



7.37. irudia.

7.2. a eta b ertzen arteko Theveninen zirkuitu ordezkatzaila bila ezazu.

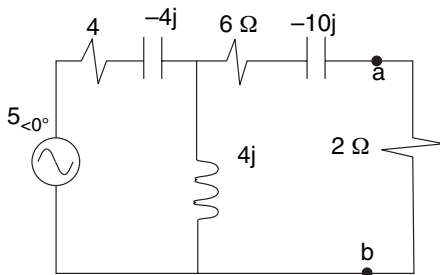
(Emitza: $Z_{th} = 4,62 \angle -20^\circ \Omega$; $V_{th} = 11,1 \angle -95,1^\circ \text{ V}$)



7.38. irudia.

- 7.3. Theveninen teorema erabiliz, a eta b-ren artean $2\ \Omega$ -eko erresistentziak zenbateko potentzia erreko duen atera ezazu.

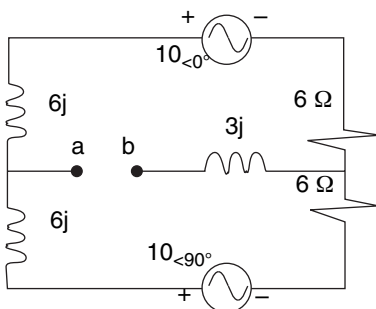
(Emitza: $0,28\ \text{W}$)



7.39. irudia.

- 7.4. a eta b ertzen arteko Theveninen zirkuitu ordezkatzaila bila ezazu.

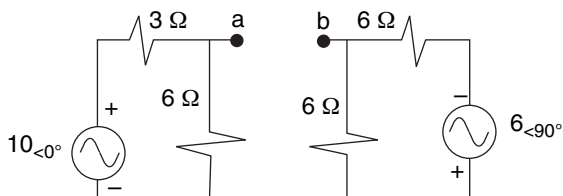
(Emitzak: $Z_{th} = 3 + 6j\ \Omega$; $V_{th} = 5\sqrt{2}\angle 45^\circ\ \text{V}$)



7.40. irudia.

- 7.5. Ondoko zirkuituan a eta b-ren arteko zirkuitu ordezkatzaila bila ezazu.

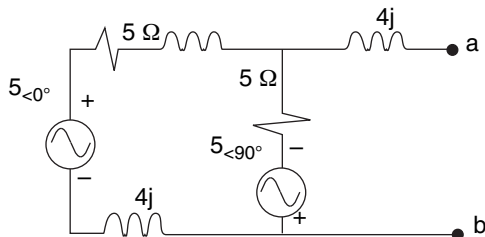
(Emitza: $Z_{th} = 5\angle 0^\circ\ \Omega$; $V_{th} = 7,31\angle 24^\circ\ \text{V}$)



7.41. irudia.

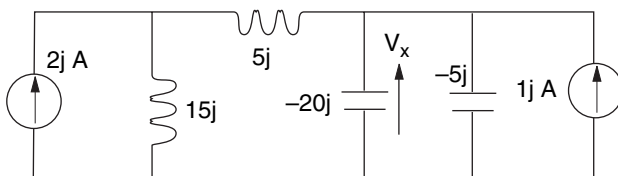
7.6. Ondoko zirkuituan a eta b-ren arteko Theveninen eta Nortonen zirkuitu ordezkatzailak bila itzazu.

(Emaitza: $Z_{th} = Z_N = 6,7 \angle 53^\circ \Omega$; $V_{th} = 5,6 \angle -63,4^\circ V$; $I_N = 0,84 \angle -116^\circ A$)



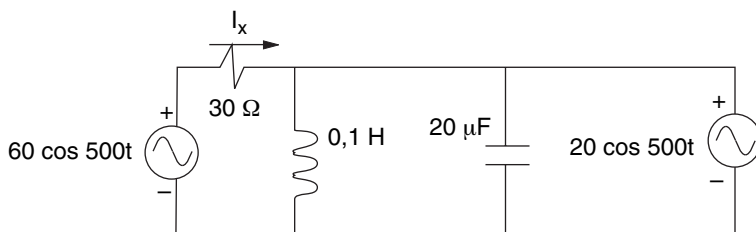
7.42. irudia.

7.7. Gainezarmen-teorema erabiliz atara ezazu V_x tentsioa ondoko zirkuituan (12,5 V)



7.43. irudia.

7.8. Ondoko irudian bila itzazu I_x eta $i_x(t)$ gainezarmen-teorema erabiliz: ($I_x = 0,93 \angle 0^\circ A$; $i_x(t) = 0,93 \sqrt{2} \cos 500t$)



7.44. irudia.

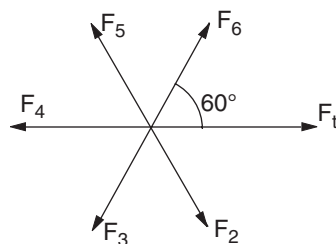
8. SARE TRIFASIKOAK

Fase anitzeko egiturak:

Hiru tentsio sinusoidal berdin edo gehiagoz eta beren artean desfase berdineko iturriz osatutakoari, fase anitzeko egitura deritzo. Adibidez, sei faseko egitura:

Sei tentsio alferno berdinez osatuta dago eta elkarren arteko desfasea $360 / 6 = 60^\circ$ -koa dute. Potentzia handiko korronteen artezketan erabiltzen da.

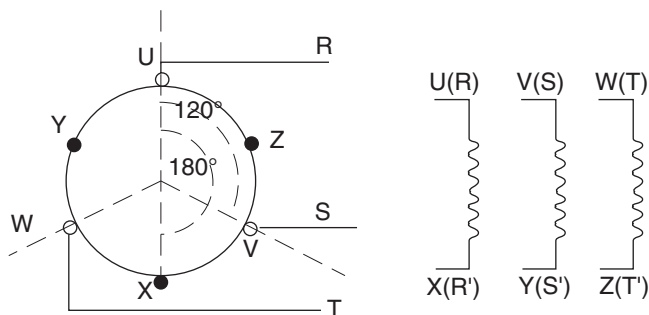
Fasureen bidez honela azalduko dugu:



8.1. irudia.

8.1. SARE TRIFASIKOAK

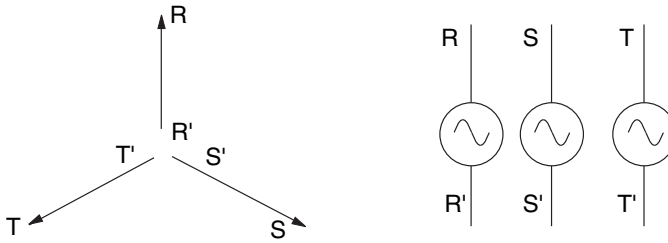
Alternadore edo sorgailu sinkronoen bidez sortzen da. Makina horien errorean 3 haril 120° tartekaturik jartzen dira.



8.2. irudia.

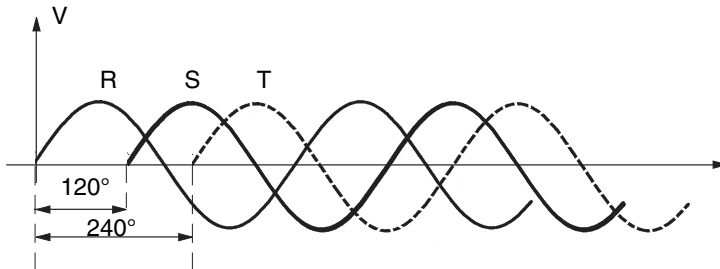
Haril bakoitzean tentsio alternoa sortzen da. Haril denak berdinak direnez, tentsioak ere hala dira, baina biraketaren norantzari begiratuta, b–b' harilean 120° geroago sortuko da tentsioa a–a' harilean baino. Beraz, hiru tentsioak denboran 120° desfasaturik azalduko dira.

Fasoreekin azalduz:



8.3. irudia.

Azalpen grafikoa:



8.4. irudia.

Azalpen modulu-angeluarra

$$V_{R-R'} = V < 0^\circ$$

$$V_{S-S'} = V < -120^\circ$$

$$V_{T-T'} = V < -240^\circ$$

Azalpen matematikoa:

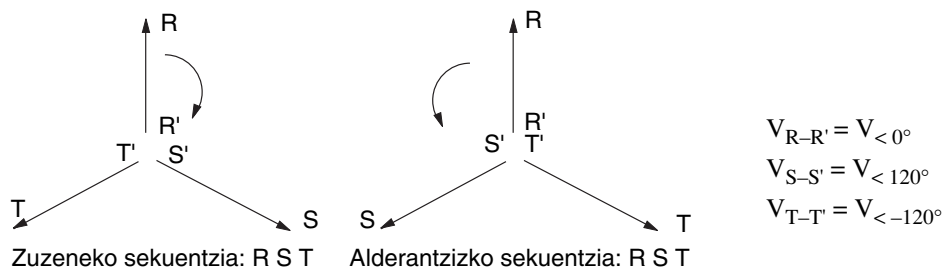
$$V_{R-R'} = V_{\max} \sin \omega t$$

$$V_{S-S'} = V_{\max} \sin (\omega t - 120^\circ)$$

$$V_{T-T'} = V_{\max} \sin (\omega t - 240^\circ)$$

Alderantzizko sekuentzia:

Faseen antolamendua ezkerrerantz hartzen denean esaten zaio. Bi fase aldatzearen ondorioa da eta motoretan biraketa-norantza aldarazten du.

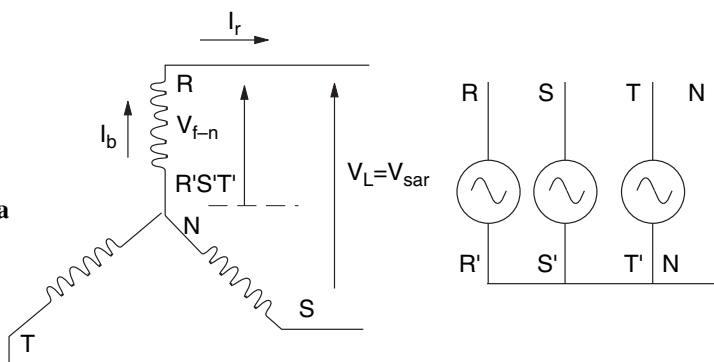


8.5. irudia.

8.2. ITURRIETAKO KONEXIOAK

Hiru tentsio horiek elkarren artean bi eratara lotu daitezke: izar konexioan edo triangelu konexioan.

8.2.1. Izar konexioa



8.6. irudia.

Marrazkian fasoreen norabideetan marraztu ditugu harilak.

8.2.2. Izendapena

Fasea (bi esanahi ditu):

1. Sorgailuaren harilari deitzen zaio:

$I_{\phi A} = I_{aa'}$; a-a' hariletik doan korronea da, eta

$V_{\phi A} = V_{aa'}$; a-a' harilaren muturren arteko tentsioa da

2. Iturri bakoitzaren irteerari deritzo: A–B–C faseak:

I_A : A haritik doan korrontea, eta

V_{AB} : A eta B harien artean dagoen tentsioa

Neutroa (N):

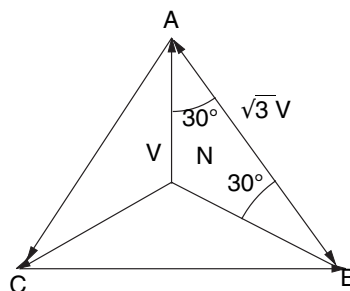
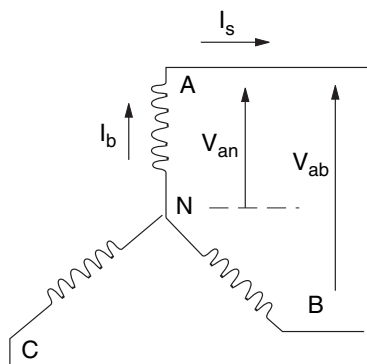
Iturriak izar konexioan elkartuta daudenean, elkarketa-puntuari neutroa (N) deritzo; beraz, A', B', C'-ren elkarketari. Gehienetan neutroa lurrera konektatzen da. (Istripuetatik babesteko).

Tentsio simplea ($V_{\Phi-N}$, V_{AN}):

Fase eta neutroaren arteko tentsioa da. Beraz $V_{AN} = V_{BN} = V_{CN}$

Tentsio konposatua (V_k):

Bi faseren arteko tentsioari deritzo: V_{AB} , V_{BC} , V_{CA} . Izen hauek erabiltzen dira: V_L (hariko tentsioa); V_{FF} : (faseen arteko tentsioa); V_{sar} (sareko tentsioa).



8.7. irudia.

$$V_{AB} = V_{AN} - V_{BN}$$

Ondorioz, marrazkian ikusten dugunez:

1. Sareko tentsioa, $\sqrt{3}$ bider handiagoa da fase eta neutroaren arteko tentsioa baino, eta sareko eta faseko korronteak (harilekoak) berdinak dira.

$$\begin{aligned} |V_{AB}| &= \sqrt{3} |V_{AN}| \\ |I_b| &= |I_s| \end{aligned}$$

2. Sareko tentsioek hiru faseko beste egitura bat osatzen dute ($V_{ab}-V_{bc}-V_{ca}$) eta tentsio sinpleko egituratik 30° aurrera dago.

V_{AN} , erreferentzia gisa hartuz:

$$V_{AN} = V_{<0^\circ}$$

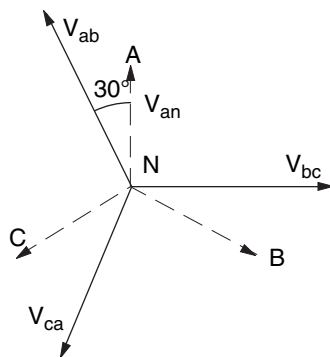
$$V_{AB} = \sqrt{3} V_{<+30^\circ}$$

$$V_{BC} = \sqrt{3} V_{<-90^\circ}$$

$$V_{CA} = \sqrt{3} V_{<-210^\circ}$$

3. Hiru faseko egituran tentsioen batura zero da, 8.7. irudian ikusten denez:

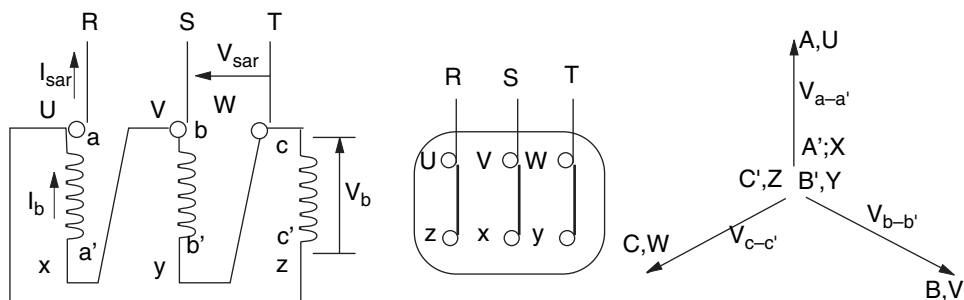
$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = 0$$



8.8. irudia.

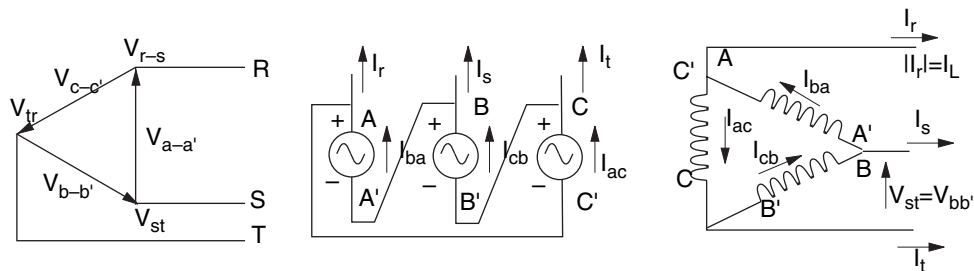
8.2.3. Triangelu konexioa

Iturri bakoitzaren hasiera beste iturriaren bukaerarekin elkartuz lortzen da:



8.9. irudia.

Beste era batera ikusita:



8.10. irudia.

$$V_{RS} + V_{ST} + V_{TR} = 0;$$

Harilak oker lotzen badira, batura ez da zero eta zirkuitulaburra sortzen da.

Ezaugarriak:

- Neutrorik ez dago.
- Triangelu konexioan harilaren tentsioa eta sareko tentsioa berdinak dira. Korronteak berriz karga triangeluan dagoenean eta **karga orekatua** (fase bakoitza berdin zamatuta), hiru faseetako korronteak berdinak dira: $|I_A| = |I_B| = |I_C|$. Gero ikusiko denez, harileko korrontea $\sqrt{3}$ bider txikiagoa da lineako korrontea baino.

$$|I_{ba}| = I_b = I_\phi$$

$$|V_{AA'}| = V_b = V_\phi$$

$$|I_r| = I_L$$

$$|V_{S-T}| = V_{sar} = V_\phi$$

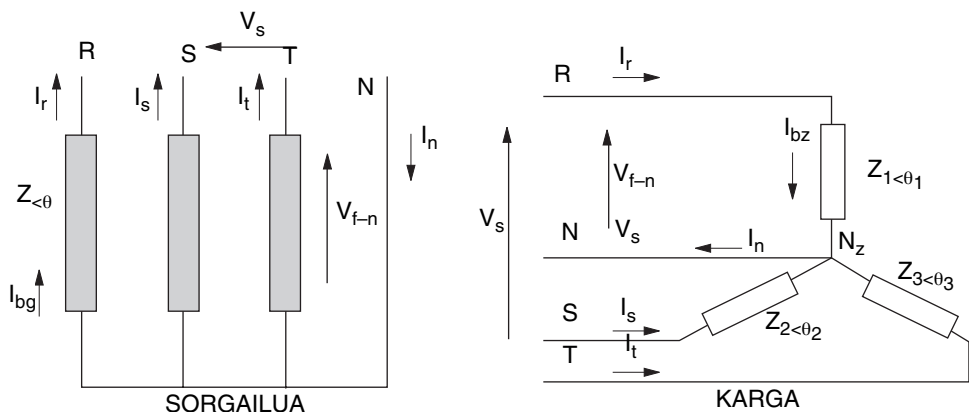
$$I_L = \sqrt{3} I_b$$

8.3. KARGA IZAR KONEXIOAN

Sareari karga ezartzeko bi aukera dauzkagu: faseen arteko konexioa triangelu edo izar konexioa egitea. Eta gainera, karga desorekatuta edo orekatuta egon daiteke.

8.3.1. Lau eroaleko sarea (karga desorekatua)

Sorgailuetatik hiru fase eta neutroa (N) bidaltzen dizkigute (neutroa izateko sorgailuek izar konexioan egon behar dute); N_z : kargako neutroa dugu.



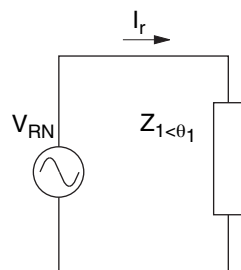
8.11. irudia.

Marrazkian ikusten denez, erlazio hauek ditugu:

Korronteak: $I_{bz} = I_r$; harileko eta faseko korronteak berdinak dira.

Karga bakoitza fase eta neutro artean elikatuta dago (tentsio simplea). Adibidez R fasearen inpedantzia, V_{R-N} tentsioarekin lotuta dago; sorgailuen neutroa kargako neutroarekin lotuta baitago.

Ohm-en legea erabiliz: $I_R = \frac{V_{R-N}}{Z_{1<\theta_1}}$ (lau eroalekoetan)

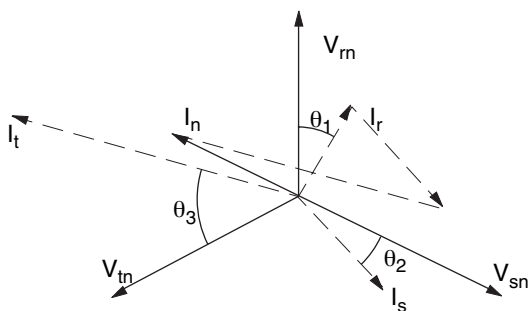


8.12. irudia.

I_N (neutroko korrontea), Kirchhoffen korapiloen legea N_z puntuan erabiliz aterako dugu:

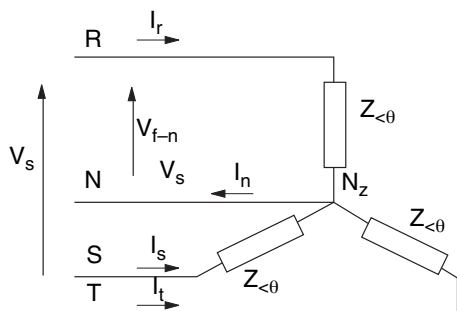
$$I_N = I_R + I_S + I_T$$

Diagrama fasoriala:

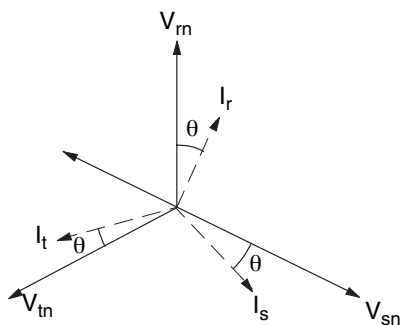


8.13. irudia.

8.3.2. Lau eroaleko sarea (karga orekatua)



8.14. irudia.



Karga orekatua denez (hiru kargak berdinak), hiru faseetako korronteak ere berdinak dira.

$$|I_R| = |I_S| = |I_T| = \frac{|V_{RN}|}{|Z|} = \frac{V_{\text{sar}} / \sqrt{3}}{|Z|} = I$$

V_{R-N} oinarritzat hartuz:

$$I_R = I_{< -\theta};$$

$$I_S = I_{< -\theta - 120^\circ};$$

$$I_T = I_{< -\theta - 240^\circ}$$

Hiru korronteak berdinak izanik hiru faseko beste egitura bat osatzen dute, eta ondorioz, beren batura zero da:

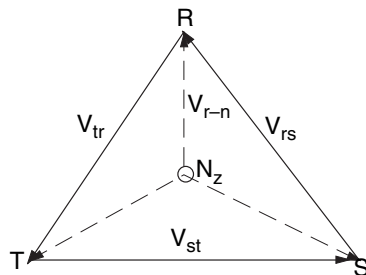
$$I_A + I_B + I_C = 0;$$

eta

$$I_N = I_A + I_B + I_C = 0$$

Neutroko korrontea zero denez, karga orekatuan ez dugu neutroaren eroalea eraman beharrik eta hiru eroaleko sarea gelditzen da.

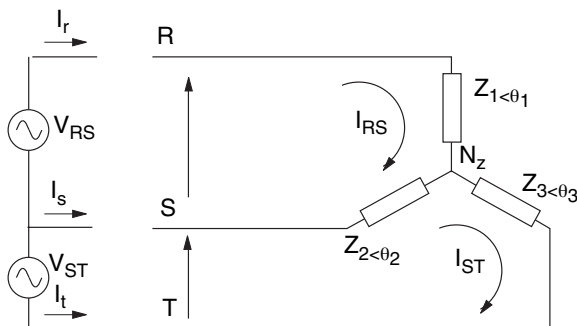
Kargako neutroa, N_Z , tentsio konposatuek osatzen duten triangeluaren erdian dago.



8.15. irudia.

8.3.3. Hiru eroaleko sarea (karga desorekatua)

Hemen neutrorik ez dugu; beraz, N_Z -ren tentsioa ez dakigu zenbatekoa den. Horregatik ebazpena bilatzeko Kirchhoffen mailen araua erabiliko dugu.



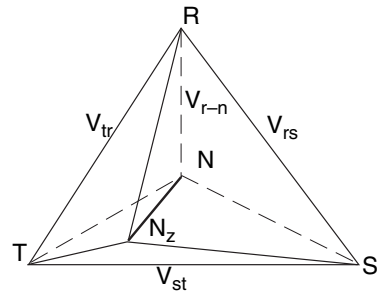
8.16. irudia.

Orain ezin dugu erlazio hau erabili $V_{R-Nz} \neq V_L / \sqrt{3}$. Zamak ezberdinak izanik, korrante ezberdinez zeharkatuak daude; beraz fase eta neutro arteko tentsioak ezberdinak dira:

$$V_{R-Nz} = I_R \cdot Z_1 < \theta_1 \neq V_{S-Nz} = I_S \cdot Z_2 < \theta_2 \neq V_{T-Nz} = I_T \cdot Z_3 < \theta_3$$

Tentsio hauek ez dute hiru faseko egitura osatuko, baina sorgailuetatik datozen tentsio konposatuak (lineako tentsioek) bai.

Marrazkian azaltzen denez, sareko tentsioek triangelu aldeakidea osatzen dute, eta fase eta neutroaren arteko tentsioak ezberdinak izan behar badute, kargako N_z neutroak triangeluaren erditik lekualdatuta egon behar du. Ondorioz, kargak tentsio desberdinetan elikatuta daude (bonbila batzuk indarrrik gabe eta beste batzuk erretzen azalduko lirateke).



8.17. irudia.

Berdinketak:

Tentsio konposatuak ezagunak ditugu: V_{AB} , V_{BC} , V_{CA} . Beraz, mailen legea erabiliz:

$$\begin{aligned} V_{RS} = V_K < 0^\circ &= I_{RS} (Z_1 < \theta_1 + Z_2 < \theta_2) &- I_{ST} Z_2 < \theta_2 \\ V_{ST} = V_K < -120^\circ &= -I_{RS} Z_2 < \theta_2 &+ I_{ST} (Z_2 < \theta_2 + Z_3 < \theta_3) \end{aligned}$$

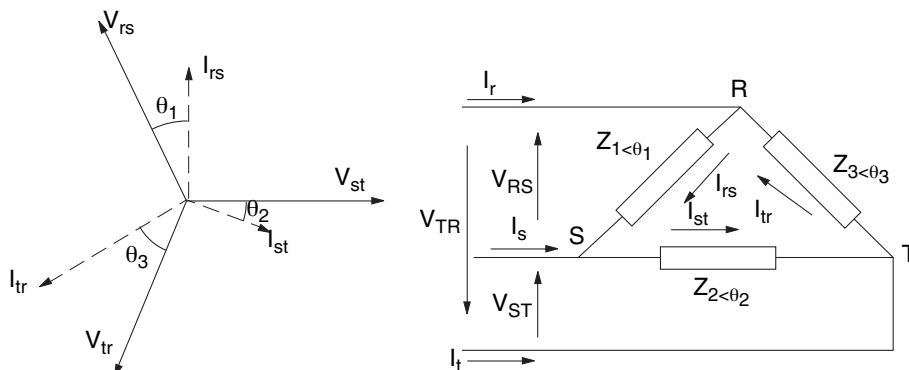
Erlazio hauekin I_{RS} eta I_{ST} aterako ditugu. Lineako korranteak berriz, korapiloak aztertuz lortuko dugu:

$$I_T = -(I_R + I_S) \quad I_R = I_{RS}; \quad I_S = I_{ST} - I_{RS}; \quad I_T = -I_{ST}$$

Tentsio sinpleak, berriz, $V_{R-Nz} = I_R Z_1 < \theta_1$. Eta beste tentsioak berdin.

8.4. KARGA TRIANGELU KONEXIOAN

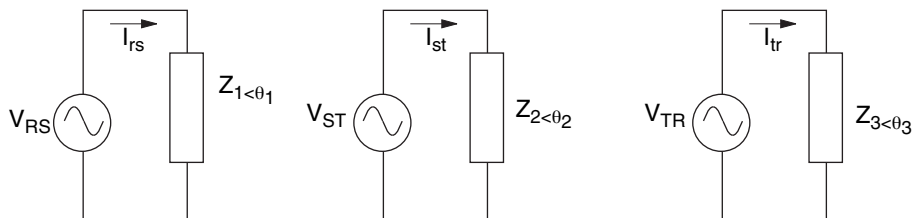
Karga triangelu konexioan egonik, ezin diogu neutroa lotu. Beraz, beti hiru eroaletan egongo da.



8.18. irudia.

8.4.1. Karga desorekatua

Kargako elementu bakoitza bi faseren artean konektatuta dagoenez, sareko tentsioaz elikatuta dago: $V_{Z1} = V_{RS}$. Beraz, korronteak aurkitzeko, egitura trifasikoa ondoko zirkuitu monofasiko hauetan banatzen da:



8.19. irudia.

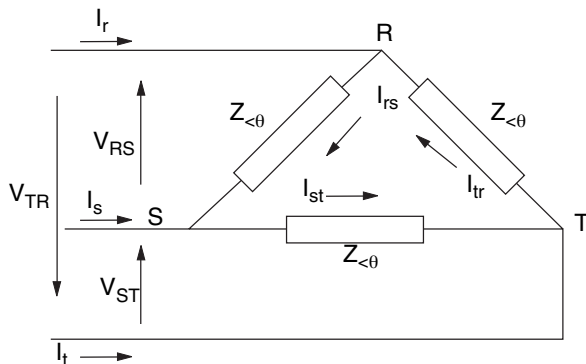
Lineako korrontea bilatzeko, Kirchhoffen korapiloen araua erabiliko dugu:

$$\begin{array}{ll}
 R_{kor}: & I_r - I_{rs} + I_{tr} = 0; & I_r = I_{rs} - I_{tr} \\
 S_{kor}: & I_s + I_{rs} - I_{st} = 0; & I_s = I_{st} - I_{rs} \\
 T_{kor}: & I_t + I_{st} - I_{tr} = 0; & I_t = I_{tr} - I_{st}
 \end{array} \quad (1)$$

Batuketa horiek zenbaki konplexuez edo bektorialki egin daitezke.

8.4.2. Karga orekatua

Karga orekatua bada, hariletako korronteak berdinak dira eta balio hauek dituzte:



8.20. irudia.

$$|I_{rs}| = |I_{st}| = |I_{tr}| \quad \mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{V}_{sar}}{Z_{\leq \theta}}$$

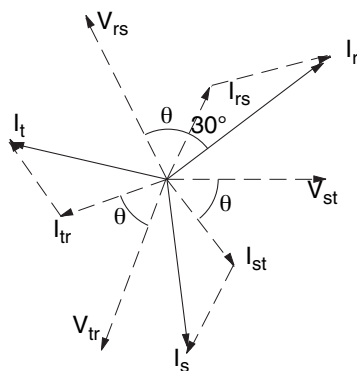
Korronteeek hiru faseko egitura osatzen dute eta θ° angelua atzeratuta daude tentsio konposatuarekiko.

Faseetako korronteak bilatzeko aurreko berdinketak (1) ekuazioez ordezkatzuz eta V_{RS} erreferentziatzat hartuz:

$\mathbf{I_r = I_{rs} - I_{tr}}$	$\mathbf{I_r = I_{<-\theta}}$	–	$\mathbf{I_{<-(\theta + 240^\circ)}}$
$\mathbf{I_s = I_{st} - I_{rs}}$	$\mathbf{I_s = I_{<-(\theta + 120^\circ)}}$	–	$\mathbf{I_{<-\theta}}$
$\mathbf{I_t = I_{tr} - I_{st}}$	$\mathbf{I_t = I_{<-(\theta + 240^\circ)}}$	–	$\mathbf{I_{<-(\theta + 120^\circ)}}$

Batura grafikoki eginda ondorio hauek aterako ditugu:

1. Lineako korronteek hiru faseko beste egitura bat osatzen dute. Beren balioa $\sqrt{3}$ bider handiago da harileko korrontea baino.
2. Tentsio konposatuarekiko, lineako korrontek $(\theta + 30^\circ)$ atzeratuak daude, θ kargaren desfasea izanik.



8.21. irudia.

$$\mathbf{I}_r = \sqrt{3} \mathbf{I}_{<-(\theta+30)} \quad \mathbf{I}_s = \sqrt{3} \mathbf{I}_{<-(\theta+30)-120^\circ} \quad \mathbf{I}_t = \sqrt{3} \mathbf{I}_{<-(\theta+30)-240^\circ}$$

Laburpena

Izar konexioa orekatua	Triangelu konexioa orekatua
$ V_L = \sqrt{3} V_{\Phi N} $ $I_s = I_\Phi$	$I_L = I_\Phi \sqrt{3} = I_{rs} \sqrt{3}$ $V_L = V_\Phi = V_{RS} $ $\theta + 30$ atzera (I_r , V_{RS} -rekiko)

8.5. POTENTZIA TRIFASIKOA

Fase bakoitzak hartzen duen potentzia atera eta hiru faseen potentzia batuz, hiru faseko egituraren potentzia aterako dugu. Beraz, potentzia monofasikoak ateratzea besterik ez dugu:

$$P_{3\sim} = P_1 + P_2 + P_3$$

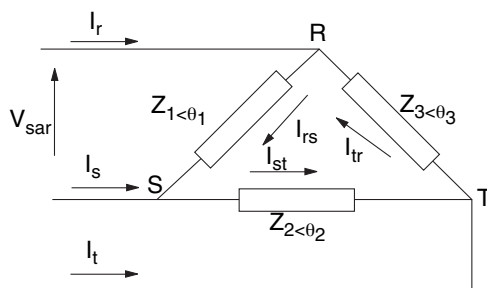
Karga triangelu konexioan:

$$P_1 = |V_{RS}| \cdot |I_{rs}| \cdot \cos \theta_1;$$

$$P_2 = |V_{ST}| \cdot |I_{st}| \cdot \cos \theta_2;$$

$$P_3 = |V_{TR}| \cdot |I_{tr}| \cdot \cos \theta_3;$$

$$\theta_1: (V_{RS}, I_{rs}) \text{ angelua.}$$



8.22. irudia.

8.5.1. Karga orekatua triangelu konexioan

$$|I_{rs}| = |I_{st}| = |I_{tr}| = I_B \quad \text{eta} \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta$$

$$\text{eta } |V_{RS}| = |V_{ST}| = |V_{TR}| = V_{sar}$$

$$\text{Beraz, } P_{3\sim} = 3 |V_{sar}| \cdot |I_B| \cos \theta; \quad \text{baina } |I_L| = \sqrt{3} |I_B| \text{ denez,}$$

$$P_{3\sim} = \sqrt{3} |V_{sar}| \cdot |I_L| \cos \theta; \quad \theta: \text{ kargak ezarritako desfasea izanik}$$

8.5.2. Karga orekatua izar konexioan

Triangelu konexioan bezala eginuz:

$$P_1 = |V_{RN}| \cdot |I_R| \cdot \cos \theta_1;$$

$$P_2 = |V_{SN}| \cdot |I_S| \cdot \cos \theta_2;$$

$$P_3 = |V_{TN}| \cdot |I_T| \cdot \cos \theta_3;$$

Karga orekatua bada:

$$|V_{RN}| = |V_{SN}| = |V_{TN}| = V_s$$

$$|I_R| = |I_S| = |I_T| = I_L$$

Beraz, $P_{3\sim} = 3 |V_{fn}| \cdot |I_L| \cos \theta$; baina $|V_{sar}| = \sqrt{3} |V_{fn}|$ denez,

$$P_{3\sim} = \sqrt{3} |V_{sar}| \cdot |I_L| \cos \theta; \quad \theta: \text{zamak ezarritako desfasea izanik.}$$

Beraz, beti karga orekatua bada:

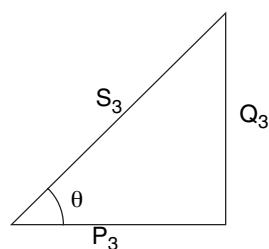
$$P_{3\sim} = \sqrt{3} |V_L| \cdot |I_L| \cos \theta \text{ (watt); } \quad \theta: \text{kargako desfasea}$$

Berdin gertatzen da beste potentziekin ere (erreaktiboarekin eta itxurazkoarekin):

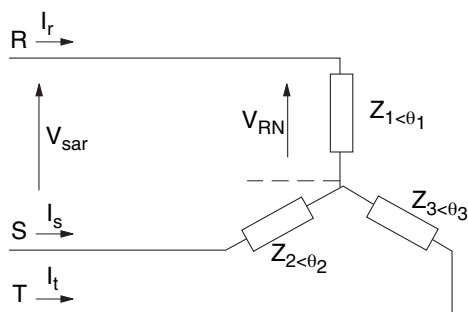
$$Q_{3\sim} = \sqrt{3} |V_L| \cdot |I_L| \sin \theta \quad \text{VAR}$$

$$S_{3\sim} = \sqrt{3} |V_L| \cdot |I_L| \quad \text{VA}$$

Potentzia monofasikoan bezala, potentzia trifasikoan ere triangelua dugu:



8.24. irudia.



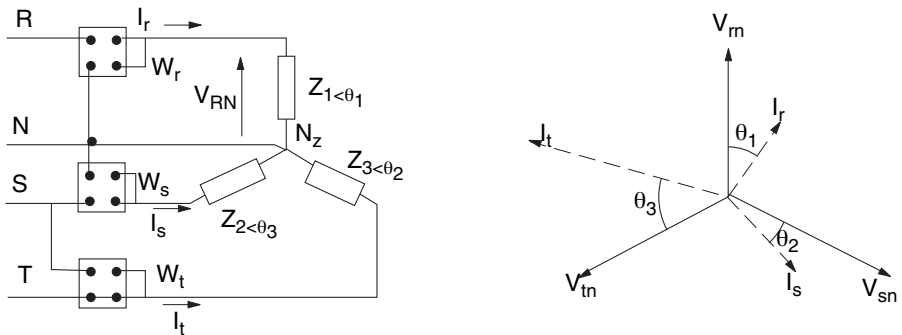
8.23. irudia.

8.6. POTENTZIA TRIFASIKOAREN NEURKETA

Wattmetroa, potentzia monofasikoa neurtzeko aparatua da. Tentsioko eta korrrenteko harilak ditu eta haril horiek ematen dizkieten neurriekin $V I \cos \theta$ emaitza ateratzen du, θ , V eta I -ren arteko angelua izanik.

8.6.1. Lau eroaleko zirkuituko potentzia (karga desorekatua)

Horretarako 3 wattmetro behar ditugu honela konektatuak. Bakoitzak fase bakoitzaren potentzia neurtzen du:



8.25. irudia.

$$W_R = V_{RN} I_R \cos \theta_1$$

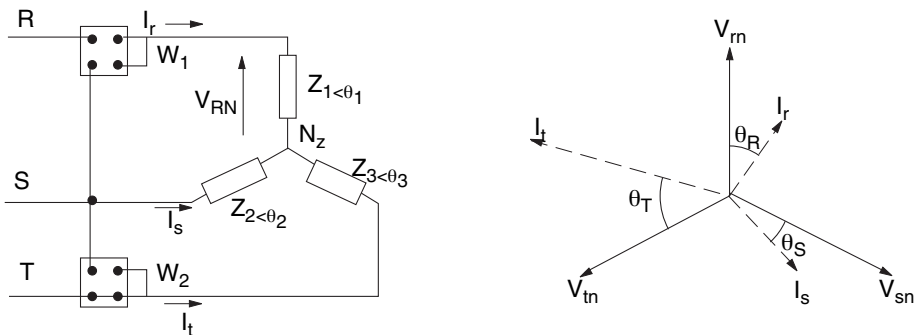
$$W_S = V_{SN} I_S \cos \theta_2$$

$$W_T = V_{TN} I_T \cos \theta_3$$

$$\text{Potentzia totala: } P_T = W_R + W_S + W_T$$

8.6.2. Hiru eroaleko karga – 2 wattmetroko metodoa (karga desorekatua)

Wattmetro bakoitza edozein faseri lotzen zaio, baina beren tentsio-harila hirugarren faseari lotu behar zaio.



8.26. irudia.

Potentzia totala da neurtu nahi duguna: $W_T = W_R + W_S + W_T =$

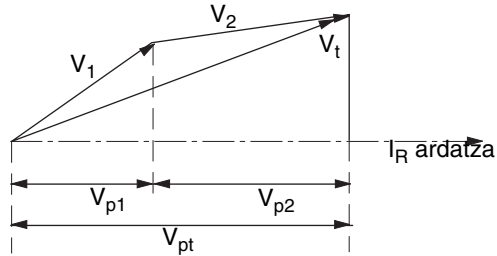
$$= |V_{RN}| |I_R| \cos \theta_R + |V_{SN}| |I_S| \cos \theta_S + |V_{TN}| |I_T| \cos \theta_T$$

Wattmetroak neurtutako potentziak, berriz, hauek dira:

$$(1) W_1 = |V_{RS}| |I_R| \cos (\widehat{V_{RS}, I_R}); \quad \text{baina, } V_{RS} = V_{RN} - V_{SN};$$

Bektoreen batuketaren proiektzioa, batugaien proiektzioen batura denez;

Aurreko batura I_R ardatzera proiektatuz, (1) azalpena honela geldituko zaigu:



8.27. irudia.

$$W_1 = |I_R| [|V_{RN}| \cos (\widehat{V_{RN}, I_R}) - |V_{SN}| \cos (\widehat{V_{SN}, I_R})] =$$

$$= W_R - |V_{SN}| |I_R| \cos (\widehat{V_{SN}, I_R})$$

Bigarren wattmetroak hau emango digu: $W_2 = |V_{TS}| |I_T| \cos \widehat{V_{TS}, I_T};$

$$V_{TS} = V_{TN} - V_{SN}. \text{ Beraz, } W_2 = |I_T| |V_{TN} - V_{SN}| \cos (\widehat{V_{TS}, I_T})$$

Beraz, lehen bezala proiektzioak I_T ardatzean eginez:

$$W_2 = |I_T| [|V_{TN}| \cos (\widehat{V_{TN}, I_T}) - |V_{SN}| \cos (\widehat{V_{SN}, I_T})] =$$

$$= W_T - |V_{SN}| |I_T| \cos (\widehat{V_{SN}, I_T})$$

$$W_1 + W_2 = W_R + W_T - |V_{SN}| [|I_T| \cos (\widehat{V_{SN}, I_T}) + |I_R| \cos (\widehat{V_{SN}, I_R})]$$

I_T eta I_R , V_{SN} ardatzera proiektatuz, parentesi barruko emaitzak emango lizkiguke. Beraz,

$$[|I_T| \cos (\widehat{V_{SN}, I_T}) + |I_R| \cos (\widehat{V_{SN}, I_R})] = (\mathbf{I}_T + \mathbf{I}_R) \cos (\widehat{V_{SN}, I_R})$$

$$-|I_s| \cos(\hat{V}_{SN}, I_s)$$

$$W_1 + W_2 = W_R + W_T - |V_{SN}| [(-) |I_S| \cos (V_{SN} \wedge I_S)] =$$

eta hirugarren batugaia W_S denez:

$$W_1 + W_2 = W_R + W_T + W_S$$

Lantegiko elektrizitate-kontsumoa neurtzeko kontadoreak ere honetan oinarritzen dira eta wattmetroen konexio berdinak egin behar zaizkie ezartzean. Hauek gurrpil integratzailea dute energia kontatzeko.

8.7. DESFASEA (Karga orekatua)

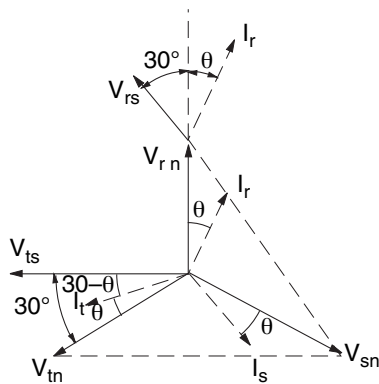
Desfasea neurtzen duten tresnak ere wattmetroan oinarritzen dira. Lehengo konexio berdina eginez:

$$W_1 = |V_{RS}| |I_R| \cos \angle V_{RS} I_R = V_L I_L \cos (\theta + 30);$$

 θ : kargaren desfasea

$$W_2 = |V_{TS}| |I_T| \cos V_{TS} \hat{I}_T =$$

$$= V_L I_L \cos (30 - \theta)$$



8.28. irudia.

Bi wattmetroen emaitzen kenketa eginuz:

$$W_2 - W_1 = V_L I_L [\cos (30 - \theta) - \cos (30 + \theta)]$$

$$= 2V_L I_L \sin 30 \sin \theta, \text{ baina } V_L I_L \sin \theta = Q \quad \sin 30^\circ = 1/2$$

$$W_2 - W_1 = Q$$

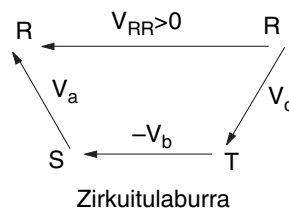
$$W_2 + W_1 = 2V_L I_L \cos 30 \cos \theta = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} V_L I_L \cos \theta = \sqrt{3} p$$

$$\begin{cases} W_2 - W_1 = Q \\ W_2 + W_1 = \sqrt{3} p \end{cases}$$

$$\tan \theta = \frac{Q}{P} = \frac{\sqrt{3}(W_2 - W_1)}{W_2 + W_1}$$

8.8.1. Konexioak

8.29. irudia.



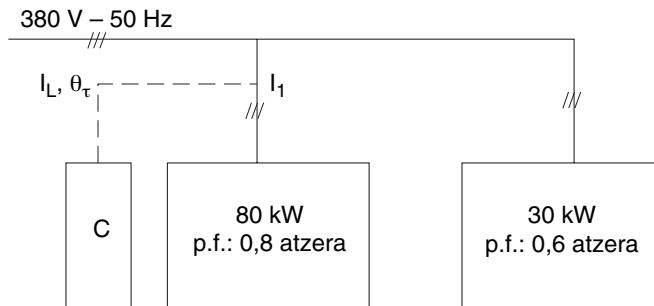
8.30. irudia.

$$V_A + V_B + V_C \neq 0 = 2 V_\phi$$

8.8.2. Eraikina

Hiru faseko 2 karga orekatu, 380 V 50 Hz-eko sare batetik elikatzen dira. Lehen karga: 80 kW eta potentzi faktorea 0,8 atzera du. 2. karga: 30 kW eta potentzi faktorea 0,6 atzera. Kalkula itzazu ondokoak:

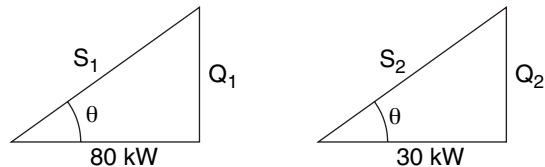
1. Multzo osoaren lineako korrontea eta potentzi faktorea.
2. 1. kargak lineatik hartzen duen korrontea eta izar konexioan badago faseko korrontea.
3. 2. kargaren faseko korrontea, triangeluan konektatuta badago. Beren tentsio eta korronteen diagrama fasoriala.
4. 1. kargan $\cos \theta = 0,9$ izan dadin paraleloan eta triangelu konexioan jarri behar dugun kapazitatea.



8.31. irudia.

Ebazpidea:

1. $\theta_1 = 36,8^\circ$
 $\theta_2 = 53,1^\circ$



8.32. irudia.

$$Q_1 = 80 \tan \theta_1 = 59,848 \text{ kVAR};$$

$$Q_2 = 30 \tan \theta_2 = 40 \text{ kVAR}$$

$$P_T = P_1 + P_2 = 80 + 30 = 110 \text{ kW}; \quad Q_T = Q_1 + Q_2 = 100 \text{ kVAR}$$

$$\theta_T = \tan^{-1} \frac{Q_T}{P_T} = \tan^{-1} \frac{100 \text{ kVAR}}{110 \text{ kW}} = 42,27^\circ; \quad \cos \theta_T = 0,74$$

$$P_{3\sim} = \sqrt{3} |V_L| \cdot |I_L| \cos \theta \Rightarrow I_L = \frac{110 \text{ kVAR}}{\sqrt{3} \times 380 \times 0,74} = 225,8_{<-42,27^\circ} \text{ A}$$

θ : V_{FN} eta I_L desfasea (izar konexioa) edo V_L eta I_b -ren arteko angelua (triangelu konexioa) da.

2. I_{L1}

$$80 \text{ kW} = \sqrt{3} \cdot 380 I_{L1} 0,8 \Rightarrow$$

$$I_{L1} = 152 < -36,8^\circ \text{ A}$$

$$I_{b-iz} = I_{L1} = \mathbf{152 < -36,8^\circ \text{ A}}$$

3. I_{b2}

$$I_{L2} = \frac{30.000}{\sqrt{3} \times 380 \times 0,6} = 76 < -53^\circ \text{ A}$$

$$I_{b2} = I_{L2} / \sqrt{3} = \mathbf{44 \text{ A}}$$

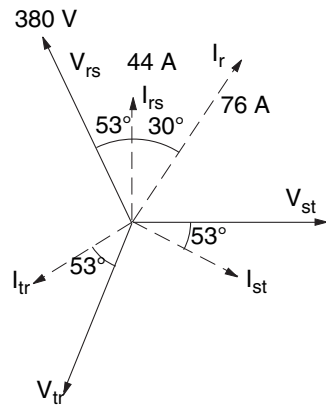
4. Q_C ($\cos \theta = 0,9$):

$$\theta = \cos^{-1}(0,9) = 25,8^\circ;$$

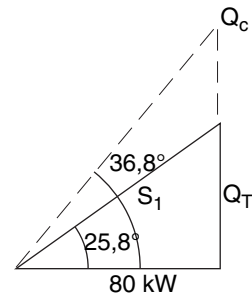
$$Q_T = 80 \tan 25,8^\circ = 38,7 \text{ kVAR}$$

$$Q_C = 59,8 - 38,7 = \mathbf{-21 \text{ kVAR}};$$

$$Q_C = 3 \cdot \frac{V_C^2}{X_C}; 21 \text{ kVAR} = 3 \frac{380^2}{1/C\omega}; \mathbf{C = 465 \mu F}$$



8.33. irudia.

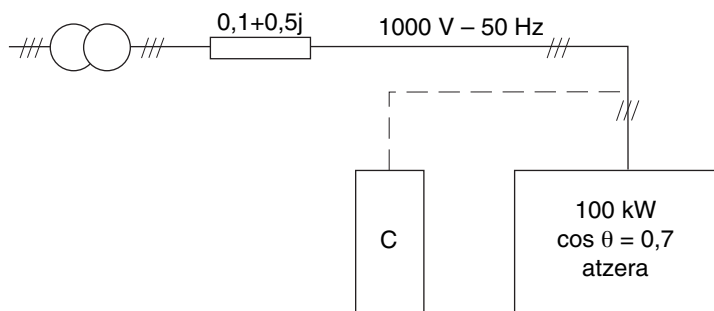


8.34. irudia.

8.8.3. Eraikina eta sarea

Hiru faseko karga batek 100 kW – $\cos \theta = 0,7$ atzera ditu eta 1000 V – 50 Hz-eko korrontez elikatzen da. Elikatzen duen eroaleak $0,1 + 0,5 j \Omega$ ditu. Zein izango da transformadorean dagoen tentsioa eta transformadorearen potentzi triangelua?

Kargaren $\cos \theta = 0,9$ ra iristea nahi badugu, kondentsadoreen bidez zenbat potentzia erreaktibo sartu behar diogu (Q_C)? Marraz itzazu orain kargan dagoen lineako tentsioen eta korronteen diagrama fasoriala. Zeintzuk izango dira orain transformadorearen tentsioa eta potentziak?



8.35. irudia.

Ebazpidea:

$$1. \cos^{-1}(0,7) = 45,6^\circ; \quad I_L = \frac{100 \text{ kW}}{\sqrt{3} \times 1000 \times 0,7} = 82,5 \text{ A}$$

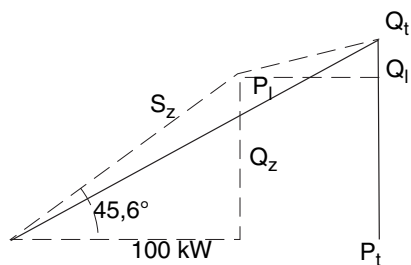
$$Q_Z = P \tan \theta = 100 \times \tan(45,6^\circ) = 100 \text{ kVAR}$$

$$P_L = 3 I^2 R = 3 \times 82,5^2 \times 0,1 = 2040 \text{ W};$$

$$Q_L = 3 I^2 X_L = 3 \times 82,5^2 \times 0,5 = 10203 \text{ VAR};$$

$$P_T = P_Z + P_L = 100 \text{ kW} + 2 \text{ kW} = \mathbf{102 \text{ kW}};$$

$$Q_T = Q_L + Q_Z = 100 + 10,2 = \mathbf{110,2 \text{ kVAR}}$$



8.36. irudia.

$$\theta_T = \tan^{-1}(110 / 102) = 47,1^\circ; \quad \cos 47,1 = 0,68$$

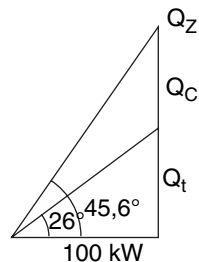
$$V = \frac{P_T}{\sqrt{3} \cdot I_L \cos \theta_T} = \frac{102 \text{ kW}}{\sqrt{3} \times 82,5 \times 0,68} = \mathbf{1049 \text{ V}}$$

2. $\cos \theta = 0,9 \rightarrow Q_C$? Orain potentziaren triangelua honela aldatu behar dugu:

$$\cos^{-1}(0,9) = 25,8^\circ$$

$$Q_{TZ} = 100 \times \tan 25,8^\circ = 48,4 \text{ kVAR}$$

$$Q_C = Q_Z - Q_{TZ} = 110,2 - 48,4 = \mathbf{-51,6 \text{ kVAR}}$$



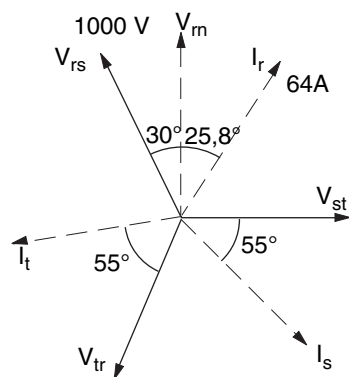
8.37. irudia.

– Diagrama fasoriala kargan:

$$I_{L2} = \frac{100 \text{ kW}}{\sqrt{3} \times 1000 \times 0,9} = 64 \text{ A}$$

Beraz kondentsadoreak jarrita korronea jaitsi egin zaigu eta ondorioz lineako galerak ere murriztu egingo dira.

$$\text{ang}(V_{RS}, I_R) = \theta + 30 = 25,8 + 30 = 55,8^\circ$$



8.38. irudia.

3. Potentziak eta tentsioa transformadorean:

$$P_h = 3 I^2 R_h = 3 \times 64^2 \times 0,1 = 1,229 \text{ kW}; \quad Q_h = 3 I^2 X_h = 3 \times 64^2 \times 0,5 = 6,144 \text{ kVAR};$$

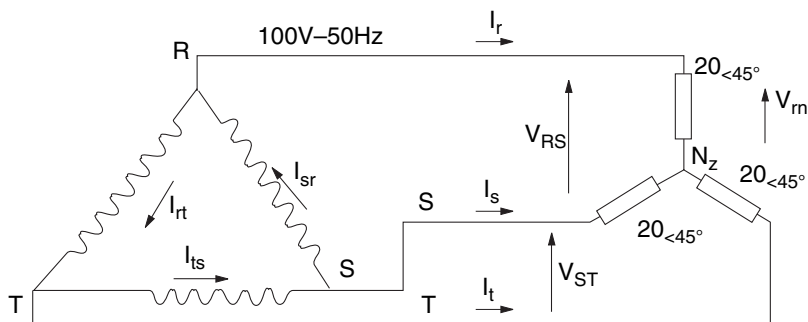
$$P_T = 100 + 1,228 = \mathbf{101,2 \text{ kW}}; \quad Q_T = 48,4 + 6,144 = \mathbf{54,5 \text{ kVAR}}$$

$$\tan \theta_T = \frac{54,5}{101,2}; \quad \theta = 28,3^\circ; \quad \cos \theta = 0,88; \quad V_g = \frac{101,2}{\sqrt{3} \times 64 \times 0,88} = \mathbf{1037 \text{ V}}$$

8.8.4. Fasoreak

Hiru faseko karga orekatu batek, faseko $20_{<45^\circ} \Omega$ ditu eta izar konexioan dago. Triangelu konexioan duen transformadore baten sekundariotik elikatzen da 100 V – 50 Hz-eko korronteaz.

1. Marraztu zirkuitua eta adierazi bertan, lineako eta faseko tensioak eta korronteak.



8.39. irudia.

2. Kargaren lineako tentsio eta korronteen diagrama fasoriala azaldu, V_{rs} erreferentziazat hartuz:

$$V_{RN} = 100 / \sqrt{3} < -30^\circ$$

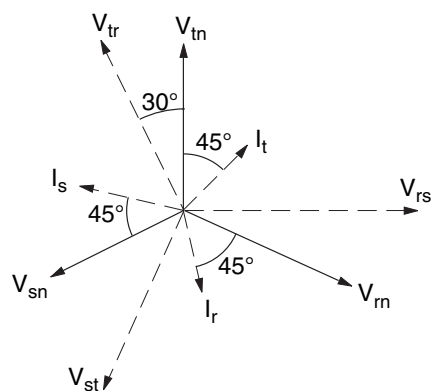
$$V_{SN} = 100 / \sqrt{3} < -150^\circ$$

$$V_{TN} = 100 / \sqrt{3} < -90^\circ$$

$$V_{RS} = 100 < 0^\circ$$

$$V_{ST} = 100 < -120^\circ$$

$$V_{TR} = 100 < -240^\circ$$



8.40. irudia.

Tentsio konposatuak lineako korronteeikiko $\theta + 30$ aurrera daude.

$$I_R = \frac{V_{RN}}{Z_{<\theta}} = \frac{57 < -30^\circ}{20 < 45^\circ} = 2,88 < -75^\circ \text{ A}$$

$$I_S = 2,88 < -195^\circ \text{ A}$$

$$I_T = 2,88 < 45^\circ \text{ A}$$

3. Transformadorean faseko tentsioen eta korronteen diagrama fasoriala; Korronte orekatuak direnez:

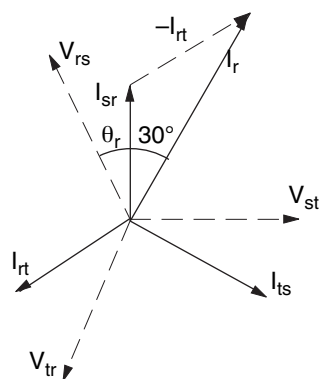
$$I_R = I_{SR} - I_{RT}$$

Irudian ikusten dugunez, faseko korronteak 30° aurrera daude lineako korronteeikiko. $\sqrt{3}$ bider txikiagoak dira. Beraz:

$$I_{SR} = |I_R| / \sqrt{3} < \theta_r + 30^\circ = 2,88 / \sqrt{3} < -75^\circ + 30^\circ = 1,66 < -45^\circ \text{ A}$$

$$I_{TS} = 1,66 < -195^\circ + 30^\circ = 1,66 < -165^\circ \text{ A}$$

$$I_{RT} = 1,66 < 45^\circ + 30^\circ = 1,66 < 75^\circ$$



8.41. irudia.

4. Karga horren potentzi triangelua eta potentzi faktorea bila itzazu:

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta = \sqrt{3} \times 100 \times 2,88 \times \cos 45^\circ = 348 \text{ W}$$

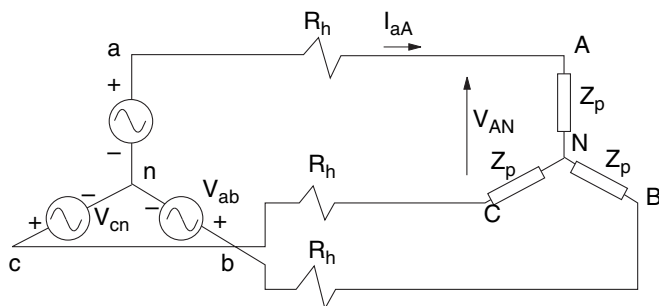
$$Q = S \sin 45^\circ = 348 \text{ VAR}$$

$$S = \sqrt{3} V_L I_L = 492 \text{ VA}$$

8.8.5. Karga

Irudiko hiru faseko zirkuituan, sarearen fase/neutro arteko tentsioa $V_{an} = 3110 \angle 0^\circ \text{V}$ -ekoa da eta faseen sekuentzia A B C. Sareak guztira 229,5 kW 162 kVAR atzera ematen ditu. Banatzaileko eroalearen erresistentzia $R_h = 5 \Omega$ -ekoa da. Bila itzazu ondoko hauek:

1. V_{AN} eta I_{aA} ($3000 \angle 1,7^\circ \text{V}$; $30 \angle -35,22^\circ \text{A}$)
2. Z_p inpedantzia eta linean dauden potentzi galerak ($100 \angle 36,67^\circ \Omega$; 13,5 kW)
3. Fase bateko tentsio eta korronteen diagrama fasoriala.
4. Hiru faseen, kargan eta sarean, faseko tentsio eta lineako korronteen diagrama fasoriala.



8.42. irudia.

Ebazpidea:

$$1. \text{ Sarean: } \theta_t = \tan^{-1} \frac{162}{229,5} = 35,22^\circ; \quad \cos \theta_T = 0,82$$

$$229,5 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times 3110 \times I_L \times 0,82; \quad I_L = I_{aA} = 30 \angle -35,22^\circ \text{ A}$$

$$\text{Eroaleko galerak: } P_h = 3 I^2 R_h = 3 \times 30^2 \times 5 = 13,5 \text{ kW}$$

2. Kargan:

$$P_z = 229,5 - 13,5 = 216 \text{ kW};$$

$$Q_z = 162 \text{ kVAR}$$

$$\theta_z = \tan^{-1} (162 / 216) = 36,87^\circ;$$

$$\cos \theta_z = 0,8;$$

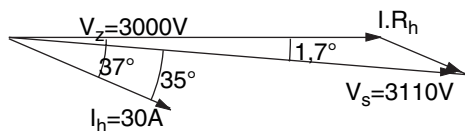
$$P_z = 3 V_z I_L \cos \theta_z$$

$$216 = 3 \times V_z \times 30 \times 0,8;$$

$$V_z = V_{AN} = 3000 \text{ V};$$

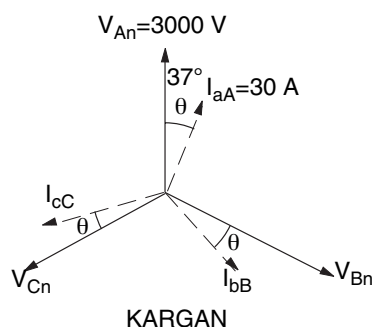
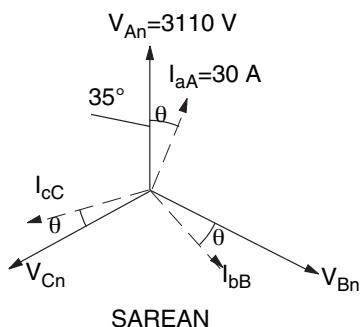
$$Z_p = 3000 / 30 = 100 \angle 36,9^\circ \Omega$$

3. Fase baten diagrama fasoriala:



8.43. irudia.

4. Hiru faseko diagrama fasorialak:

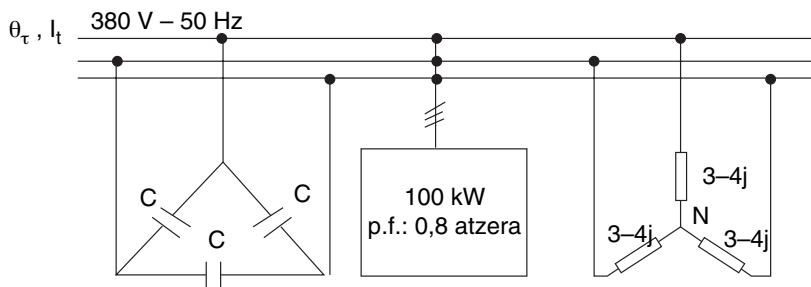


8.44. irudia.

8.8.6. Kutxa beltza

Lantegi bat 380 V – 50 Hz-eko eta hiru faseko sare batez elikatuta dago (Oinarria $V_{AB} = 380 \angle 0^\circ$ V; faseen sekuentzia A B C) eta karga hauek ditu:

1. karga: 100 kW $\cos \theta = 0,8$ atzera;
 2. karga: $(3 - 4 j) \Omega$ -eko hiru inpedantzia izar konexioan jarriak
1. Bila ezazu karga bakoitzaren lineako korrontearen modulua.
 2. Triangelu konexioan jarritako kondentsadore-multzo bat sareari lotzen bazaio (potentzi faktorea $\cos \theta = 0,95$ era igo dadin). Kalkula ezazu:
 - a. Kondentsadoreen bidez eman behar den potentzia erreaktiboa.
 - b. Lantegi osoaren potentzi triangelua (P, Q, S) eta sareak ematen duen lineako guztizko korrontea.
 - c. Lineako tentsioen eta lineako korronteen hiru faseetako diagrama fasoriala.



8.45. irudia.

Ebazpidea:

1. karga:

$$\cos \theta = 0,8; \theta = 36,87^\circ; \tan \theta = 0,75$$

$$P_{3\sim} = 100 \text{ kW};$$

$$Q_{3\sim} = 100 \times \tan \theta = 75 \text{ kVAR}$$

$$I_{L1} = \frac{100}{\sqrt{3} \times 380 \times 0,8} = 190 \text{ A}$$

2. karga:

$$3 - 4j = 5 \angle -53,1^\circ;$$

$$\sin (-53,1^\circ) = -0,8;$$

$$\cos 53,1^\circ = 0,6 \text{ (aurrera)}$$

$$P_{3\sim} = 3 \frac{(380 / \sqrt{3})^2}{5} \cos 53,1 = \frac{144.400}{5} \times 0,6 = 28.880 \times 0,6 = 17,328 \text{ kW}$$

$$Q_{3\sim} = 28.880 \times 0,8 = -23,104 \text{ kVAR}$$

$$I_{L2} = \frac{380 / \sqrt{3}}{5 \angle -53,1^\circ} = 43,88 \text{ A}$$

$$Q_C \quad \cos \theta = 0,95; \theta = 18,2^\circ$$

$$P_T = 17,328 + 100 = 117,3 \text{ kW};$$

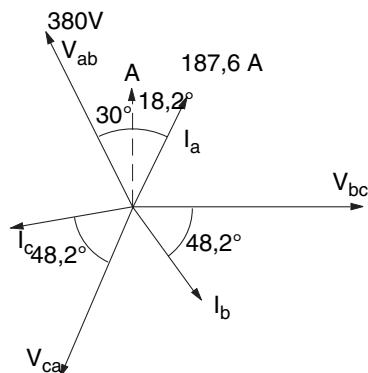
$$Q_T = 75 - 23 = 52 \text{ kVAR}$$

$$Q_{T2} = 117,3 \tan (18,2^\circ) =$$

$$117,3 \times 0,483 = 38,55 \text{ kVAR}$$

$$Q_C = 52 - 38,55 = 13,44 \text{ kVAR}$$

$$I_L = \frac{117,3}{\sqrt{3} \times 380 \times 0,95} = 187,6 \angle -18,2^\circ$$



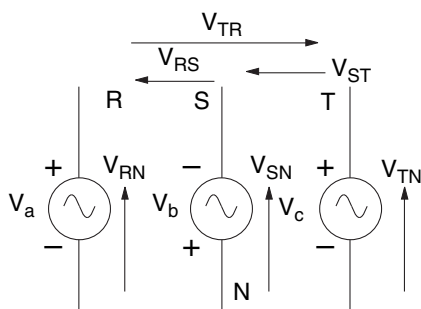
8.46. irudia.

Kargaren desfasea $18,2^\circ$ koa da. Nahiz triangeluan nahiz izarrean konektatuta egon, lineako tentsioaren eta lineako korrontearen artean desfase berdina du.

8.9. ARIKETAK

8.1. Ondoko irudian azaltzen den bezala hiru faseko sisteman V volteko hiru iturriak lotzen badira, sareko eta faseko tentsioak diagrama bektorialean eta modulu angeluarrean azal itzazu.

$$\begin{aligned} \text{(Emitza: } V_{RN} = V_{<0^\circ}; V_{SN} = V_{<60^\circ}; V_{TN} = V_{<120^\circ} \\ V_{RS} = V_{<-60^\circ}; V_{ST} = V_{<0^\circ}; V_{TR} = \sqrt{3}V_{<150^\circ}) \end{aligned}$$



8.47. irudia.

8.2. Hiru inpedantzia $5_{<-30^\circ} \Omega$ -ekoak, izar-eran konektatu dira. Hiru faseko eta hiru eroaleko sare batez, 173 V-etan elikaturik daude. Lineako korronteak bila itzazu eta faseko tentsio eta korronteen diagrama fasoriala ere bai.

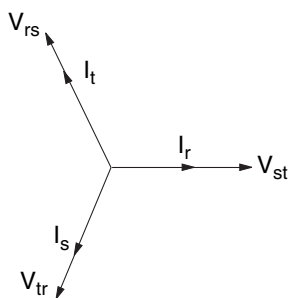
$$\text{(Emitza: } I_L = 20 \text{ A. } (V_{RN}, I_R) \text{ ang.} = 30^\circ \text{ (aurrera))}$$

8.3. Hiru faseko karga orekatu batek 10 kW eta $\cos \theta = 0,8$ atzera ditu eta izar konexioa du. Triangelu konexioko transformadore batek 220 V –50 Hz-eko korronteaz elikatzen du. (Erreferentziatzat V_{AB} hartu).

Hau eskatzen da:

1. Marraztu zirkuitua eta bertan azaldu lineako eta faseko tentsio eta korronteak.
2. Lineako tentsio eta korronteen diagrama fasoriala ($I_{AN} = 32,8_{<-66,8^\circ} \text{ A}$)
3. Faseko tentsio eta korronteen diagrama fasoriala marraztu ($I_A = 32,8_{<-66,8^\circ} \text{ A}$)

4. Potentzi triangulua atara: ($P = 10 \text{ kW}$, $Q = 7,5 \text{ kVAR}$, $S = 12,5 \text{ kVA}$)
5. Kondentsadoreen bidez eman behar zaion potentzia erreaktiboa $\cos \theta_T = 0,95$ izan dadin. Kondentsadoreak triangulu konexioan badaude, **faseko** kapazitatea zenbatekoa den ($4,21 \text{ kVAR}$; $92,3 \mu\text{F}$)
- 8.4. Triangelu konexioko karga bat ($Z_{AB} = 10 \angle 45^\circ \Omega$; $Z_{BC} = 5 \angle 0^\circ \Omega$; $Z_{CA} = 10 \angle -15^\circ \Omega$ -ekin) hiru fase eta 100 V -eko sareari lotzen zaio. Lineako korronteak eta guztizko potentzia bila itzazu. ($V_{AB \angle 0^\circ}$)
(Emitza: $I_A: 20 \angle -45^\circ \text{ A}$; $I_B: 20 \angle -149^\circ$; $I_C = 24,6 \angle 84^\circ \text{ A}$; $P_T = 3,673 \text{ kW}$)
- 8.5. Ondoko irudian, lineako tentsio eta korronteak hiru fase eta hiru eroaleko sare batenak dira. Sareko tentsioa 300 V -ekoa da eta sekuentzia R S T. Karga trianguluan konektatuta egonik eta lineako korrontea $|I_L| = 17,3 \text{ A}$ -koa bada, atara ezazu kargako fase bakoitzaren inpedantzia.
(Emitza: $30 \angle 90^\circ \Omega$)



8.48. irudia.

- 8.6. Motore asinkrono batek 20 kW , $\cos \theta = 0,8$ eta $380 \text{ V} - 50 \text{ Hz}$ ditu. Izar eta triangulu konexioentzat bila itzazu bere hariletan izango diren korronteak karga osoan lanean ari denean.
(Emitza: $I_{B\text{-iza}} = 38 \text{ A}$; $I_{B\text{-hir}} = 22 \text{ A}$)
- 8.7. Hiru faseko sare batek 200 V ditu eta triangulu konexioan karga bat elikatzen du, bere inpedantzia $10 \angle 60^\circ \Omega$ faseko izanik. Bila ezazu lineako korrontea eta marraztu sareko tentsio eta lineako korronteen diagrama fasoriala.
(Emitza: $|I_L| = 34,6 \angle -60^\circ \text{ A}$; $|I_B| = 20 \text{ A}$; $(V_{AB}, I_A) = \theta + 30^\circ = -90^\circ$)

- 8.8. Hiru fase eta 380 V-eko alternadore bat izar konexioan dago eta harileko gehinez 50 A eman dezake. Guztira zenbateko itxurazko potentzia (kVA) emango du? Alternadoreak, linean 10 A ematen ari bada eta $\cos \theta = 0,7$ aurrera izanik, fase bakoitzak zenbat kVA ematen du?

(Emitza: 32,9 kVA; 2,2 kVA)

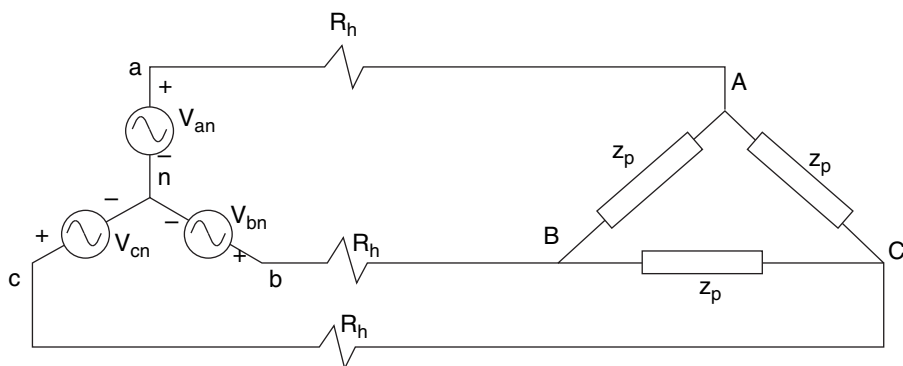
- 8.9. Triangeluan konektaturiko bi karga orekatuk, $10 \angle 60^\circ \Omega$ eta $20 \angle -30^\circ$ dituzte. Hiru fase eta 380 V-eko sare bati lotuta daude. Zenbateko potentzia hartuko du karga bakoitzak.

(Emitza: 21.660 W eta 18.758 W)

- 8.10. Karga orekatu bat izar konexioan dago eta faseko $40 + 30j \Omega$ -eko inpedantzia du. Faseko zenbateko kondentsadorea jarri behar zaio kargaren $\cos \theta = 0,9$ ra igotzeko maiztasuna 60 Hz-ekoa bada?

Sareko tentsioa 400 V-ekoa bada, kondentsadoreekin guztira zenbateko potentzia erreaktiboa sartu diogu? ($C = 11,24 \mu\text{F}$) (678 VAR)

- 8.11. Irudian azaltzen den karga orekatuak 10 kW-eko ($\cos \theta = 0,8$) potentzia du. Eroalearen erresistentzia faseko 2Ω -ekoa da eta $V_{ca} = 380 \angle 20^\circ$ V-ekoa. Faseen sekuentzia A B C izanik, atera ezazu: V_{ab} tentsioa eta sareak emandako potentzia osoa ($V_{ab} = 435 \angle -105^\circ$ V. $P_{3\sim} = 12,12$ kW)

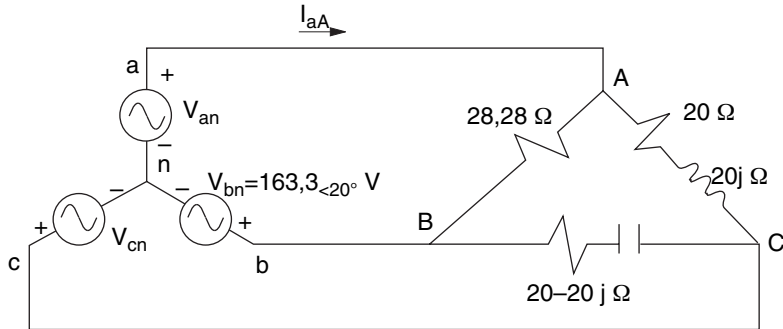


8.49. irudia.

8.12. Sareko elikatzaileek hiru faseko egitura orekatua osatzen dute eta A B C-ko sekuentzian daude 60 Hz-eko maiztasunean. Atera itzazu lineako korronteak (I_{aA} , I_{bB} , I_{cC}) eta fase bakoitzak ematen duen potentzia.

$$I_{aA} = 12,2 \angle 118^\circ \text{ A}; I_{bB} = 12,2 \angle 42^\circ \text{ A}; I_{cC} = 19,2 \angle 260^\circ \text{ A}$$

$$P_{AB} = 2828 \text{ W}; P_{BC} = P_{CA} = 2000 \text{ W}$$



8.50. irudia.



ELHUYAR
edizioak