



ELHUYAR
edizioak

Z. Aginako - K. J. Sagastabeitia
F. de la Bodega - M. D. Gutierrez

ZIRKUITUEN TEORIAKO 100 ARIKETA

Unibertsitatea



ZIRKUITUEN TEORIAKO 100 ARIKETA

Zaloa Aginako Arri
Koldobika Joseba Sagastabeitia Buruaga
Faustino de la Bodega Bilbao
Maria Dolores Gutierrez Ochoa de Alda

Industria Ingeniaritza Teknikoko
Unibertsitate Eskolako irakasleak
EHU/UPV, Bilbo



ELHUYAR
edizioak



HEZKUNTZA, UNIBERTSITATE
ETA IKERKETA SAILA

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN,
UNIVERSIDADES E INVESTIGACIÓN

Hezkuntza, Unibertsitate eta Ikerketa Sailaren laguntzaz argitaratu da.

Debekatuta dago liburu hau osorik edo honen zati bat erreproduzitzea, sistema informatiko batean biltegitratzea eta edonola edo edozein euskarritan –elektronikoa, mekanikoa, fotokopia edo beste-lakoa– transmititzea, Elhuyar Fundazioaren aldez aurretiko idatzizko baimenik gabe.

© Egileak: Zalao Aginako Arri, Koldobika Joseba Sagastabeitia Buruaga, Faustino de la Bodega Bilbao, Maria Dolores Gutierrez Ochoa de Alda (2006)

© Edizio honena: Elhuyar Fundazioa. Zelai Haundi, 3. Osinalde industrialdea.
20170 USURBIL (Gip.) (2006)
elhuyar@elhuyar.com - www.elhuyar.org

Koordinazioa eta maketa: Elhuyar Edizioak
Zuzentzailea: Elhuyar Hizkuntza Zerbitzuak
Azalaren diseinua: Olatz Goenaga

ISBN: 978-84-92457-53-3

Aurkibidea

Hitzaurrea	v
1. Uhin-formak	1
2. Korrante zuzeneko zirkuituak egoera iraunkorrean	45
3. Korrante alferno monofasikoa egoera iraunkorrean	115
4. Lotura magnetikoko zirkuituak	189
5. Zirkuitu doigarriak	217
6. Zirkuitu trifasikoak	255
7. Atebikoak	321
8. Egoera iragankorra	349

Hitzaurrea

Zirkuituen teoriako 100 ariketa liburua zirkuitu elektrikoen ehun ariketa ebatzi eta azalpendunen bilduma sekuentziatua da. Lan honetan, industria-ingeniaritza elektrikoaren alorreko zirkuituak ebatzi ditugu. Unibertsitateko erdi-mailako zein goi-mailako ikasketak egiten ari den ikasleak erabiliko du nagusiki liburu hau, eta ikasle horren lan-tresna baliagarria bihurtzea izan dugu helburu. Izan ere, erreminta honen bitartez, zirkuitu elektrikoen alorrean landutako kontzeptu teorikoak ulertzeaz eta finkatzeaz gain, zirkuituak ebazteko behar den trebetasuna lortuko du ikasleak.

Ikaslearen ezagutzaren eraikuntza mailakatua lortzeko helburuarekin aukeratu ditugu lan honetako ariketak, eta xede hori aintzat hartuta garatu ditugu ariketen edukia eta sekuentziazioa. Kontuan hartu behar da, hala ere, ez garela hasi ariketa oinarritzkoenetatik, horietarako nahi adina bibliografia baitago. Aipatutako unibertsitate-ikasketen mailako ariketak lantzea izan da gure helburua. Egileon ezagutza sakonean oinarrituta aukeratu eta sekuentziatu ditugu ariketak. Eta, batik bat, alor honetan irakaskuntza-ikaskuntza prozesuan urteetan lortutako esperientzia izan dugu euskarri.

Gaur egun, egoera akademiko berri baten atarian daude, Europako Unibertsitate eta Ikerketa Eremua, alegia. Egoera berri horretan, debora gutxiagoan azalduko dira edukiak ikasgelan; ikasleak bere kabuz landu beharko ditu gaiok, eta norbanakoaren lan-zama areagotu egingo da. Material hau, beraz, ikasleari bere ibilbidean lagunduko dion erreminta fidagarria izango da. Gainera irakasleentzako erreferentzia eta lan-tresna ere izango da.

Liburuan zortzi gai lantzen dira: uhin-formak, korrante zuzeneko zirkuituak egoera iraunkorrean, korrante alferno monofasikoa egoera iraunkorrean, lotura magnetikoko zirkuituak, zirkuitu doigarriak (elementu aldakor bakarrarekin), zirkuitu trifasikoak, atebikoak eta lehen ordenako zirkuituen ebazpena egoera iragankorrean.

Gai bakoitzaren hasieran, kontzeptu teoriko garrantzitsuenak, erabilitako laburdurak, eta zenbait ohar eta azalpen bildu ditugu; ariketak lantzean irakurlearentzat lagungarri izan daitezten.

Zenbait ariketa ebazteko, modu bat baino gehiago erabili ditugu; hala, irakurleek zirkuituen teoriaren ahalik eta ikuspuntutik zabalena lortuko dute, lege eta metodo bakoitzaren abantaila eta eragozpen operatiboez jabetuko dira, eta arazo jakin baten aurrean ebazpide aproposena aukeratzeko gaitasuna eskuratuko dute.

EGILEAK

1

Uhin-formak

1.1 UHIN-FORMEN ARIKETAK EGITEKO ERABILI DIREN FORMULEN BILDUMA

Batez besteko balioa:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cdot dt$$

Uhin arteztuaren batez besteko balioa:

$$|\bar{f}| = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(t)| \cdot dt$$

Balio efikaza edo eraginkorra:

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f^2(t) \cdot dt}$$

Forma-faktorea:

$$K_F = \frac{F}{|\bar{f}|}$$

Gailur-balioa edo balio maximoa:

$$\hat{F}$$

Haran-balioa edo balio minimoa:

$$\check{F}$$

Gailur-haran balioa:

$$\hat{\check{F}}$$

Grafikoki uhin periodikoei lotutako balioak lortzea:

Azalera agertzen denean, f funtzioak t ardatzarekin mugatzen duen azaleraz ari gara.

Batez besteko balioa:

$$\bar{f} \cdot T = \text{Azalera}$$

Uhin arteztuaren batez besteko balioa:

$$|\bar{f}| \cdot T = \text{Uhin arteztuaren azalera.}$$

Balio efikaza edo eraginkorra:

$$F = \sqrt{\bar{f}^2}, \text{ non } \bar{f}^2 \cdot T = \text{Uhin koadratikoaren azalera den.}$$

1.2 TRESNAK ETA HAIEN IRAKURKETAK

Ariketetako tresnak analogikoak direla suposatzen dugu.



Burdina mugikorrekia: Balio efikaza neurtzen du.



Koadro mugikorrekia: Batez besteko balioa neurtzen du.



Elektrodinamikoa: Tentsioaren eta korrontearen uhin-formen biderkaduraren batez bestekoa neurtzen du.

1.3 TRESNEN KONSTANTEAK

Amperemetroaren kasuan: $K_A = \frac{I\text{-ren balio maximoa}}{\text{Eskalaren amaierako balioa}} \left[\frac{A}{\text{dibisio}} \right]$

Voltmetroaren kasuan: $K_V = \frac{U\text{-ren balio maximoa}}{\text{Eskalaren amaierako balioa}} \left[\frac{V}{\text{dibisio}} \right]$

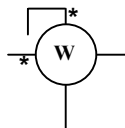
Wattmetroaren kasuan:

$$K_W = \frac{U\text{-ren balio maximoa} \times I\text{-ren balio maximoa} \times \cos \varphi}{\text{Eskalaren amaierako balioa}} \left[\frac{W}{\text{dibisio}} \right]$$

Ariketako enuntziatuan konstantea ematen ez denean, 1 dela joko da.

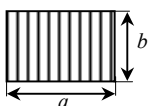
Oharrak

- Neurgailu baten neurketa aparatu horrek neurtzen duen magnitudearen balioa izango da (magnitude horri dagokion unitatean). Aldiz, neurgailu baten irakurketa aparatu analogikoaren orratzak adierazten duen eskalaren zati kopurua izango da.
- Aldiuneko balioak adierazteko, letra xeheak erabili dira: $f(t) = f$
- Wattmetroaren polaritatea adierazten ez denean, ondoko hau dela suposatuko da:



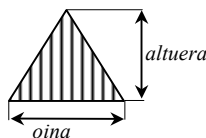
- Besterik esaten ez bada, ariketetan, hasierako kondizioak nuluak izango dira.
- Erabili diren azalaren formulak:

Laukizuzena



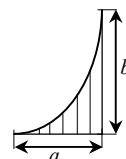
$$\text{azalera} = a \cdot b$$

Triangelua



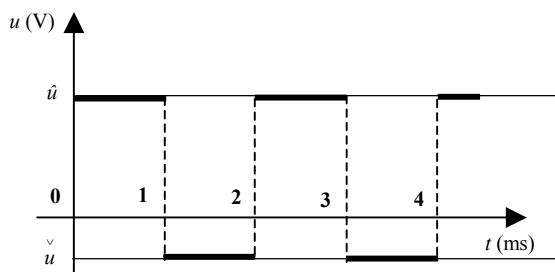
$$\text{azalera} = \frac{\text{oina} \cdot \text{altuera}}{2}$$

Parabola



$$\text{azalera} = \frac{a \cdot b}{3}$$

Ariketa-zenbakia: 1.1

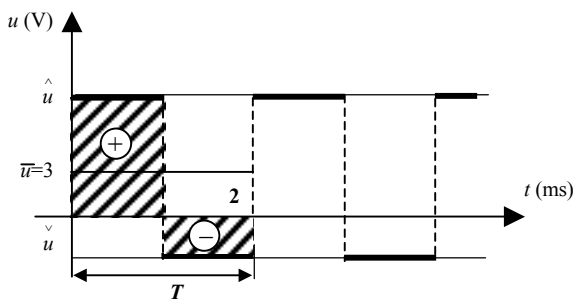


1. Irudiko uhin-forma karratuak zer balio maximo, $\hat{u}$, eta minimo, $\check{u}$, izan behar ditu, haien batez besteko balioa $\bar{u}=3V$ eta uhin arteztuaren batez besteko balioa $|\bar{u}|=4V$ izan daitezen?
2. Zein da bere balio efikaza, U , ?

Ebazpena

1. Azalera erabiliz,

Batez besteko balioa:

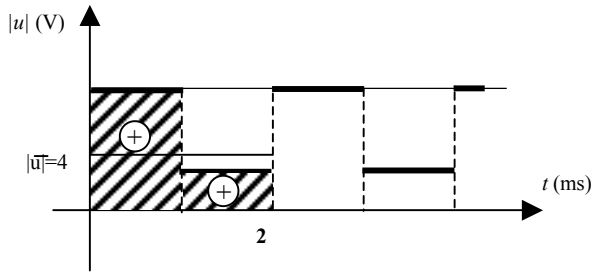


$$\bar{u} \cdot T = A_{\text{laukizuzen}^+} - A_{\text{laukizuzen}^-}$$

$$3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = \hat{u} \cdot 10^{-3} + \check{u} \cdot 10^{-3}$$

$$\hat{u} + \check{u} = 6$$

Uhin arteztuaren batez besteko balioa:



$$\overline{|u|} \cdot T = A_{\text{laukizuzen}} + A_{\text{laukizuzen}}$$

$$4 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = \hat{u} \cdot 10^{-3} - \check{u} \cdot 10^{-3}$$

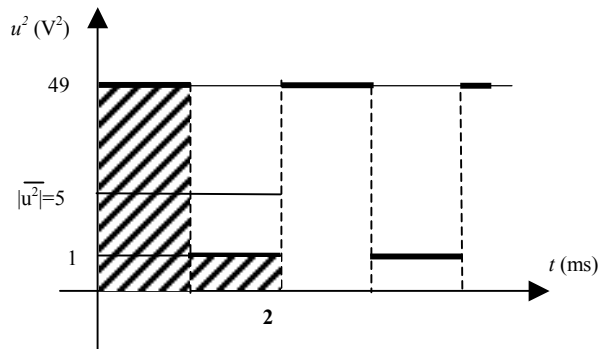
$$\hat{u} - \check{u} = 8$$

Beraz,

$$2 \cdot \hat{u} = 14 \rightarrow \hat{u} = 7 \text{ V}$$

$$2 \cdot \check{u} = -2 \rightarrow \check{u} = -1 \text{ V}$$

2.



Balio efikaz hau izango du:

$$\overline{u^2} \cdot T = A_{\text{laukizuzen}} + A_{\text{laukizuzen}}$$

$$\overline{u^2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 49 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-3}$$

$$\overline{u^2} = 25 \Rightarrow U = \sqrt{25} = 5 \text{ V}$$

Formulak erabiliz

Funtzioaren adierazpen analitikoa idatziko dugu lehenengo:

$$\begin{cases} 0 < t < 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}; & u = \hat{u} \\ 1 \cdot 10^{-3} < t < 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}; & u = \check{u} \end{cases}$$

Batez besteko balioa:

$$\bar{u} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \left[\int_0^{1 \cdot 10^{-3}} \hat{u} \cdot dt + \int_{1 \cdot 10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} \check{u} \cdot dt \right] = \frac{1 \cdot \left(10^{-3} \cdot \hat{u} - 10^{-3} \cdot \check{u} \right)}{2 \cdot 10^{-3}} = 3 \text{ V} \quad 6 = \hat{u} + \check{u}$$

Uhin arteztuaren batez besteko balioa:

$$\bar{u} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \left[\int_0^{1 \cdot 10^{-3}} \hat{u} \cdot dt + \int_{1 \cdot 10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} \check{u} \cdot dt \right] = \frac{1 \cdot \left(10^{-3} \cdot \hat{u} - 10^{-3} \cdot \check{u} \right)}{2 \cdot 10^{-3}} = 4 \text{ V} \quad 8 = \hat{u} - \check{u}$$

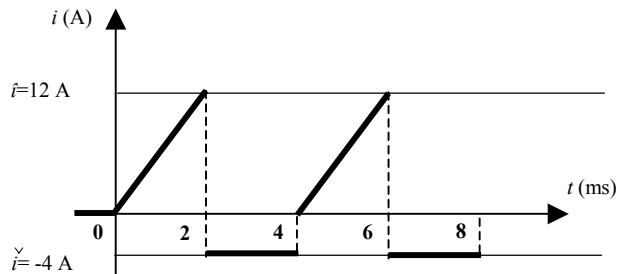
Bi ezezagunak ebazteko, bi ekuazio planteatzea lortu dugu; orain, ebaztea baino ez da gelditzen:

$$\begin{cases} 6 = \hat{u} + \check{u} \\ 8 = \hat{u} - \check{u} \end{cases} \rightarrow \hat{u} = 7 \text{ V} \quad \text{eta} \quad \check{u} = -1 \text{ V}$$

Eta, azkenik, balio efikaza:

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \left[\int_0^{1 \cdot 10^{-3}} \hat{u}^2 \cdot dt + \int_{1 \cdot 10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} \check{u}^2 \cdot dt \right]} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \left[\int_0^{1 \cdot 10^{-3}} 49 \cdot dt + \int_{1 \cdot 10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} 1 \cdot dt \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{1 \cdot (10^{-3} \cdot 49 + 10^{-3})}{2 \cdot 10^{-3}}} = \sqrt{25} = 5 \text{ V} \end{aligned}$$

Ariketa-zenbakia: 1.2



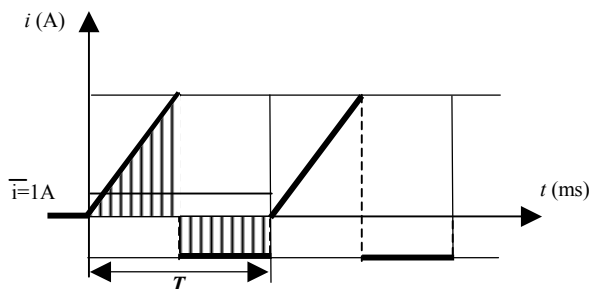
Irudiko i korronte-intentsitateko uhin-forma periodikoa ezaguna izanda, zehaztu:

1. Maiztasuna.
2. Uhinari loturiko batez besteko balioa, $\bar{i}$, uhin arteztuaren batez besteko balioa, $|\bar{i}|$, eta balio efikaza, I .
3. K_f forma-faktorea.

Ebazpena

1. Maiztasuna: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} = \frac{10^3}{4} = 250 \text{ Hz}$

2. Azalerak erabiliz

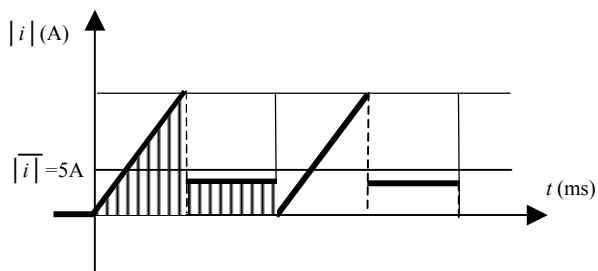


Batez besteko balioa:

$$\bar{i} \cdot T = A_{\text{triangelu}} - A_{\text{laukizuzen}}$$

$$\bar{i} \cdot 4 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 12 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot (-4)$$

$$\bar{i} = \frac{12-8}{4} = 1 \text{ A}$$

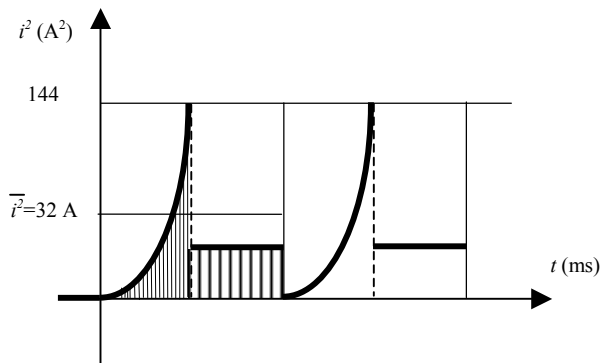


Uhin arteztuaren batez besteko balioa:

$$\bar{i} \cdot T = A_{\text{triangelu}} + A_{\text{laukizuzen}}$$

$$|\bar{i}| \cdot 4 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 12 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 4$$

$$|\bar{i}| = \frac{12+8}{4} = 5 \text{ A}$$



Balio efikaza:

$$\bar{i^2} \cdot T = A_{\text{parabola}} + A_{\text{laukizuzen}}$$

$$\bar{i^2} \cdot 4 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 12^2 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 4^2$$

$$\bar{i^2} = \frac{96+32}{4} = 32 \text{ A}^2$$

$$I = \sqrt{32} = 4 \cdot \sqrt{2} \text{ A}$$

3. Forma-faktorea:

$$K_f = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{5} = 0,8\sqrt{2}$$

Formulak erabiliz

Korrontearen uhin-formaren adierazpen analitikoa lortuko dugu hasteko:

$$\begin{cases} 0 \leq t < 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}; & i = \frac{12}{2 \cdot 10^{-3}} t \rightarrow i = 6 \cdot 10^3 t \text{ A} \\ 2 \cdot 10^{-3} < t < 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}; & i = -4 \text{ A} \end{cases}$$

Batez besteko balioa:

$$\begin{aligned} \bar{i} &= \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} \left[\int_0^{2 \cdot 10^{-3}} 6 \cdot 10^3 t \cdot dt + \int_{2 \cdot 10^{-3}}^{4 \cdot 10^{-3}} -4 \cdot dt \right] = \\ &= \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} \left[6 \cdot 10^3 \left(\frac{t^2}{2} \right)_0^{2 \cdot 10^{-3}} + (-4) \cdot (t)_{2 \cdot 10^{-3}}^{4 \cdot 10^{-3}} \right] = \\ &= \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} [12 \cdot 10^{-3} - 8 \cdot 10^{-3}] = 1 \text{ A} \end{aligned}$$

Uhin arteztuaren batez besteko balioa:

$$\begin{aligned} |\bar{i}| &= \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} \left[\int_0^{2 \cdot 10^{-3}} 6 \cdot 10^3 t \cdot dt + \int_{2 \cdot 10^{-3}}^{4 \cdot 10^{-3}} 4 \cdot dt \right] = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} \left[6 \cdot 10^3 \left(\frac{t^2}{2} \right)_0^{2 \cdot 10^{-3}} + 4 \cdot (t)_{2 \cdot 10^{-3}}^{4 \cdot 10^{-3}} \right] = \\ &= \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} [12 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-3}] = 5 \text{ A} \end{aligned}$$

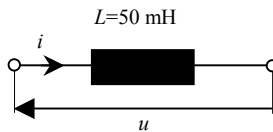
Balio efikaza:

$$I = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} \left[\int_0^{2 \cdot 10^{-3}} 36 \cdot 10^6 t^2 \cdot dt + \int_{2 \cdot 10^{-3}}^{4 \cdot 10^{-3}} 16 \cdot dt \right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} \left[36 \cdot 10^6 \left(\frac{t^3}{3} \right)_0^{2 \cdot 10^{-3}} + 16 \cdot (t)^{\frac{4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}} \right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} [96 \cdot 10^{-3} + 32 \cdot 10^{-3}]} = \sqrt{\frac{128}{4}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ A}$$

Ariketa-zenbakia: 1.3



50 mH-eko autoindukzioko haril bati hertz-zerra formako tentsio bat aplikatu zaio. Tentsio horren maiztasuna $f = 250 \text{ Hz}$ da eta haren balio maximoa $\hat{u} = 120 \text{ V}$.

Kalkulatu:

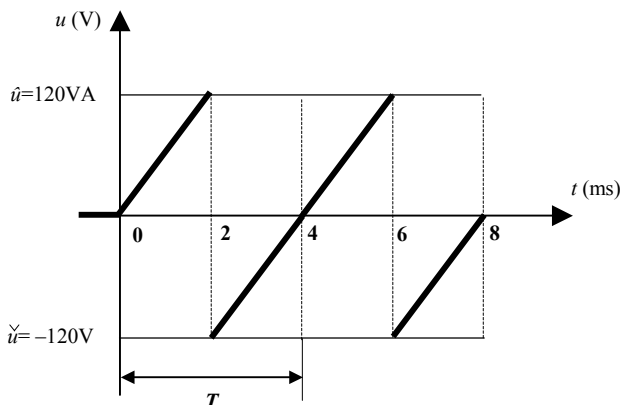
1. u tentsioaren periodoa, T , eta forma-faktorea, K_f .
2. Korrontearen, i , eta potentziaren, p , aldiuneko balioak eta haiei dagozkien adierazpen grafikoak.
3. Potentziaren eta korrontearen batez besteko balioak.

Ebazpena

1. Periodoa:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{250} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

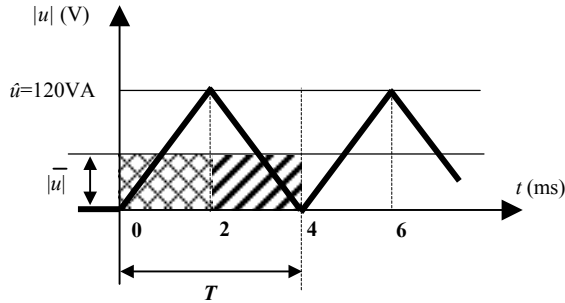
Periodoa ezagutzen dugunez, u -ren uhin-forma irudikatu ahal izango dugu:



Forma-faktorea $K_f = \frac{U}{\overline{|u|}}$ denez, hori zehaztu ahal izateko, tentsioaren balio efikaza eta uhin arteztuaren batez bestekoa lortu beharko ditugu.

Uhin arteztuaren batez besteko balioa:

Azalerak erabiliz,



Uhin arteztua simetrikoa da periodo baterako. Hori dela eta, uhin arteztuaren periodoaren erdia erabilita bakarrik, uhin arteztuaren batez besteko balioa lor daiteke. Ikus dezagun:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 120 = 2 \cdot 10^{-3} \cdot \overline{|u|}$$

$$\overline{|u|} = \frac{120}{2} = 60 \text{ V}$$

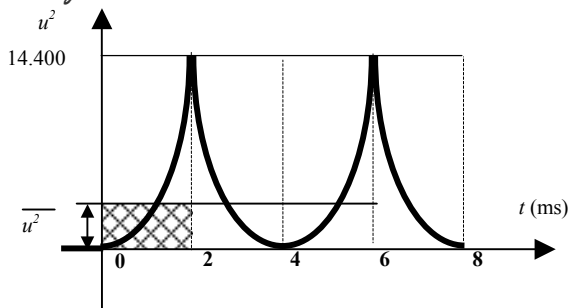
Formula erabiliz,

$$0 \leq t < 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \quad u = \frac{120}{2 \cdot 10^{-3}} = 6 \cdot 10^4 \cdot t$$

$$\overline{|u|} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \int_0^{2 \cdot 10^{-3}} 6 \cdot 10^4 \cdot t \cdot dt = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \left[3 \cdot 10^4 \cdot t^2 \right]_0^{2 \cdot 10^{-3}} = 60 \text{ V}$$

Uhin koadratikoaren batez besteko balioa:

Azalerak erabiliz,



$$\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 14.400 = 2 \cdot 10^{-3} \cdot \overline{u^2}$$

$$\overline{u^2} = \frac{14.400}{3} \text{ V}^2$$

$$U = \sqrt{\frac{14.400}{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3} \text{ V}$$

Formula erabiliz,

$$U = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot \int_0^{2 \cdot 10^{-3}} (6 \cdot 10^4 \cdot t)^2 \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \left[36 \cdot 10^8 \cdot \frac{t^3}{3} \right]_0^{2 \cdot 10^{-3}}} =$$

$$= \sqrt{48 \cdot 10^2} = 40\sqrt{3} \text{ V}$$

Eta forma-faktorearen adierazpenean lortu ditugun bi balio horiek ordezkatzuz,

$$K_f = \frac{U}{|\overline{u}|} = \frac{40\sqrt{3}}{60} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ izango da.}$$

2. 2.1. Korrontea

Haril batetik korronte hau dabil: $i = i_0 + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u \cdot dt$

$$0 \leq t < 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \quad u = 6 \cdot 10^4 t \text{ V};$$

$$i = 0 + \frac{1}{50 \cdot 10^{-3}} \int_0^t 6 \cdot 10^4 t \cdot dt = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot t^2}{50 \cdot 10^{-3}} = 6 \cdot 10^5 \cdot t^2 \text{ A}$$

Korrontearen uhinak adarrak gorantz dituen parabola baten forma du.

$$t = 0 \text{ s denean, } i = 0 \text{ A}; t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s denean, } i = 2,4 \text{ A}$$

$$2 \cdot 10^{-3} < t < 6 \cdot 10^{-3} \text{ s}; u = 6 \cdot 10^4 \cdot (t - 4 \cdot 10^{-3}) \text{ V}; \text{ eta } i_0 = 2,4 \text{ A}; \text{ beraz:}$$

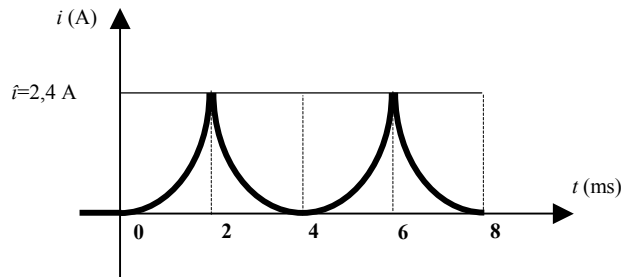
$$\begin{aligned} i &= 2,4 + \frac{1}{50 \cdot 10^{-3}} \int_{2 \cdot 10^{-3}}^t 6 \cdot 10^4 \cdot (t - 4 \cdot 10^{-3}) \cdot dt = \\ &= 2,4 + \frac{6 \cdot 10^4}{50 \cdot 10^{-3}} \cdot \left[\frac{(t - 4 \cdot 10^{-3})^2}{2} \right]_{2 \cdot 10^{-3}}^t = \end{aligned}$$

$$2,4 + 6 \cdot 10^5 \cdot \left[(t - 4 \cdot 10^{-3})^2 - 4 \cdot 10^{-6} \right] = 6 \cdot 10^5 \cdot (t - 4 \cdot 10^{-3})^2 \text{ A}$$

Aurreko parabola bera da, baina $t_0 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ atzeratuta.

$$t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s denean, } i = 2,4 \text{ A}$$

$$t = 6 \cdot 10^{-3} \text{ s denean, } i = 2,4 \text{ A}; t = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s denean, } i = 0 \text{ A}$$



2.2. Potentzia

$$p = u \cdot i$$

$$0 \leq t < 2 \cdot 10^{-3} \text{ s};$$

$$p = u \cdot i = 6 \cdot 10^4 \cdot t \cdot 6 \cdot 10^5 \cdot t^2 = 36 \cdot 10^9 \cdot t^3 \text{ W}$$

$$t = 0 \text{ s denean, } p = 0 \text{ W ;}$$

$$t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s denean, } p = 36 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-9} = 288 \text{ W}$$

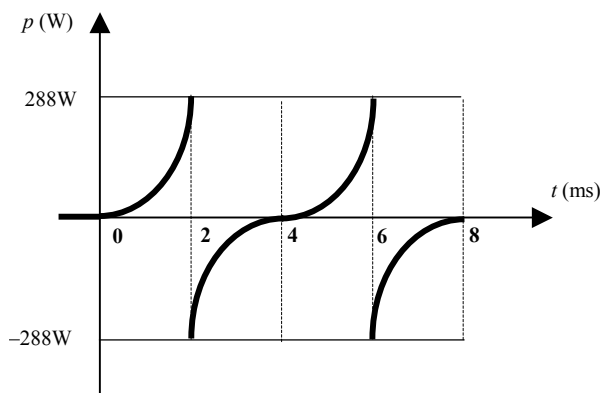
$$2 \cdot 10^{-3} < t < 6 \cdot 10^{-3} \text{ s ;}$$

$$p = u \cdot i ;$$

$$p = 6 \cdot 10^4 \cdot (t - 4 \cdot 10^{-3}) \cdot 6 \cdot 10^5 (t - 4 \cdot 10^{-3})^2 = 36 \cdot 10^9 \cdot (t - 4 \cdot 10^{-3})^3 \text{ W}$$

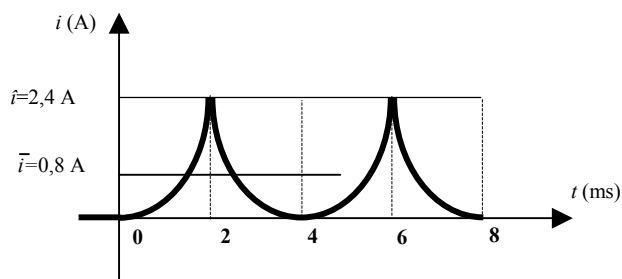
$$t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s denean, } p = -288 \text{ W ; } t = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s denean, } p = 0 \text{ W ; eta}$$

$$t = 6 \cdot 10^{-3} \text{ s denean, } p = 288 \text{ W}$$



3. 3.1. Korrontearen batez besteko balioa:

Azalerak erabiliz,



$$2 \cdot 10^{-3} \cdot \bar{i} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2,4$$

$$\bar{i} = 0,8 \text{ A}$$

Formula erabiliz,

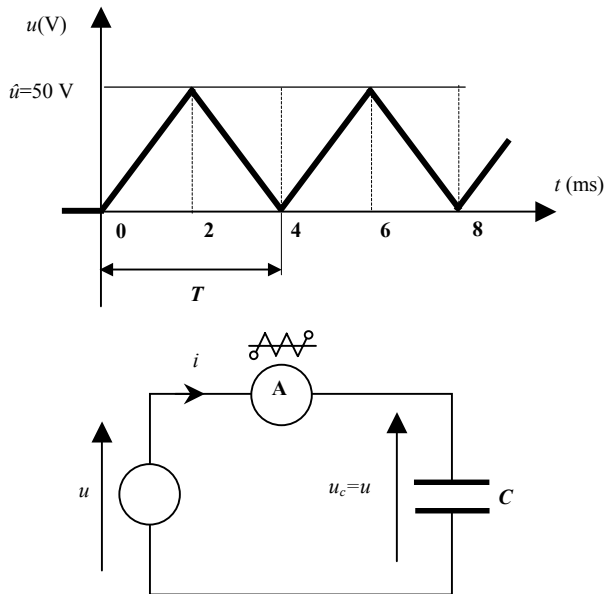
$$\bar{i} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \int_0^{2 \cdot 10^{-3}} 6 \cdot 10^5 \cdot t^2 \cdot dt = \frac{6 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{-3}} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{2 \cdot 10^{-3}} = 0,8 \text{ A}$$

3.2. Potentziaren batez besteko balioa:

Ez da kalkulatu behar, harila elementu metatzailea izanik, potentziaren batez besteko balioa 0 baita.

Koadro mugikorrek amperemetro baten neurketa 0,8 A izango litzateke. Eta wattmetro elektrodinamiko baten neurketa 0 W.

Ariketa-zenbakia: 1.4



60 μF -eko kondentsadore bati irudian agertzen den uhin triangeluarreko tentsioa aplikatu zaio. Kalkulatu:

1. Amperemetroaren neurketa, burdina mugikorrek baldin bada.
2. Aldiuneko potentzia.

2. Korrontearen eta potentziaren adierazpen grafikoak.

Ebazpena

1. Tentsioaren adierazpen analitikoa (lehen periodoaren bi tartetarako) izanda:

$$0 \leq t \leq 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \quad u = \frac{50}{2 \cdot 10^{-3}} t = 25 \cdot 10^3 t \text{ V}$$

$$2 \cdot 10^{-3} \leq t \leq 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \quad u = -\frac{50}{2 \cdot 10^{-3}} (t - 4 \cdot 10^{-3}) = -25 \cdot 10^3 t + 100 \text{ V}$$

Eta kondentsadorearen definizio-ekuazioa $i = C \cdot \frac{du_c}{dt}$ baldin bada, honako hau izango da korrontearen adierazpen analitikoa:

$$0 < t < 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \quad i = C \frac{du}{dt} = 60 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 10^3 = 1,5 \text{ A}$$

$$2 \cdot 10^{-3} < t < 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \quad i = C \frac{du}{dt} = 60 \cdot 10^{-6} \cdot (-25 \cdot 10^3) = -1,5 \text{ A}$$

Amperemetroa burdina mugikorrekoea denez, korrontearen uhin-formaren balio efikaza neurtuko du.

$$\begin{aligned} A_1 = I &= \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} \left[\int_0^{2 \cdot 10^{-3}} (1,5)^2 \cdot dt + \int_{2 \cdot 10^{-3}}^{4 \cdot 10^{-3}} (-1,5)^2 \cdot dt \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{1,5^2}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot (2 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3})} = \\ A_1 &= \sqrt{2,25} = 1,5 \text{ A} \end{aligned}$$

2. $p = u \cdot i$

$$0 \leq t < 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \quad p = (25 \cdot 10^3 t) \cdot 1,5 = 37,5 \cdot 10^3 t \text{ W}$$

$$2 \cdot 10^{-3} < t < 6 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \quad p = (100 - 25 \cdot 10^3 t) \cdot (-1,5) = 37,5 \cdot 10^3 t - 150 \text{ W}$$

Potentzia-jatorritik igarotzen den zuzena da potentziaren adierazpena lehenengo tartean.

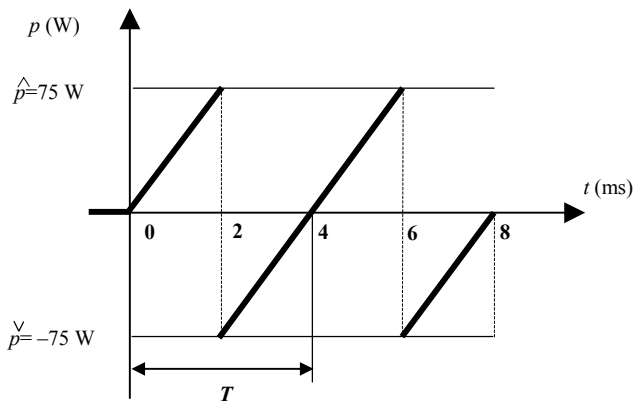
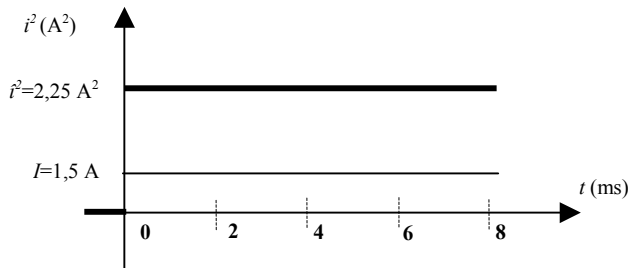
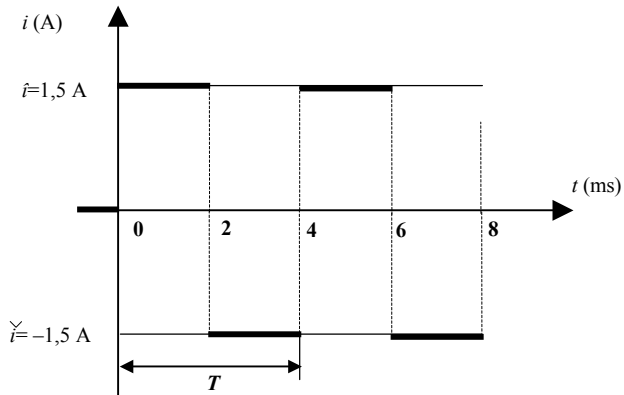
$$t = 0 \text{ s} \rightarrow p = 0 \text{ W}; \quad t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s} \rightarrow p = 75 \text{ W}$$

$$t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s} \rightarrow p = \text{zehaztugabea, jauzia.}$$

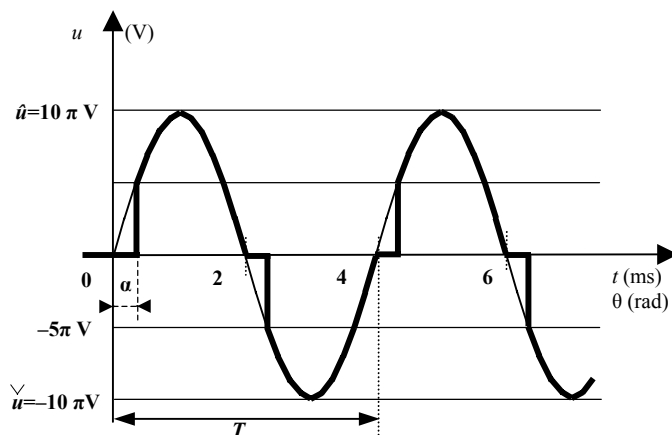
Bigarren tartean, malda bereko beste zuzen bat dugu, baina 4 ms atzeratuta dago.

$$t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s} \rightarrow p = -75 \text{ W}; t = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s} \rightarrow p = 0 \text{ W}; t = 6 \cdot 10^{-3} \text{ s} \rightarrow p = 75 \text{ W}$$

3.-



Ariketa-zenbakia: 1.5



Irudiko tentsioaren uhin-formaren funtzio inguratzaila, sinusoidala da.

Kalkulatu:

1. Uhin-formaren maiztasuna.
2. α angeluaren balioa.

Uhin arteztuaren batez besteko balioa.

Ebazpena

$$1. \text{ Maiztasuna: } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} = \frac{10^3}{4} = 250 \text{ Hz}$$

$$T = 2 \cdot \pi \text{ rad}$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f = 500 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}};$$

$$\theta = \omega \cdot t \quad \left| \begin{array}{l} t = 0 \text{ s} \rightarrow \theta = 0 \text{ rad} \\ t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s} \rightarrow \theta = 500 \pi \cdot 2 \cdot 10^{-3} = \pi \text{ rad} \\ t = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s} \rightarrow \theta = 500 \pi \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 2 \pi \text{ rad} \end{array} \right.$$

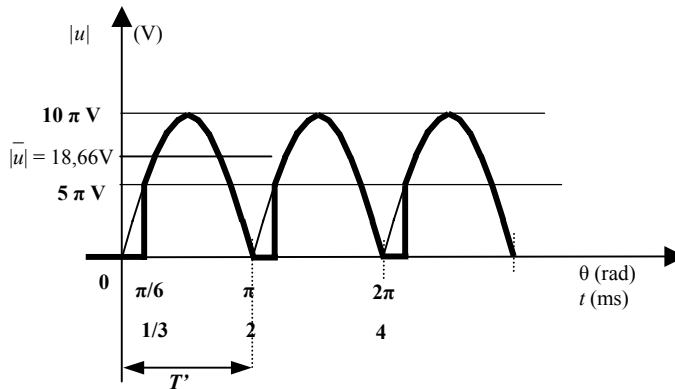
$$2. \quad u(\theta) = 10 \cdot \pi \cdot \sin \theta$$

$$5 \pi = 10 \cdot \pi \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{10 \cdot \pi}{5 \cdot \pi} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{non } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

3. Uhin arteztuaren batez besteko balioa lortzeko, uhin arteztua irudikatuko dugu. Irudian ikus daiteke uhinak 2 ms-ko periodoa duela edo π rad-ekoa. Denboraren eremuan zein θ -ren eremuan lan egin dezakegu. Bi eratara kalkulatu dugu uhin arteztuaren batez besteko balioa.



θ -ren eremuan

$$\begin{aligned} \overline{|u|} &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} 10\pi \cdot \sin \theta \cdot d\theta = \frac{10\pi}{\pi} [-\cos \theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} = 10 \cdot \left(-\cos \pi + \cos \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 10 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 10 \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right) = 5(2 + \sqrt{3}) = 18,66 \text{ V} \end{aligned}$$

Denboraren eremuan

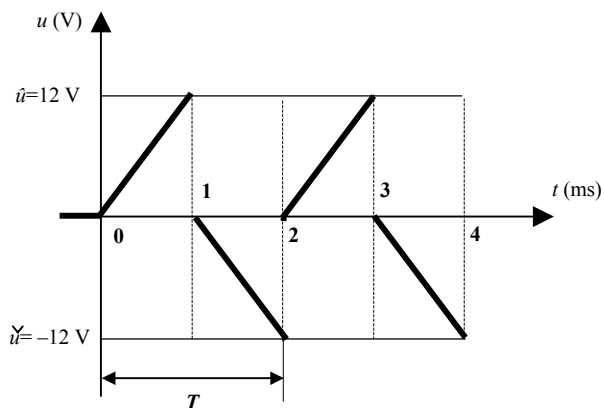
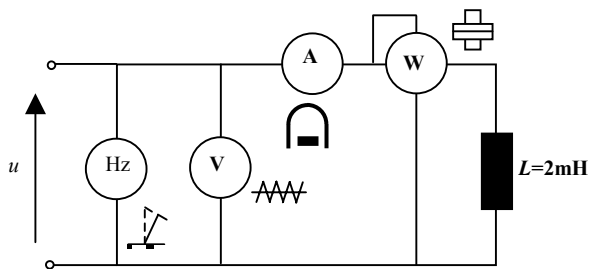
Uhinaren ekuazioa: $u(t) = 10 \cdot \pi \cdot \sin(500 \cdot \pi \cdot t) \text{ V}$

Denbora-tarteak:

$$\begin{cases} \pi \longrightarrow 2 \cdot 10^{-3} \text{ s} \\ \frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{1}{3} \cdot 10^{-3} \text{ s} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 |\overline{u}| &= \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \int_{\frac{1}{3} \cdot 10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} 10\pi \cdot \sin(500 \cdot \pi \cdot t) \cdot dt = \\
 &= \frac{10\pi}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 500\pi} \left[-\cos(500 \cdot \pi \cdot t) \right]_{\frac{1}{3} \cdot 10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} = \\
 &10 \cdot \left(-\cos(500\pi \cdot 2 \cdot 10^{-3}) + \cos\left(500 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-3}\right) \right) = \\
 &= 10 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 10 \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right) = \\
 &= 5(2 + \sqrt{3}) = 18,66 \text{ V}
 \end{aligned}$$

Ariketa-zenbakia: 1.6

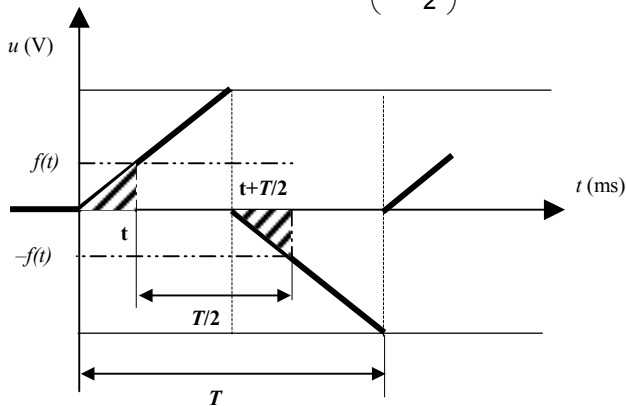


Aldamenean adierazten dugun u tentsio batez elikatuta dago irudiko zirkuitua.

1. Azaldu u funtzio periodikoak uhinerdiko simetria duen edo ez, eta arrazoitu erantzuna.
2. Aldatu, ahal bada, erreferentzia-ardatzaren kokapena, u funtzioa bakoitia, bikoitia edo bi gauzak aldi berean izateko. Adierazi, kasu bakoitzean, non jarri beharko den ardatza.
3. Harilean zeharreko korrontearen adierazpen grafiko eta analitikoa.
4. Tentsioaren uhin-formaren forma-faktorea, K_f .
5. Tresnen neurketak, baldin eta eskalen konstanteek 1 balio badute.

Ebazpena

1. u funtzioak badu uhinerdiko simetria, $f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t)$ dela betetzen baita.



2. Ez dago ez funtzio bikoiti, $f(t) = f(-t)$, ezta bakoiti, $-f(t) = f(-t)$, bihurtzerik. Ezin da, beraz, ez kasu batean ez bestean, ardatzaren posizioa aldatu, bakoititasuna zein bikoititasuna lortzeko.

Bikoitia izan zedin, " u " ardatzarekiko simetria izan beharko luke.

Bakoitia izateko, koordenatu jatorriarekiko simetrikoa izan beharko litzateke.

3. Korrontearen adierazpen analitikoa eta grafikoa:

Adierazpen analitikoa lortzen hasiko gara:

$$0 \leq t < 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \quad u = 12 \cdot 10^3 t \text{ V}; \quad \text{eta} \quad i_0 = 0$$

$$i = 0 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \int_0^t 12 \cdot 10^3 t \cdot dt = 6 \cdot 10^6 \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^t = 3 \cdot 10^6 \cdot t^2 \text{ A}$$

Korrontearen uhinareen lehen zati hori adarrak gorantz dituen parabola bat izango da.

$$t = 0 \quad \text{denean} \quad i = 0 \text{ A}; \quad \text{eta} \quad t = 10^{-3} \quad \text{denean} \quad i = 3 \text{ A}$$

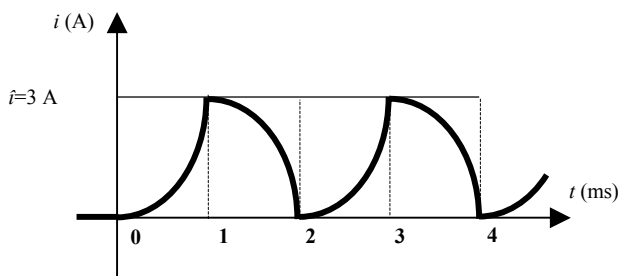
$$10^{-3} < t < 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \quad u = -12 \cdot 10^3 \cdot (t - 10^{-3}) \text{ V}; \quad \text{eta} \quad i_0 = 3$$

$$\begin{aligned} i &= 3 + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \int_{10^{-3}}^t -12 \cdot 10^3 (t - 10^{-3}) \cdot dt = 3 - 6 \cdot 10^6 \cdot \left[\frac{t^2}{2} - 10^{-3} t \right]_{10^{-3}}^t = \\ &= 3 - 3 \cdot 10^6 t^2 + 6 \cdot 10^3 t - 3 = -3 \cdot 10^6 \cdot t^2 + 6 \cdot 10^3 \cdot t \text{ A} \end{aligned}$$

Korrontearen bigarren tartea adarrak beherantz dituen parabola bat da, tartearen hasierako eta amaierako puntuetan balio hauek hartuko ditu:

$$t = 10^{-3} \quad \text{denean} \quad i = 3 \text{ A}; \quad t = 2 \cdot 10^{-3} \quad \text{denean} \quad i = 0 \text{ A}$$

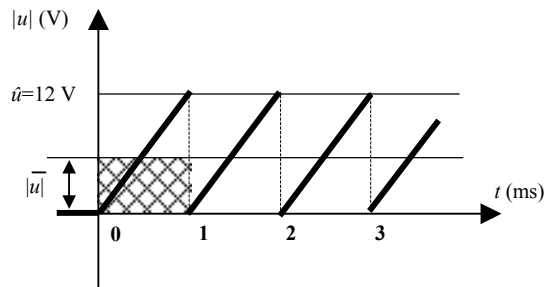
Adierazpen grafikoa. Tarteka definitu dugun funtzioa irudikatzea besterik ez da izango:



4. Tentsioaren batez besteko balioa $\bar{u} = 0$ da, uhinak uhinerdiko simetria duelako.

Uhin arteztuaren batez besteko balioa:

Azalerak erabiliz:



$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 12 = 10^{-3} \cdot \bar{u}$$

$$\bar{u} = 6 \text{ V}$$

Formula erabiliz:

$$0 \leq t < 10^{-3} \text{ s}; \quad u = \frac{12}{10^{-3}} \cdot t = 12 \cdot 10^3 \cdot t \text{ V}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{10^{-3}} \int_0^{10^{-3}} 12 \cdot 10^3 \cdot t \cdot dt = 12 \cdot 10^6 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{10^{-3}} = 12 \cdot 10^6 \cdot \frac{10^{-6}}{2} = 6 \text{ V}$$

$$\text{Forma-faktorearen balioa: } K_f = \frac{U}{\bar{u}} = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

5. Frekuentzimetroa:

Uhinaren periodoa $T = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ da. Eta, horren ondorioz, frekuentzimetroaren

$$\text{irakurketa: } f = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} = 500 \text{ Hz}$$

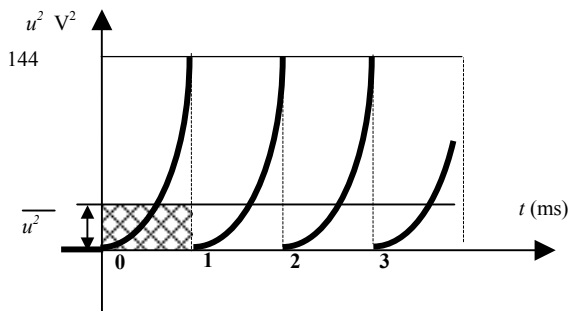
Wattmetroa:

Wattmetroaren neurketa 0 W da, harila "L" elementu metatzaila delako.

Voltmetroa:

Burdina mugikorrekua izanik, balio efikaza lortu beharko dugu. Horretarako, tentsioaren batez besteko balio koadratikoa kalkulatu dugu; horren erro karratua izango da balio efikaza.

a) Azalerak erabiliz:



$$\overline{u^2} \cdot 10^{-3} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-3} \cdot 144$$

$$\overline{u^2} = 48 \text{ V}^2$$

$$V_1 = U = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ V}$$

b) Integrazioz:

$$u = 12 \cdot 10^3 t \text{ V} \quad \text{eta} \quad u^2 = 144 \cdot 10^6 \cdot t^2 \text{ V}^2$$

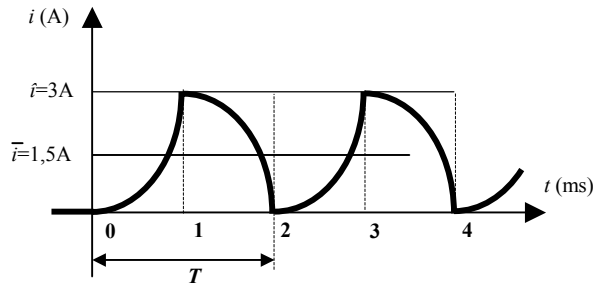
$$\overline{u^2} = \frac{1}{10^{-3}} \cdot \int_0^{10^{-3}} 144 \cdot 10^6 \cdot t^2 \cdot dt = 144 \cdot 10^9 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{10^{-3}} = 144 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-9}}{3} = 48 \text{ V}^2$$

$$V_1 = U = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ V}$$

Amperemetroa

Koadro mugikorrekua izanik, amperemetroaren irakurketa korrontearen batez besteko balioa izango da.

a) Azalerak erabiliz:



$$2 \cdot 10^{-3} \cdot \bar{i} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 10^{-3} \cdot 3$$

$$\bar{i} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ A}$$

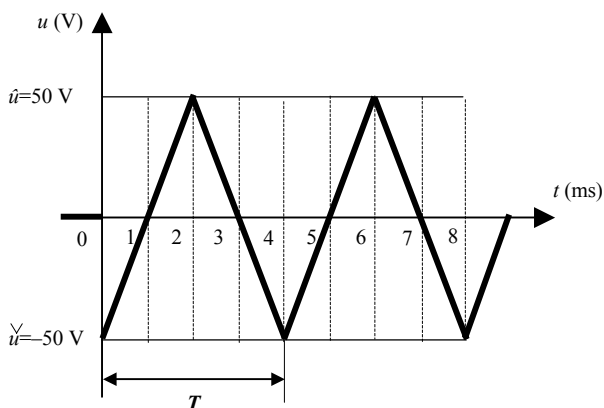
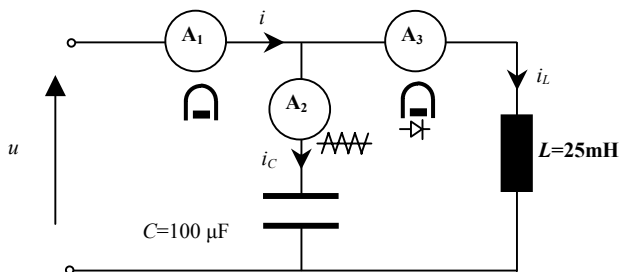
b) Integrazioz:

$$A_I = \bar{i} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \left[\int_0^{10^{-3}} 3 \cdot 10^6 \cdot t^2 \cdot dt + \int_{10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} (-3 \cdot 10^6 \cdot t^2 + 6 \cdot 10^3 \cdot t) \cdot dt \right] =$$

$$\frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \left[3 \cdot 10^6 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{10^{-3}} - 3 \cdot 10^6 \left[\frac{t^3}{3} \right]_{10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} + 6 \cdot 10^3 \left[\frac{t^2}{2} \right]_{10^{-3}}^{2 \cdot 10^{-3}} \right] =$$

$$\frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} (10^{-3} - 7 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-3}) = 1,5 \text{ A}$$

Ariketa-zenbakia: 1.7



Aldamenean adierazi den uhin-forma periodikoko tentsio batekin elikatzen da irudiko zirkuitua.

Kalkulatu:

1. i_L , i_C eta i korronteen uhin-formak.
2. Tresnen neurketak.

Ebazpena

1. $0^+ < t < 0^- \text{ s}; \quad u = -50 \text{ V}$

Tentsioan etete-puntu bat dugu. Horren ondorioz, tentsioaren funtzioa deribatzean, pultsu bat agertuko da; pultsuaren indarra: $I_c = -5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$

$$i_c = C \cdot \frac{du}{dt} = 100 \cdot 10^{-6} \cdot (-50) = -5 \cdot 10^{-3} \cdot \delta(t) \text{ A}$$

$$i = i_C + i_L = 5 \cdot 10^{-3} \delta(t) \text{ A}$$

$$0 < t \leq 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}; u = \frac{100}{2 \cdot 10^{-3}} (t - 10^{-3}) = 5 \cdot 10^4 \cdot (t - 10^{-3}) = 5 \cdot 10^4 t - 50 \text{ V}$$

$$i_C = C \cdot \frac{du}{dt} = 100 \cdot 10^{-6} \cdot (5 \cdot 10^4) = 5 \text{ A}$$

$$i_L = i_0 + \frac{1}{L} \int_0^t u \cdot dt = 0 + \frac{1}{25 \cdot 10^{-3}} \int_0^t (5 \cdot 10^4 t - 50) \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{25 \cdot 10^{-3}} \left[\left(\frac{5 \cdot 10^4 \cdot t^2}{2} \right)_0^t - (50t)_0^t \right] = 10^6 \cdot t^2 - 2 \cdot 10^3 t \text{ A}$$

$$i = i_C + i_L = 5 + 10^6 \cdot t^2 - 2 \cdot 10^3 t \text{ A}$$

$$2 \cdot 10^{-3} \leq t \leq 4 \cdot 10^{-3} \text{ s};$$

$$u = -\frac{100}{2 \cdot 10^{-3}} (t - 3 \cdot 10^{-3}) = -5 \cdot 10^4 \cdot (t - 3 \cdot 10^{-3}) = -5 \cdot 10^4 t + 150 \text{ V}$$

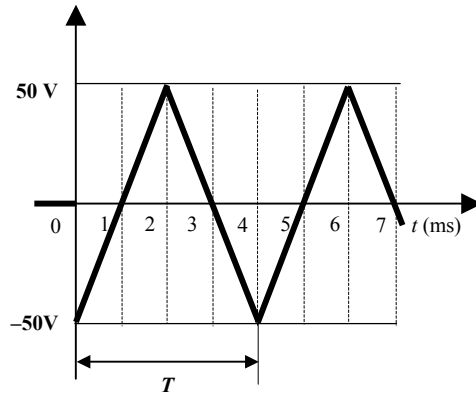
$$i_C = C \cdot \frac{du}{dt} = 100 \cdot 10^{-6} \cdot (-5 \cdot 10^4) = -5 \text{ A}$$

$$i_L = i(t = 2 \cdot 10^{-3}) + \frac{1}{L} \int_{2 \cdot 10^{-3}}^t u \cdot dt = 0 + \frac{1}{25 \cdot 10^{-3}} \int_{2 \cdot 10^{-3}}^t (-5 \cdot 10^4 t + 150) \cdot dt =$$

$$\frac{1}{25 \cdot 10^{-3}} \left[\left(\frac{-5 \cdot 10^4 \cdot t^2}{2} \right)_{2 \cdot 10^{-3}}^t + (150t)_{2 \cdot 10^{-3}}^t \right] =$$

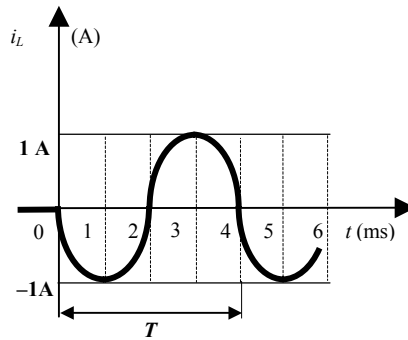
$$\frac{-5 \cdot 10^4 \cdot t^2}{50 \cdot 10^{-3}} + \frac{150 \cdot t}{25 \cdot 10^{-3}} - \frac{2 \cdot 10^{-1}}{25 \cdot 10^{-3}} = -10^6 \cdot t^2 + 6 \cdot 10^3 t - 8 \text{ A}$$

$$i = i_C + i_L = -5 - 10^6 \cdot t^2 + 6 \cdot 10^3 t - 8 = -10^6 \cdot t^2 + 6 \cdot 10^3 t - 13 \text{ A}$$



$$0 < t \leq 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \quad u = 5 \cdot 10^4 t - 50 \text{ V}$$

$$2 \cdot 10^{-3} \leq t \leq 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \quad u = -5 \cdot 10^4 t + 150 \text{ V}$$



$$0 \leq t \leq 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \quad i_L = 10^6 \cdot t^2 - 2 \cdot 10^3 t \text{ A}$$

$$i_L(t = 0) = 0 \text{ A};$$

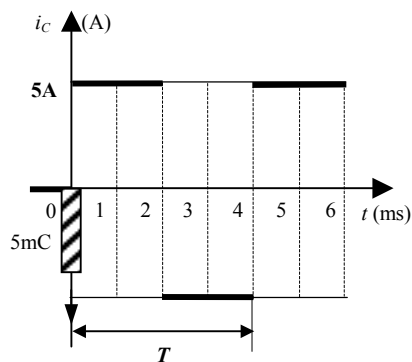
$$i_L(t = 10^{-3}) = -1 \text{ A}$$

$$i_L(t = 2 \cdot 10^{-3}) = 0 \text{ A}$$

$$2 \cdot 10^{-3} \leq t \leq 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \quad i_L = -10^6 \cdot t^2 + 6 \cdot 10^3 t - 8 \text{ A}$$

$$i_L(t = 3 \cdot 10^{-3}) = 1 \text{ A};$$

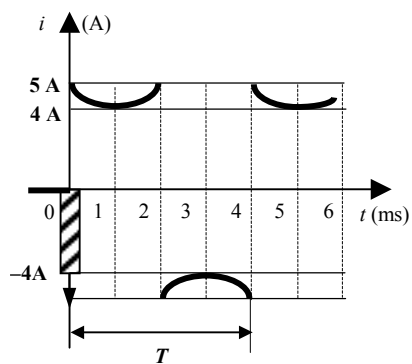
$$i_L(t = 4 \cdot 10^{-3}) = 0 \text{ A}$$



$$0^+ < t < 0^- \text{ s} \quad i_c = -5 \cdot 10^{-3} \delta(t)$$

$$0 < t \leq 2 \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad i_c = 5 \text{ A}$$

$$2 \cdot 10^{-3} < t < 4 \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad i_c = -5 \text{ A}$$



$$0^+ < t < 0^- \text{ s} \quad i = -5 \cdot 10^{-3} \delta(t)$$

$$0 < t < 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}; \quad i = 10^6 \cdot t^2 - 2 \cdot 10^3 t + 5 \text{ A}$$

$$i(t=0) = 5 \text{ A};$$

$$i(t=10^{-3}) = 4 \text{ A};$$

$$i(t=2 \cdot 10^{-3}) = 5 \text{ A}$$

$$2 \cdot 10^{-3} < t < 4 \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad i = -10^6 \cdot t^2 + 6 \cdot 10^3 t - 13 \text{ A}$$

$$i(t=2 \cdot 10^{-3}) = -5 \text{ A};$$

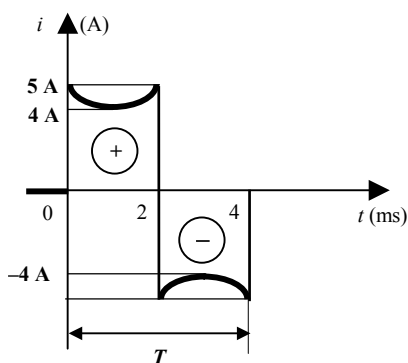
$$i(t = 3 \cdot 10^{-3}) = -4 \text{ A};$$

$$i(t = 4 \cdot 10^{-3}) = -5 \text{ A}$$

2. 2.1. A₁ amperemetroaren neurketa:

Gailu honek korrante osoaren batez bestekoa neurtuko du. Adierazpen grafikoa ikusten den bezala, uhina simetrikoa da denboraren ardatzarekiko (uhina bikoitia da). Beraz, batez besteko balioa nulua izango du. Ikus dezagun, hala ere, nola kalkulatu litzatekeen grafikoki zein analitikoki. Ez dugu kontuan hartuko hasierako jautzia.

a) Grafikoki



$$\bar{i} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = \left[(5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}) - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \right] -$$

$$\left[(5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}) - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \right] = 0$$

b) Analitikoki:

$$\bar{i} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot \left[\int_0^{2 \cdot 10^{-3}} (10^6 t^2 - 2 \cdot 10^3 t + 5) \cdot dt + \int_{2 \cdot 10^{-3}}^{4 \cdot 10^{-3}} (-10^6 t^2 + 6 \cdot 10^3 t - 13) \cdot dt \right] =$$

$$\frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot \left[\left(10^6 \frac{t^3}{3} - 2 \cdot 10^3 \frac{t^2}{2} + 5t \right) \Big|_0^{2 \cdot 10^{-3}} + \left(-10^6 \frac{t^3}{3} + 6 \cdot 10^3 \frac{t^2}{2} - 13t \right) \Big|_{2 \cdot 10^{-3}}^{4 \cdot 10^{-3}} \right] =$$

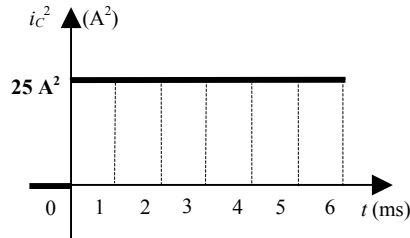
$$\frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot \left[\left(\frac{8}{3} - 4 + 10 \right) \cdot 10^{-3} + \left(-\frac{64}{3} + 48 - 52 + \frac{8}{3} - 12 + 26 \right) \cdot 10^{-3} \right] =$$

$$\frac{1}{4} \left(-\frac{48}{3} + 16 \right) = 0$$

2.2. A₂ amperemetroaren neurketa:

Amperemetro honek kondentsadorean zeharreko korrontearen balio efikaza adieraziko digu. Honetan ere ez dugu kontuan hartuko hasierako jauzia, uhinaren izaera periodikoa zerotik aurrera agertzen baita.

a) Grafikoki:



i_c korrontearen uhin koadratikoa konstantea da. Eta uhin konstante baten batez bestekoa uhinaren balio bera da.

Beraz, $\overline{i^2} = 25 \text{ A}^2$

Eta balio efikaza $I = \sqrt{\overline{i^2}} = 5 \text{ A}$

b) Analitikoki:

$$I = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} \left(\int_0^{2 \cdot 10^{-3}} 5^2 dt + \int_{2 \cdot 10^{-3}}^{4 \cdot 10^{-3}} (-5)^2 dt \right)} =$$

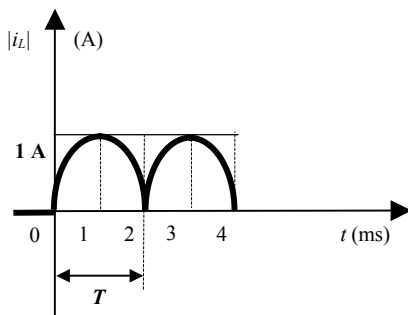
$$= \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} (25 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 25 \cdot 2 \cdot 10^{-3})} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}}}$$

$$I = \sqrt{25} = 5 \text{ A}$$

2.3. A₃ amperemetroaren neurketa

Amperemetro honek harilean zeharreko korrontea neurtuko du. Gailua koadro mugikorrekota izan arren, badu diodo baten ikurra. Diodo horrek korrontearen batez besteko balioa kalkulatu baino lehen, gailuak uhina arteztuko duela adierazten du. Beraz, gailu honek harilean zeharreko korronte arteztuaren batez bestekoa neurtuko du.

a) Grafikoki:



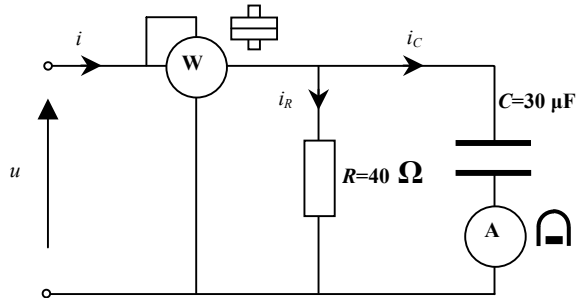
Periodo batean dugun azalera har dezakegu, edo, guk egin dugun bezala, periodo-erdia bakarrik hartu.

$$\overline{|i_L|} \cdot 1 \cdot 10^{-3} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \rightarrow \overline{|i_L|} = \frac{2}{3} = 0,66 \text{ A}$$

b) Analitikoki:

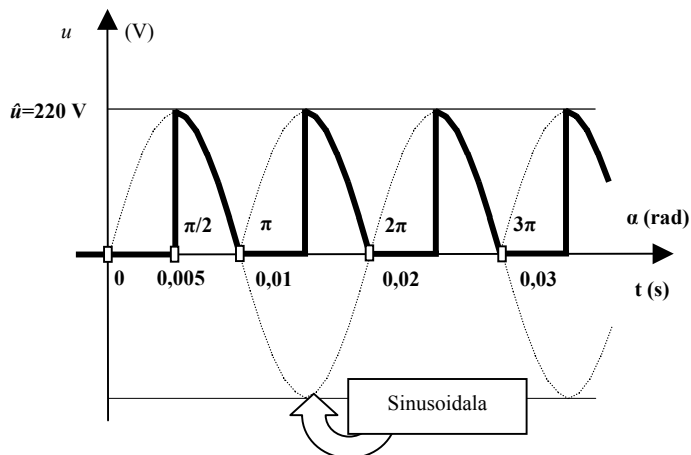
$$\begin{aligned} \overline{|i_L|} &= \frac{1}{1 \cdot 10^{-3}} \int_0^{1 \cdot 10^{-3}} |10^6 t^2 - 2 \cdot 10^3 t| \cdot dt = \\ &= \frac{1}{1 \cdot 10^{-3}} \left[\left| 10^6 \frac{t^3}{3} - 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{t^2}{2} \right| \right]_0^{10^{-3}} = \\ \frac{1}{1 \cdot 10^{-3}} \cdot \left| 10^6 \frac{10^{-9}}{3} - 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{10^{-6}}{2} \right| &= \frac{1}{1 \cdot 10^{-3}} \cdot \left| \frac{10^{-3}}{3} - 10^{-3} \right| = \\ &= \frac{1}{1 \cdot 10^{-3}} \cdot \left| -\frac{2}{3} 10^{-3} \right| = \frac{2}{3} = 0,66 \text{ A} \end{aligned}$$

Ariketa-zenbakia: 1.8



Zirkuitu honi behean irudikatutako uhin-forma periodikoa aplikatu zaio. Kalkulatu:

1. u tentsioaren uhin-forma periodikoaren maiztasuna, periodoa, batez besteko balioa eta balio efikaza.
2. Tresnen irakurketak.
3. i_R , i_C , eta i korronteen adierazpen grafikoak.



Tresnen konstanteetarako datuak:

Amperemetroa:

$$K_A = 2 \text{ A/zati}$$

Wattmetroa:

Kalibreak: 5A, 300V, $\cos\varphi=1$

Eskalaren zati kopurua: 500

Ebazpena

1. Oinarrizko uhin sinusoidalaren pultsazioa eta maiztasuna hauek dira:

$$T = 0,02 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0,02} = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{100\pi}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$$

Tentsioaren uhin-formarentzat, aldiz:

Periodoa: $T = 0,01 \text{ s}$

Maiztasuna: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,01} = 100 \text{ Hz}$

Tentsioaren batez besteko balioa:

α -ren eremuan

$$\bar{u} = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 220 \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{220}{\pi} [-\cos \alpha]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{220}{\pi} \cdot \left(-\cos \pi + \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{220}{\pi} (1 + 0) = \frac{220}{\pi} \text{ V}$$

Denboraren eremuan

Uhinaren ekuazioa: $u = 220 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t) \text{ V}$

Denbora-tarteak:

$$\begin{cases} \pi \longrightarrow 0,005 \text{ s} \\ \frac{\pi}{2} \longrightarrow 0,01 \text{ s} \end{cases}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{0,01} \int_{0,005}^{0,01} 220 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t) \cdot dt = \frac{220}{0,01 \cdot 100\pi} [-\cos(100 \cdot \pi \cdot t)]_{0,005}^{0,01} = \frac{220}{\pi} \text{ V}$$

Tentsioaren balio efikaza:

α -ren eremuan

$$U = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 220^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot d\alpha} = \sqrt{\frac{220^2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) \cdot d\alpha} = \sqrt{\frac{220^2}{2\pi} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 \cdot d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2\alpha \cdot d\alpha \right]} =$$

$$\sqrt{\frac{220^2}{2\pi} \left[\left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) + \left(\frac{\sin 2\pi - \sin \pi}{2} \right) \right]} = 110 \text{ V}$$

Denboraren eremuan

$$U = \sqrt{\frac{1}{0,01} \int_{0,005}^{0,01} 220^2 \cdot \sin^2(100 \cdot \pi \cdot t) \cdot dt} = \sqrt{\frac{220^2}{0,01 \cdot 2} \int_{0,005}^{0,01} (1 - \cos(200 \cdot \pi \cdot t)) \cdot dt} = 110 \text{ V}$$

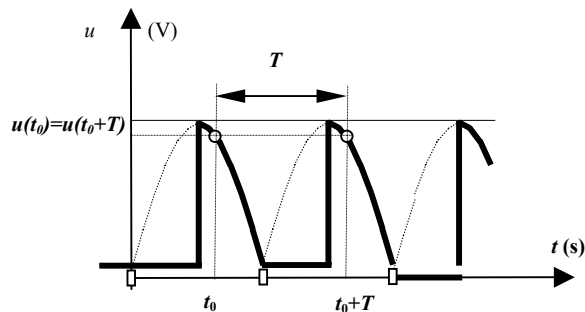
2. 2.1. Amperemetroaren irakurketa:

Koadro mugikorrek amperemetroa kondentsadore batekin seriean konektatu da, eta kondentsadorean zeharreko korrontearen batez besteko balioa neurtuko du. Baina kondentsadoreari tentsio-uhin periodikoa aplikatzen zaionean ezarriko den korrontearen batez besteko balioa nulua izango da. Ikus dezagun:

$$A_i = \frac{1}{T} \int_0^T i \cdot dt = \frac{C}{T} \int_0^T \frac{du}{dt} \cdot dt = \frac{C}{T} \int_{U_0}^{U_T} du = \frac{C}{T} (U_T - U_0) = 0$$

Uhina periodiko baldin bada, $f(t) = f(t + nT)$ beteko da, eta, horren ondorioz, $U_T = U_0$ izango da.

Ikus dezagun adierazitakoa irudi honetan:



Beraz, $A_i = 0$ zati

2.2. Wattmetroaren irakurketa:

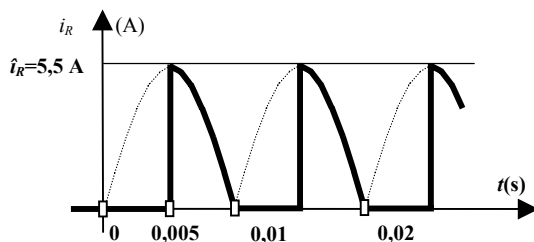
Erresistentziak galdutako potentzia neurtuko du wattmetroak. Izatez, zirkuitu osoak kontsumitutakoa neurtzen du (ikusi konexioak), baina, kondentsadorea elementu metatzailea denez, ez du potentziarik galduko.

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{110^2}{40} = 302,5 \text{ W}$$

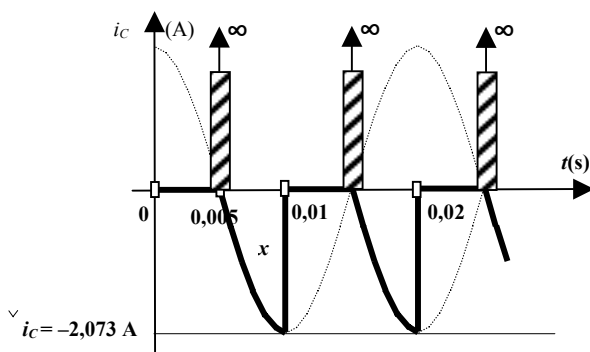
$$K_W = \frac{I_{\max} \cdot U_{\max} \cdot \cos \varphi}{\text{Eskala-amaierako balioa}} = \frac{5 \cdot 300}{500} = 3 \frac{\text{W}}{\text{zati}}$$

$$W_I = \frac{302,5}{3} = 100,83 \text{ zati}$$

3.



$$i_R \begin{cases} 0 \leq t < 0,005 \text{ s}; & i_R = 0 \\ 0,005 < t \leq 0,01 \text{ s}; & i_R = \frac{220}{40} \sin(100\pi t) = 5,5 \sin(100\pi t) \end{cases}$$



$$i_C \begin{cases} 0 \leq t < 0,005 \text{ s}; & i_C = 0 \text{ A} \\ 0,005^- < t < 0,005^+ \text{ s}; & i_C = 0,0066 \cdot \delta(t - 0,005) \text{ A} \\ 0,005 < t \leq 0,01 \text{ s}; & i_C = 2,073 \cos(100\pi t) \text{ A} \end{cases}$$

$$\text{Lehen tarterako: } i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot 0 = 0 \text{ A}$$

Tentsioaren uhinak 0,005 s-tik behin etete-puntu bat du; beraz, deribatzean, pultsu bat agertuko da. Aldiune horretan, korranteak infiniturantz joko du, alegia.

Pultsu hori definitzeko, pultsuaren indarra kalkulatu beharko dugu: pultsuaren indarra = pultsuaren azalera.

$$F = C \cdot \frac{du}{dt} = 30 \cdot 10^{-6} \cdot 220 = 0,0066 \text{ C}$$

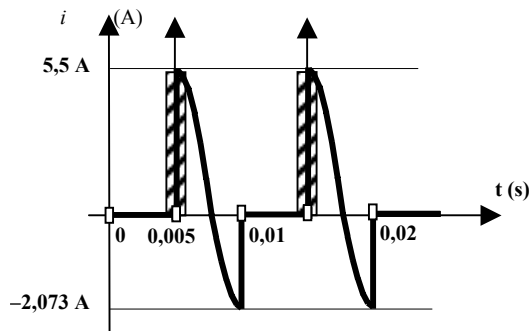
Beste era batera ere kalkula daiteke. Izan ere, periodo baterako, azalera positiboaren (pultsuarena) eta negatiboaren (irudiko x) baturak nulua izan behar du, i_C -ren batez besteko balioa nulua delako.

$$F = -\text{Azalera } x = - \int_{0,005}^{0,01} 2,073 \cdot \cos 100\pi t = 0,0066 \text{ C}$$

Bigarren tarterako :

$$i_C = C \cdot \frac{dU_C}{dt} = 30 \cdot 10^{-6} \frac{d[220 \sin(100\pi t)]}{dt} =$$

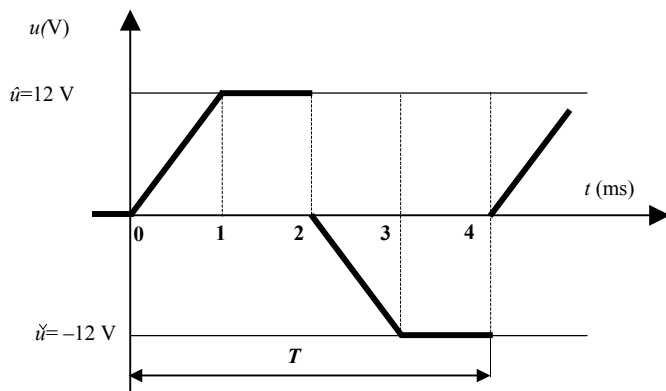
$$30 \cdot 10^{-6} \cdot 220 \cdot 100 \cdot \pi \cdot \cos(100\pi t) = 2,073 \cdot \cos(100\pi t) \text{ A}$$



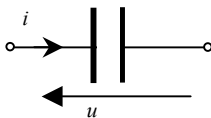
$$i \begin{cases} 0 \leq t < 0,005 \text{ s}; & i = 0 \text{ A} \\ 0,005^+ < t < 0,005^- \text{ s}; & i = 5,5 \sin(100\pi t) + 0,006 \cdot \delta(t - 0,005) \text{ A} \\ 0,005 < t \leq 0,01 \text{ s}; & i = 5,5 \sin(100\pi t) + 2,073 \cos(100\pi t) \text{ A} \end{cases}$$

$$i = i_R + i_C$$

Ariketa-zenbakia: 1.9



$$C = 50 \mu\text{F}$$



50 μF -eko kondentsadore bati irudian agertzen den u uhin-forma periodikoa aplikatzen zaio.

1. Adierazi tentsioaren uhin-formak simetria motaren bat duen edo ez.
2. Zehaztu analitikoki eta grafikoki kapazitatean zeharreko korrontea.

Ebāzpena

1. Bai, uhinerdiko simetria du. Izan ere, edozein unetarako, berdintza hau beteko da:

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

2. Kapazitatean zeharreko korrontea:

$$i = C \cdot \frac{du}{dt} \text{ da.}$$

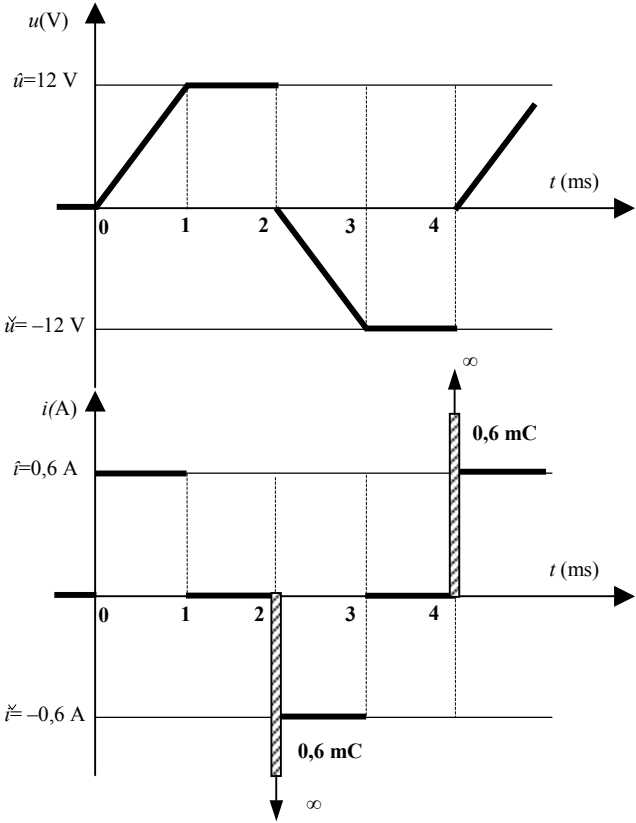
Tentsioa analitikoki definituko dugu tentsio-periodo baterako. Eta, ondoren, funtzio hori deribatuta, korrontearen adierazpen analitikoa lortuko dugu.

$$u = \begin{cases} 0 \leq t \leq 10^{-3} \text{ s}; & u = 12 \cdot 10^3 t \text{ V} \\ 10^{-3} \leq t < 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}; & u = -12 \text{ V} \\ 2 \cdot 10^{-3} < t \leq 3 \cdot 10^{-3} \text{ s}; & u = -12 \cdot 10^3 (t - 2 \cdot 10^{-3}) = -12 \cdot 10^3 t + 24 \text{ V} \\ 3 \cdot 10^{-3} \leq t < 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}; & u = -12 \text{ V} \end{cases}$$

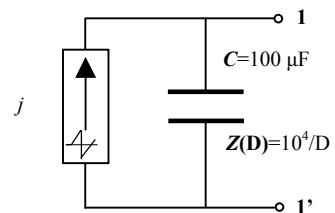
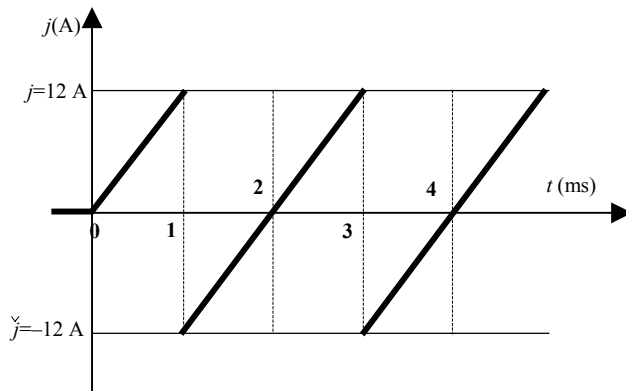
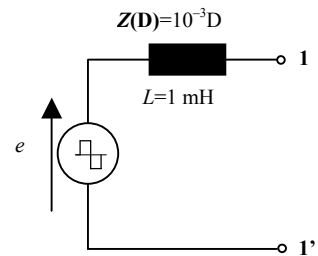
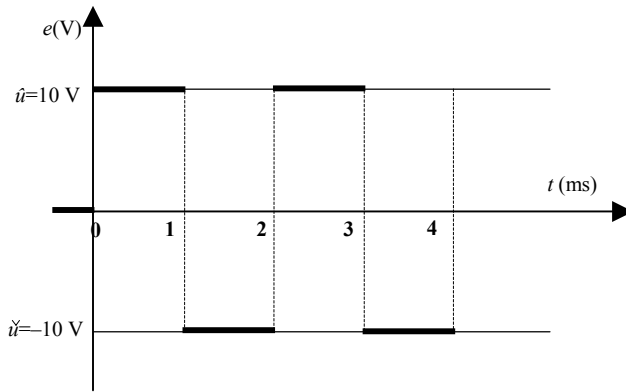
Kontuan hartu behar dugu $t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ eta $t = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ denean lehen mailako etenak agertzen direla, eta, horren ondorioz, funtzioa deribatzean, pultsuak. Horiek ere definitu beharko ditugu.

$$i = \begin{cases} 0 \leq t \leq 10^{-3} \text{ s}; & i = C \frac{du}{dt} = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 10^3 = 0,6 \text{ A} \\ 10^{-3} \leq t < 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}; & i = C \frac{du}{dt} = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 0 = 0 \text{ A} \\ 2 \cdot 10^{-3} < t < 2 \cdot 10^{-3}^+ \text{ s}; & i = 50 \cdot 10^{-6} \cdot (-12) \cdot \delta(t - 2 \cdot 10^{-3}) = -0,6 \cdot 10^{-3} \cdot \delta(t - 2 \cdot 10^{-3}) \\ 2 \cdot 10^{-3} < t \leq 3 \cdot 10^{-3} \text{ s}; & i = C \frac{du}{dt} = 50 \cdot 10^{-6} \cdot (-12 \cdot 10^3) = -0,6 \text{ A} \\ 3 \cdot 10^{-3} \leq t < 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}; & i = C \frac{du}{dt} = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 0 = 0 \text{ A} \\ 4 \cdot 10^{-3} < t < 4 \cdot 10^{-3}^+ \text{ s}; & i = 50 \cdot 10^{-6} \cdot (12) \cdot \delta(t - 4 \cdot 10^{-3}) = 0,6 \cdot 10^{-3} \cdot \delta(t - 4 \cdot 10^{-3}) \end{cases}$$

Eta funtzioen adierazpen grafikoak:



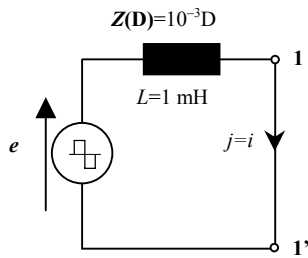
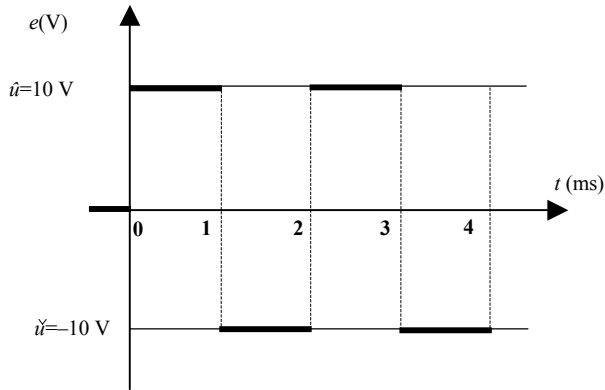
Ariketa-zenbakia: 1.10



Aurreko irudietan bi iturri erreal agertzen dira; bakoitzaren aldamenean, hari dagokion uhin-forma dago irudikatuta. Lortu iturri bakoitzaren iturri baliokidea.

Ebazpena

1.



$$j = i = \frac{1}{10^{-3}D} \cdot e = i_{t_0} + \frac{1}{10^{-3}} \cdot \int_{t_0}^t e \cdot dt$$

$$0 \leq t \leq 10^{-3} \text{ s}$$

$$j = i = \frac{1}{10^{-3}} \int_0^t 10 \cdot dt = 10^3 \cdot [10t]_0^t = 10^4 t \text{ A}$$

$$t = 0 \rightarrow j = 0$$

$$t = 10^{-3} \rightarrow j = 10 \text{ A}$$

Lehen tarterako ekuazioa malda positiboa duen zuzena da.

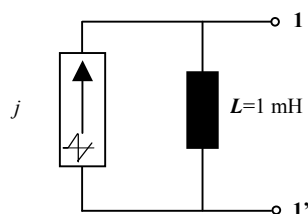
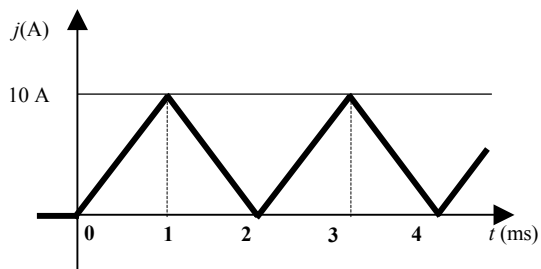
$$10^{-3} \leq t \leq 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$j = i = i_{10^{-3}} + \frac{1}{10^{-3}} \int_{10^{-3}}^t -10 \cdot dt = 10 + 10^3 \cdot [-10t]_{10^{-3}}^t = -10^4 t + 20 \text{ A}$$

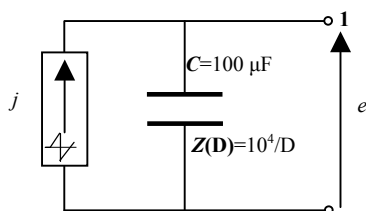
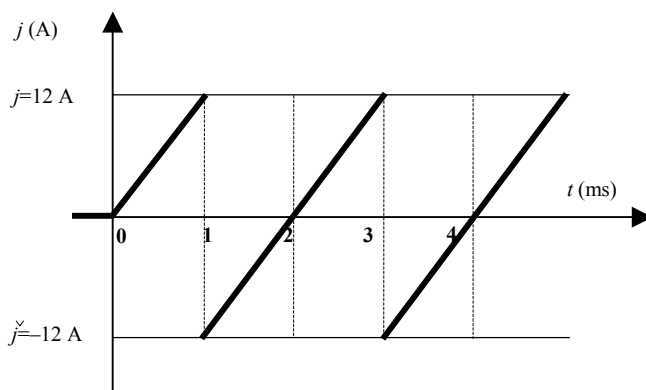
$$t = 10^{-3} \rightarrow j = 10 \text{ A}$$

$$t = 2 \cdot 10^{-3} \rightarrow j = 0 \text{ A}$$

Aurreko malda bera, baina negatiboa, duen zuzena da aurrekoarekiko 2 ms atzeratuta dagoena.



2.



$$e = \frac{1}{10^{-4}D} \cdot j = e_0 + 10^4 \int_{t_0}^t j \cdot dt$$

$$0 \leq t \leq 10^{-3} \text{ s}$$

$$e = 10^4 \int_0^t 12 \cdot 10^3 t \cdot dt = 10^4 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot \frac{t^2}{2} = 6 \cdot 10^7 \cdot t^2 \text{ V}$$

$$t = 0 \rightarrow e = 0$$

$$t = 10^{-3} \rightarrow e = 60 \text{ V}$$

Adarrak gorantz dituen parabola da.

$$10^{-3} \leq t \leq 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$e = e_{10^{-3}} + \frac{1}{10^{-4}} \int_{10^{-3}}^t (12 \cdot 10^3 t - 24) \cdot dt = 60 + 10^4 \cdot \left[12 \cdot 10^3 \cdot \frac{t^2}{2} - 24t \right]_{10^{-3}}^t =$$

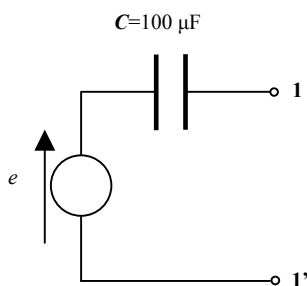
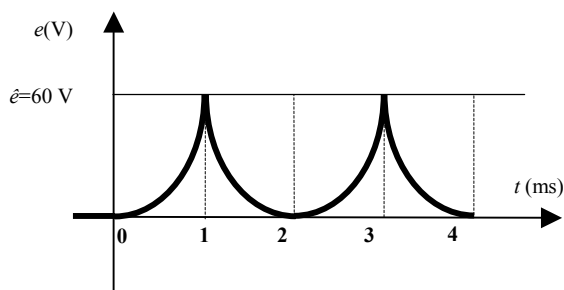
$$= 6 \cdot 10^7 t^2 - 24 \cdot 10^4 t + 240 \text{ V}$$

$$t = 10^{-3} \rightarrow e = 60 \text{ V}$$

$$t = 2 \cdot 10^{-3} \rightarrow e = 0 \text{ V}$$

$$t = 3 \cdot 10^{-3} \rightarrow e = 60 \text{ V}$$

Aurreko parabola bera 2 ms atzeratuta.



2

Korronte zuzeneko zirkuituak egoera iraunkorrean

2.1 ELEMENTU METATZAILEEN JOKABIDEA

Harilaren jokabidea: $u_L = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 0$

Horren ondorioz, egoera iraunkorrean, harila etengailu itxi batez ordezka daiteke.

Kondentsadorearen jokabidea: $i_C = C \cdot \frac{du(t)}{dt} = 0$

Horren ondorioz, egoera iraunkorrean, kondentsadorea etengailu ireki batez ordezka daiteke.

2.2 ELEMENTU METATZAILEEI LOTURIKO ENERGIA

Harila: $W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 = \frac{1}{2} \Phi \cdot i = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}$

Kondentsadorea: $W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2 = \frac{1}{2} Q \cdot u = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

Neurketa-tresnak

Amperemetroa: idealtzat hartuko dugu; hau da, erresistentzia nulua duela suposatuko dugu. Beraz, etengailu itxi batez ordezkatuko dugu.

Voltmetroa: hau ere idealtzat hartuko dugu, erresistentzia infinitua duen elementutzat hartuko dugu, alegia. Eta etengailu ireki batez ordezkatuko dugu.

2.3 ITURRIEN JOKABIDEA

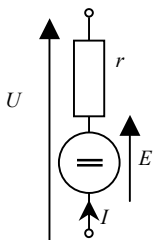
Iturri batean tentsioa eta korrontea polaritate berekoak badira, iturriak sorgailu gisa lan egiten du, eta xurgatutako P potentzia negatiboa izango da (sortutakoa positiboa, alegia). Aldiz, tentsioak eta korronteak aurkako polaritatea izanez gero, hargailua da, eta xurgatutako P potentzia positiboa izango da (emandakoa negatiboa).

2.4 ITURRIEN ERRENDIMENDUA

Oro har, eta edozein makina elektrikotan gertatzen den bezala:

$$\eta = \frac{P_{\text{erabilgarria}}}{P_{\text{guztizkoa}}}$$

Tentsio-iturriarentzako



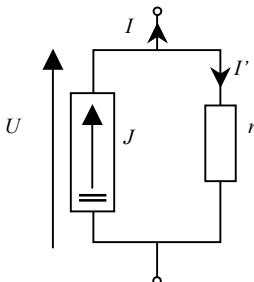
Sorgailua bada:

$$\eta = \frac{P_{\text{erabilgarria}}}{P_{\text{sortua}}} = \frac{P_{\text{sortua}} - P_{\text{galerak}}}{P_{\text{sortua}}} = \frac{E \cdot I - r \cdot I^2}{E \cdot I} = \frac{(E - r \cdot I) \cdot I}{E \cdot I} = \frac{U}{E}$$

Hargailua bada:

$$\eta = \frac{P_{\text{erabilgarria}}}{P_{\text{xurgatua}}} = \frac{P_{\text{xurgatua}} - P_{\text{galerak}}}{U \cdot I} = \frac{U \cdot I - r \cdot I^2}{U \cdot I} = \frac{(U - r \cdot I) \cdot I}{U \cdot I} = \frac{E}{U}$$

Korronte-iturriarentzako



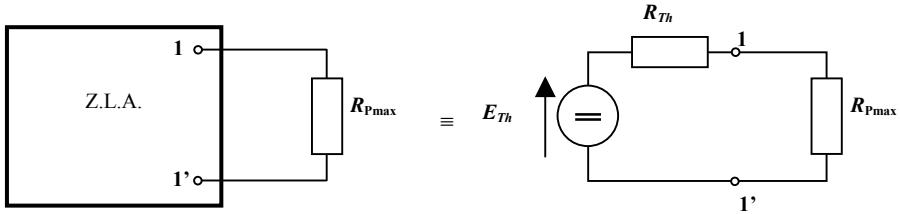
Sorgailua bada:

$$\eta = \frac{P_{\text{erabilgarria}}}{P_{\text{sortua}}} = \frac{P_{\text{sortua}} - P_{\text{galerak}}}{P_{\text{sortua}}} = \frac{U \cdot J - \frac{U^2}{r}}{U \cdot J} = \frac{U(J - \frac{U}{r})}{U \cdot J} = \frac{U(J - I')}{U \cdot J} = \frac{I}{J}$$

Hargailua bada:

$$\eta = \frac{P_{\text{erabilgarria}}}{P_{\text{xurgatua}}} = \frac{P_{\text{xurgatua}} - P_{\text{galerak}}}{U \cdot I} = \frac{U \cdot I - \frac{U^2}{r}}{U \cdot I} = \frac{U(I - \frac{U}{r})}{U \cdot I} = \frac{(I - I')}{I} = \frac{J}{I}$$

2.5 POTENTZIA MAXIMOAREN TRANSFERENTZIAREN TEOREMA KORRANTE ZUZENERAKO

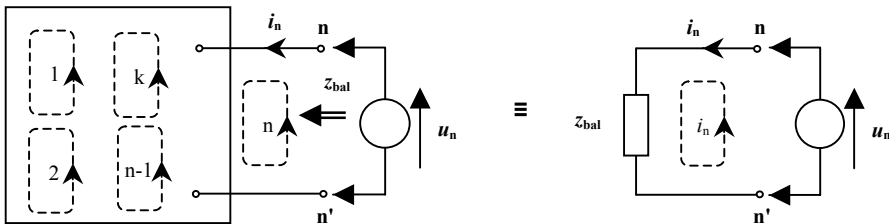


Zirkuitu lineal aktibo baten 1 eta 1' borne eskuragarri biren artean potentzia maximoa gal dadin konektatu beharreko erresistentziaren balioa zehaztean datza.

Erresistentzia hori lortzeko, zirkuituaren 1 eta 1' borneen arteko Theveninen baliokidera jo beharko dugu, eta erresistentziaren balioa $R_{P_{\text{max}}} = R_{Th}$ izango da.

2.6 SARRERAKO INPEDANTZIA EDO INPEDANTZIA BALIOKIDEA

Aurretik pasibotutako ($e_k = 0$; $i_k = 0$) zirkuitu baten bi terminalen arteko inpedantzia da.



Sarrerako inpedantzia edo inpedantzia baliokidea ondoko hau izango da $z_{bal} = \frac{u_n}{i_n}$

Bestetik, zirkuitua ezaguna baldin bada, erlazio hori analisi-metodo orokorretakoren bat aplikatuz lor daiteke.

Sare edo oinarritzko eraztunen metodoa aplikatzeko, kondizio bakar bat dago: borne eskuragarriak n-garren sarean edo n-garren oinarritzko eraztunetan izan behar dute.

Beraz:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Gai askeen matrizean denak dira zeroak, u_n izan ezik, zirkuitua pasibotuta baitago.

$$i_n = \frac{\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & 0 \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & u_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{u_n \cdot |A_{nn}|}{|Z|}$$

eta

$$\frac{u_n}{i_n} = \frac{|Z|}{|A_{nn}|} = \frac{\Delta Z}{\Delta_{nn}} = z_{bal}$$

Aurreko sistema matriziala ezabapen gausstarraren metodoaz (beheko triangeluan zeroak eginez) ebatziz gero, ondoko hau geldituko da:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1k} & \cdots & z_{1n} \\ z_{12} & z_{22} & \cdots & z_{2k} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{kk} & z_{k2} & \cdots & z_{kk} & \cdots & z_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nk} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Edo baliokidea:

$$\begin{bmatrix} z_{11}' & z_{12}' & \cdots & z_{1k}' & \cdots & z_{1n}' \\ 0 & z_{22}' & \cdots & z_{2k}' & \cdots & z_{2n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_{kk}' & \cdots & z_{kn}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & z_{nn}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Bi sistemetan demostratzen da haien determinanteak eta minor nagusiak berdinak direla: $|z| = |z'|$; $|M_i| = |M'_i|$, baina z -n bere determinantea $|z| = |z'| = \prod_{k=1}^n z'_{kk}$ eta $|M_i| = |M'_i| = \prod_{k=1}^i z'_{kk}$ da, eta, horren ondorioz:

$$z_{bal} = \frac{\Delta z}{\Delta_{nn}} = \frac{\prod_{k=1}^n z'_{kk}}{\prod_{k=1}^{n-1} z'_{kk}} = z'_{nn}$$

2.7 IZAR-TRIANGELU TRANSFORMAZIOAK (IKUSI HURRENGO GAIKO KENELLY-REN TEOREMA)

Oharra:

■ Erabilitako laburdurak:

K1L: Kirchhoff-en lehenengo legea (korronteen legea).

K2L: Kirchhoff-en bigarren legea (tentsioen legea).

OET: Oinarritzko ebakidura taldea.

OE: Oinarritzko eraztuna.

■ Zirkuituaren topologia:

r = Zirkuituaren adar kopurua.

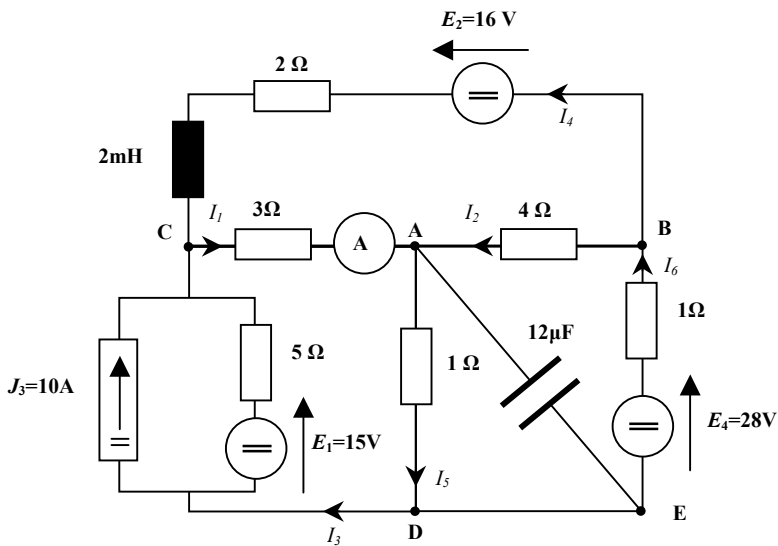
n = Zirkuituaren korapilo kopurua.

$r-n+1$ = Oinarritzko eraztun kopurua = sare kopurua = Kozuhaitzaren adar kopurua.

$n-1$ = Zuhaitzaren adar kopurua = Oinarritzko ebakidura talde kopurua.

Katebegia: Kozuhaitzaren adarrek hartzen duten izena.

Ariketa-zenbakia: 2.1



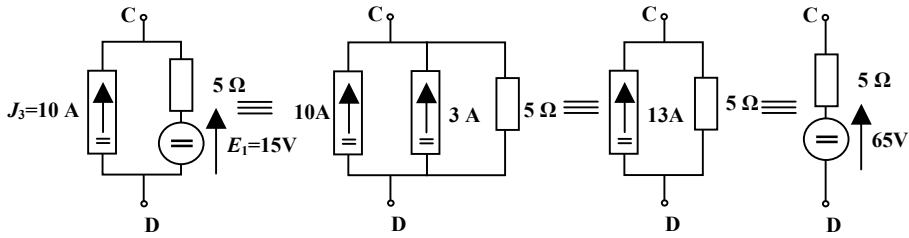
Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

1. Amperemetroaren neurketa.
2. $3\ \Omega$ eta $4\ \Omega$ -eko erresistentziek xurgatutako potentzia.
3. Harilari loturiko energia.
4. Kondentsadorearen karga.
5. Iturriek hargailu edo sorgailu gisa lan egiten duten zehaztu.

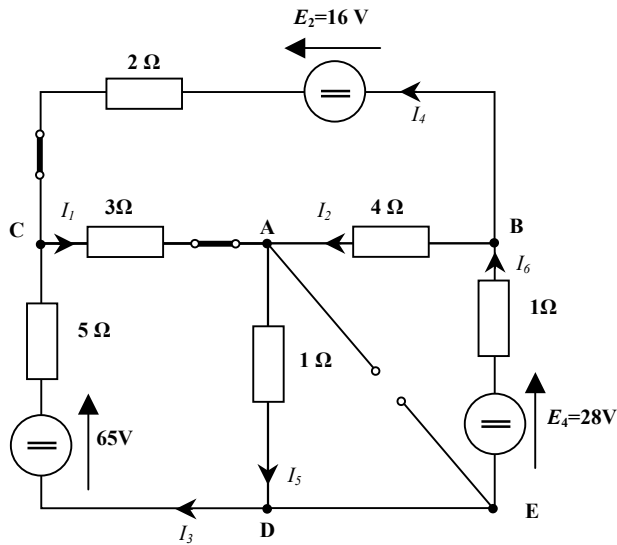
Ebazpena

Korronte zuzenean gaudenez, harilak etengailu itxiez ordezkatzuko ditugu (borneen arteko tentsioa nulua delako) eta kondentsadoreak etengailu irekietz (zeharkatzuko dituen korrontea nulua delako).

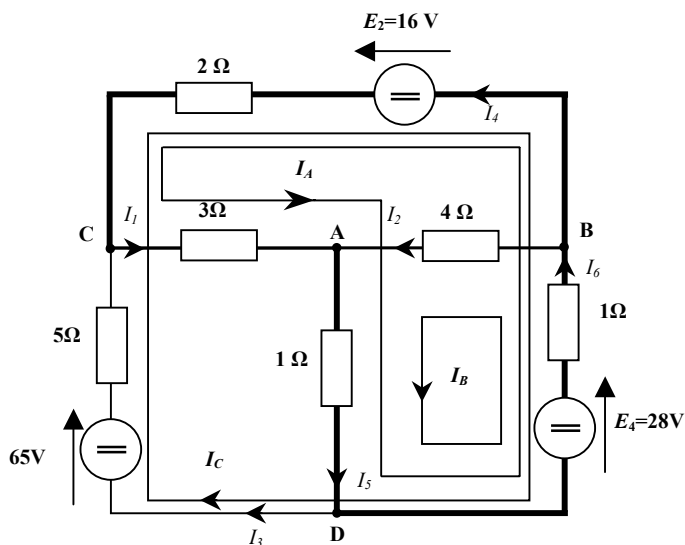
Oinarrizko eraztunen bidez ebartziko dugu. Beraz, lehenik eta behin, korronte-iturria ondoren adierazten den bezala eraldatu beharko dugu



$n = 4$ eta $r = 6$; beraz, zuhaitzaren adar kopurua $n-1 = 3$ da, eta oinarritzko eraztun kopurua $r-n+1 = 3$



Lehenengo bi galderei erantzuteko, I_2 eta I_1 korronteak ezagutu behar ditugu. Bi adar horiek (AB eta CA) kozuhaitzeko adarrak (katebegiak) badira, oinarritzko eraztunen metodoaren bidezko ebazpenarekin zuzenean lortuko ditugu bi korronte horiek; horiek izango baitira, hain zuzen ere, hiru eraztunetako biren korronteak.



$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -1 \\ -3 & -1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28+16 \\ 28 \\ 65-16-28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 28 \\ 21 \end{bmatrix}; \Delta R = |R| = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -1 \\ -3 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 255$$

$$I_A = I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 44 & 2 & -3 \\ 28 & 6 & -1 \\ 21 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{255} = 8 \text{ A} \quad I_B = I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 44 & -3 \\ 2 & 28 & -1 \\ -3 & 21 & 8 \end{vmatrix}}{255} = 3 \text{ A}$$

$$I_C = I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 44 \\ 2 & 6 & 28 \\ -3 & -1 & 21 \end{vmatrix}}{255} = 6 \text{ A}$$

1. Amperemetroaren irakurketa:

$$A_1 = I_1 = I_A = 8 \text{ A}$$

2. Erresistentziek xurgatutako potentzia:

$$P_R = R \cdot I^2$$

$$P_{3\Omega} = 3 \cdot I_A^2 = 3 \cdot 8^2 = 192 \text{ W}$$

$$P_{4\Omega} = 4 \cdot I_B^2 = 4 \cdot 3^2 = 36 \text{ W}$$

3. Harilari loturiko energia:

$$W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_4^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2^2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

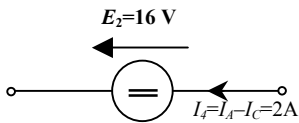
$$I_4 = I_A - I_C = 8 - 6 = 2 \text{ A}$$

4. Kondentsadorearen karga:

$$Q = U \cdot C = U_{AE} \cdot C = 11 \cdot 12 \cdot 10^{-6} = 0,132 \text{ mC} = 132 \mu\text{C}$$

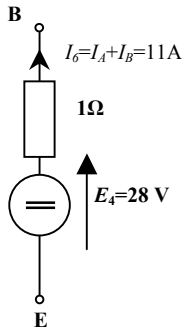
$$U_{AE} = I_5 \cdot 1 = (I_A + I_B) \cdot 1 = (8 + 3) \cdot 1 = 11 \text{ V}$$

5. Iturrien jokabidea:



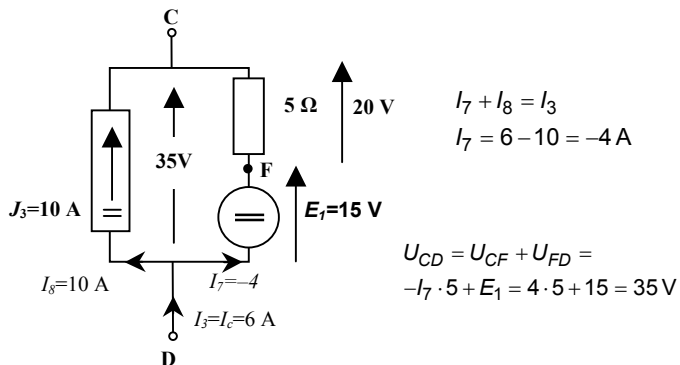
SORGAILUA

Tentsioa eta korronea noranzko berean daude.



SORGAILUA

Tentsioa eta korronea noranzko berean daude.

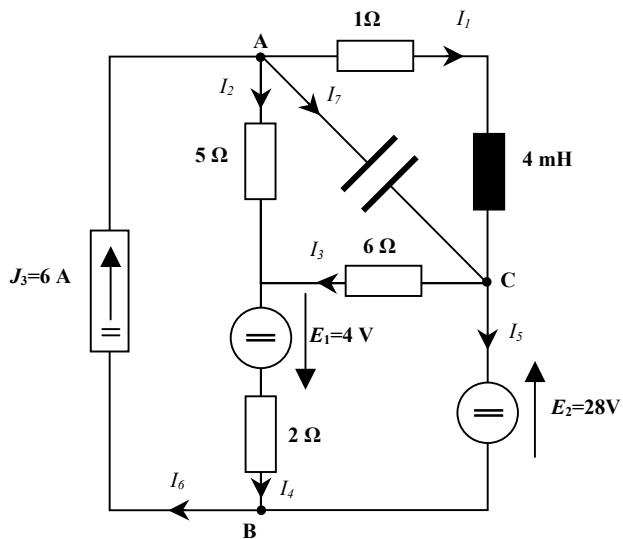


Tentsio-iturria:
HARGAILUA

Tentsioa eta
korrontea aurkako
noranzkoan.

Korronte-iturria:
SORGAILUA

Ariketa-zenbakia: 2.2



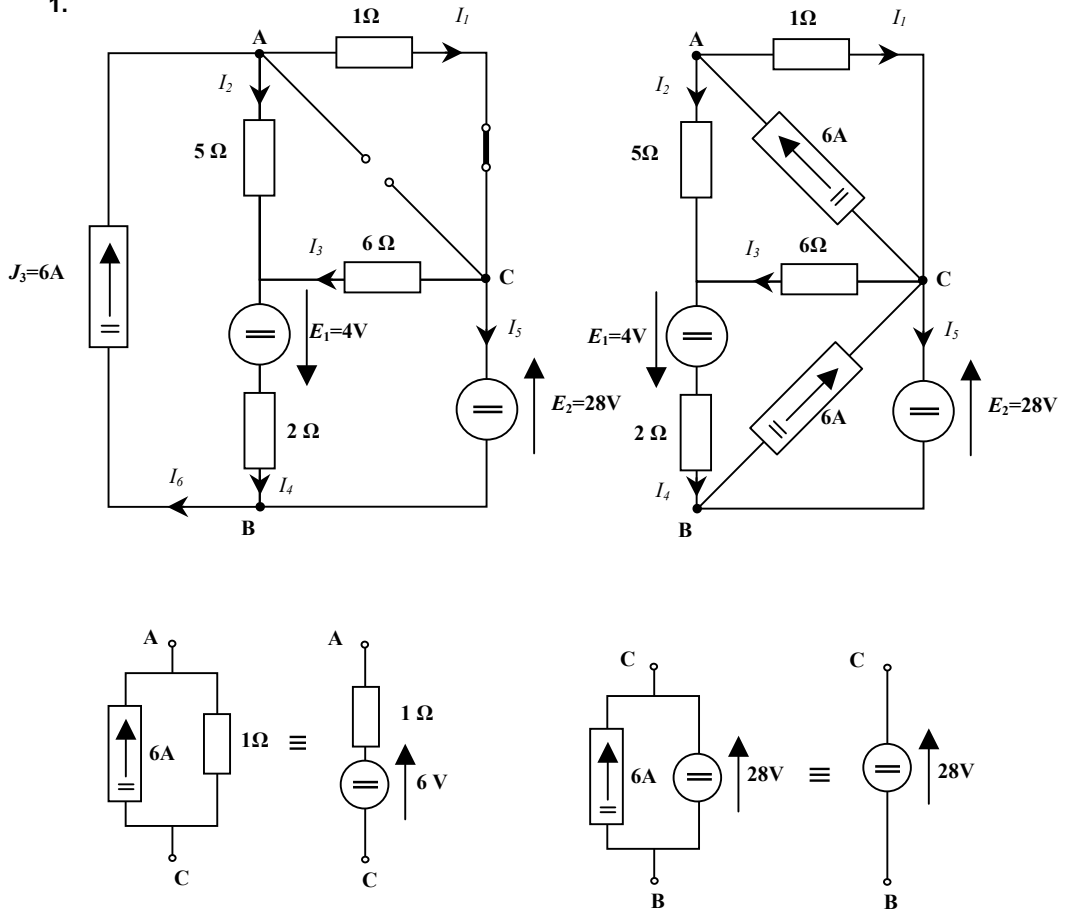
Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

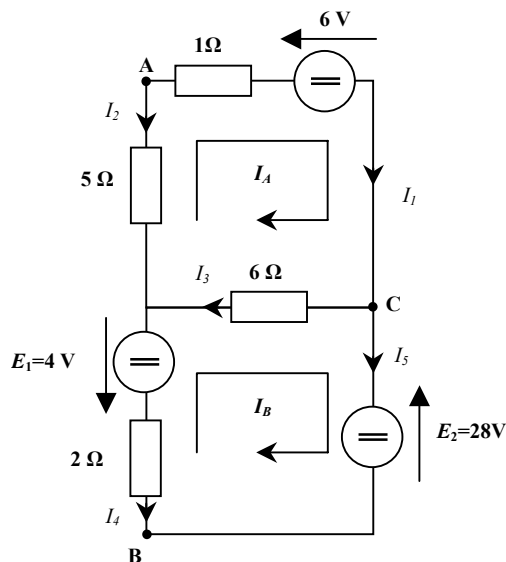
1. Adar bakoitzeko korrontea.
2. Erresistentzia bakoitzeko tentsio-erorketa.

Ebazpena

Adar guztietako korronteak eskatzen dituztenez, sareen metodoa aplikatuko dugu. Korrante-iturri ideala tentsio-iturri bihurtu beharko dugu, eta, horretarako, lehenik eta behin, zirkuituaren geometria eraldatu beharko dugu.

1.





$$\begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 - 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -32 \end{bmatrix}$$

$$I_A = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ -32 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}} = -4 \text{ A} \quad I_B = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & -32 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}} = -7 \text{ A}$$

Zirkuituaren geometria eraldatzerakoan aldatu ez diren adarretako korrontek ebazpenean lortu direnekin kalkula ditzakegu. Eraldatu diren adarretako korrontek ezagutu ahal izateko, aldiz, atzera desegin beharko ditugu aldaketak eta, Kirchhoffen legeak erabiliz, ondorioztatu hasierako zirkuituan.

Aldatu ez ditugun adarretako korrontek:

$$I_2 = -I_A = 4 \text{ A}$$

$$I_4 = -I_B = 7 \text{ A}$$

$$I_3 = I_A - I_B = -4 + 7 = 3 \text{ A}$$

Beste korrontek, hasierako zirkuituan kalkulatuko ditugu (ikus beheko marrazkia):

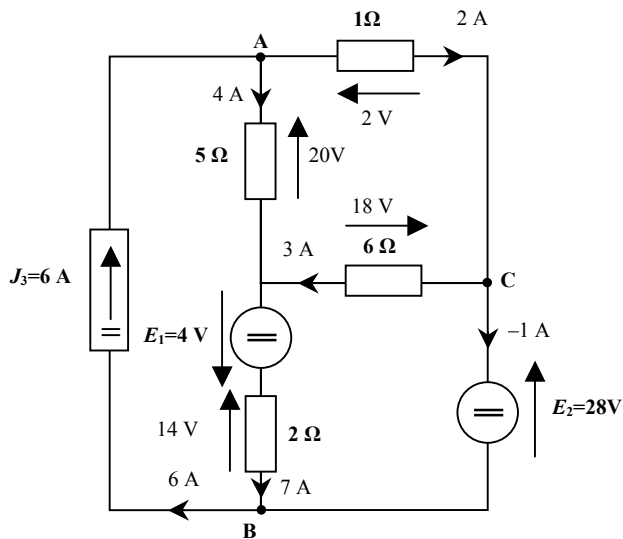
$$I_6 = J_3 = 6 \text{ A}$$

A korapiloan, Kirchhoffen lehenengo legea: $I_1 = -I_2 + 6 = -4 + 6 = 2 \text{ A}$

B korapiloan, Kirchhoffen lehenengo legea: $I_5 = -I_4 + I_6 = -7 + 6 = -1 \text{ A}$

$I_7 = 0 \text{ A}$ da kondentsadorea duen adarreko korrontea.

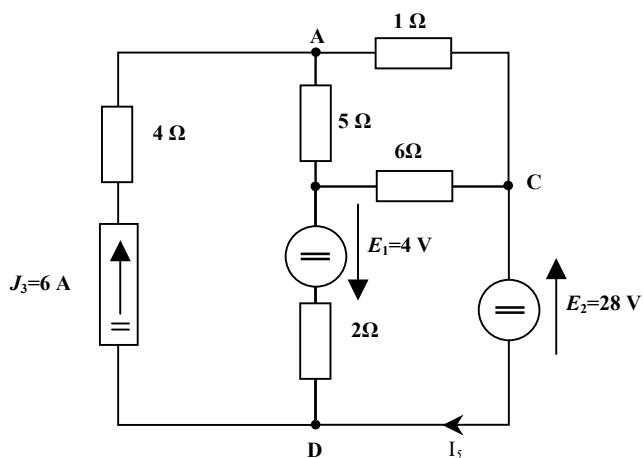
2. Tentsio-erorketak zuzenean ondorioztatzen dira erresistentzietan Ohmen legea aplikatuz:



Ariketa-zenbakia: 2.3

Korapiloen metodoa aplikatuz, kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

1. Adar guztietako korronteak.
2. Korronte-iturriaren borneen arteko tentsioa.

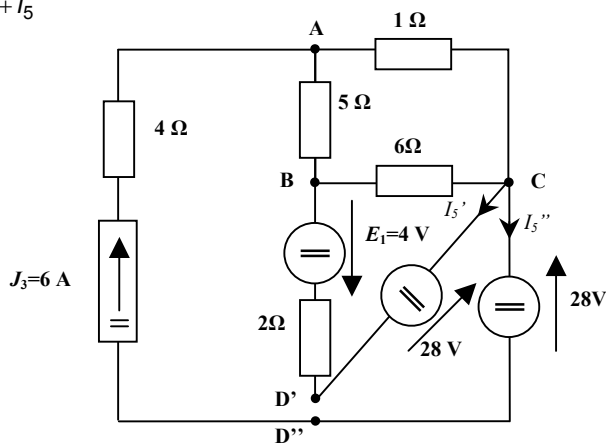


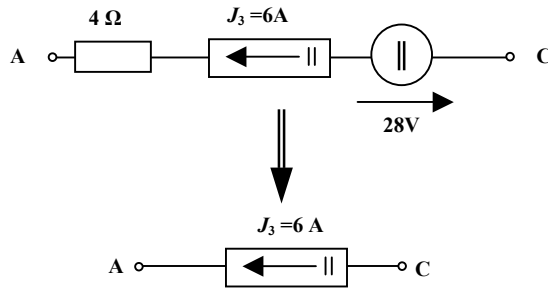
Ebazpena

1. Korapiloen metodoa erabiliz ebatziko dugu; beraz, tentsio-iturriak korrante-iturri bihurtu beharko ditugu. Baina E_2 iturria ideala da, eta eraldatzeko, lehenik eta behin, zirkuituaren geometria eraldatu beharko dugu, D korapiloa eta E_2 tentsio-iturria bikoiztuz.

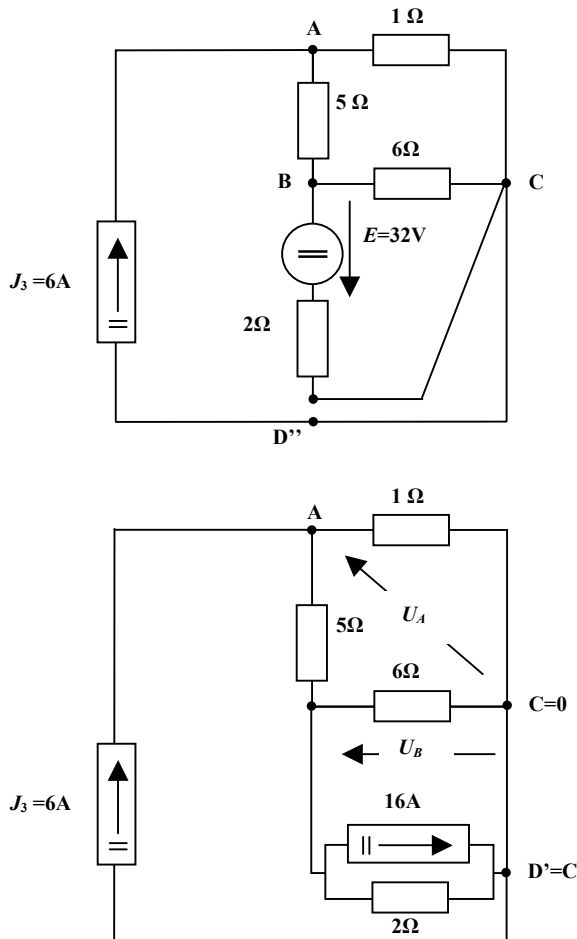
5. adarra bikoizterakoan, korrontearen banaketa izan behar dugu kontuan:

$$I_5 = I_5' + I_5''$$





Tentsio-iturri ideala eta korrante-iturria seriean daudenean, korrante-efektuetarako, tentsio-iturria ken daiteke. Gauza bera gertatuko da adar horretako erresistentziarekin.



$n = 3$ korapilo ditugunez, korapiloen metodoan $n-1 = 2$ tentsio definituko ditugu (U_A eta U_B) eta erreferentzia-korapiloa C izango da.

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -16 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 18 & -3 \\ -3 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ -240 \end{bmatrix}$$

$$U_A = \frac{\begin{vmatrix} 90 & -3 \\ -240 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 18 & -3 \\ -3 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{1.170 - 720}{234 - 9} = \frac{450}{225} = 2 \text{ V}$$

$$U_B = \frac{\begin{vmatrix} 18 & 90 \\ -3 & -240 \end{vmatrix}}{225} = \frac{-4320 + 270}{225} = \frac{-4050}{225} = -18 \text{ V}$$

Geometria eraldatzean aldatu ez ditugun adar bakarrak AC, CB eta AB dira. Beraz, ebazpenean lortutako emaitza zuzenean aplika dezakegu adar hauetan. Besteen tentsio eta korronteak lortzeko, aldaketak desegin beharko ditugu:

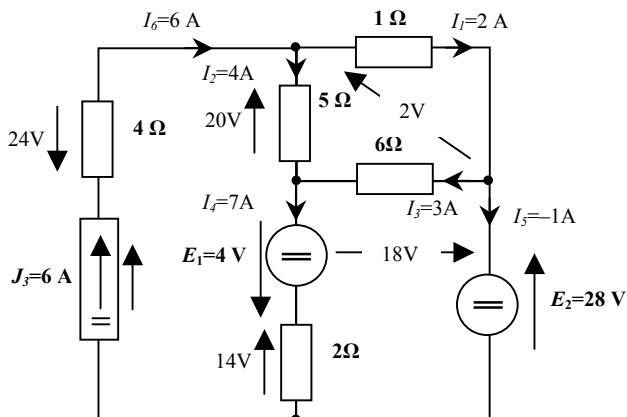
$$I_1 = \frac{U_A}{1} = 2 \text{ A} \quad I_1 = 2 \text{ A}; \quad I_3 = \frac{-U_B}{6} = 3 \text{ A} \quad I_3 = 3 \text{ A}$$

$I_6 = 6 \text{ A}$. Korronte-iturriaren korrontea, hain zuzen ere.

A korapiloan Kirchhoffen lehenengo legea aplikatuz: $I_2 = I_6 - I_1 = 6 - 2 = 4 \text{ A}$

B korapiloan Kirchhoffen lehenengo legea aplikatuz: $I_4 = I_2 + I_3 = 4 + 3 = 7 \text{ A}$

C korapiloan Kirchhoffen lehenengo legea aplikatuz: $I_5 = I_1 - I_3 = 2 - 3 = -1 \text{ A}$



2. Korrante-iturriaren borneen arteko tentsioa:

Korrante-iturriaren sarean Kirchhoffen 2. legea aplikatuz:

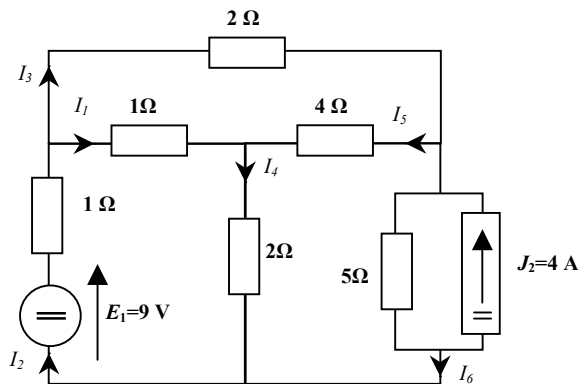
$$U - 24 - 20 + 4 - 14 = 0$$

$$U = 54V$$

Sorgailu gisa egiten du lan, tentsioa eta korrontea noranzko berean daudelako.

Ariketa-zenbakia: 2.4

Zehaztu elikatze-iturrien errendimendua irudiko zirkuituan.



Ebazpena

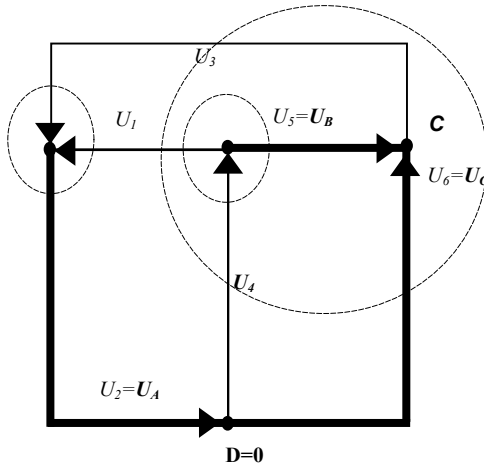
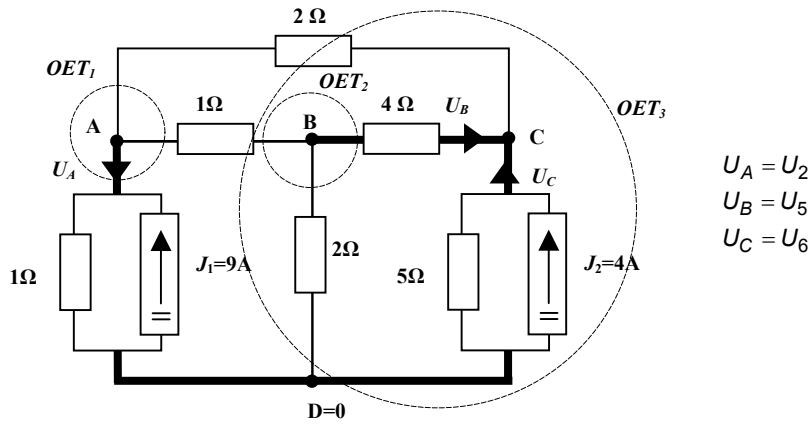
Iturrien errendimendua zehazteko, iturrien korrante eta tentsioak ezagutu behar ditugu. Oinarrizko eraztunen metodoa aplikatuko bagenu, iturrietako adarrak kozuhaitzekotzat hartuz, adar horien korronteak lortuko genituzke sistemaren ebazpenean.

Guk oinarrizko ebakidura taldeen (OET) metodoa erabiliko dugu. Iturrietako adarrak zuhaitzeko adartzat hartzen baditugu, sistemaren ebazpenean adar horietako tentsioak lortuko ditugu.

Metodo nodala denez, ezin dira tentsio-iturriak agertu; beraz, tentsio-iturria korrante-iturri bihurtuko dugu.

OET kopurua = $n-1 = 4-1 = 3$; eta hori bat dator zuhaitzaren adar kopuruarekin.

Aukeraturako zuhaitzarekiko definitu ditugu oinarritzko hiru ebakidura taldeak. OETetako tentsioak adarretako tentsioen noranzko berean hartuz gero, OETetako tentsioak eta adarretakoak berdinak izango dira.



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 1 + 1 & -1 & 1 + \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} & -\left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ 1 + \frac{1}{2} & -\left(1 + \frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2,5 & -1 & 1,5 \\ -1 & 1,75 & -1,5 \\ 1,5 & -1,5 & 2,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$|\Delta Y| = \begin{vmatrix} 2,5 & -1 & 1,5 \\ -1 & 1,75 & -1,5 \\ 1,5 & -1,5 & 2,2 \end{vmatrix} = 2,3625 \text{ S}$$

$$U_A = \frac{\begin{vmatrix} -9 & -1 & 1,5 \\ 0 & 1,75 & -1,5 \\ 4 & -1,5 & 2,2 \end{vmatrix}}{2,3625} = \frac{-18,9}{2,3625} = -8 \text{ V}$$

$$U_B = \frac{\begin{vmatrix} 2,5 & -9 & 1,5 \\ -1 & 0 & -1,5 \\ 1,5 & 4 & 2,2 \end{vmatrix}}{2,3625} = \frac{9,45}{2,3625} = 4 \text{ V}$$

$$U_C = \frac{\begin{vmatrix} 2,5 & -1 & -9 \\ -1 & 1,75 & 0 \\ 1,5 & -1,5 & 4 \end{vmatrix}}{2,3625} = \frac{23,625}{2,3625} = 10 \text{ V}$$

$$U_1 = U_B - U_A - U_C = 4 + 8 - 10 = 2 \text{ V}$$

$$U_2 = U_A = -8 \text{ V}$$

$$U_3 = -U_C - U_A = -10 + 8 = -2 \text{ V}$$

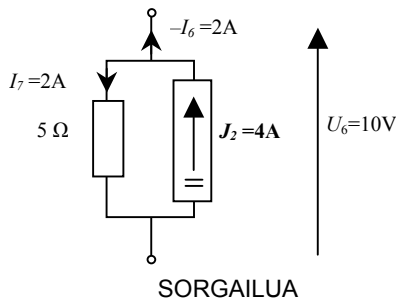
$$U_4 = -U_B + U_C = -4 + 10 = 6 \text{ V}$$

$$U_5 = U_B = 4 \text{ V}$$

$$U_6 = U_C = 10 \text{ V}$$

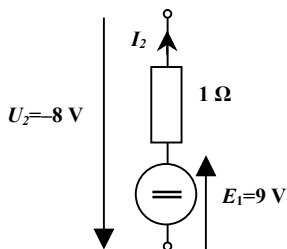
1. Iturrien errendimendua.

Korronte-iturria.



$$\eta = \frac{P_{\text{erabilgarria}}}{P_{\text{totala}}} = \frac{P_{\text{sortua}} - P_{\text{galerak}}}{P_{\text{sortua}}} = \frac{10 \cdot 4 - 10^2/5}{10 \cdot 4} = 0,5 = \%50$$

Tentsio-iturria. Errendimendua kalkulatzeko, aldaketa desegin behar da; izan ere, jatorrizko tentsio-iturriak eta eraldatutako korronte-iturriak errendimendu ezberdina izango dute.



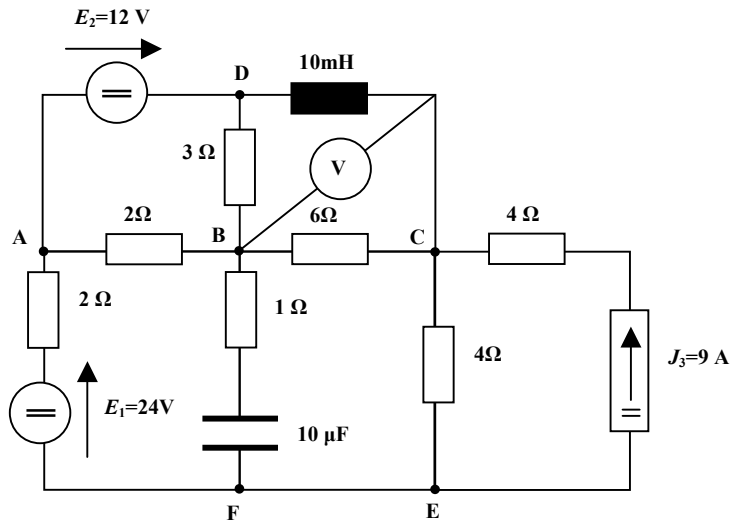
$$9 - I_2 \cdot 1 + (-8) = 0$$

$$I_2 = 1 \text{ A}$$

SORGAILUA

$$\eta = \frac{P_{\text{erabilgarria}}}{P_{\text{totala}}} = \frac{P_{\text{sortua}} - P_{\text{galerak}}}{P_{\text{sortua}}} = \frac{9 \cdot 1 - 1 \cdot 1^2}{9 \cdot 1} = 0,88 = \%88$$

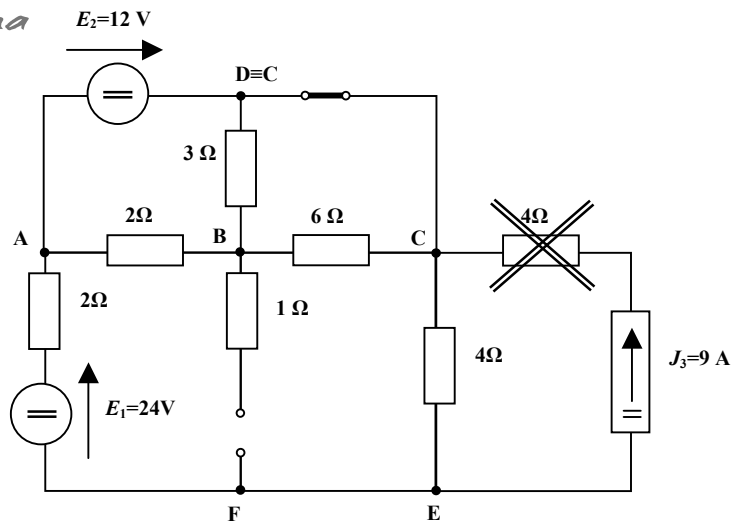
Ariketa-zenbakia: 2.5



Irudiko zirkuituan, zehaztu:

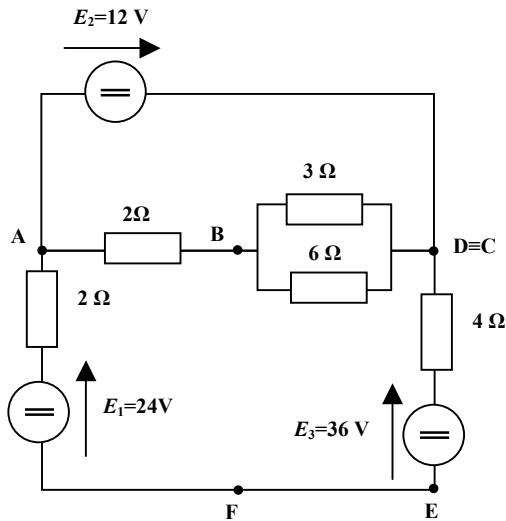
1. J_3 iturriaren borneen arteko tentsioa.
2. Harilari eta kondentsadoreari lotutako energia.
3. Voltmetroaren neurketa.

Ebazpena



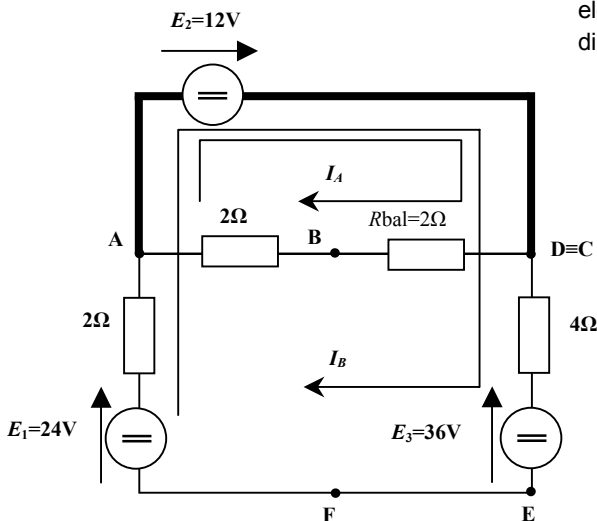
10 mH-ko harilak zirkuitulabur gisa jokatzen du, eta, ondorioz, D korapiloa C-ren potentzial berean geldituko zaigu. Hala, $3\ \Omega$ eta $6\ \Omega$ -eko erresistentziak paraleloan daude, eta erresistentzia baliokideaz ordezkatuko ditugu. Bestetik, korrante-iturriarekiko seriean dagoen $4\ \Omega$ -eko erresistentzia kenduko dugu ebazteko; iturriarekiko paraleloan geratuko zaigu $4\ \Omega$ -eko erresistentziarekin batera, eta tentsio-iturri baliokideaz ordezkatuko dugu. Gainera, F eta B korapiloen arteko adarra kenduko dugu, kondentsadoreak zirkuitu ireki bat eragingo duelako.

Horrenbestez, zirkuitu hau ebatzi beharko dugu:



Metodo zirkular baten bidez ebatziko dugu: edo sareen metodoaren bidez edo oinarritzko eraztunen metodoaren bidez. Oinarritzko eraztunen metodoa erabiliz gero, eta zuhaitza behar bezala aukeratu gero, koefizienteen matrize diagonal lortuko dugu. Eta sistema oso erraz ebatziko dugu:

Zuhaitza AD adarra izango da; zuhaitz horren adarraren elementuak diagonal nagusitik kanpokoak edo elkarbanatuak izango dira koefizienteen matrizean. Adarrean elementu erresistiborik ez dagoenez, elementu horiek nuluak izango dira.



$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$6 \cdot I_A = 0 \rightarrow I_A = 0\text{ A}$$

$$4 \cdot I_B = 12 \rightarrow I_B = 3\text{ A}$$

Lortu ditugun korronteen bidez, eraldatu gabeko adarren korronteak finkatuko ditugu. Besteenak lortzeko, eraldaketak desegin beharko ditugu.

$$I_3 = I_B = 3 \text{ A}$$

$$I_4 = I_A = 0 \text{ A}$$

$$I_6 = I_3 - I_4 = 3 - 0 = 3 \text{ A}$$

$$U_{CB} = I_B \cdot R_{bal} = 3 \cdot 2 = 6 \text{ V}$$

$$I_8 = \frac{U_{CB}}{6} = \frac{6}{6} = 1 \text{ A} \quad \text{eta} \quad I_9 = \frac{U_{CB}}{3} = 2 \text{ A}$$

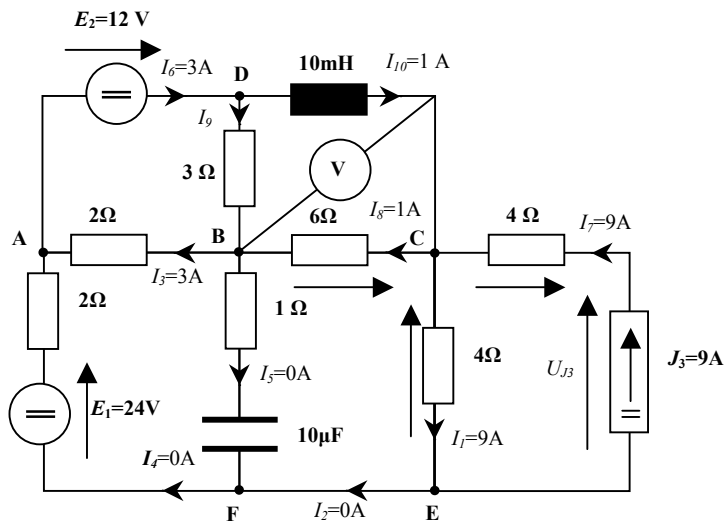
$$I_5 = 0 \text{ A} \quad (\text{kondentsadoreagatik})$$

$$I_7 = J_3 = 9 \text{ A} \quad \text{korrante-iturriaren adarra.}$$

$$I_{10} = I_6 - I_9 = 3 - 2 = 1 \text{ A}$$

$$I_1 = I_{10} + I_7 - I_8 = 1 + 9 - 1 = 9 \text{ A}$$

$$I_2 = I_1 - I_7 = 9 - 9 = 0 \text{ A}$$



1. Korrante-iturriaren leihoan Kirchhoffen 2. legea aplikatuz:

$$U_{J3} = 4 \cdot I_1 + 4 \cdot I_7 = 4 \cdot 9 + 4 \cdot 9 = 72 \text{ V}$$

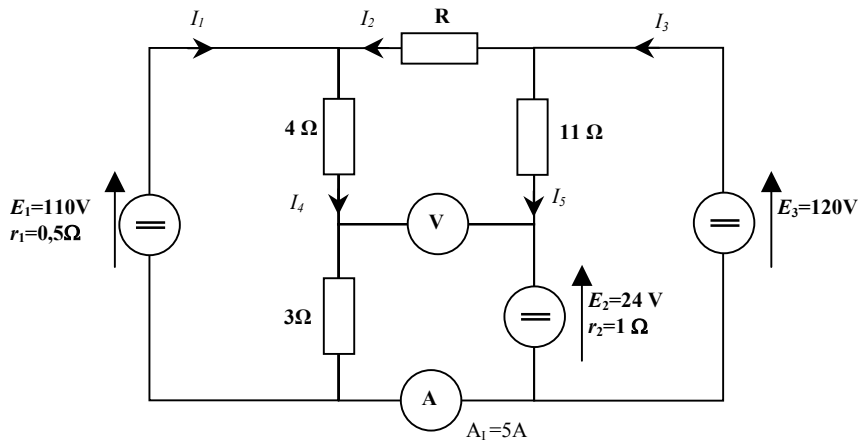
2. Harilari lotutako energia: $W_L = \frac{1}{2} L \cdot I_{10}^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 1^2 = 5 \text{ mJ}$

Kondentsadoreari lotutako energia: $U_C = U_{BF} = U_{CE} - U_{CB} = 36 - 6 = 30 \text{ V}$

$$W_C = \frac{1}{2} C \cdot U_{BF}^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 30^2 = 4,5 \text{ mJ}$$

3. Voltmetroaren irakurketa: $V_1 = U_{CB} = 6 \text{ V}$

Ariketa-zenbakia: 2.6

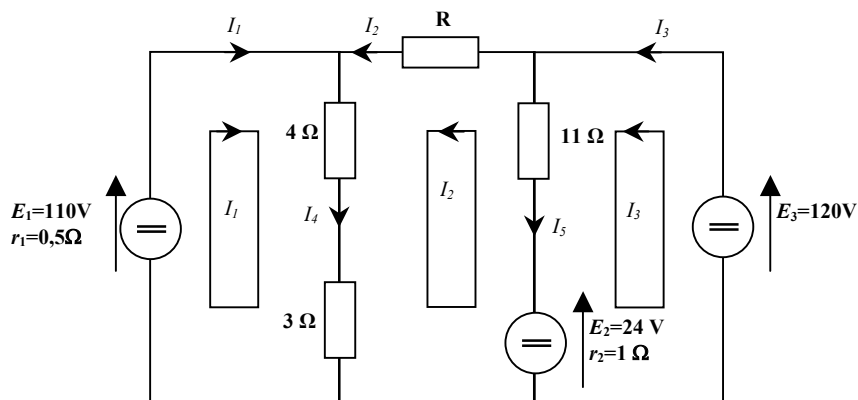


Irudiko zirkuiturako:

1. Zehaztu zer balio izan behar duen R -k, amperemetroaren irakurketa 5A izan dadin.
2. R -ren balio horrentzat, kalkulatu:
 - 2.1. E_1 , E_2 eta E_3 iturrien jokabideak, eta errendimenduak.
 - 2.2. Voltmetroaren neurketa.

Ebazpena

1. Zirkuitua irudikatuko dugu, neurketa-tresnak kenduta.



$$\begin{bmatrix} 7,5 & 7 & 0 \\ 7 & 19+R & -12 \\ 0 & -12 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 24 \\ 120-24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 24 \\ 96 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \pm 5 = \frac{\begin{vmatrix} 7,5 & 110 & 0 \\ 7 & 24 & -12 \\ 0 & 96 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7,5 & 7 & 0 \\ 7 & 19+R & -12 \\ 0 & -12 & 12 \end{vmatrix}} = \frac{2.160 - 9.240 + 8.640}{1.710 + 90R - 588 - 1.080};$$

$$\frac{1.560}{90R + 42} = \pm 5$$

Bostaren zeinu bikoitzak bi aukera ematen ditu:

Korrontea -5 A bada: $1.560 = -450R - 210 \rightarrow R = \frac{1.770}{-450} = -3,9 \Omega$ Ezin da negatiboa izan.

Korrontea +5 A bada: $1.560 = 450R + 210 \rightarrow R = \frac{1.350}{450} = 3 \Omega$ Bai, hau da, emaitza.

Beraz, $R = 3 \Omega$; eta korrontearen noranzkoa bat dator $I_2 = 5 \text{ A}$ sarekoarekin.

Gainerako korranteak sistema matritzaleko 1. errenkada eta 3. errenkada garatuz lortuko ditugu, $I_2 = 5\text{ A}$ dela jakinda.

2. 2.1. 1. errenkada:

$$7,5 \cdot I_1 + 7 \cdot 5 = 110 \rightarrow I_1 = \frac{110 - 7 \cdot 5}{7,5} = 10\text{ A}$$

E_1 iturriak sorgailu gisa egingo du lan, korrantea eta tentsioa noranzko berekoak baitira.

$$\eta_1 = \frac{U_1}{E_1} = \frac{110 - 0,5 \cdot 10}{110} = 0,909 \approx \% 91$$

3. errenkada:

$$-12 \cdot 5 + 12 \cdot I_3 = 96\text{ A} \rightarrow I_3 = \frac{96 + 60}{12} = 13\text{ A}$$

E_3 iturriak ere sorgailu gisa egingo du lan, korrantea eta tentsioa noranzko berekoak direlako kasu honetan ere, $\eta_3 = 1 = \% 100$ iturria ideala baita.

$$I_4 = I_1 + I_2 = 10 + 5 = 15\text{ A}$$

$$I_5 = I_3 - I_2 = 13 - 5 = 8\text{ A}$$

E_2 iturriak, berriz, hargailu gisa egingo du lan, korranteak eta tentsioak aurkako noranzkoa baitute.

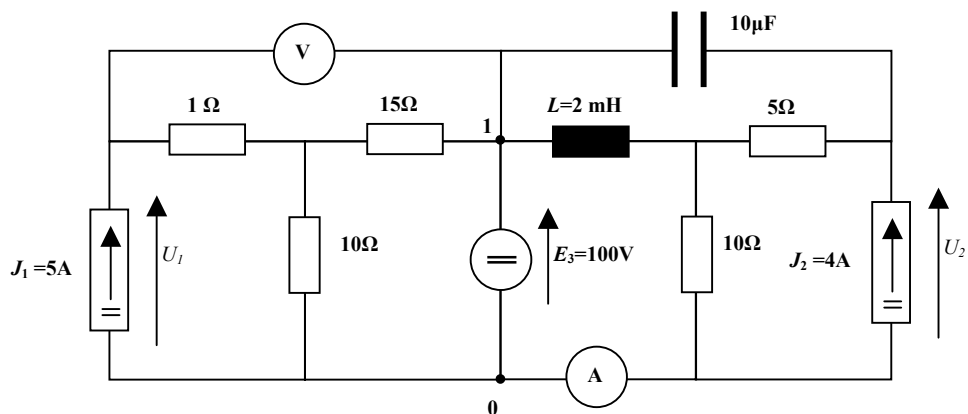
$$\eta_2 = \frac{E_2}{U_2} = \frac{24}{24 + 1 \cdot 8} = \frac{24}{32} = 0,75 = \% 75$$

2.2. Voltmetroaren neurketa:

$$U_V = U_4 + U_2 - U_5 = 4 \cdot 15 + 3 \cdot 5 - 8 \cdot 11 = -13\text{ V}$$

$$V_I = U_V = 13\text{ V}$$

Ariketa-zenbakia: 2.7

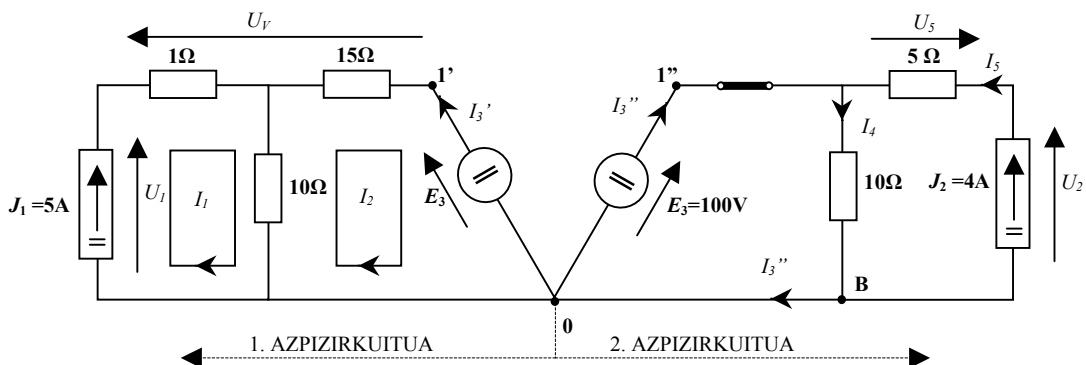


Irudiko zirkuituan, kalkulatu:

1. U_1 eta U_2 tentsioak.
2. Voltmetro eta amperemetroaren neurketak.
3. Harilari eta kondentsadoreari lotutako energiak.
4. Kalkulatu E_3 iturriaren potentzia, eta adierazi sorgailu edo hargailu gisa ari den.

Ebazpena

1. Zirkuituaren geometria eraldatuko dugu, tentsio-iturri idealaren transformaziorako.



1. AZPIZIRKUITUA

$$\begin{bmatrix} 1+10 & -10 \\ -10 & 10+15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ -100 \end{bmatrix} \quad \text{edo} \quad \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ -100 \end{bmatrix}$$

$$2. \text{ errenkada : } -10 \cdot 5 + 25 \cdot I_2 = -100 \quad \rightarrow \quad I_2 = \frac{-100 + 10 \cdot 5}{25} = -2 \text{ A}$$

$$1. \text{ errenkada : } 11 \cdot 5 - 10 \cdot (-2) = U_1 \quad \rightarrow \quad U_1 = 55 + 20 = 75 \text{ V}$$

2. AZPIZIRKUITUA

$$I_4 = \frac{E_3}{10} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A}$$

$$U_2 = U_5 + E_3 = 5 \cdot J_2 + 100 = 5 \cdot 4 + 100 = 120 \text{ V}$$

2. Voltmetroaren irakurketa:

$$U_V - U_1 + E_3 = 0$$

$$U_V = U_1 - E_3 = 75 - 100 = -25 \text{ V}$$

$$V_I = U_V = 25 \text{ V}$$

Amperemetroaren irakurketa:

$$K1L \text{ B korapiloan: } I_3' = I_4 - J_2 = 10 - 4 = 6 \text{ A}$$

$$A_I = I_3' = 6 \text{ A}$$

$$3. \text{ Harilari lotutako energia: } W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot (I_3')^2 = \frac{1}{2} \cdot 210^{-3} \cdot 6^2 = 36 \text{ mJ}$$

$$\text{Kondentsadoreari lotutako energia: } W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_C^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1010^{-6} \cdot 20^2 = 2 \text{ mJ}$$

4.

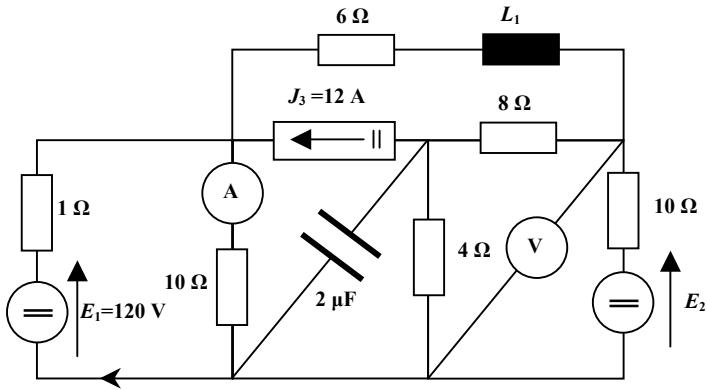
$$I_3' = -I_2 = 2 \text{ A}$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 2 + 6 = 8 \text{ A}$$

SORGAILUA da, tentsioak eta korranteak noranzko bera dutelako.

$$P_{E3} = E_3 \cdot I_3 = 100 \cdot 8 = 800 \text{ W}$$

Ariketa-zenbakia: 2.8

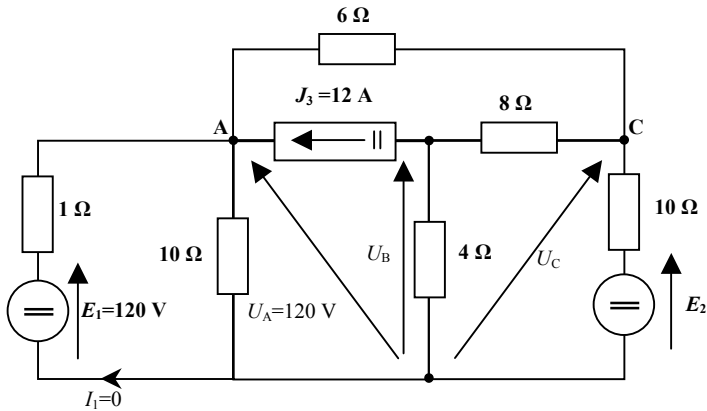


Irudiko zirkuituan, zehaztu:

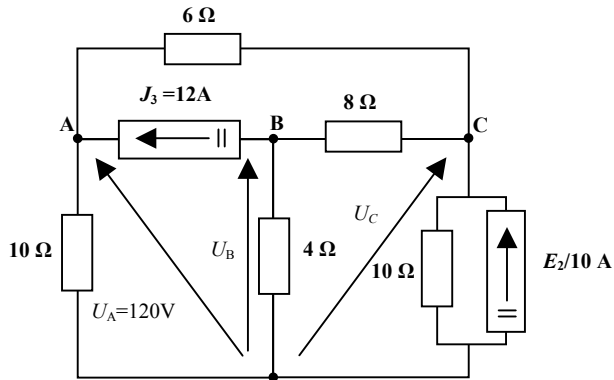
1. E_2 iturriaren balioa, E_1 -ek garatutako potentzia nulua izan dadin.
2. Tresnen neurketak.
3. J_3 iturriaren borneen arteko tentsioa.
4. Korronteak zirkuituko adar guztietan zehar.
5. Harilari eta kondentsadoreari lotutako energia.

Ebazpena

1. E_1 iturriak potentziarik garatzen ez badu, iturrian zeharreko korrantea nulua da. Beraz, iturriaren adarreko tentsioa E_1 izango da, baita harekiko paraleloan dagoen adarrarena ere.



U_A tentsioa ezagutzen dugunez, korapiloen metodoaren bidez ebatziko dugu, 0 korapiloa erreferentzia-korapilo gisa hartuz. Sistema planteatu baino lehen, E_2 iturria korrante-iturri bihurtu beharko dugu.



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{10} + \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} + \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ -12 \\ \frac{E_2}{10} \end{bmatrix}$$

$$\Delta Y = |Y| = \begin{vmatrix} \frac{1}{10} + \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} + \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{8}{30} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{8} & \frac{94}{240} \end{vmatrix} = \frac{177}{7.200}$$

$$U_A = 120 \text{ V} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 0 & -\frac{1}{6} \\ -12 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{E_2}{10} & -\frac{1}{8} & \frac{94}{240} \end{vmatrix}}{\frac{177}{7.200}} = \frac{5(2.544 + 12E_2)}{236}; \Rightarrow E_2 = 260 \text{ V}$$

$$U_B = \frac{\begin{vmatrix} \frac{8}{30} & 12 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -12 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} & 26 & \frac{94}{240} \end{vmatrix}}{\frac{177}{7.200}} = 8 \text{ V} \quad \text{eta} \quad U_C = \frac{\begin{vmatrix} \frac{8}{30} & 0 & 12 \\ 0 & \frac{3}{8} & -12 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{8} & 26 \end{vmatrix}}{\frac{177}{7200}} = 120 \text{ V}$$

2. $A_I = \frac{U_A}{10} = 12 \text{ A}$

$$V_I = U_C = 120 \text{ V}$$

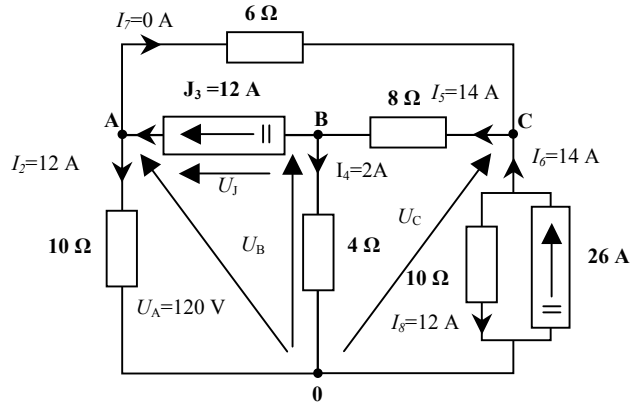
3. Korrante-iturriaren borneen arteko tentsioa:

$$U_A - U_J - U_B = 0$$

$$U_J = 120 - 8 = 112 \text{ V}$$

Sorgailua da. Eta potentzia hau garatzen du: $P_{J_3} = J_3 \cdot U_J = 12 \cdot 112 = 1.344 \text{ W}$

4. Adarretako korronteak.



5. Harilari lotutako energia:

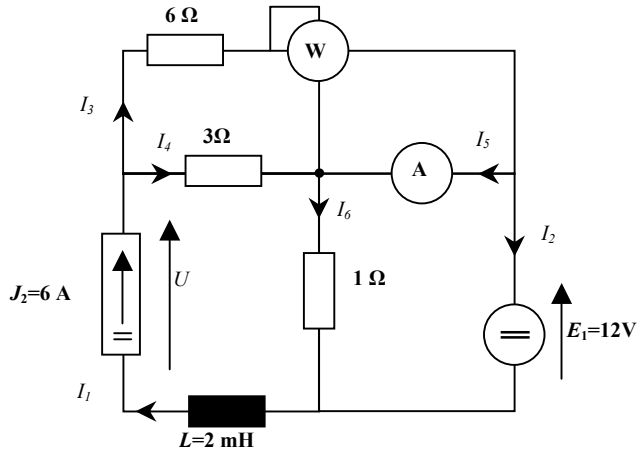
$$W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_7^2 = 0 \text{ J}$$

$$U_A - U_C = 120 - 120 = 0 \text{ V}; \quad I_7 = \frac{0}{6} = 0 \text{ A}$$

Kondentsadoreari lotutako energia:

$$W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_B^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 8^2 = 64 \cdot 10^{-6} \text{ J} = 64 \mu\text{J}$$

Ariketa-zenbakia: 2.9

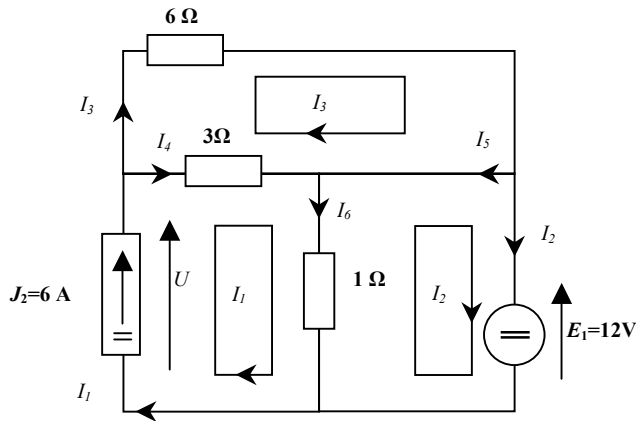


Irudiko zirkuituan, zehaztu:

1. Tresnen neurketak.
2. Wattmetroak neurtzen al du $6\ \Omega$ -eko erresistentzian galdutako potentzia? Hala ez bada, azaldu zergatia.
3. Aztertu iturrien jokabidea, eta kalkulatu sortutako edo galdutako potentziaren balioa.

Ebazpena

Ordezkapenaren araua aplikatuko dugu: 6 A-k zeharkatzen duten U tentsioko tentsio-iturri batez ordezkatuko dugu korrante-iturria. Hala, iturri guztiak tentsio-iturriak izango dira, eta sareen metodoaren bidez ebatzi ahal izango dugu.



$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \Delta R = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 18$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} U & -1 & -3 \\ -12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}}{18} = \frac{9U - 108}{18} = 6 \text{ A}; \Rightarrow U = 24 \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 24 & -3 \\ -1 & -12 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{vmatrix}}{18} = \frac{-108}{18} = -6 \text{ A} \quad I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 24 \\ -1 & 1 & -12 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{18} = \frac{36}{18} = 2 \text{ A}$$

$$I_4 = I_1 - I_3 = 6 - 2 = 4 \text{ A}$$

$$I_5 = I_3 - I_2 = 2 + 6 = 8 \text{ A}$$

$$I_6 = I_1 - I_2 = 6 + 6 = 12 \text{ A}$$

Hala ere, mota honetako sistema matritzial baten ebazpena ezin da ordenagailuz egin; ebazteko modukoa izan dadin, honela ordenatu beharra dago:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ -12+6 \\ 0+18 \end{bmatrix}$$

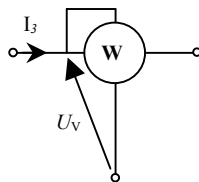
Eta hori Gaussen bidez ebatziz:

$$I_3 = \frac{18}{9} = 2 \text{ A}; \quad I_2 = \frac{-6}{1} = -6 \text{ A}; \quad U = 24 + 6 - 6 = 24 \text{ V}$$

1. $W_I = I_3 \cdot U_V = 2 \cdot 0 = 0 \text{ W}$

$$U_V = 3 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = 0 \text{ V}$$

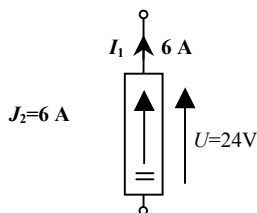
$$A_I = I_5 = 8 \text{ A}$$



2. $P_{R_{6\Omega}} = R \cdot I_3^2 = 6 \cdot 4 = 24 \text{ W}$

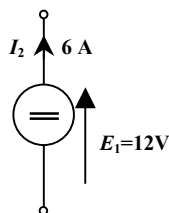
Wattmetroak ez du 6 ohm-eko erresistentziak xurgatutako potentzia neurtzen, wattmetroaren borne voltmetrikoen artean ez dagoelako R -ren borneen artean jausten den tentsio bera.

3. Iturrien jokabidea:



SORGAILUA

$$P_{J_2} = 24 \cdot 6 = 144 \text{ W}$$

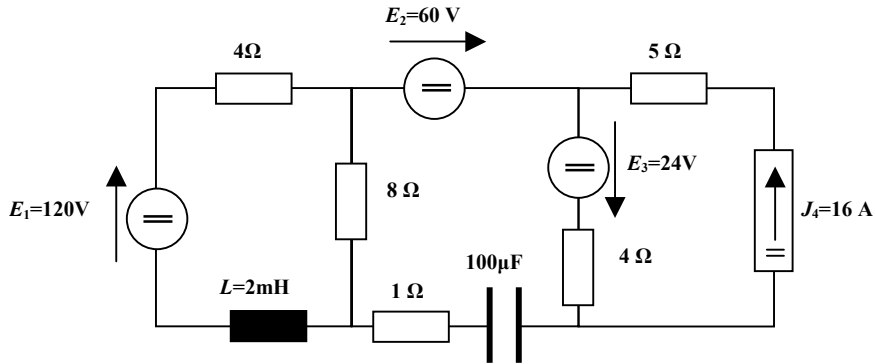


SORGAILUA

$$P_{E_1} = 12 \cdot 6 = 72 \text{ W}$$

Bi kasuetan sorgailuak dira, tentsioa eta korrontea noranzko berean daudelako.

Ariketa-zenbakia: 2.10

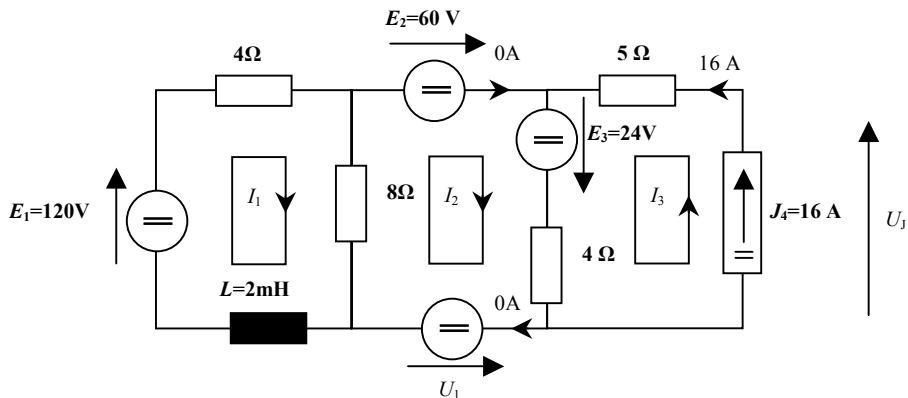


Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

1. E_1 , E_2 eta J_3 iturrien jokabidea, baita xurgatutako edo sortutako potentziaren balioa ere.
2. Harilari eta kondentsadoreari loturiko energia.

Ebazpena

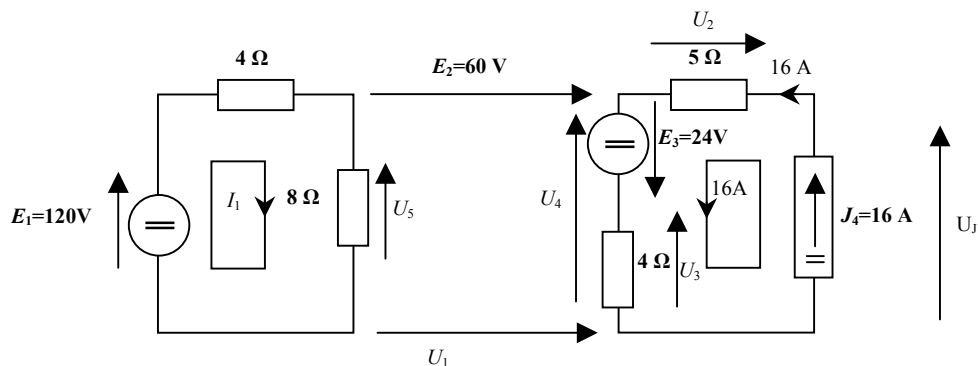
Sareen bidez ebazteko, ordezkapenaren legea aplikatuko dugu kondentsadorearen adarrean eta korronte-iturrian. Biak tentsio-iturriez ordezkatzeko ditugu.



$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 0 \\ -8 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 60 + 24 - U_1 \\ U_J + 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 84 - U_1 \\ U_J + 24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 12 \cdot I_1 - 8 \cdot 0 + 0 \cdot 16 &= 120 \rightarrow I_1 = 10 \text{ A} \\
 -8 \cdot 10 + 12 \cdot 0 + 4 \cdot 16 &= 84 - U_1 \rightarrow U_1 = 100 \text{ V} \\
 0 \cdot I_1 + 0 \cdot 4 + 9 \cdot 16 &= U_J + 24 \rightarrow U_J = 120 \text{ V}
 \end{aligned}$$

Beste era honetara ere egin daiteke:

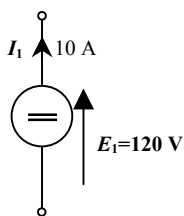


$$I_1 = \frac{120}{4+8} = 10 \text{ A}; \quad U_5 = 10 \cdot 8 = 80 \text{ V};$$

$$I_3 = 16 \text{ A}; \quad U_2 = 5 \cdot 16 = 80 \text{ V}; \quad U_3 = 4 \cdot 16 = 64 \text{ V}; \quad U_J = 80 - 24 + 64 = 120 \text{ V};$$

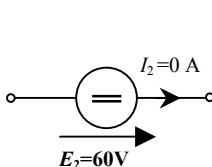
$$U_4 = 64 - 24 = 40 \text{ V}; \quad 80 + 60 - 40 - U_1 = 0 \rightarrow U_1 = 100 \text{ V}$$

1. Iturrien jokabidea:



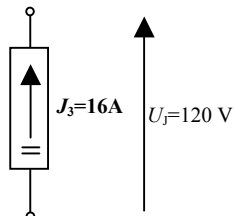
SORGAILUA

$$P_{E1} = 120 \cdot 10 = 1.200 \text{ W}$$



EZ DU LANIK EGITEN

$$P_{E2} = 60 \cdot 0 = 0 \text{ W}$$



SORGAILUA

$$P_{E3} = 120 \cdot 16 = 1.920 \text{ W}$$

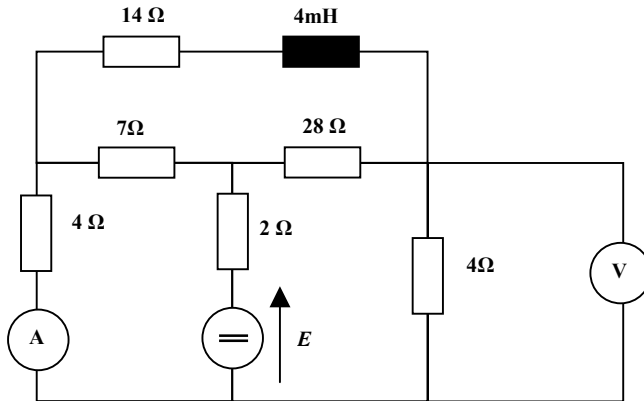
2. Harilari loturiko energia:

$$W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 = 0,1 \text{ J}$$

Kondentsadoreari loturiko energia.

$$W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2 = 0,5 \text{ J}$$

Ariketa-zenbakia: 2.11

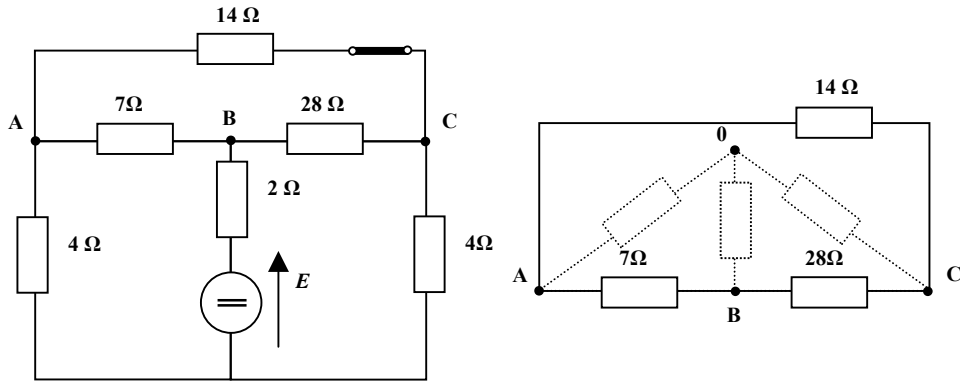


Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

1. Tentsio-iturriaren balioa, E , zirkuituan xurgatutako potentzia 4.410 W izan dadin.
2. Tresnen neurketak
3. Harilean ezarritako fluxuaren balioa.

Ebazpena

1. Harila etengailu itxi batez ordezkatzeko dugu lehenik. Gero, A, B eta C puntuen artean trianguluan dauden hiru erresistentziak beren izar baliokidez ordezkatzeko ditugu. Izar berria aurreko trianguluarekiko baliokidea da energetikoki, eta, horren ondorioz, izarrak eta trianguluak potentzia bera kontsumituko dute.

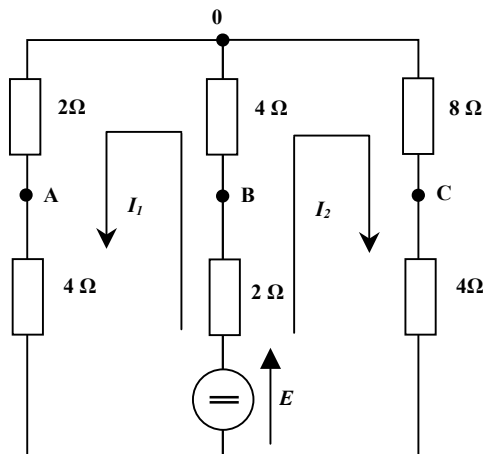


$$R_{A0} = \frac{R_{CA} \cdot R_{AB}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}} = \frac{14 \cdot 7}{14 + 7 + 28} = 2 \Omega$$

$$R_{B0} = \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}} = \frac{7 \cdot 28}{14 + 7 + 28} = 4 \Omega$$

$$R_{C0} = \frac{R_{BC} \cdot R_{CA}}{R_{AC} + R_{AB} + R_{BC}} = \frac{28 \cdot 14}{14 + 7 + 28} = 8 \Omega$$

ABC triangelua izar bihurtutakoan, zirkuituak bi sare izango ditu.



$$\begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ E \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} E & 6 \\ E & 18 \\ 12 & 6 \\ 6 & 18 \end{vmatrix}}{216 - 36} = \frac{18E - 6E}{180} = \frac{12E}{180} = \frac{E}{15} \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & E \\ 6 & E \\ 12 & 6 \\ 6 & 18 \end{vmatrix}}{216 - 36} = \frac{12E - 6E}{180} = \frac{6E}{180} = \frac{E}{30} \text{ A}$$

Erresistentzietan xurgatutako potentzia zirkuituan galdutakoa izango da, harilak ez baitu potentziarik kontsumitzen. Triangelu / izar transformazioak ez du inolako eraginik xurgatutako potentzian, izarra eta triangelua energetikoki baliokideak direlako. Beraz, ondorengo ekuazio hau planteatu daiteke, eta erresistentzietan Joule efektuarengatik 4.410 W-eko potentzia galtzen dela adierazi.

$$I_1^2 \cdot 6 + I_2^2 \cdot 12 + (I_1 + I_2)^2 \cdot 6 = 4.410$$

$$\frac{E^2}{225} \cdot 6 + \frac{E^2}{900} \cdot 12 + 6 \cdot \left(\frac{E}{15} + \frac{E}{30} \right)^2 = 4.410$$

$$\frac{6 \cdot E^2}{225} + \frac{12 \cdot E^2}{900} + \frac{6 \cdot E^2}{100} = 4.410$$

$$E = \pm 210 \text{ V}$$

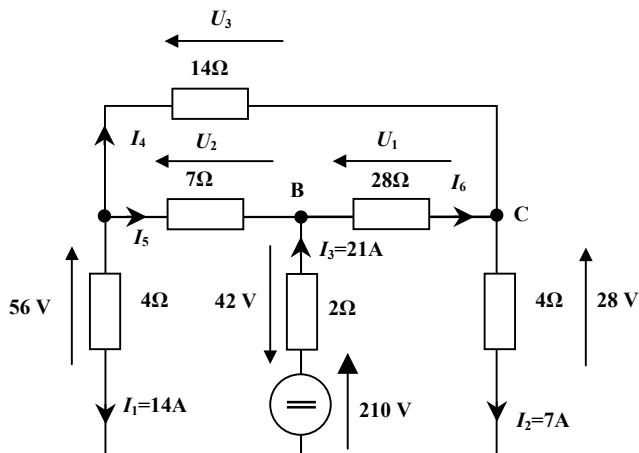
Irudiko geziarekin bat etor dadin, zeinu positiboa hartuko dugu. Gainera, indar elektroeragilearen zeinu bikoitzak adierazten du potentziak ez duela mendekotasunik iturriaren polaritatearekiko.

Beste era batera ere planteatu daiteke. Iturriak emandako potentziak eta zirkuituan kontsumitutakoak berdinak izan behar dute. Beraz, Boucherot-en teoremaren arabera, adierazpen hau ere jar daiteke:

$$P = E \cdot (I_1 + I_2) = 4.410; \quad E \cdot \left(\frac{E}{15} + \frac{E}{30} \right) = 4.410; \quad \frac{E^2}{10} = 4.410; \quad \text{eta ebatziz:}$$

$$E = \sqrt{4.410 \cdot 10} = \pm 210 \text{ V}$$

Adar guztietako korronteak kalkulatuko ditugu jarraian:



$$I_1 = \frac{E}{15} = \frac{210}{15} = 14\text{A}$$

$$I_2 = \frac{E}{30} = \frac{210}{30} = 7\text{A}$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = 14 + 7 = 21\text{A}$$

I_6 korrontearen balioa:

$$U_1 + 28 + 42 - 210 = 0$$

$$U_1 = 140\text{V}$$

$$I_6 = \frac{U_1}{28} = 5\text{A}$$

I_5 korrontearen balioa:

$$U_2 - 56 + 210 - 42 = 0$$

$$U_2 = -112\text{V}$$

$$I_5 = \frac{U_2}{7} = -16\text{A}$$

I_4 korrontearen balioa:

$$U_3 - U_1 - U_2 = 0$$

$$U_3 = 140 - 112 = 28\text{V}$$

$$I_4 = \frac{U_3}{14} = 2\text{A}$$

2. Voltmetroaren irakurketa: $V_1 = 4 \cdot I_2 = 28\text{V}$

Amperemetroaren irakurketa: $A_1 = I_1 = 14\text{A}$

3.

$$W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_4^2 = \frac{1}{2} \cdot \Phi \cdot I_4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 2^2 = 8 \cdot 10^{-3} \text{J}$$

$$\Phi = \frac{W_L \cdot 2}{I_4} = \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{2} = 8 \cdot 10^{-3} \text{Wb}$$

Ariketa borobiltzeko, erresistentziek xurgatutako potentzia zein den konprobatu daiteke:

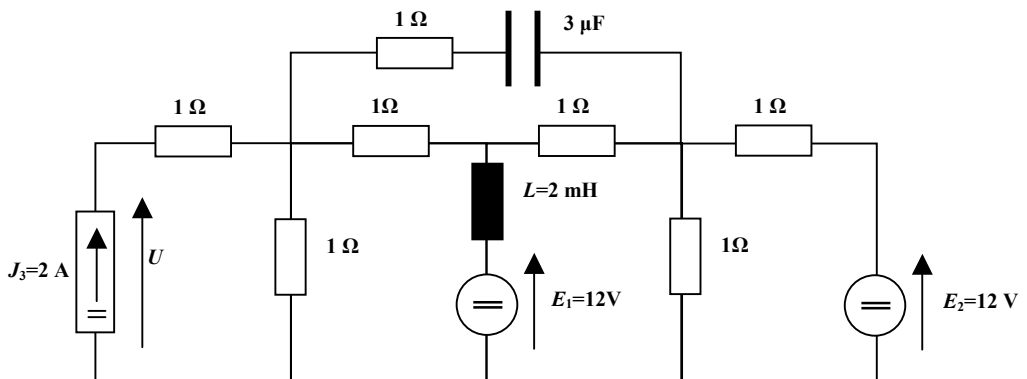
$$P_{4\Omega} = 4 \cdot 14^2 = 784\text{W}; P_{2\Omega} = 2 \cdot 21^2 = 882\text{W};$$

$$P_{4\Omega} = 4 \cdot 7^2 = 196\text{W}; P_{28\Omega} = 28 \cdot 5^2 = 700\text{W}$$

$$P_{7\Omega} = 7 \cdot 16^2 = 1792\text{W}; P_{14\Omega} = 14 \cdot 2^2 = 56\text{W};$$

$$P_G = P_{4\Omega} + P_{2\Omega} + P_{4\Omega} + P_{28\Omega} + P_{7\Omega} + P_{14\Omega} = 4410\text{W}$$

Ariketa-zenbakia: 2.12

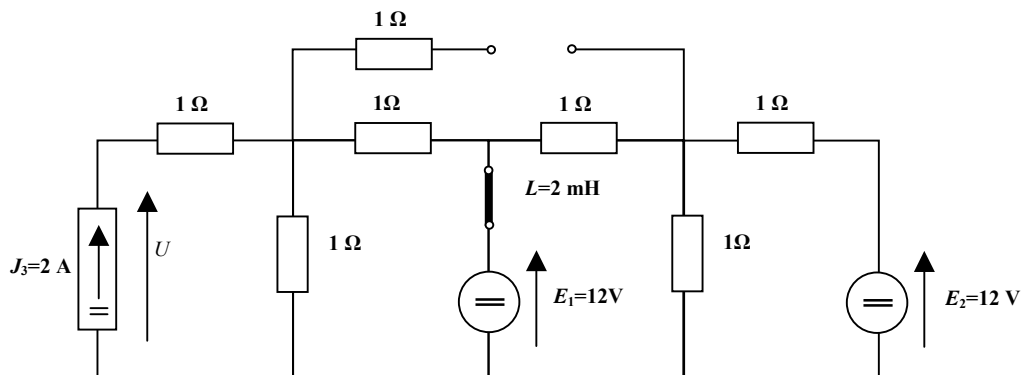


Sareen metodoa erabiliz, zehaztu datu hauek irudiko zirkuituan:

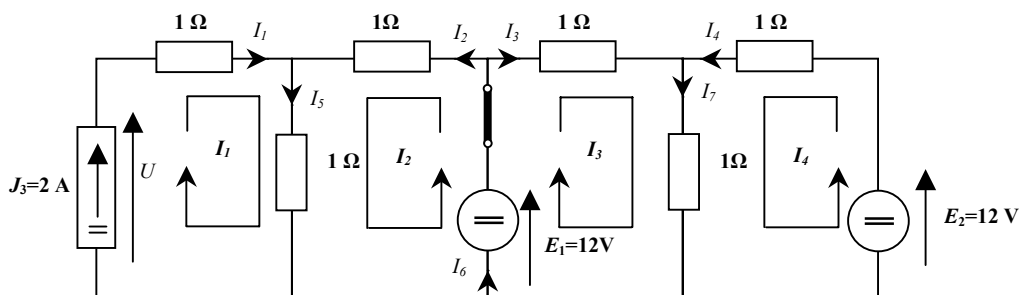
1. J_3 iturriaren borneen arteko tentsioa, eta adar guztietan zeharreko korronteak.
2. Aztertu E_1 eta E_2 iturrien jokabidea. Adierazi sorgailu edo hargailu gisa ari diren, eta kalkulatu xurgatutako edo sortutako potentziaren balioak.

Ebazpena

1. Korrante zuzeneko zirkuitu batean, korronteei dagokienez, harilek zirkuitulabur gisa jotatuko dute eta kondentsadoreek zirkuitu ireki gisa. Beraz, zirkuituak itxura hau hartuko du:



Sareen metodoaren bidez ebazteko, korrante-iturria korrante ezaguneko tentsio-iturria dela kontsideratuko dugu, ordezkapenaren legea zuzenean aplikatuz:



$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 12 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Cramer-en bidez ebatziko dugu planteatutako sistema matriziala. Horretarako, lehenengo eta behin, koefizienteen matrizearen determinantea kalkulatu dugu, lehenengo lerroko adjuntuen bidez garatuz:

$$\Delta Z = |Z| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 9$$

$$J_3 = I_1 = \frac{\begin{vmatrix} U & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 2 & 1 \\ 12 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{9} = - \frac{U \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{9} = \frac{6 \cdot U - 36}{9} = 2A \Rightarrow U = 9V$$

U ezaguna dugunean, haren balioaz ordezkatu dugu ekuazioan, beste ezezagunak kalkulatzeko.

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 2 & 1 \\ 0 & 12 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{9} = - \frac{2 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{9} =$$

$$= \frac{2 \cdot 12 \cdot 3 - 1 \cdot 9 \cdot 3}{9} = \frac{72 - 27}{9} = \frac{45}{9} = 5A$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 2 \end{vmatrix}}{9} = - \frac{2 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 & 1 \\ 0 & 12 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 0 & 12 & 1 \\ 0 & 12 & 2 \end{vmatrix}}{9} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 12 - 1 \cdot 1 \cdot 12}{9} = \frac{36}{9} = 4A$$

$$I_4 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{vmatrix}}{9} = - \frac{2 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix}}{9} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 12 - 1 \cdot 1 \cdot 12}{9} = \frac{3 \cdot 12}{9} = \frac{36}{9} = 4A$$

Ebazteko modua oso luzea da; koefizienteen matrizearen diagonal hertsiki nagusia dela ohartuz gero, Gaussen metodoa aplika daiteke pibotajea erabili beharrik gabe.

Diagonal hertsiki nagusia: $|2| > |1|$; $|2| > |1|$; $|2| > |1|$; $|2| > |1|$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & | & U \\ 1 & 2 & 0 & 0 & | & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 12 \end{bmatrix}$$

$$3. \text{ errenkada} - 0,5 \cdot 4. \text{ errenkada} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & | & U \\ 1 & 2 & 0 & 0 & | & 12 \\ 0 & 0 & 1,5 & 0 & | & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 12 \end{bmatrix} \text{ eta}$$

$$1. \text{ errenkada} - 0,5 \cdot 2. \text{ errenkada} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 & 0 & | & U-6 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & | & 12 \\ 0 & 0 & 1,5 & 0 & | & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 12 \end{bmatrix}$$

Beraz, orain ebatzi beharreko sistemak itxura hau hartuko du:

$$\begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U-6 \\ 12 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

eta horren ebazpena berehalakoa da:

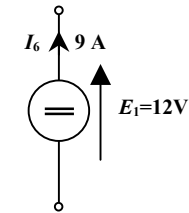
$$\begin{cases} 1,5 \cdot 2 = U - 6 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot I_2 = 12 \\ 1,5 \cdot I_3 = 6 \\ 1 \cdot I_3 + 2 \cdot I_4 = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U = 1,5 \cdot 2 + 6 = 9V \\ I_2 = \frac{12-2}{2} = 5A \\ I_3 = \frac{6}{1,5} = 4A \\ I_4 = \frac{12-I_3}{2} = \frac{12-4}{2} = 4A \end{cases}$$

Sareen korronteen konbinazioz lortutako beste korrontek:

$$I_5 = I_1 + I_2 = 2 + 5 = 7A \quad I_6 = I_2 + I_3 = 5 + 4 = 9A \quad I_7 = I_3 + I_4 = 4 + 4 = 8A$$

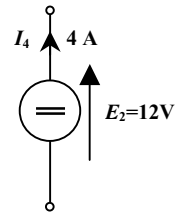
$$\text{Eta } I_{\text{Kondentsadore}} = 0A$$

2. Iturrien jokabidea:



SORGAILUA

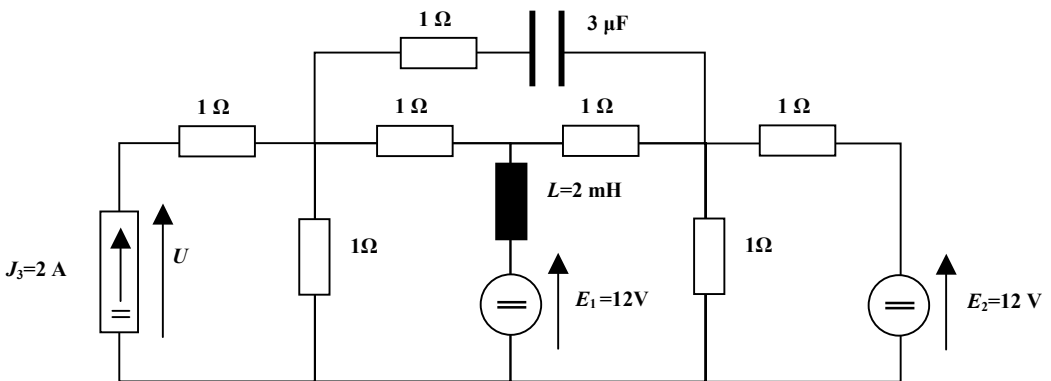
$$P_{E1} = 12 \cdot 9 = 108 \text{ W}$$



SORGAILUA

$$P_{E2} = 12 \cdot 4 = 48 \text{ W}$$

Ariketa-zenbakia: 2.13



Korapiloen metodoa erabiliz, kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

1. J_3 iturriaren borneen arteko tentsioa.
2. Aztertu E_1 eta E_2 iturrien jokabidea, xurgatutako edo sortutako potentziaren balioa emanda.

Ebazpena

Korapiloen metodoa erabiliz ebazteko:

- a) E_1 tentsio-iturri idealean, ordezkapenaren legea zuzenean aplikatuko dugu, I_6 korrantea ematen duen eta borneen artean 12 V dituen korrante-iturria

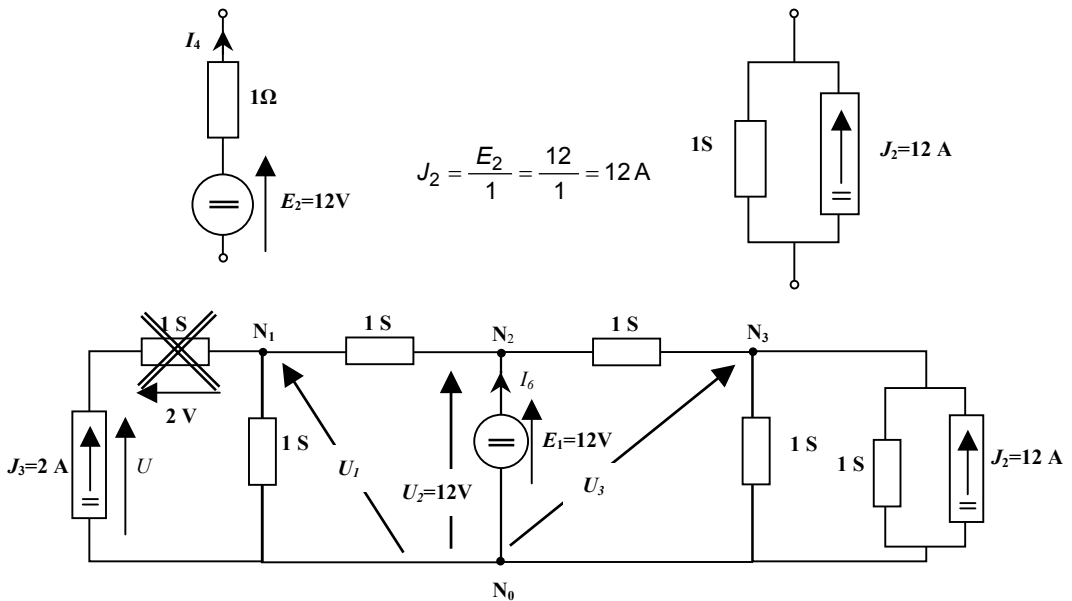
idealaz ordezkatuz. Eta, bestetik, E_2 tentsio-iturri erreala korrante-iturri erreal bihurtuko dugu.

b) Era berean, korrante-iturriarekiko seriean dagoen erresistentzia (konduktantzia) kenduko dugu, admitantzien matrizearen neurria ez handitzearren. Hala ere, ez da ahaztu behar borneen artean 2 V-eko tentsio-erorketa dagoela.

c) Ohm bateko erresistentzia guztiek Siemens bateko admitantzia dute.

Lau korapilo izanik, bat erreferentzia gisa hartuz gero, ebatzi beharreko hiru tentsio definituko ditugu U_1 , U_2 , eta U_3 .

1.



Sistema matritzialaren planteamendua:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ I_6 \\ 12 \end{bmatrix}; \quad \Delta Y = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) = 7$$

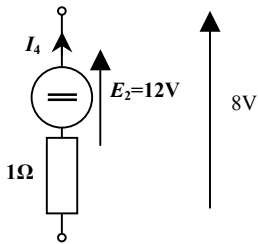
$$U_2 = 12 \text{ V} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & I_6 & -1 \\ 0 & 12 & 3 \end{vmatrix}}{7} = \frac{2 \cdot \begin{vmatrix} I_6 & -1 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 3 \end{vmatrix}}{7} = \frac{6 \cdot I_6 + 30}{7} \Rightarrow I_6 = 9 \text{ A}$$

$$U_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 2 & -1 \\ 12 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{7} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 12 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{10 + 3 \cdot 13}{7} = \frac{49}{7} = 7 \text{ V}$$

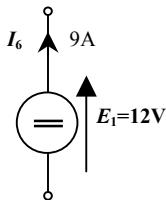
Eta, ondorioz, korronte-iturriaren borneen arteko tentsioa:
 $U = 2 + U_1 = 2 + 7 = 9 \text{ V}$

$$U_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & 12 \end{vmatrix}}{7} = \frac{2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 12 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 12 \end{vmatrix}}{7} = \frac{2 \cdot 33 - 10}{7} = \frac{56}{7} = 8 \text{ V}$$

2.



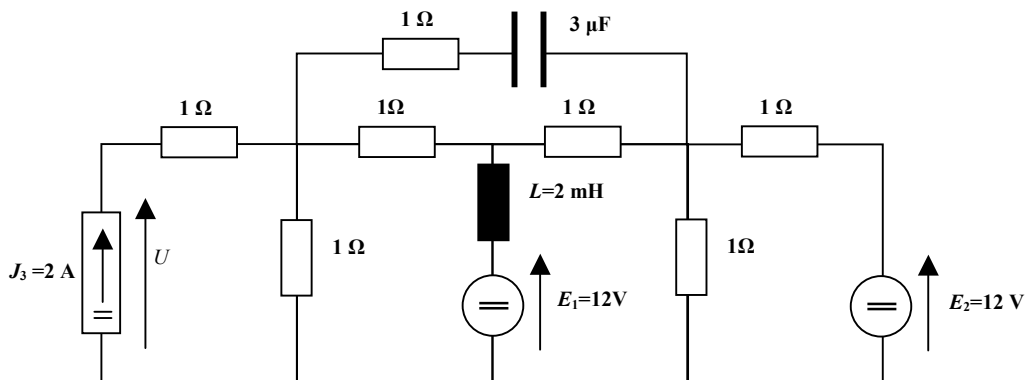
Eta $I_4 = \frac{12 - 8}{1} = 4 \text{ A}$ da E_2 iturrian zeharreko korrontea. Iturria sorgailua da I_4 eta E_2 noranzko berekoak direlako. Eta $P_{E2} = E_2 \cdot I_4 = 12 \cdot 4 = 48 \text{ W}$



E_1 sorgailua da. Emandako potentzia hau da:

$$P_{E1} = E_1 \cdot I_6 = 12 \cdot 9 = 108 \text{ W} .$$

Ariketa-zenbakia: 2.14



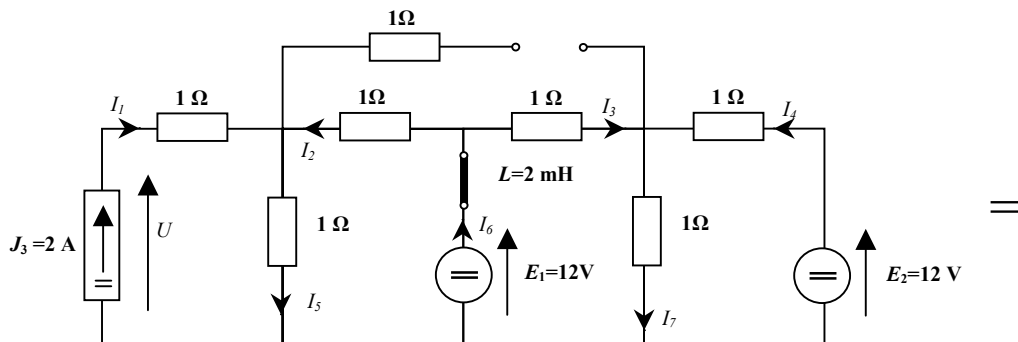
Irudiko zirkuituan, aplikatu gainezarpenaren teorema eta zehaztu:

1. J_3 iturriaren borneen arteko tentsioa.
2. Aztertu E_1 eta E_2 iturrien jokabidea. Adierazi sorgailu edo hargailu gisa ari diren, eta kalkulatu xurgatutako edo sortutako potentziaren balioak.

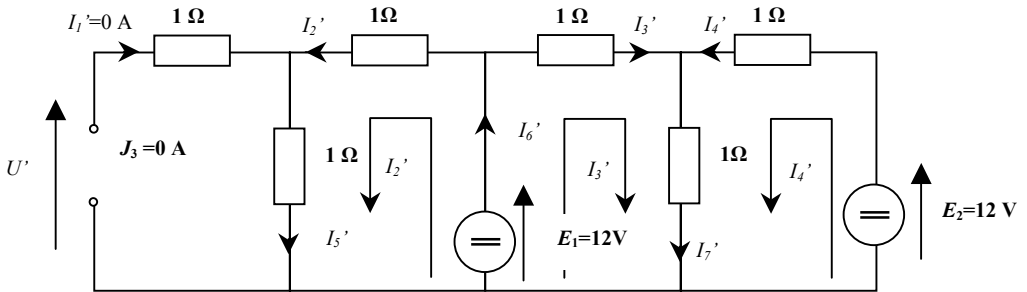
Ebazpena

1. Ariketa hau lehenago ere ebatzi dugu korapiloen metodoaren bidez eta sareen metodoaren bidez. Oraingoan, gainezarpenaren teorema aplikatuz ebatziko dugu. Bi zirkuitu gainezarriz ebatzen badugu, ez dugu iturrien eraldaketarik egin beharko. Lehenengo zirkuituan korrante-iturriak baliogabetuko ditugu; bigarrenean, tentsio-iturriak. Korrante-iturriak baliogabetzeko, zirkuitu irekian utziko ditugu. Tentsio-iturriak baliogabetzeko, aldiz, zirkuitulaburra sortuko dugu.

Zirkuitu hau ebatzi behar dugu, harilak eta kondentsadoreak kenduta:

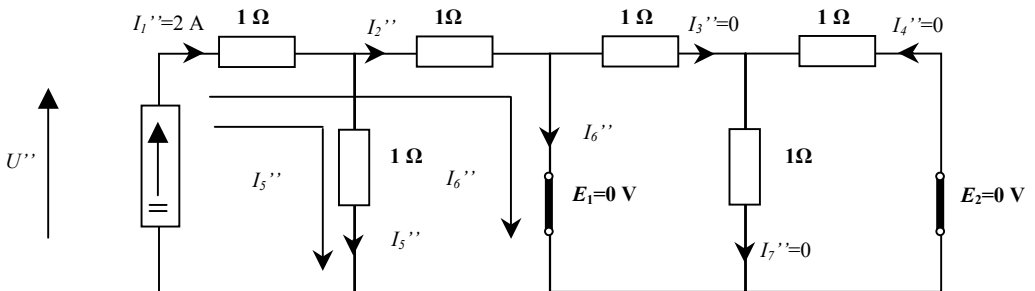


Korrante-iturririk gabeko **A** zirkuitua:



+

Tentsio-iturririk gabeko **B** zirkuitua:



A zirkuitua: sareen metodoaren bidez ebatziko dugu:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2' \\ I_3' \\ I_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}; \text{ 3. errenkada}-0,5 \cdot \text{2. errenkada: } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2' \\ I_3' \\ I_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} I_4' = \frac{6}{1,5} = 4 \text{ A} \\ I_2' = \frac{12}{2} = 6 \text{ A} \\ I_3' = \frac{12 - 1 \cdot 4}{2} = 4 \text{ A} \end{cases} \quad \text{sareetako korronteak lortu}$$

Gainerako adarretako korronteak sareetako korronteen konbinaziotik lortuko ditugu:

$$I_5' = I_2' = 6A ; I_6' = I_2' + I_3' = 6 + 4 = 10A ;$$

$$I_7' = I_3' + I_4' = 4 + 4 = 8A ; \text{ eta } I_1' = 0A$$

$$U' = I_5' \cdot 1 + I_1' \cdot 1 = 6 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 6V$$

B zirkuitua: Zirkuitulaburretik aurrera (E_1 tentsio-iturria duen adarretik aurrera) korrante guztiak nuluak izango dira: $I_3'' = I_7'' = I_4'' = 0A$.

Bestalde, $I_5'' = I_6''$ korranteak berdinak dira, paraleloan dauden bi adarren inpedantziak berdinak direlako; beraz: $I_5'' = I_6'' = \frac{I_1''}{2} = \frac{2}{2} = 1A$ eta $I_2'' = I_6'' = 1A$

Iturriaren borneen arteko tentsioa $U'' = 1 \cdot I_5'' + 1 \cdot I_1'' = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3V$ izango da.

Jatorrizko zirkuituko korranteak eta tentsioak lortzeko, zirkuitu bietako tentsio eta korranteen arteko batura edo kendura egin beharko dugu, eta:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 0 + 2 = 2A$$

$$I_2 = I_2' - I_2'' = 6 - 1 = 5A$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 4 + 0 = 4A$$

$$I_4 = I_4' + I_4'' = 4 + 0 = 4A$$

$$I_5 = I_5' + I_5'' = 6 + 1 = 7A$$

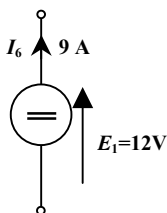
$$I_6 = I_6' - I_6'' = 10 - 1 = 9A$$

$$I_7 = I_7' + I_7'' = 8 + 0 = 8A$$

Korrante-iturriaren borneen arteko tentsioa:

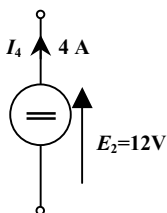
$$U = U' + U'' = 6 + 3 = 9V$$

2. Iturrien jokabidea:



SORGAILUA

$$P_{E1} = 12 \cdot 9 = 108W$$

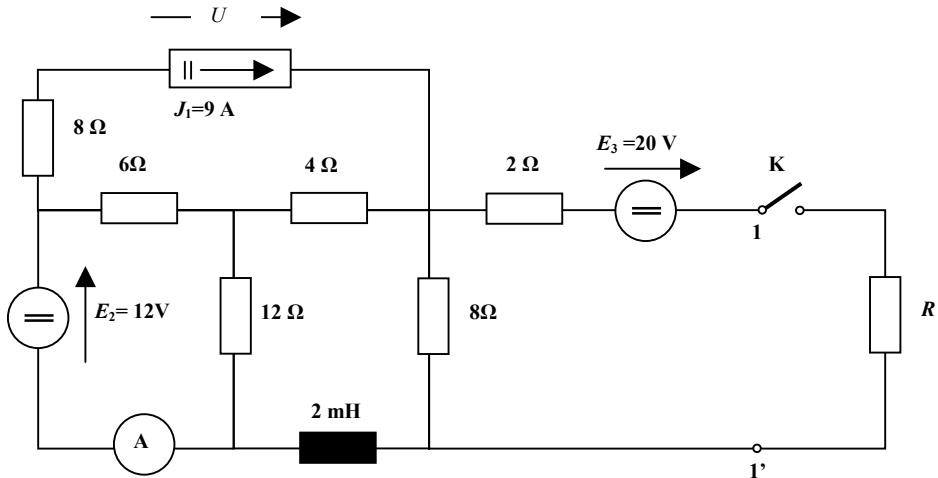


SORGAILUA

$$P_{E2} = 12 \cdot 4 = 48W$$

Sorgailuak dira, tentsioa eta korrantea bi iturrietan noranzko berekoak direlako.

Ariketa-zenbakia: 2.15



Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

K zabalik badago:

1. Amperemetroaren neurketa.
2. Adierazi E_2 iturriak sorgailu edo hargailu gisa jotatzen duen.
3. J_1 iturriaren borneen arteko tentsioa.

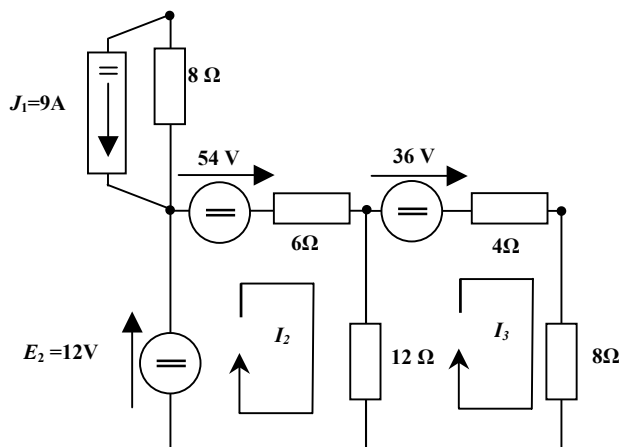
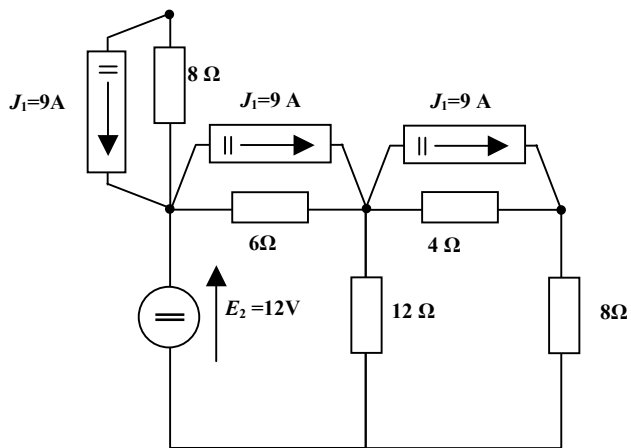
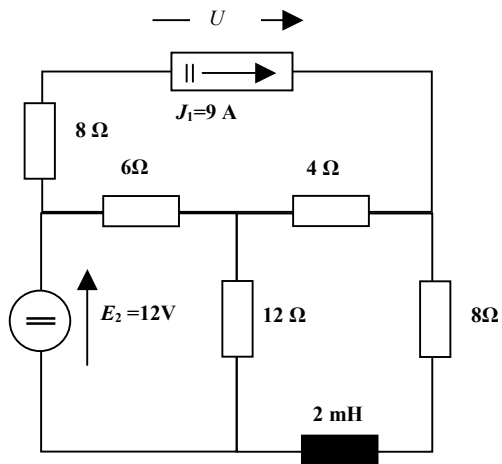
K itxita badago:

4. R -ren balioa, potentzia maximoa transferi dakion.
5. Galdutako potentzia maximoa R -ren aurreko balioarentzat.

Ebazpena

K zabalik:

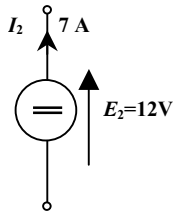
Korrante-iturri ideala transformatzeko, zirkuituaren geometria eraldatu beharko dugu. Eraldaketaren bidez, erresistentziak korrante-iturriarekiko paraleloan konektaturik ager daitezen nahi izan dugu; hala, korrante-iturri errealak izango ditugu eta tentsio-iturri erreal bihur ditzakegu.



$$\begin{bmatrix} 18 & -12 \\ -12 & 24 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 66 & -12 \\ 36 & 24 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 18 & -12 \\ -12 & 24 \end{vmatrix}} = \frac{1.584 + 432}{432 - 144} = \frac{2.016}{288} = 7 \text{ A}$$

1. Amperemetroaren irakurketa $A_1 = I_2 = 7 \text{ A}$
2. E_2 iturria sorgailua da. I_2 korrantea positibo irteteak adieraziko digu sareko korrantearen noranzkoa ondo hautatu dugula. Eta, E_2 -ren tentsioa eta korrantea noranzko berean daudenez, iturriak sorgailu gisa jokatu du.



$$P_{E2} = 12 \cdot 7 = 84 \text{ W}$$

3.

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 18 & 66 \\ -12 & 36 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 18 & -12 \\ -12 & 24 \end{vmatrix}} = \frac{648 + 792}{288} = \frac{1.440}{288} = 5 \text{ A}$$

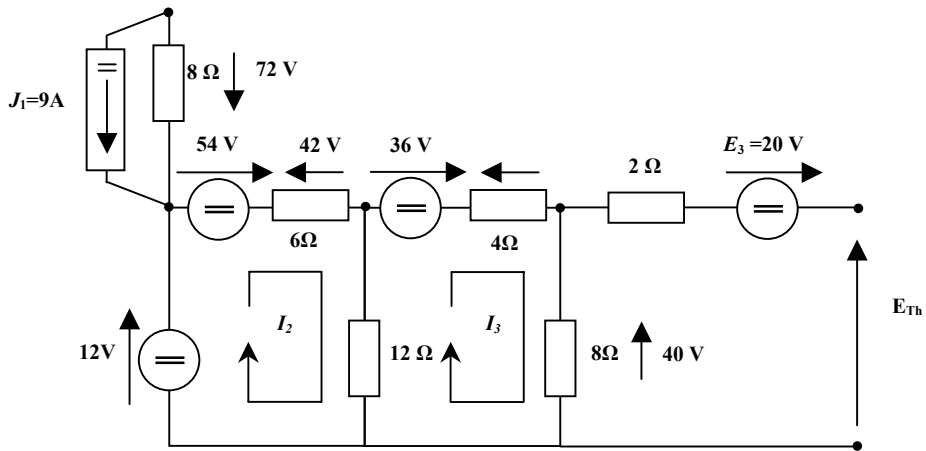
Korrante-iturriaren borneen artean dagoen tentsioa (ikus zirkuitua):

$$U = 8 \cdot J_1 + 54 - I_2 \cdot 6 + 36 - I_3 \cdot 4 = 72 + 54 - 42 + 36 - 20 = 100 \text{ V}$$

K itxita:

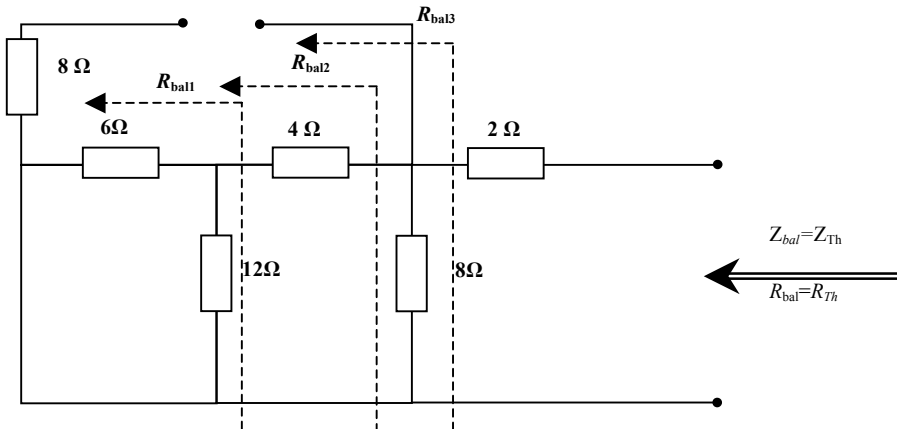
4. 1 eta 1' puntuen artean Theveninen baliokidea zehaztuko dugu, ondoren potentzia maximoa transferitzeko R -k izan behar duen balioa lortzeko

Theveninen tentsioa: 1 eta 1' puntuen artean zirkuitua zabalik dagoenean, bi puntu horien artean tentsioa hau izango da:



$$E_{Th} = I_3 \cdot 8 + E_3 = 40 + 20 = 60 \text{ V}$$

Theveninen inpedantzia: zirkuitua 1 eta 1' puntuen artean pasiboturik dagoenean, puntu horien artean agertzen duen inpedantzia baliokidea izango da.



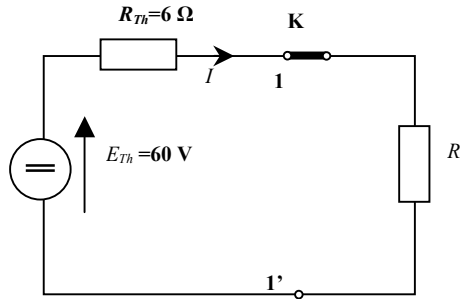
$$R_{bal1} = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} = 4 \Omega$$

$$R_{bal2} = 4 + 4 = 8 \Omega$$

$$R_{bal3} = \frac{8 \cdot 8}{8 + 8} = 4 \Omega$$

$$R_{bal} = 4 + 2 = 6 \Omega$$

5. Potentzia maximoa transferitua izan dadin, $R = R_{Th} = 6 \Omega$ izango da R -ren balioa, potentzia maximoaren transferentziaren teoremaren arabera.

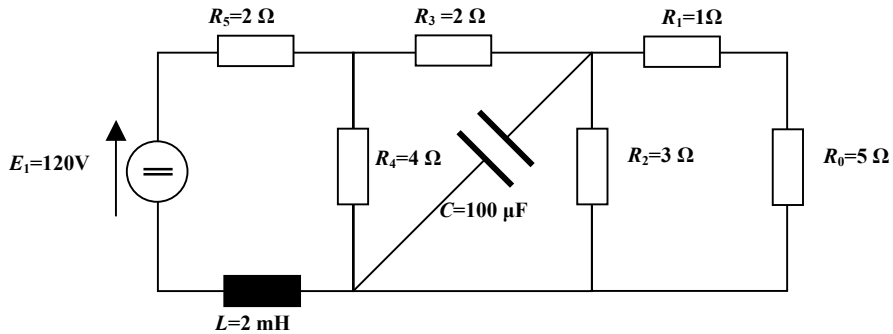


Eta potentzia horren balioa:

$$I = \frac{60}{6 + 6} = 5 \text{ A}$$

$$P_{\max} = R \cdot I^2 = 6 \cdot 5^2 = 150 \text{ W}$$

Ariketa-zenbakia: 2.16

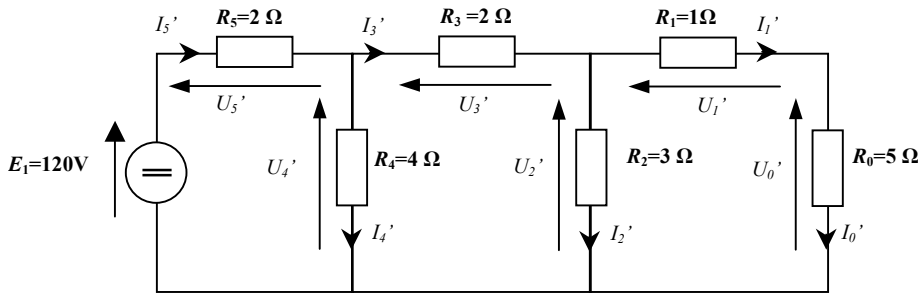


Irudiko zirkuituan, kalkulatu:

1. Adar guztietako tentsioak eta korronteak.
2. $R_0 = 5 \Omega$ -eko erresistentzian barreiatutako potentzia.
3. Harilari eta kondentsadoreari lotutako energiak.

Ebazpena

1. Linealtasuna aplikatuz ebartziko dugu zirkuitua.



$I_0' = I_1' = 1\text{ A}$ direla joko dugu eta:

$$I_0' = I_1' = 1\text{ A} \rightarrow U_0' = I_0' \cdot R_0 = 1 \cdot 5 = 5\text{ V} \text{ eta } U_1' = I_1' \cdot R_1 = 1 \cdot 1 = 1\text{ V}$$

$$U_2' = U_1' + U_0' = 1 + 5 = 6\text{ V} \rightarrow I_2' = \frac{U_2'}{R_2} = \frac{6}{3} = 2\text{ A}$$

$$I_3' = I_1' + I_2' = 1 + 2 = 3\text{ A} \rightarrow U_3' = I_3' \cdot R_3 = 3 \cdot 2 = 6\text{ V}$$

$$U_4' = U_2' + U_3' = 6 + 6 = 12\text{ V} \rightarrow I_4' = \frac{U_4'}{R_4} = \frac{12}{4} = 3\text{ A}$$

$$I_5' = I_3' + I_4' = 3 + 3 = 6\text{ A} \rightarrow U_5' = I_5' \cdot R_5 = 6 \cdot 2 = 12\text{ V}$$

$$E_1' = U_4' + U_5' = 12 + 12 = 24\text{ V}$$

Baina badakigu E_1' ez dela 24 V, baizik eta 120 V; beraz, zirkuituaren linealtasun konstantea $K = \frac{120}{24} = 5$ izango da. Eta benetako korrante eta tentsioak

kalkulatzeko, lortu ditugun korrante eta tentsioak K konstanteaz biderkatu beharko ditugu:

$$I_0 = K \cdot I_0' = 5 \cdot 1 = 5\text{ A}$$

$$I_1 = K \cdot I_1' = 5 \cdot 1 = 5\text{ A}$$

$$I_2 = K \cdot I_2' = 5 \cdot 2 = 10\text{ A}$$

$$I_3 = K \cdot I_3' = 5 \cdot 3 = 15\text{ A}$$

$$I_4 = K \cdot I_4' = 5 \cdot 3 = 15\text{ A}$$

$$I_5 = K \cdot I_5' = 5 \cdot 6 = 30\text{ A}$$

$$U_0 = K \cdot U_0' = 5 \cdot 5 = 25\text{ V}$$

$$U_1 = K \cdot U_1' = 5 \cdot 1 = 5\text{ V}$$

$$U_2 = K \cdot U_2' = 5 \cdot 6 = 30\text{ V}$$

$$U_3 = K \cdot U_3' = 5 \cdot 6 = 30\text{ V}$$

$$U_4 = K \cdot U_4' = 5 \cdot 12 = 60\text{ V}$$

$$U_5 = K \cdot U_5' = 5 \cdot 12 = 60\text{ V}$$

$$U = E_1 = K \cdot E_1' = 5 \cdot 24 = 120\text{ V}$$

2. $P_0 = R_0 \cdot I_0^2 = 5 \cdot 5^2 = 125 \text{ W}$

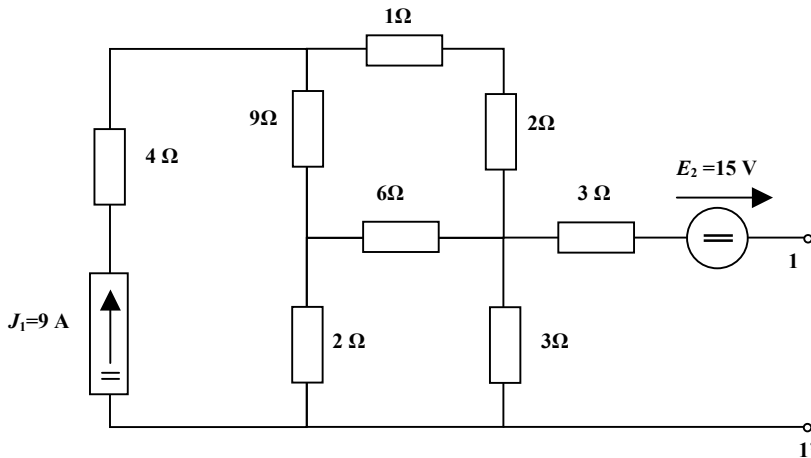
3. Harilari lotutako energia:

$$W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_5^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 30^2 = 900 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 0,9 \text{ J}$$

Kondentsadoreari lotutako energia:

$$W_C = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_C^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 30^2 = 45 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 45 \text{ mJ}$$

Ariketa-zenbakia: 2.17



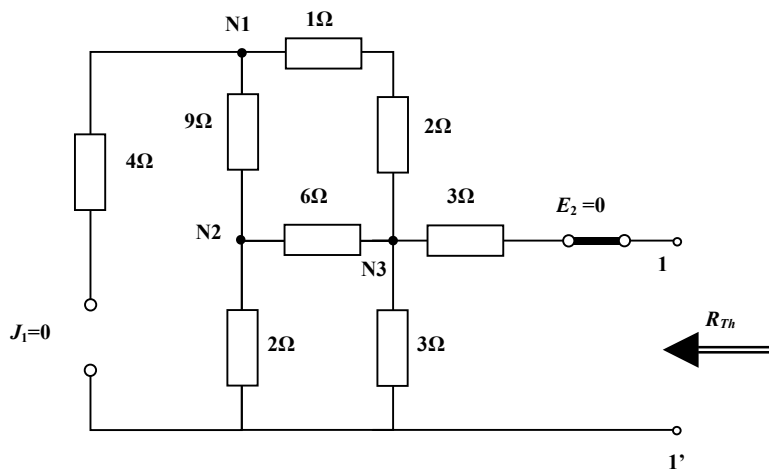
Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

1. Theveninen baliokidea 1 eta 1' puntuen artean.
2. Aurreko puntu berdinen artean konektatu beharreko erresistentziaren balioa, transferituko zaion potentzia maximoa izan dadin.
3. Potentzia maximo horren balioa.

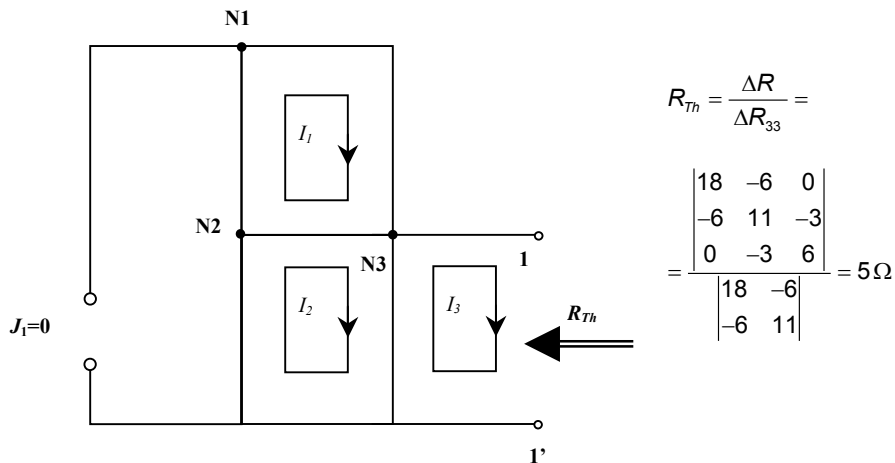
Ebazpena

Theveninen baliokidea lortzeko, bi metodo erabili ditugu. Bata metodo orokorra da. Bestean, zirkuitua eraldatu dugu Kenelly-ren triangelu-izar transformazioa erabiliz,

eta gero ebatzi. Bi metodoekin kalkulatu ditugu bai Theveninen erresistentzia (ikus ondorengo irudia) bai tentsioa.



Metodo orokorra edo matritziala erabiliz:



Edo Gaussen bidez:

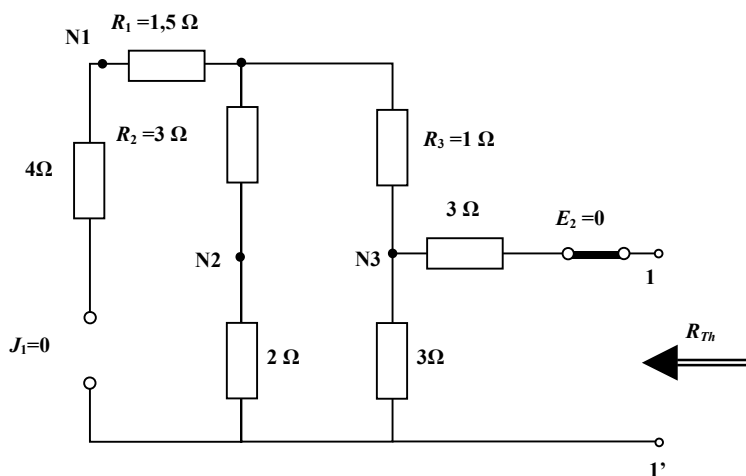
$$\begin{bmatrix} 18 & -6 & 0 \\ -6 & 11 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}; \text{ 2.errenkada} + 0,33 \cdot \text{ 1.errenkada: } \begin{bmatrix} 18 & -6 & 0 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}; \text{ 3.errenkada} +$$

$$0,33 \cdot \text{ 2.errenkada: } \begin{bmatrix} 18 & -6 & 0 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$R_{Th} = R_{33} = 5 \Omega$. Izan ere, $\Delta R = 18 \cdot 9 \cdot 5$ eta $\Delta R_{33} = 18 \cdot 9$ dira.

Zirkuitua eraldatuz

Kenelly-ren teorema edo triangelu-izar transformazioa N_1 , N_2 eta N_3 korapiloen artean aplikatuz:



$$R_1 = \frac{9 \cdot 3}{9 + 6 + 3} = 1,5 \Omega$$

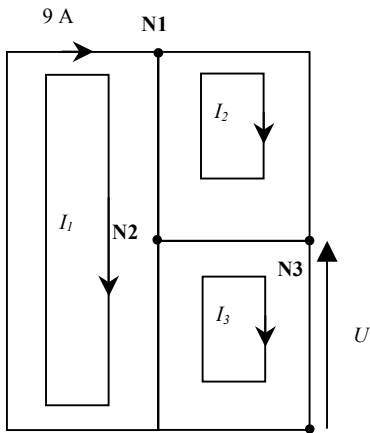
$$R_2 = \frac{9 \cdot 6}{9 + 6 + 3} = 3 \Omega$$

$$R_3 = \frac{3 \cdot 6}{9 + 6 + 3} = 1 \Omega$$

$$R_{Th} = \frac{(1 + 3 + 2) \cdot 3}{(1 + 3 + 2) + 3} + 3 = 5 \Omega$$

Theveninen tentsioa, E_{Th}

Metodo matritziala erabiliz



$$\begin{bmatrix} 15 & -9 & -2 \\ -9 & 18 & -6 \\ -2 & -6 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_3 + \frac{1}{3}L_2 : \begin{bmatrix} 15 & -9 & -2 \\ -9 & 18 & -6 \\ -5 & 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

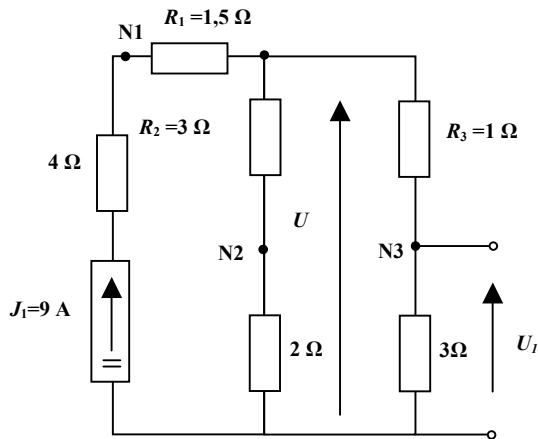
$$-5 \cdot 9 + 0 \cdot I_2 + 9 \cdot I_3 = 0$$

$$I_3 = \frac{5 \cdot 9}{9} = 5 \text{ A}$$

$$U = I_3 \cdot R = 5 \cdot 3 = 15 \text{ V}$$

$$E_{Th} = U + E_2 = 15 + 15 = 30 \text{ V}$$

Kenellyren teorema erabiliz eraldatutako zirkuituaren bidez:



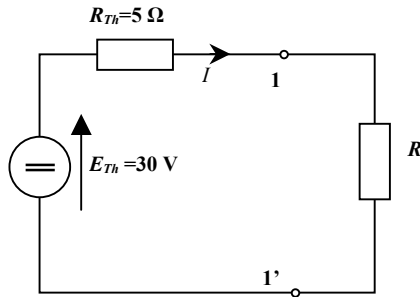
$$U = 9 \cdot \frac{(3+2) \cdot (1+3)}{(3+2) + (1+3)} = \frac{20}{9} \cdot 9 = 20 \text{ V}$$

$$\text{Eta } I_3 = \frac{20}{1+3} = 5 \text{ A}$$

$$\text{Eta } U_1 = 5 \cdot 3 = 15 \text{ V}$$

Eta, beraz, Theveninen tentsioa: $E_{Th} = U_1 + E_2 = 15 + 15 = 30 \text{ V}$

1. Horrenbestez, Theveninen zirkuitu baliokidea:



2. Erresistentziaren balioa, zirkuituak potentzia maximoa transferi diezaion:

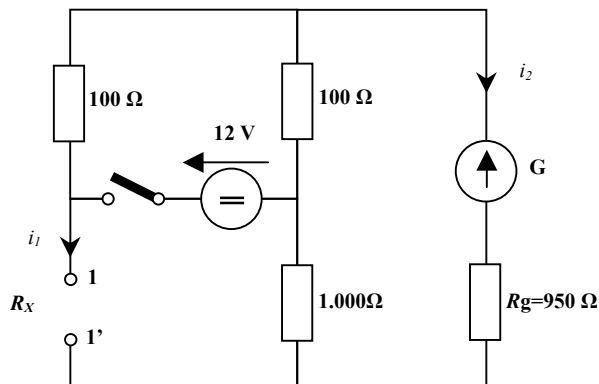
$$R = R_{Th} = 5 \Omega$$

3. Potentzia maximo horren balioa:

$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R} = \frac{30}{5 + 5} = 3 \text{ A}$$

$$P_{\max} = R \cdot I^2 = 5 \cdot 3^2 = 45 \text{ W}$$

Ariketa-zenbakia: 2.18

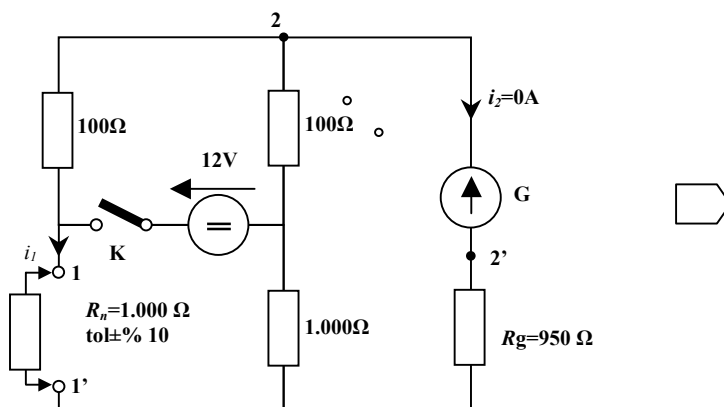


Irudian adierazitako Wheatstone zubiaren bidez, $R = 1.000 \pm \% 10 \Omega$ -eko erresistentziak egiaztatu nahi dira. Kalkulatu:

1. Galvanometroaren orratza, korrontearen zeintzu bi balioen artean mugi daiteke, erresistentziak tolerantzia barnean egon daitezen.

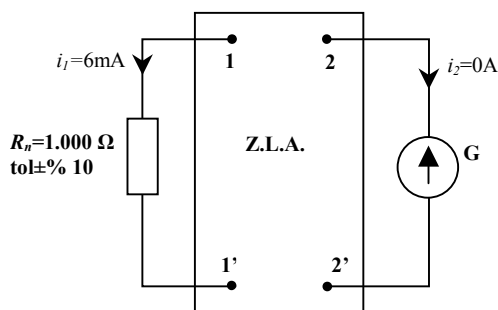
Ebazpena

Konpentsazioaren teorema erabiliz ebatziko dugu.



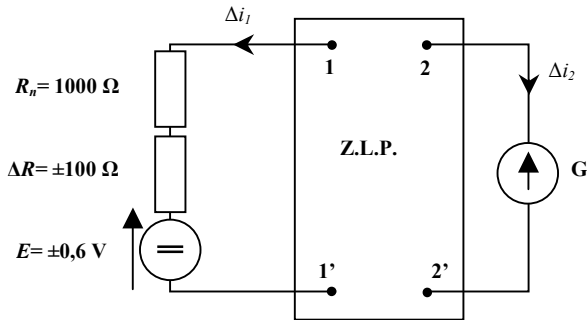
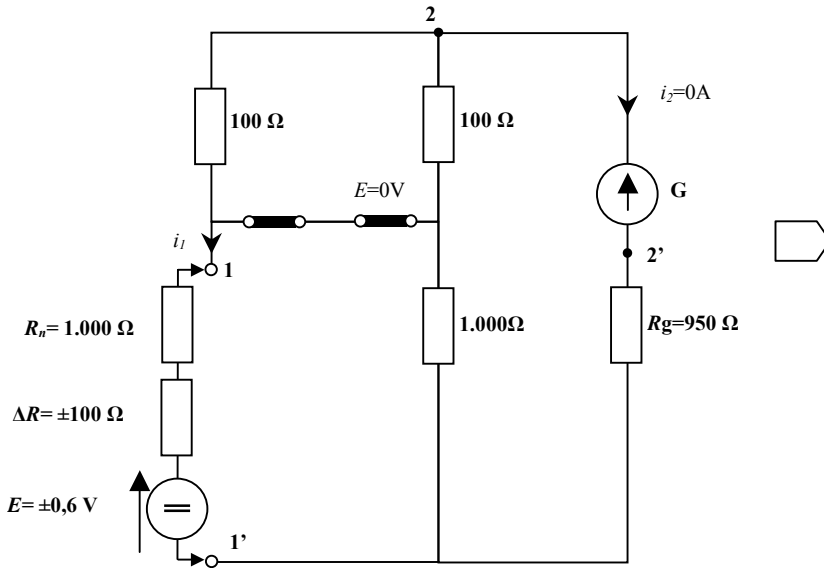
$$I_1 = \frac{12}{1.000 + 1.000} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 6 \text{ mA}$$

$$E = \pm 100 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = \pm 0,6 \text{ V}$$



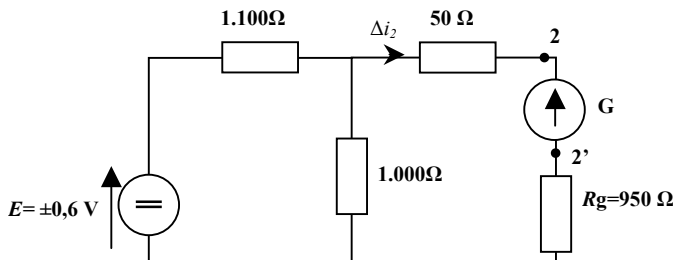
$$\Delta R = \pm \frac{10}{100} 10 \cdot 1.000 = \pm 100 \Omega$$

$$900 \leq R \leq 1.100 \Omega$$



Horren ebazpena:

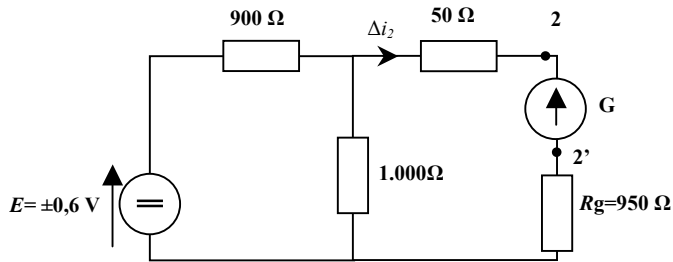
a) $\Delta R = 100 \Omega$



$$R_{bal} = 1.100 + \frac{1.000 \cdot 1.000}{1.000 + 1.000} = 1.600 \Omega$$

$$\Delta i_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,6}{1.600} = \frac{0,0375}{2} = 0,01875 \text{ A} = 18,75 \text{ mA}$$

b) $\Delta R = -100 \Omega$

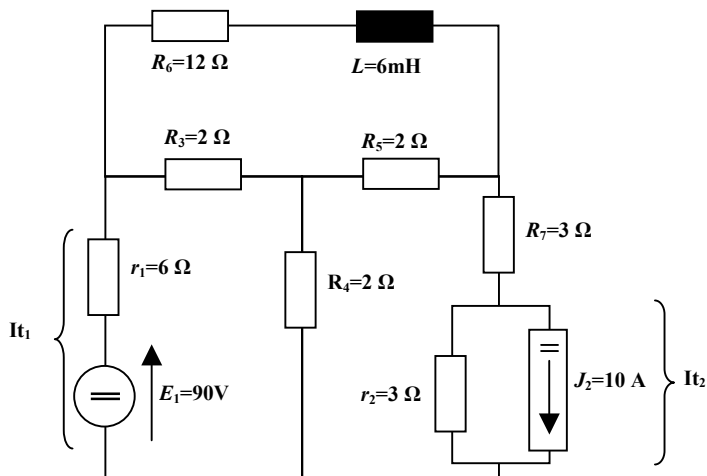


$$R_{bal} = 900 + \frac{1.000 \cdot 1.000}{1.000 + 1.000} = 1.400 \Omega$$

$$\Delta i_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{-0,6}{1.400} = -0,1071 \text{ A} = -107,1 \text{ mA}$$

Beraz, galvanometroaren orratza $-107,1 \text{ mA}$ eta $18,75 \text{ mA}$ bitartean mugituko da.

Ariketa-zenbakia: 2.19

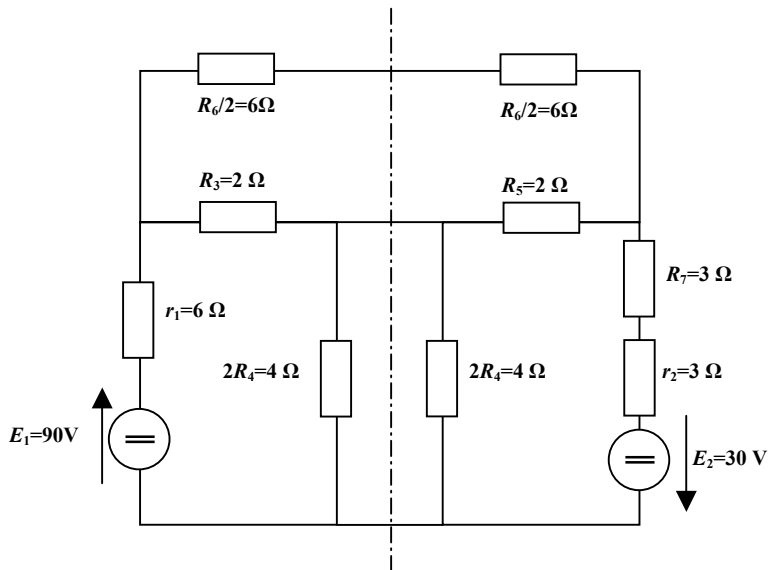


Irudiko zirkuituan, zehaztu:

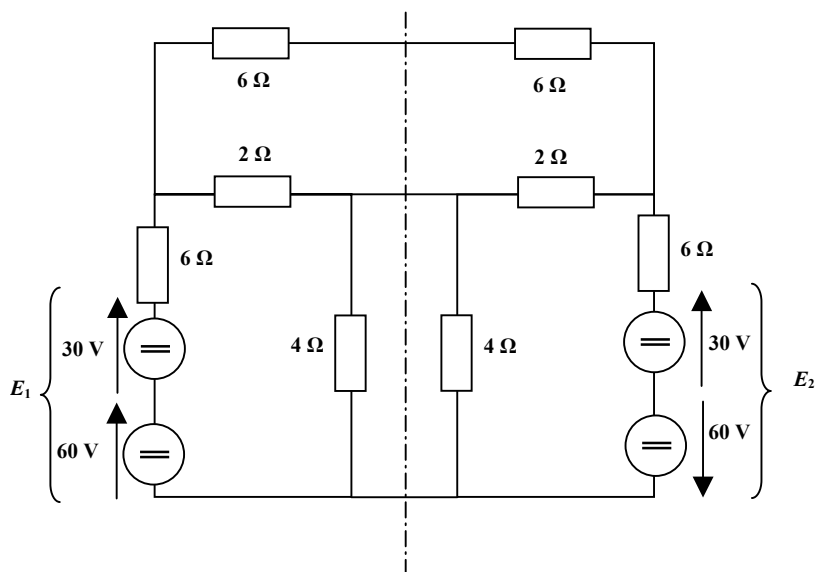
1. I_{t1} eta I_{t2} iturri errealek hargailu edo sorgailu gisa funtzionatzen duten. Kalkulatu errendimenduak.
2. I_{t2} korronte-iturriaren tentsioa
3. Harilari lotutako energia.
4. Potentzia gehien galtzen duen erresistentziaren balioa

Ebazpena

Korronte-iturria tentsio-iturri bihurtuko dugu: $r_2 = 3\Omega$ eta $E_2 = 3 \cdot 10 = 30\text{ V}$



Zirkuitua behatuz gero, ikusiko dugu zirkuitua irudikatu dugun ardatzarekiko simetrikoa dela, eta, ondorioz, Bartlett-en teorema erabiliz ebaz dezakegu.



$$\frac{90 + 30}{2} = 60 \text{ V}; \quad \frac{90 - 30}{2} = 30 \text{ V}$$

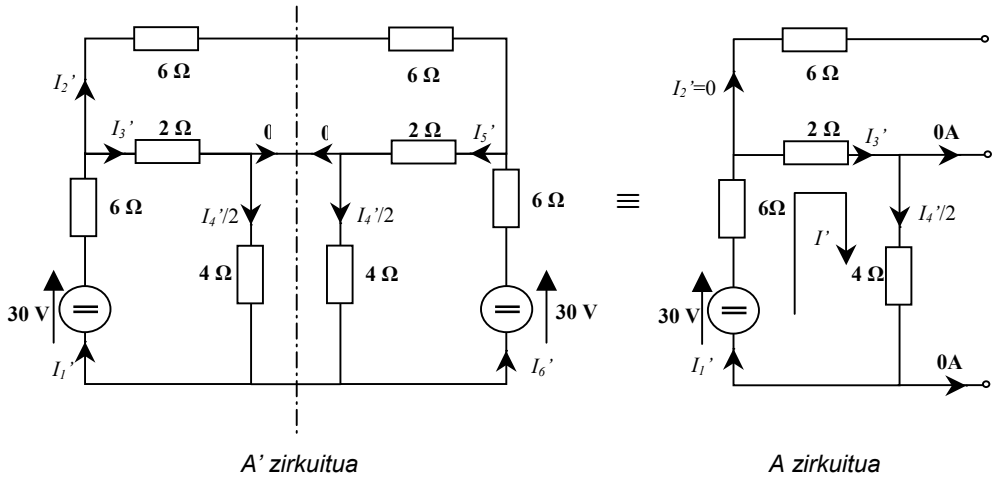
$$E_1 = 60 + 30 = 90 \text{ V}$$

$$E_2 = 60 - 30 = 30 \text{ V}$$

Ebazteko, gainezarpenaren teorema aplikatu besterik ez dugu.

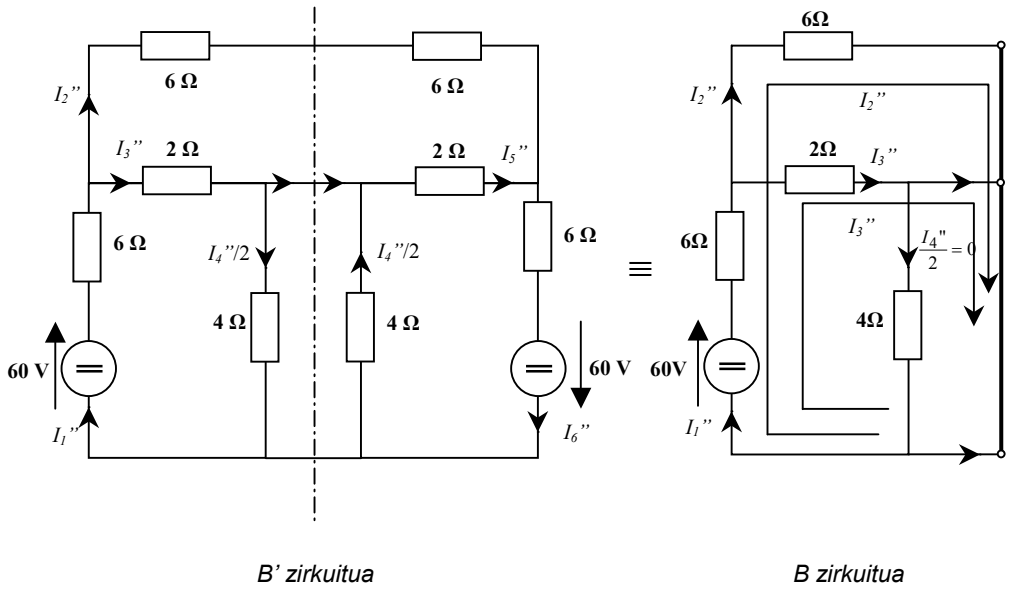
Aurreko zirkuitua beste biren gainezarpena izango da:

A zirkuitua:



+

B zirkuitua:



A zirkuituaren ebazpena: Lehenengo zirkuituerdi horretan korrante guztiak nuluak dira, bide itxia osatzen duten adarretakoak izan ezik. K2L aplikatuz:

$$I_1' = I_3' = \frac{I_4'}{2} = \frac{30}{6+2+4} = 2,5 \text{ A}$$

$$I_2' = 0 \text{ A}$$

Simetriaz, A' zirkuituko korrante guztiak finkatu ahal izango ditugu:

$$I_5' = I_3' = 2,5 \text{ A}; \quad I_6' = I_1' = 2,5 \text{ A}; \quad \text{eta} \quad \frac{I_4'}{2} = \frac{I_4'}{2} = 2,5 \text{ A}$$

B zirkuituerdia ebazteko, oinarrizko eraztunen metodoa aplikatuko dugu 4 Ω -eko erresistentziaren adarra kendu ondoren, adar horretan ez baitabil korronteirik.

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2'' \\ I_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$I_2'' = \frac{\begin{vmatrix} 60 & 6 \\ 60 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{480 - 360}{96 - 36} = 2 \text{ A} \quad I_3'' = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 60 \\ 6 & 60 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{720 - 360}{96 - 36} = 6 \text{ A}$$

$$I_1'' = I_2'' + I_3'' = 6 + 2 = 8 \text{ A}$$

B' zirkuituko korranteak, simetriaz:

$$I_5'' = I_3'' = 6 \text{ A}; \quad I_6'' = I_1'' = 8 \text{ A}; \quad \text{eta} \quad \frac{I_4''}{2} = \frac{0}{2} = 0 \text{ A}$$

Jatorrizko zirkuituan eta gainezarpenez korrante guztiak lortuko ditugu.

Eta gainezarpena aplikatuz:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 2,5 + 8 = 10,5 \text{ A}$$

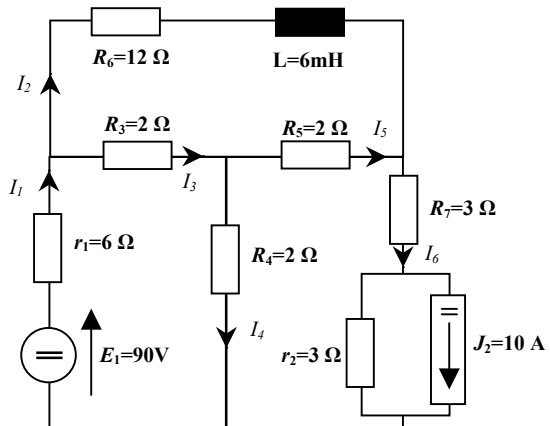
$$I_2 = I_2' + I_2'' = 0 + 2 = 2 \text{ A}$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 2,5 + 6 = 8,5 \text{ A}$$

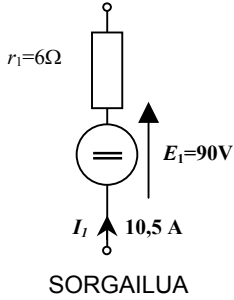
$$I_4 = I_4' + I_4'' = 2 \cdot 2,5 + 2 \cdot 0 = 5 \text{ A}$$

$$I_5 = -I_5' + I_5'' = -2,5 + 6 = 3,5 \text{ A}$$

$$I_6 = -I_6' + I_6'' = -2,5 + 8 = 5,5 \text{ A}$$



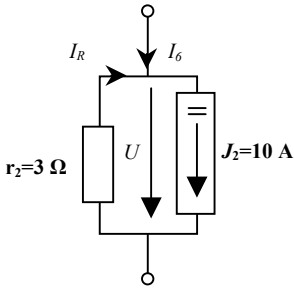
1. Iturrien jokabideak eta errendimenduak:



$$\eta = \frac{P_e}{P_g} = \frac{90 \cdot 10,5 - 6 \cdot 10,5^2}{90 \cdot 10,5^2} = 0,3 \text{ edo } \%30$$

edo

$$\eta = \frac{U}{E} = \frac{90 - 6 \cdot 10,5}{90} = 0,3 \text{ edo } \%30$$



$$I_R = J_2 - I_6 = 10 - 5,5 = 4,5 \text{ A}$$

Korrontearen noranzkoa ondo hartu dugu. Sorgailua da, iturriaren tentsioaren noranzkoa eta J -rena bat datozelako.

Iturriaren borneen arteko tentsioa:

$$U = I_R \cdot r_2 = 4,5 \cdot 3 = 13,5 \text{ V}$$

Errendimendua:

$$\eta = \frac{P_e}{P_g} = \frac{10 \cdot 13,5 - 3 \cdot 4,5^2}{10 \cdot 13,5} = 0,55 \text{ edo } \%55$$

edo

$$\eta = \frac{I}{J} = \frac{5,5}{10} = 0,55 \text{ edo } \%55$$

2. $U = I_R \cdot r_2 = 4,5 \cdot 3 = 13,5 \text{ V}$

3. $W_L = \frac{1}{2} L \cdot I_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 2^2 = 12 \cdot 10^{-3} = 12 \text{ mJ}$

4. $P_6 = R_6 \cdot I_2^2 = 12 \cdot 2^2 = 48 \text{ W} ;$

$$P_3 = R_3 \cdot I_3^2 = 2 \cdot 8,5^2 = 144,5 \text{ W}$$

$$P_5 = R_5 \cdot I_5^2 = 2 \cdot 3,5^2 = 24,5 \text{ W}$$

$$P_7 = R_7 \cdot I_6^2 = 3 \cdot 5,5^2 = 90,75 \text{ W}$$

$$P_4 = R_4 \cdot I_4^2 = 2 \cdot 5^2 = 50 \text{ W}$$

Potentzia gehien galtzen duena $R_3 = 2 \Omega$ -eko erresistentzia izango da.

3

Korronte alerno monofasikoa egoera iraunkorrean

3.1 NEURKETA-TRESNAK

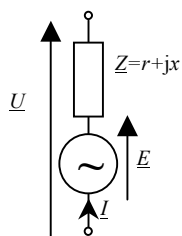
Besterik adierazten ez bada, burdina mugikorrekoak direla joko dugu. Orain ere idealtzat hartuko ditugu.

3.2 ITURRIEN JOKABIDEA

Hargailu-hitzarmena erabiliko dugu iturrien jokabidea aztertzeko. Hau da, xurgatutako potentziaren arabera: $P > 0$ hargailua eta $P < 0$ sorgailua. Edo, era berean, $\underline{S}$ itxurazko potentziaren arabera: plano konplexuko II edo III koadranteetan badago, sorgailua; eta I edo IV koadranteetan badago, hargailua.

3.3 ITURRIEN ERRENDIMENDUA

Tentsio-iturriarentzat:



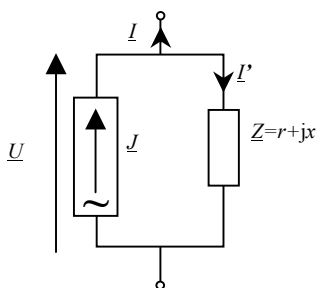
Sorgailua bada:

$$\eta = \frac{\operatorname{Re}[\underline{U} \cdot \underline{I}^*]}{\operatorname{Re}[\underline{E} \cdot \underline{I}^*]}$$

Hargailua bada:

$$\eta = \frac{\operatorname{Re}[\underline{E} \cdot \underline{I}^*]}{\operatorname{Re}[\underline{U} \cdot \underline{I}^*]}$$

Korronte-iturriarentzat:



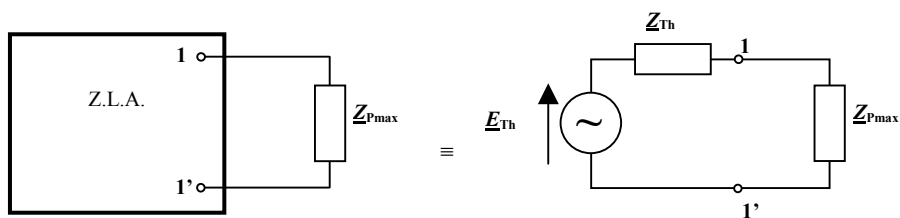
Sorgailua bada:

$$\eta = \frac{\operatorname{Re}[\underline{U} \cdot \underline{I}^*]}{\operatorname{Re}[\underline{U} \cdot \underline{J}^*]}$$

Hargailua bada:

$$\eta = \frac{\operatorname{Re}[\underline{U} \cdot \underline{J}^*]}{\operatorname{Re}[\underline{U} \cdot \underline{I}^*]}$$

3.4 POTENTZIA MAXIMOAREN TRANSFERENTZIAREN TEOREMAK



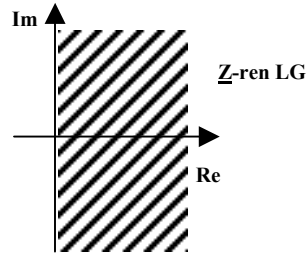
Zirkuitu lineal aktibo baten 1 eta 1' borne eskuragarri biren artean, potentzia maximoa gal dadin konektatu beharreko inpedantziaren balioa zehaztean datza.

Inpedantzia hori lortzeko, zirkuitu horren 1 eta 1' borneen arteko Theveninen baliokidera jo beharko dugu. Eta, hala, bi motatako maximoak izango ditugu, maximo askea eta maximo baldintzatuak.

Maximo askea

Ez dio inolako kondiziorik jartzen $\underline{Z}$ inpedantziari. Hau da, lehen zein laugarren koadranteetako edozein puntutan egon daiteke.

Kasu honetan: $\underline{Z}_{P_{\max}} = \underline{Z}_{Th}^*$.



Maximo baldintzatuak

$\underline{Z}$ inpedantziari nolabaiteko muga edo murrizpena ezartzen dio:

a) $\underline{Z} = R + jX$ inpedantziatik, X bakarrik alda daiteke, kasu honetan: $X_{P_{\max}} = -X_{Th}$

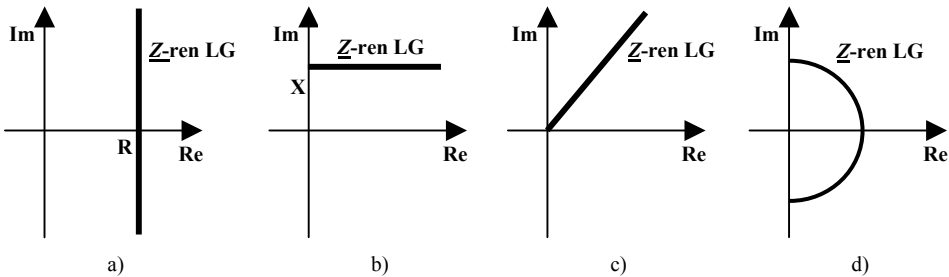
b) $\underline{Z} = R + jX$ inpedantziatik, R bakarrik alda daiteke, kasu honetan:

$$R_{P_{\max}} = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_{Th} + X)^2}$$

c) $\underline{Z} = Z_{\angle \varphi}$ inpedantziaren modulua, $|\underline{Z}|$ bakarrik alda daiteke: $|\underline{Z}|_{P_{\max}} = |\underline{Z}_{Th}|$

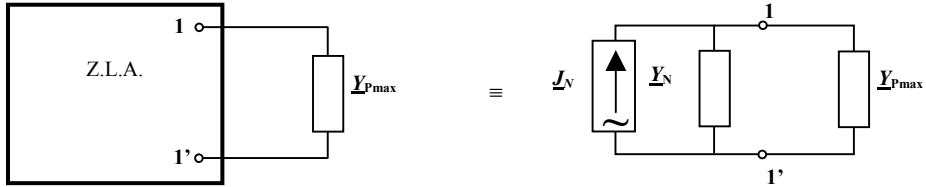
d) $\underline{Z} = Z_{\angle \varphi}$ inpedantziaren angelua, φ , bakarrik alda daiteke:

$$(\sin \varphi)_{P_{\max}} = -\frac{2 \cdot |\underline{Z}| \cdot |\underline{Z}_{Th}|}{|\underline{Z}|^2 + |\underline{Z}_{Th}|^2} \cdot \sin \varphi_{Th}$$



Non $\underline{Z}$ -ren LG inpedantzia horren leku geometrikoa baita.

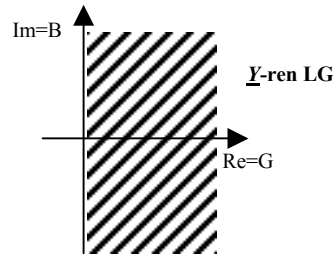
Era berean, Nortonen baliokidea erabiliz gero, potentzia maximorako admitantziak lor daitezke:



Eta, kasu honetan, maximo baldintzatuak eta askeak admitantzien planoan (ez inpedantzien planoan) irudikatu dira.

Maximo askea

$$\underline{Y}_{P_{\max}} = \underline{Y}_N^*$$



Maximo baldintzatuak

a) $\underline{Y} = G + jB$ admitantziatik, B bakarrik alda daiteke, kasu honetan: $B_{P_{\max}} = -B_N$

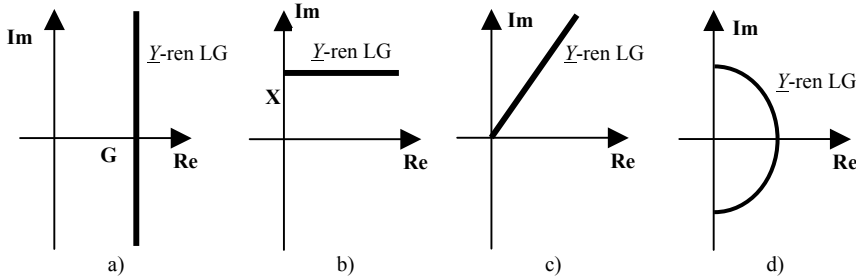
b) $\underline{Y} = G + jB$ admitantziatik, G bakarrik alda daiteke, kasu honetan:

$$G_{P_{\max}} = \sqrt{G_N^2 + (B_N + B)^2}$$

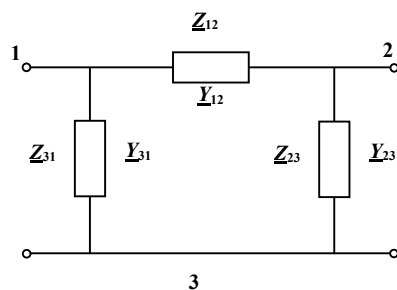
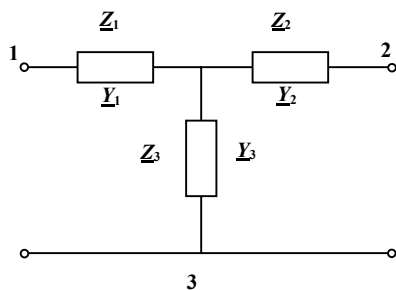
c) $\underline{Y} = Y_{\angle\varphi}$ admitantziatik modulua, $|Y|$, bakarrik alda daiteke: $|Y|_{P_{\max}} = |Y_N|$

d) $\underline{Y} = Y_{\angle\varphi}$ admitantziatik angelua, φ , bakarrik alda daiteke:

$$(\sin \varphi)_{P_{\max}} = -\frac{2 \cdot |Y| \cdot |Y_N|}{|Y|^2 + |Y_N|^2} \cdot \sin \varphi_N$$



Kenelly-ren teorema



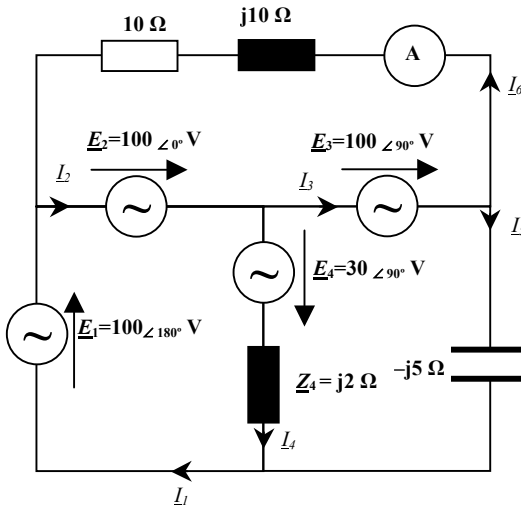
Triangelu-izar transformazioa:

Datuak	Ezezagunak	
$\underline{Z}_{12}$	$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{31} \cdot \underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \Omega$	$\underline{Y}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{31} \cdot \underline{Z}_{12}} S$
$\underline{Z}_{23}$	$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \Omega$	$\underline{Y}_2 = \frac{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{23}} S$
$\underline{Z}_{31}$	$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{23} \cdot \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \Omega$	$\underline{Y}_3 = \frac{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{23} \cdot \underline{Z}_{31}} S$
$\underline{Y}_{12}$	$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Y}_{23}}{\underline{Y}_{12} \cdot \underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{23} \cdot \underline{Y}_{31} + \underline{Y}_{31} \cdot \underline{Y}_{12}} \Omega$	$\underline{Y}_1 = \frac{\underline{Y}_{12} \cdot \underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{23} \cdot \underline{Y}_{31} + \underline{Y}_{31} \cdot \underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{23}} S$
$\underline{Y}_{23}$	$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Y}_{31}}{\underline{Y}_{12} \cdot \underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{23} \cdot \underline{Y}_{31} + \underline{Y}_{31} \cdot \underline{Y}_{12}} \Omega$	$\underline{Y}_2 = \frac{\underline{Y}_{12} \cdot \underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{23} \cdot \underline{Y}_{31} + \underline{Y}_{31} \cdot \underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{31}} S$
$\underline{Y}_{31}$	$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{12} \cdot \underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{23} \cdot \underline{Y}_{31} + \underline{Y}_{31} \cdot \underline{Y}_{12}} \Omega$	$\underline{Y}_3 = \frac{\underline{Y}_{12} \cdot \underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{23} \cdot \underline{Y}_{31} + \underline{Y}_{31} \cdot \underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{12}} S$

Izar-triangelu transformazioa

Datuak	Ezezagunak	
$\underline{Z}_1$	$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} \Omega$	$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1} \text{S}$
$\underline{Z}_2$	$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1} \Omega$	$\underline{Y}_{23} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1} \text{S}$
$\underline{Z}_3$	$\underline{Z}_{31} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \Omega$	$\underline{Y}_{31} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1} \text{S}$
$\underline{Y}_1$	$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \Omega$	$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_2} \text{S}$
$\underline{Y}_2$	$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Y}_2 \cdot \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \Omega$	$\underline{Y}_{23} = \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}{\underline{Y}_2 \cdot \underline{Y}_3} \text{S}$
$\underline{Y}_3$	$\underline{Z}_{31} = \frac{\underline{Y}_3 \cdot \underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \Omega$	$\underline{Y}_{31} = \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}{\underline{Y}_3 \cdot \underline{Y}_1} \text{S}$

Ariketa-zenbakia: 3.1

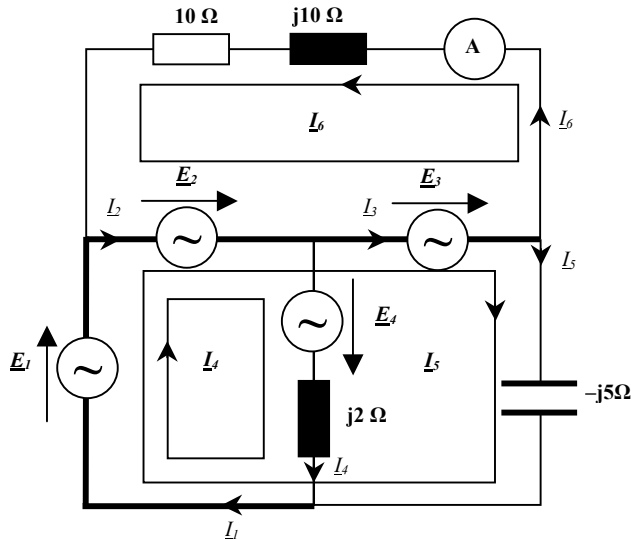


Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuiturako:

1. Amperemetroaren neurketa.
2. $\underline{E}_3$ iturriak hargailu edo sorgailu gisa lan egiten duen adierazi, eta emandako edo xurgatutako potentzia kalkulatu.
3. $\underline{E}_4$ - $\underline{Z}_4$ iturri errealearen errendimendua.
4. $\underline{E}_1$ iturriak zer potentzia-faktoreekin egiten du lan?

Ebazpena

Oinarrizko eraztunen bidez ebartziko dugu. $n = 4$ eta $r = 6$ direnez, zuhaitzaren adar kopurua $n-1 = 3$ eta oinarrizko eraztun kopurua $r-n+1 = 3$ izango dira.



Tentsio-iturri idealak dituzten hiru adarrak zuhaitzaren adartzat hartzen baditugu, inpedantzien matrizean ez da elementu partekaturik agertuko. Izan ere, oinarrizko eraztunen metodoan, eraztunek partekatzen dituzten adarrak zuhaitzekoak dira. Eta koefizienteen matrizea diagonal izango da.

$$\begin{bmatrix} j2 & 0 & 0 \\ 0 & -j5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 + j10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \angle 180^\circ + 30 \angle 90^\circ + 100 \angle 0^\circ \\ 100 \angle 180^\circ + 100 \angle 0^\circ + 100 \angle 90^\circ \\ 100 \angle 0^\circ + 100 \angle 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j30 \\ j100 \\ 100 + j100 \end{bmatrix}$$

Sistema honek berehalako ebazpena du errenkadak garatuz gero, sistema diagonal baina:

$$I_4 = \frac{j30}{j2} = 15 \angle 0^\circ \text{ A}; I_5 = \frac{j100}{-j5} = -20 = 20 \angle 180^\circ \text{ A}; I_6 = \frac{100 + j100}{10 + j10} = 10 \angle 0^\circ \text{ A}$$

- 1.- Amperemetroaren irakurketa: $A_1 = |I_6| = 10 \text{ A}$

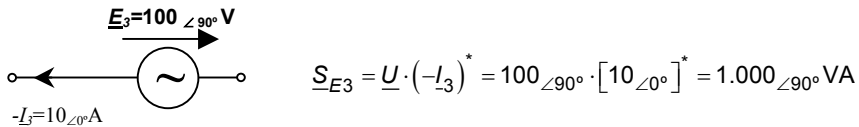
Zuhaitzeko adarretako korranteak:

$$I_1 = I_4 + I_5 = 15 - 20 = -5 \text{ A} = 5 \angle 180^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = I_1 + I_6 = -5 + 10 = 5 \text{ A} = 5 \angle 0^\circ \text{ A}$$

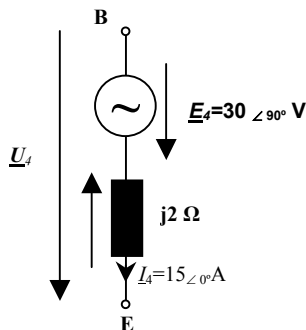
$$I_3 = I_5 + I_6 = -20 + 10 = -10 \text{ A} = 10 \angle 180^\circ \text{ A}$$

2. $\underline{E}_3$ iturriaren jokabidea: Hargailu-hitzarmena aplikatzeko, lehenengo, korrontearen geziari buelta eman behar zaio.



INDETERMINATUA: Ez dakigu zein den iturriaren jokabidea, $P_{E3} = 0 \text{ W}$ delako. Bi erataria uler daiteke emaitza hori:

- a) $\underline{S}_{E3} = (0 + j1.000) \text{ VA}$ haril bat da, 1.000 var kontsumitzen dituen; HARGAILUA beraz.
- b) $\underline{S}_{E3} = -(0 - j1000) \text{ VA}$, berriz, sareari 1.000 var-eko potentzia erreaktibo kapazitiboa ematen dion SORGAILUA.
3. $\underline{E}_4$ iturriaren errendimendua: Eman zaizkion polaritate-erreferentziekin sorgailua dela aurreikusi denez:



$$\eta = \frac{P_e}{P_g} = \frac{\operatorname{Re}[\underline{U} \cdot \underline{I}^*]}{\operatorname{Re}[\underline{E} \cdot \underline{I}^*]}$$

$$\underline{U}_4 = j30 - (15) \cdot j2 = j30 + j30 = j60 \text{ V} = 60 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$\eta = \frac{\operatorname{Re}[\underline{U}_4 \cdot \underline{I}_4^*]}{\operatorname{Re}[\underline{E}_4 \cdot \underline{I}_4^*]} = \frac{\operatorname{Re}[60 \angle 90^\circ \cdot 15 \angle 0^\circ]}{\operatorname{Re}[30 \angle 90^\circ \cdot 15 \angle 0^\circ]} = \frac{\operatorname{Re}[900 \angle 90^\circ]}{\operatorname{Re}[450 \angle 90^\circ]} = \frac{0}{0}$$

INDETERMINATUA

Oharra: Kasu orokorrean, barne-inpedantzia irudikaria duen iturri baten errendimendua % 100ekoa izango da, inpedantzia irudikaria elementu metatzailea delako eta ez duelako potentziarik kontsumitzen. Beraz, errendimenduaren adierazpenean, galdutako potentzia nulua da.

$$\eta = \frac{P_{\text{erabilgarria}}}{P_{\text{totala}}} = \frac{P_{\text{totala}} - P_{\text{galerak}}}{P_{\text{totala}}} = 1 - \frac{P_{\text{galerak}}}{P_{\text{totala}}} = 1 - \frac{0}{P_{\text{totala}}} = 1$$

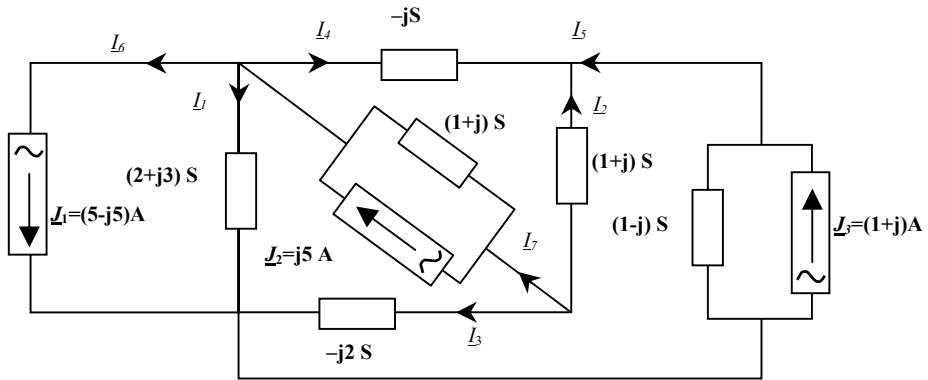
$$\eta = \%100$$

Gure kasuan, indeterminazioa ebazteko modu honek ere ez du balio, iturriak emandako potentzia totala irudikaria delako.

4. $\underline{E}_1$ iturriaren potentzia-faktorea: $\underline{E}_1$ iturriaren tentsioaren eta $\underline{I}_1$ korrontearen arteko angeluaren kosinua izango da, iturriak lan egiten duenean, potentzia-faktorea edo $\cos \varphi$.

$\underline{E}_1 = 100 \angle 180^\circ \text{ V}$ eta $\underline{I}_1 = 5 \angle 180^\circ \text{ A}$ elementuek osatzen duten angelua 0° -koa da, eta, beraz, $\cos \varphi = \cos 0^\circ = 1$.

Ariketa-zenbakia: 3.2

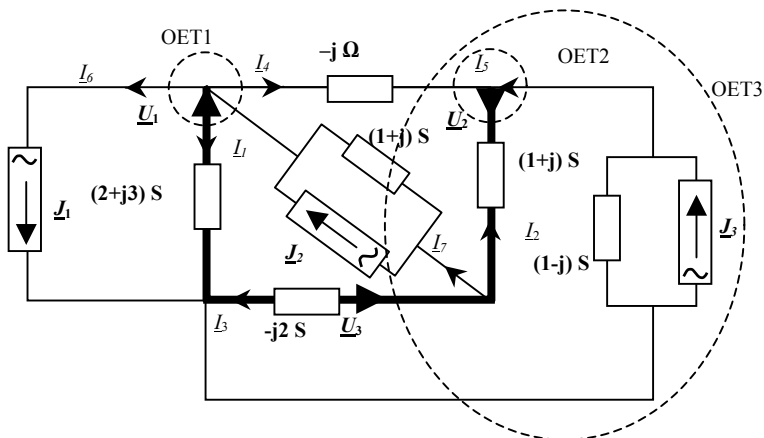


Irudiko zirkuituan, planteatu $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, eta $\underline{U}_3$ tentsioak lortzeko behar ditugun ekuazioak.

Ebazpena

Tentsio jakin batzuk eskatzen dizkigutenez, oinarrizko ebakidura taldeen metodoa aplikatuko dugu. Zuhaitzean, eskatzen dizkiguten tentsio horien adarrak egongo dira; hala, sistema matriziala ebaztean, zuzenean lortuko ditugu $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ eta $\underline{U}_3$ tentsioak (zuhaitzeko adarretako tentsio baitira).

Zuhaitzaren adar kopurua: $n-1=3$ 1., 2. eta 3. adarrek zuhaitza eratu dezakete, adar horien taldeak korapilo guztiak baititu; lotua da eta irekia da, beraz:



$$\begin{bmatrix} (2+j3)+(1+j)+(-j) & -j & -(-j+1+j) \\ -j & (-j)+(1+j)+(1-j) & -(-j+1-j) \\ -(-j+1+j) & -(-j+1-j) & (-j)+(1+j)+(-j2)+(1-j) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5-j5+j5 \\ -(1+j) \\ -j5+1+j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3+j3 & -j & -1 \\ -j & 2-j & -1+j2 \\ -1 & -1+j2 & 2-j3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1-j \\ 1-j4 \end{bmatrix}$$

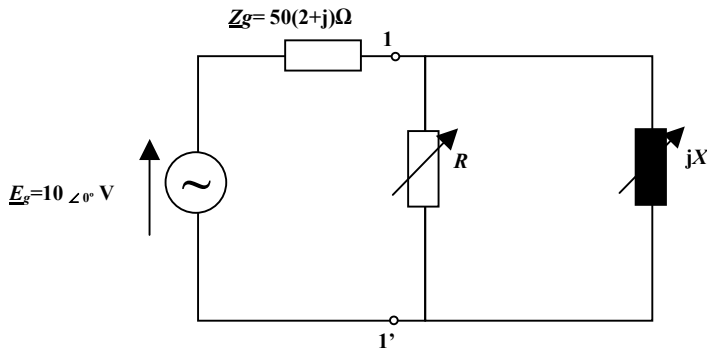
$$\Delta Y = \begin{vmatrix} 3+j3 & -j & -1 \\ -j & 2-j & -1+j2 \\ -1 & -1+j2 & 2-j3 \end{vmatrix} = 20-j4$$

$$\underline{U}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -j & -1 \\ -1-j & 2-j & -1+j2 \\ 1-j4 & -1+j2 & 2-j3 \end{vmatrix}}{20-j4} = (1,346-j1,731)V = 2,193 \angle -52,125^\circ V$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3+j3 & 5 & -1 \\ -j & -1-j & -1+j2 \\ -1 & -1-j4 & 2-j3 \end{vmatrix}}{20-j4} = 0,663-j2,317 = 2,41 \angle -74,023^\circ V$$

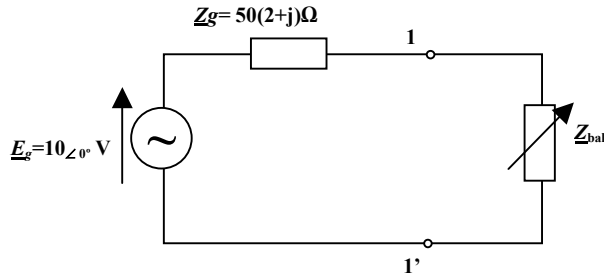
$$\underline{U}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3+j3 & -j & 5 \\ -j & 2-j & -1-j2 \\ -1 & -1+j2 & -1-j4 \end{vmatrix}}{20-j4} = 1,913-j1,817 = 2,639 \angle -43,524^\circ V$$

Ariketa-zenbakia: 3.3



Zein izango dira R eta jX elementuen balioak, elementu biek osatzen duten taldeak potentzia maximoa gal dezan?

Ebazpena



$$\underline{Z}_{bal} = \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} \cdot \frac{(R - jX_L)}{(R - jX_L)} = \frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2} + j \frac{R^2 \cdot X_L}{R^2 + X_L^2} \quad (1)$$

Zirkuitua pasibotu denean, $\underline{Z}_{bal}$ honen balioak bat etorri behar du 1 eta 1' puntuetatik ikusitako inpedantzia totalaren konjugatuarekin (potentzia maximoa transferitzeko). Eta horixe da $\underline{Z}_g$ inpedantzia, hain zuzen ere.

Beraz:

$$\underline{Z}_{bal} = \underline{Z}_g^* = (100 - j50) \, \Omega \quad (2)$$

Osagaika berdinduko ditugu (1) eta (2) adierazpenak, bi ezezagun horiek ebazteko beharko ditugun bi ekuazioak lortzeko:

$$\operatorname{Re}[\underline{Z}_{bal}] = \operatorname{Re}[\underline{Z}g^*] \Rightarrow \frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2} = 100 \quad (3)$$

$$\operatorname{Im}[\underline{Z}_{bal}] = \operatorname{Im}[\underline{Z}g^*] \Rightarrow \frac{R^2 \cdot X_L}{R^2 + X_L^2} = -50 \quad (4)$$

(3) eta (4) ekuazioen arteko zatiketa eginez, X_L -ren eta R -ren arteko erlazioa lortuko dugu:

$$\left. \begin{aligned} R \cdot X_L^2 - 100 \cdot R^2 - 100 \cdot X_L^2 &= 0 \\ R^2 \cdot X_L + 50 \cdot R^2 - 50 \cdot X_L^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2}}{\frac{R^2 \cdot X_L}{R^2 + X_L^2}} = \frac{100}{-50} \rightarrow \frac{X_L}{R} = -2 \rightarrow X_L = -2R \quad (5)$$

Eta, orain, (5) erlazioa lehenengo ekuazioan ($R \cdot X_L^2 - 100 \cdot R^2 - 100 \cdot X_L^2 = 0$) ordezkatzuz:

$$4R^3 - 100R^2 - 400R^2 = 0$$

$$R^3 - 125R^2 = 0$$

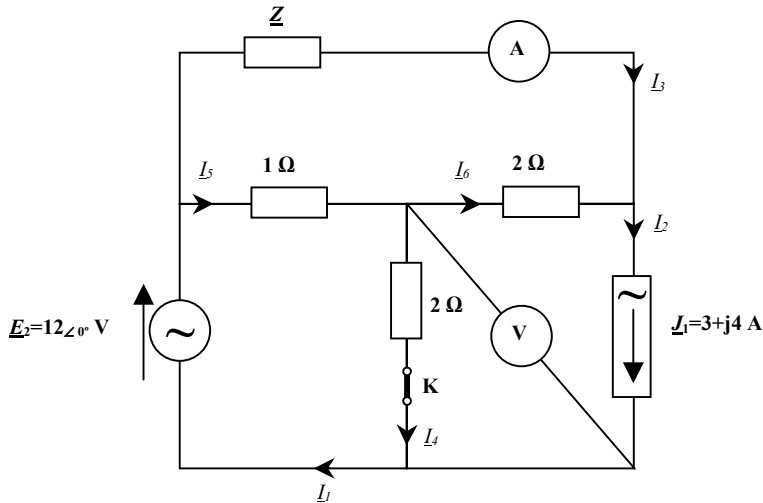
$$R^2(R - 125) = 0 \rightarrow \begin{cases} R = 0 \rightarrow P = 0 \\ R = 125 \rightarrow P \neq 0 \end{cases}$$

Emaitzak, beraz:

$$R = 125 \, \Omega$$

$$X_L = -250 \, \Omega$$

Ariketa-zenbakia: 3.4



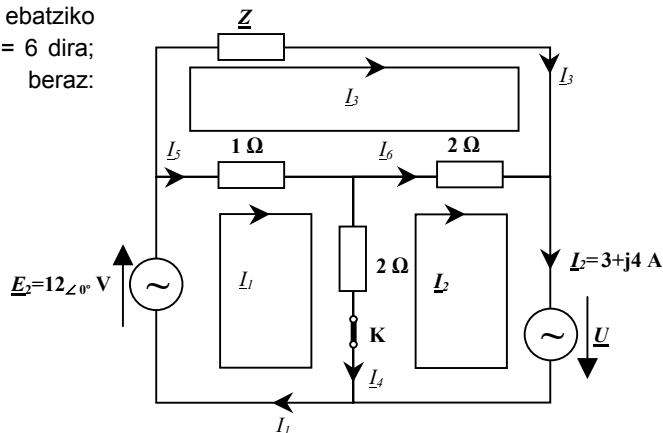
Irudiko zirkuituan, $\underline{I}_1$ iturriaren itxurazko potentzia nulua da **K** etengailua itxita dagoenean. Kondizio horietan, zehaztu:

1. $\underline{Z}$ inpedantziaren balioa.
2. Tresnen neurketak. **K** zabalduz gero, zehaztu:
3. Tresnen neurketak.

Ebazpena

K itxita dagoenean:

1. Sareen bidez ebatziko dugu. $n = 4$ eta $r = 6$ dira; sare kopurua, beraz: $r - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$



Sareen metodoa aplikatu ahal izateko, korronte-iturria tentsio-iturri bihurtu behar dugu. Korronte-iturria ideala denez, tentsio-iturri bihurtzeko, zirkuituaren geometria eraldatu behar genuke. Hori egin beharrean ordezkapenaren legea aplikatuko dugu. Korronte-iturria, horrenbestez, iturriaren korronte berak zeharkatuko duen tentsio-iturri batez ordezkatu dugu, baina tentsio-iturri horren tentsioa ezezaguna da, orain.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3+\underline{Z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \angle 0^\circ \\ \underline{U} \\ 0 \end{bmatrix}$$

baina:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{S}_1 = 0 \text{ VA} \\ I_2 = \underline{J}_1 = (3 + j4) \text{ A} \end{array} \right\} \rightarrow \underline{U} = 0 \text{ V}$$

Aurrekoa egin ondoren, planteatutako sisteman, 5 ezezagun agertzen dira. Ez da horrela, ezezagunak baitira I_2 (korrontea korronte-iturriaren korrontearekin bat datorrelako) eta $\underline{U}$ tentsioa, iturriaren potentzia nulua izan dadin $\underline{U} = 0$ izan behar duelako. Beraz, sistema hau ebatzi behar dugu:

$$I_2 = 3 + j4 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 12 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3+\underline{Z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3+\underline{Z} \end{vmatrix}} = \frac{96 + 24\underline{Z}}{8\underline{Z}} = \frac{12 + 3\underline{Z}}{\underline{Z}}$$

eta, beraz:

$$3 + j4 = \frac{12 + 3\underline{Z}}{\underline{Z}} \rightarrow \underline{Z} \cdot j4 = 12 \rightarrow \underline{Z} = -j3 = 3 \angle -90^\circ \Omega$$

Gainerako korronteak, admitantzien determinantea $\Delta \underline{Y} = 8 \cdot \underline{Z} = 8 \cdot -j3 = -j24$ baldin bada:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 3-j3 \end{vmatrix}}{-j24} = \frac{12 \cdot (4 \cdot (3-j3) - 4)}{-j24} = \frac{96 - j144}{-j24} = 6 + j4 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 12 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-j24} = \frac{12 \cdot (4+4)}{-j24} = \frac{96}{-j24} = j4 \text{ A}$$

2. Amperemetroaren neurketa: $A_1 = |I_3| = 4 \text{ A}$

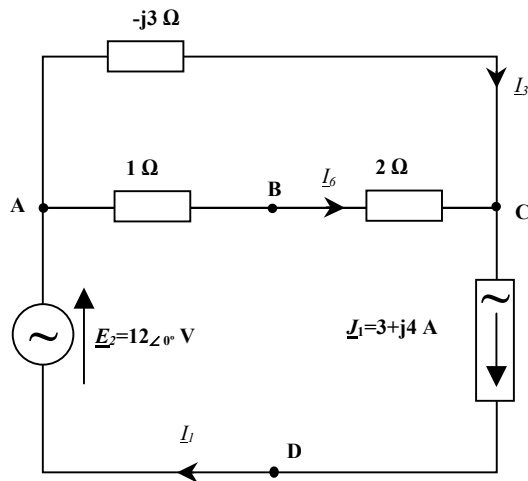
Voltmetroaren neurketa:

$$V_1 = |I_4 \cdot 2| = 6 \text{ V}$$

$$I_4 = I_1 - I_2 = (6 + j4) - (3 + j4) = 3 \text{ A}$$

K zabalik dagoenean: Hona hemen ebatzi beharreko zirkuitua.

3.

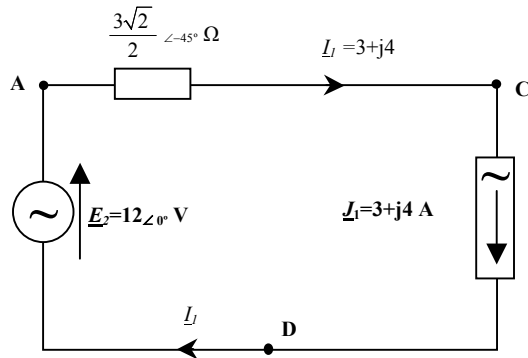


A eta C puntuen artean paraleloan dauden bi adarrak bere inpedantzia baliokideaz ordezkatzuko ditugu:

$$Z_{\text{bal AC}} = \frac{3 \cdot (-j3)}{3 - j3} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \angle -45^\circ \Omega$$

$$\underline{U}_{AC} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \angle -45^\circ \cdot (3 + j4) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \angle -45^\circ \cdot 5 \angle 53^\circ$$

$$\underline{U}_{AC} = \frac{15\sqrt{2}}{2} \angle 8^\circ \text{ V}$$



A eta C puntuen arteko tentsioa bera da aurreko zirkuituan eta azken honetan. Beraz, orain, tentsio hori ezaguna dugunean, aurreko zirkuitura joko dugu berriro korronteak lortzeko:

$$I_3 = \frac{U_{AC}}{-j3} = \frac{\frac{15\sqrt{2}}{2} \angle 8^\circ}{3 \angle -90^\circ} = 2,5\sqrt{2} \angle 98^\circ \text{ A}$$

$$A_1 = |I_3| = 2,5\sqrt{2} \text{ A}$$

I_6 korrontea:

$$I_6 = \frac{U_{AC}}{3} = \frac{\frac{15\sqrt{2}}{2} \angle 8^\circ}{3 \angle 0^\circ} = 2,5\sqrt{2} \angle 8^\circ \text{ A}$$

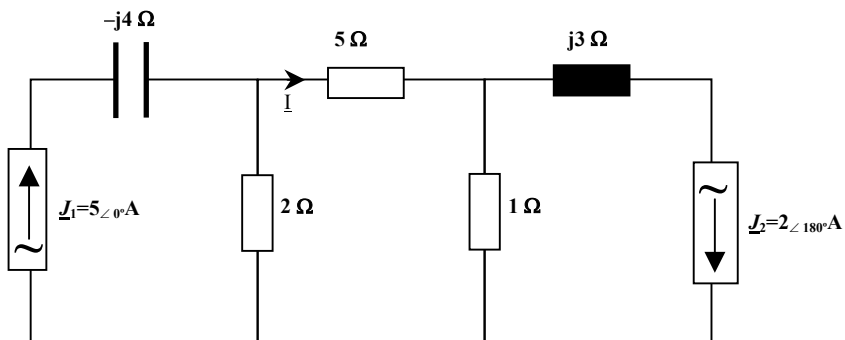
Voltmetroaren neurketa:

$$U_{BD} = U_{AD} - U_{AB}$$

$$U_{BD} = E_2 - 1 \cdot 2,5\sqrt{2} \angle 8^\circ = 12 \angle 0^\circ - 2,5\sqrt{2} \angle 8^\circ = 8,5 - j0,5 = 8,53 \angle -5,37^\circ \text{ V}$$

$$V_1 = |U_{BD}| = 8,53 \text{ V}$$

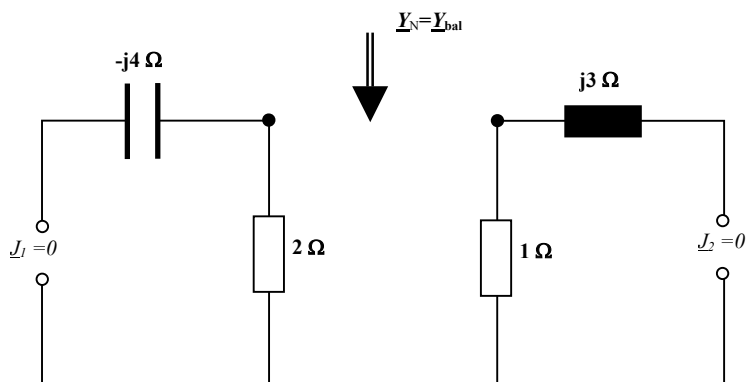
Ariketa-zenbakia: 3.5



Irudiko zirkuituan, kalkulatu I korrontearen balioa, Norton-en teorema erabiliz.

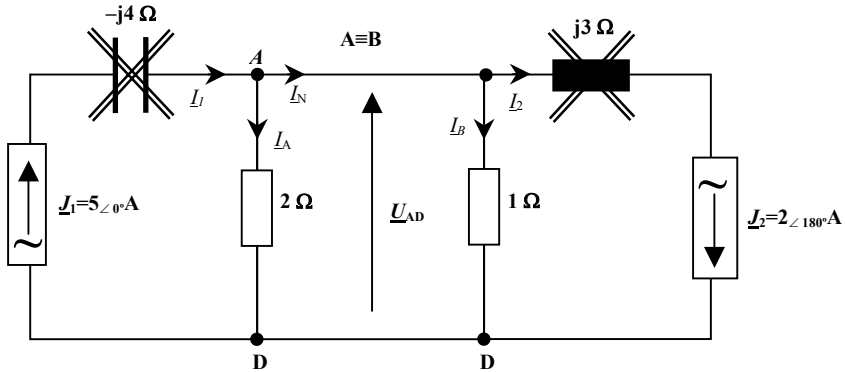
Ebazpena

1. Norton-en admitantzia:



$$Y_N = Y_{bal} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{3} \text{ S} = \frac{1}{3} \angle 0^\circ \text{ S}$$

Norton-en korrontea



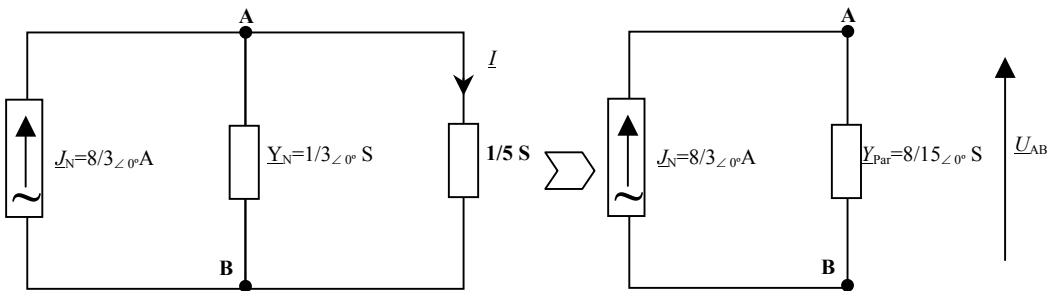
Korapiloen metodoa erabiliz:

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right] \cdot [U_{AD}] = [5 \angle 0^\circ - 2 \angle 180^\circ] \quad \text{eta} \quad U_{AD} = 7 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \text{ V}$$

$$I_A = \frac{U_{AD}}{2} = \frac{\frac{14}{3} \angle 0^\circ}{2 \angle 0^\circ} = \frac{7}{3} \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$I_N = I_1 - I_A = 5 \angle 0^\circ - \frac{7}{3} \angle 0^\circ = \frac{8}{3} \angle 0^\circ \text{ A}$$

Norton-en baliokidea eraiki, eta I lortuko dugu

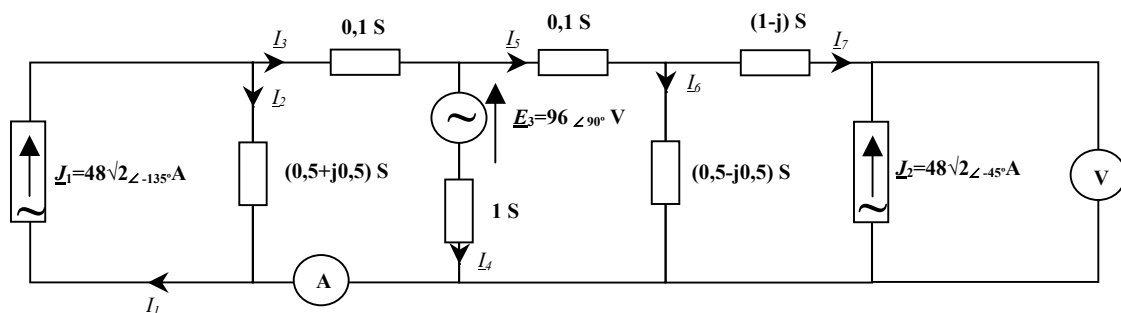


$$Y_{Par} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \angle 0^\circ \text{ S}$$

$$U_{AB} = \frac{J_N}{Y_{Par}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{8}{15}} = 5 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$I = \frac{1}{5} \cdot 5 \angle 0^\circ = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Ariketa-zenbakia: 3.6

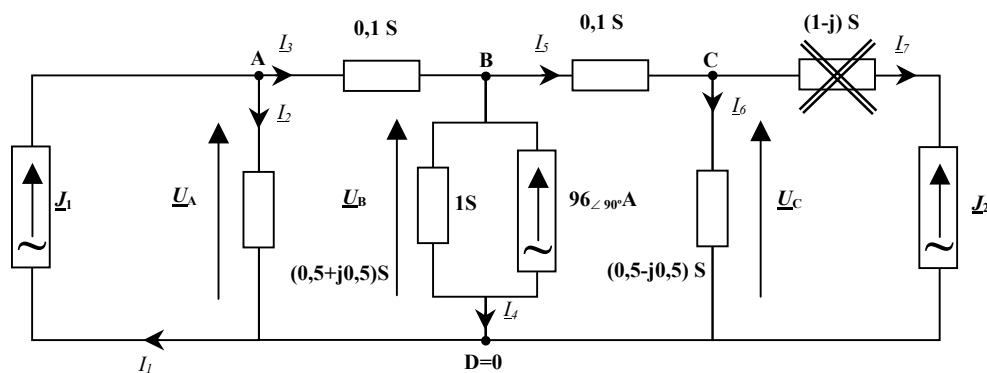


Irudiko zirkuituan, kalkulatu:

1. Tresnen neurketak.
2. $Y_2 = (0,5+j0,5)$ S-eko admitantziaren potentziak.
3. Iturrien jokabidea.

Ebazpena

Tentsio-iturri erreala korronte-iturri bihurtuko dugu, eta korapiloen metodoa erabiliz ebatziko dugu.



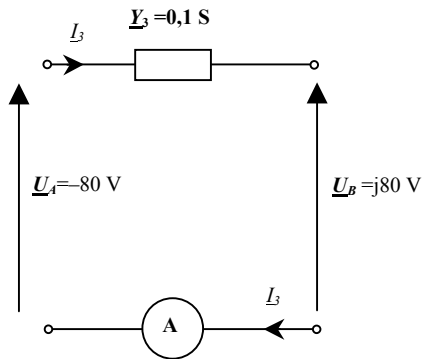
$$\begin{bmatrix} 0,6 + j0,5 & -0,1 & 0 \\ -0,1 & 1,2 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,6 - j0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ \underline{U}_B \\ \underline{U}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48\sqrt{2} \angle -135^\circ \\ 96 \angle 90^\circ \\ 48\sqrt{2} \angle -45^\circ \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}_A = \frac{\begin{vmatrix} 48\sqrt{2} \angle -135^\circ & -0,1 & 0 \\ 96 \angle 90^\circ & 1,2 & -0,1 \\ 48\sqrt{2} \angle -45^\circ & -0,1 & 0,6 - j0,5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,6 + j0,5 & -0,1 & 0 \\ -0,1 & 1,2 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,6 - j0,5 \end{vmatrix}} = 80 \angle 180^\circ \text{ V} = -80 \text{ V}$$

$$\underline{U}_B = \frac{\begin{vmatrix} 0,6 + j0,5 & 48\sqrt{2} \angle -135^\circ & 0 \\ -0,1 & 96 \angle 90^\circ & -0,1 \\ 0 & 48\sqrt{2} \angle -45^\circ & 0,6 - j0,5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,6 + j0,5 & -0,1 & 0 \\ -0,1 & 1,2 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,6 - j0,5 \end{vmatrix}} = 80 \angle 90^\circ \text{ V} = j80 \text{ V}$$

$$\underline{U}_C = \frac{\begin{vmatrix} 0,6 + j0,5 & -0,1 & 48\sqrt{2} \angle -135^\circ \\ -0,1 & 1,2 & 96 \angle 90^\circ \\ 0 & -0,1 & 48\sqrt{2} \angle -45^\circ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,6 + j0,5 & -0,1 & 0 \\ -0,1 & 1,2 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,6 - j0,5 \end{vmatrix}} = 80 \angle 0^\circ \text{ V} = 80 \text{ V}$$

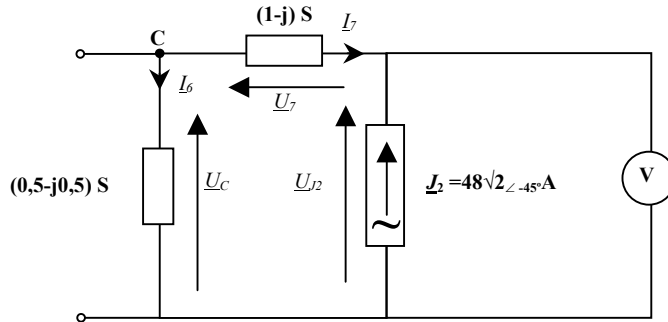
1. Amperemetroaren neurketa:



$$\underline{I}_3 = (\underline{U}_A - \underline{U}_B) \cdot \underline{Y}_3 = (-80 - j80) \cdot 0,1 = 8\sqrt{2} \angle -135^\circ \text{ A}$$

$$A_I = |\underline{I}_3| = 8\sqrt{2} \text{ A}$$

Voltmetroaren neurketa:



$$I_7 = -J_2 = -48\sqrt{2} \angle -45^\circ = 48\sqrt{2} \angle 135^\circ \text{ A}$$

$$\underline{U}_7 = \frac{I_7}{1-j} = \frac{48\sqrt{2} \angle 135^\circ}{\sqrt{2} \angle -45^\circ} = 48 \angle 180^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{J2} = \underline{U}_C - \underline{U}_7 = 80 \angle 0^\circ - 48 \angle 180^\circ = 128 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$V_1 = |\underline{U}_{J2}| = 128 \text{ V}$$

2.

$$\underline{S}_{Y2} = \underline{U}_A \cdot \underline{I}_2^* = 80 \angle 180^\circ \cdot 40\sqrt{2} \angle -135^\circ = 3.200\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ VA} = (3.200 + j3.200) \text{ VA}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{U}_A \cdot (0,5 + j0,5) = 80 \angle 180^\circ \cdot 0,5\sqrt{2} \angle 45^\circ = 40\sqrt{2} \angle -135^\circ \text{ A}$$

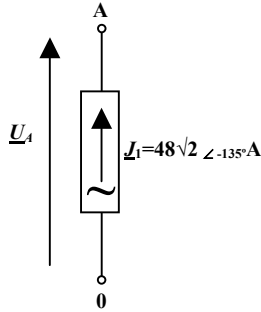
Edo beste modu batera adierazita:

$$\underline{S}_{Y2} = \underline{U}_A^2 \cdot \underline{Y}_2 = (80)^2 \cdot (0,5 + j0,5) = 6.400 \cdot (0,5 + j0,5) = (3.200 + j3.200) \text{ VA}$$

$$P_{Y2} = 3.200 \text{ W}$$

$$Q_{Y2} = 3.200 \text{ var}$$

3.

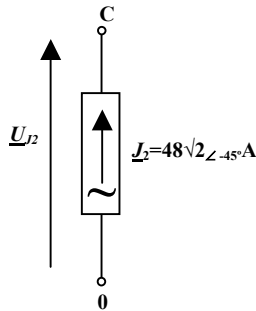


Hargailu-hitzarmena erabilia:

$$\underline{S}_{J1} = -\underline{U}_A \cdot \underline{I}_1^* = 80 \angle 0^\circ \cdot 48\sqrt{2} \angle 135^\circ = 3.840\sqrt{2} \angle 135^\circ \text{ VA}$$

$$\underline{S}_{J1} = (-3.840 + j3.840) \text{ VA}$$

P_{J1} negatibo irten denez edo, beste era batera esanda, $\underline{S}_{J1}$ bigarren koadrantean dagoenez, SORGAILUA da.

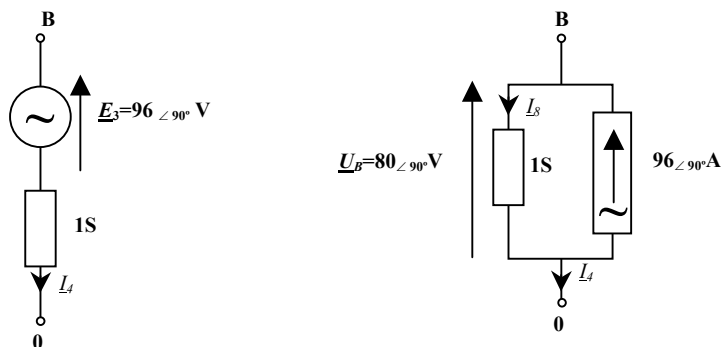


Hargailu-hitzarmena erabiltzeko, tentsioari polaritatea aldatu behar zaio.

$$\underline{S}_{J2} = -\underline{U}_{J2} \cdot \underline{I}_2^* = 128 \angle 180^\circ \cdot 48\sqrt{2} \angle 45^\circ = 6.144\sqrt{2} \angle 225^\circ \text{ VA}$$

$$\underline{S}_{J2} = (-6.144 - j6.144) \text{ VA}$$

Iturri honetan ere potentzia aktiboa, P_{J2} , negatibo irten zaigunez edo $\underline{S}_{J2}$ hirugarren koadrantean dagoenez, SORGAILUA da.



Iturriaren jokabidea zein den jakiteko, I_4 korronea ezagutu beharko dugu. Horretarako, iturri eraldatuan Kirchhoffen 1. legea aplikatuz:

$$I_4 = I_8 - 96 \angle 90^\circ = \underline{U}_B \cdot 1 \angle 0^\circ - 96 \angle 90^\circ =$$

$$80 \angle 90^\circ - 96 \angle 90^\circ = 16 \angle -90^\circ \text{ A}$$

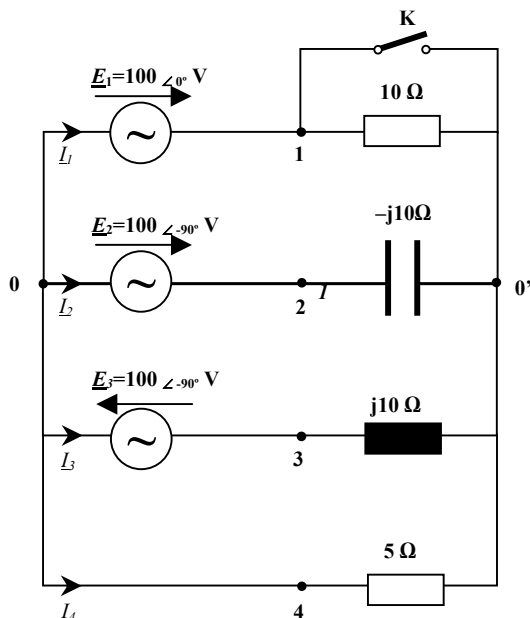
Korrontearen noranzkoan ikus daitekeenez, hargailu-hitzarmena erabili dugu; beraz:

$$\underline{S}_{E3} = \underline{E}_3 \cdot \underline{I}_4^* = 96 \angle 90^\circ \cdot 16 \angle 90^\circ = 1536 \angle 180^\circ \text{ VA}$$

$$\underline{S}_{E3} = (-1536 + j0) \text{ VA}$$

P_{E3} potentzia aktiboa negatiboa da. Hau da, xurgatu ezean, potentzia aktiboa sortuko du. Beraz, SORGAILUA da.

Ariketa-zenbakia: 3.7



Irudiko zirkuituan:

1. **K** zabalik dagoenean, adierazi iturriak hargailu edo sorgailu gisa ari diren. Kasu bakoitzean, kalkulatu emandako edo xurgatutako potentzia.
2. Zer gertatuko da **K** etengailua itxiz gero?

Ebazpena

K zabalik: Millman-en teorema aplikatuz ebatziko dugu:

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{0'0} &= \frac{\underline{U}_{10} \cdot \underline{Y}_1 + \underline{U}_{20} \cdot \underline{Y}_2 + \underline{U}_{30} \cdot \underline{Y}_3 + \underline{U}_{40} \cdot \underline{Y}_4}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4} = \\
 &= \frac{100 \angle 0^\circ \cdot \frac{1}{10 \angle 0^\circ} + 100 \angle -90^\circ \cdot \frac{1}{10 \angle -90^\circ} - 100 \angle -90^\circ \cdot \frac{1}{10 \angle 90^\circ} + 0 \cdot \frac{1}{5 \angle 0^\circ}}{\frac{1}{10 \angle 0^\circ} + \frac{1}{10 \angle 90^\circ} + \frac{1}{10 \angle -90^\circ} + \frac{1}{5 \angle 0^\circ}} = \\
 &= \frac{10 \angle 0^\circ + 10 \angle 0^\circ + 10 \angle 0^\circ + 0 \angle 0^\circ}{\frac{3}{10} \angle 0^\circ} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{0'0} + 10_{\angle -90^\circ} \cdot \underline{I}_2 - 100_{\angle -90^\circ} = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{I}_2 = 10\sqrt{2}_{\angle -45^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{U}_{0'0} + 10_{\angle 90^\circ} \cdot \underline{I}_3 + 100_{\angle -90^\circ} = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{I}_3 = 10\sqrt{2}_{\angle 45^\circ} \text{ A}$$

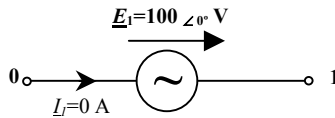
$$\underline{U}_{0'0} + 5_{\angle 0^\circ} \cdot \underline{I}_4 = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{I}_4 = 20_{\angle 180^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 = 0 \text{ A} \Rightarrow$$

$$\underline{I}_1 = -10\sqrt{2}_{\angle -45^\circ} - 10\sqrt{2}_{\angle 45^\circ} - 20_{\angle 180^\circ} = 0 \text{ A}$$

1. Iturrien jokabidea:

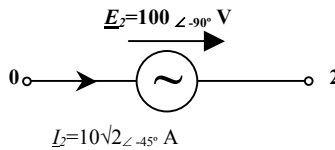


Hargailu-hitzarmena erabilita:

$$\underline{S}_{E1} = \underline{E}_1 \cdot (-\underline{I}_1)^* = 100_{\angle 0^\circ} \cdot 0 = 0 \text{ VA}$$

$$\underline{S}_{E1} = (0 + j0) \text{ VA}$$

P_{E1} eta Q_{E1} nuluak irten dira, iturri honek ez du lanik egiten.

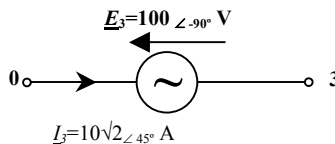


Hargailu-hitzarmena erabilita:

$$\underline{S}_{E2} = \underline{E}_2 \cdot (-\underline{I}_2)^* = 100_{\angle -90^\circ} \cdot 10\sqrt{2}_{\angle -135^\circ} = 1.000\sqrt{2}_{\angle 135^\circ} \text{ VA}$$

$$\underline{S}_{E2} = (-1.000 + j1.000) \text{ VA}$$

P_{E2} negatiboa denez, edo $\underline{S}_{E2}$ bigarren koadrantean dagoenez, SORGAILUA da.



Hargailu-hitzarmena erabilia:

$$\underline{S}_{E3} = \underline{E}_3 \cdot \underline{I}_3^* = 100 \angle -90^\circ \cdot 10\sqrt{2} \angle -45^\circ = 1.000\sqrt{2} \angle -135^\circ \text{ VA}$$

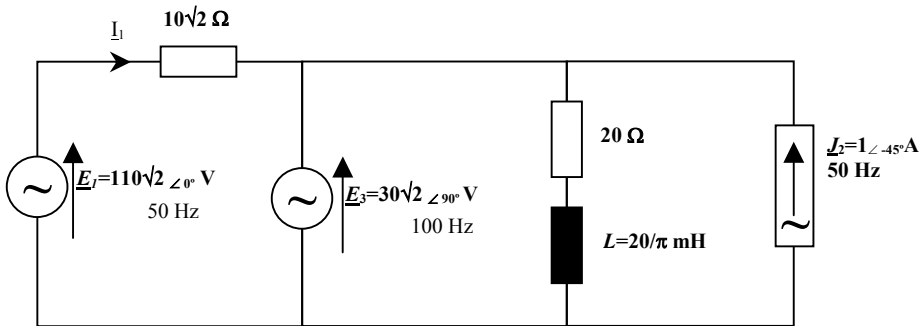
$$\underline{S}_{E3} = (-1.000 - j1.000) \text{ VA}$$

P_{E3} negatibo denez, edo $\underline{S}_{E3}$ hirugarren koadrantean dagoenez, SORGAILUA da.

K itxita:

2. K etengailua ixten badugu, $0'$ puntuaren potentziala 1 puntuarenarekin bat etorriko da: $0'=1$. Eta, horren ondorioz, $\underline{U}_{0'0}$ tentsioaren balioa eta $\underline{E}_1$ iturriarena berdinak izango dira. Baina $\underline{E}_1=100 \angle 0^\circ \text{ V}$ da, hau da, K zabalik zegoenean $\underline{U}_{0'0}$ -k hartzen zuen balio bera. Ondorioz, K itxita nahiz zabalik izanda $\underline{U}_{0'0}$ -k balio bera hartzen duenez, egoera bertsuan egongo gara, adarretan tentsio eta korrante bertsuekin, alegia.

Ariketa-zenbakia: 3.8

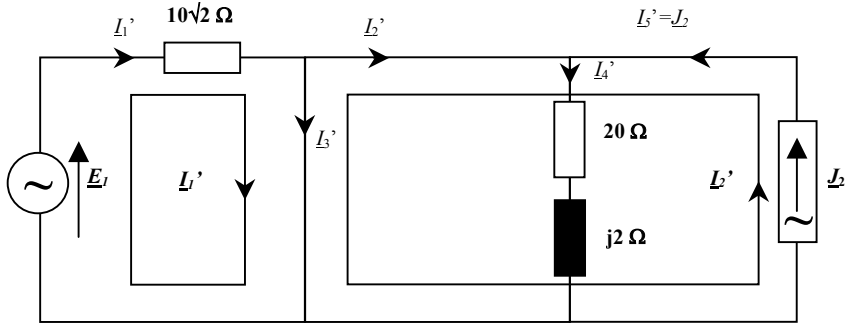


Irudiko zirkuituan, kalkulatu I_1 korrantearen balioa.

Ebazpena

Maiztasun desberdineko iturriak ditugunez, gainezarpenaren teorema aplikatuz ebatzi beharko dugu. Bi zirkuitu ebatziko ditugu: batek 50 Hz-eko iturriak bakarrik ditu, eta besteak 100 Hz-eko iturria soilik. Bi zirkuituetako I_1 korranteen batua izango da emaitza.

A zirkuitua: 50 Hz-eko sistema:



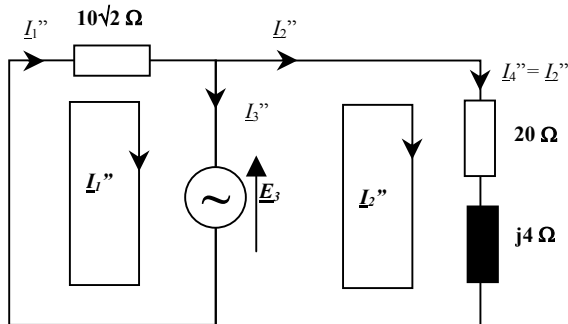
$$\underline{Z}_L = jX_L = j\omega L = j \cdot 2\pi f \cdot L = j2\pi 50 \frac{20}{\pi} 10^{-3} = j2\Omega$$

$$I_1' = \frac{E_1}{R} = \frac{110\sqrt{2} \angle 0^\circ}{10\sqrt{2}} = 11 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Emaitza denboraren eremuan eman beharko da, ez fasoreen bidez:

$$i_1' = 11\sqrt{2} \cos(314t) \text{ A}$$

B zirkuitua: 100 Hz-eko sistema:



$$\underline{Z}_L = jX_L = j\omega L = j \cdot 2\pi f \cdot L = j2\pi 100 \frac{20}{\pi} 10^{-3} = j4\Omega$$

$$I_1'' = -\frac{E_3}{10\sqrt{2}} = -\frac{30\sqrt{2} \angle 90^\circ}{10\sqrt{2}} = -3 \angle 90^\circ = 3 \angle -90^\circ \text{ A}$$

$$i_1'' = 3\sqrt{2} \cos(628t - 90^\circ) \text{ A}$$

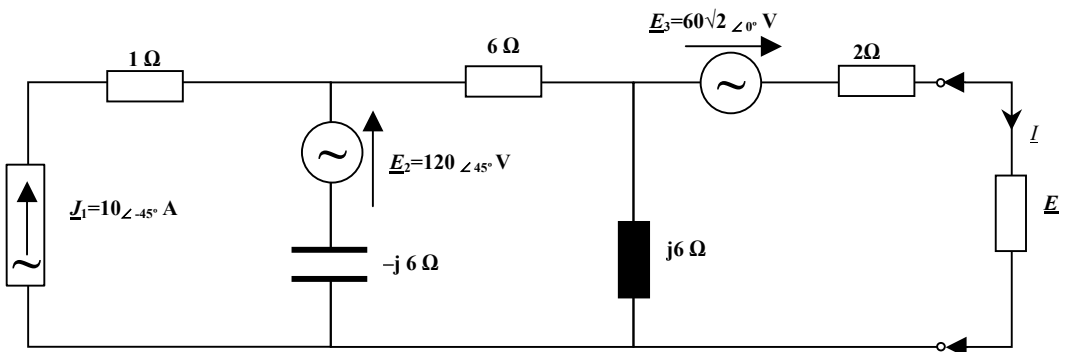
edo

$$i_1'' = 3\sqrt{2} \cos\left(628t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ A}$$

Eta 100 Hz-eko sistemaren emaitza eta 50 Hz-ekoarena batuta lortuko dugu jatorrizko zirkuituaren emaitza.

$$i_1 = i_1' + i_1'' = 11\sqrt{2} \cos(314t) + 3\sqrt{2} \cos\left(628t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ A}$$

Ariketa-zenbakia: 3.9



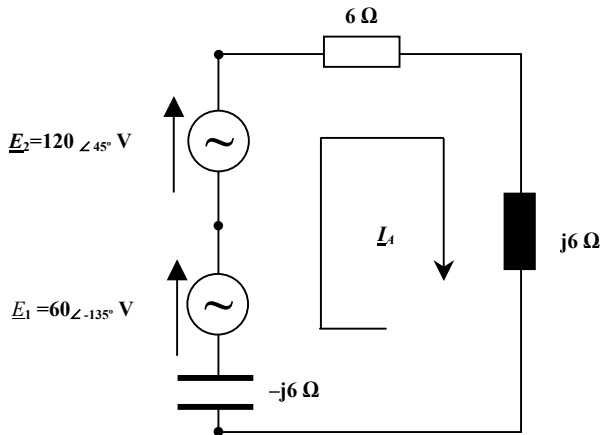
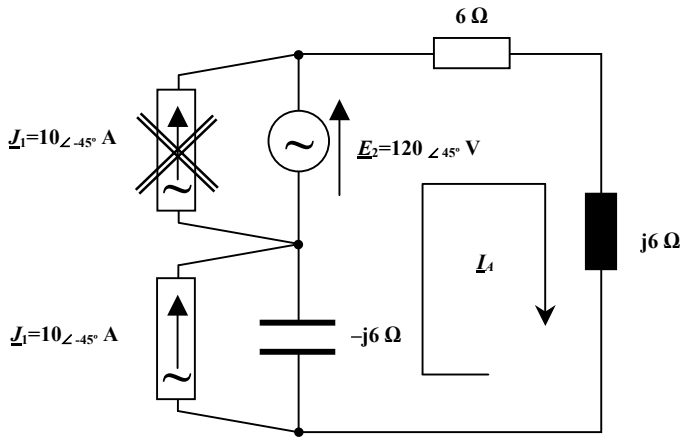
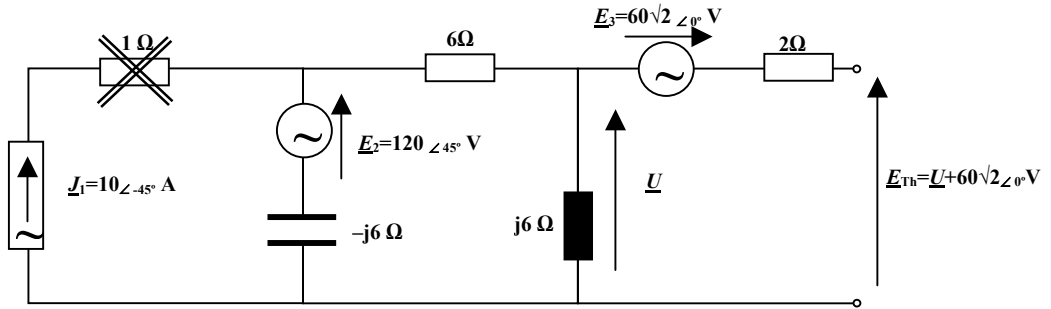
1. Kalkulatu irudian agertzen den I korrontearen balioa kasu hauetan:

- $E = -j6 \Omega$ denean.
- $E = j2 \Omega$ denean.
- Zein E konektatu behar da potentzia maximoa transferi dakion?

2. E -ri eman dakioken potentzia maximoaren balioa.

Ebazpena

E elementuaren borneen arteko Theveninen baliokidea kalkulatu dugu. Eta puntu horretarainoko zirkuitua tentsio-iturri batez eta harekiko seriean dagoen inpedantzia ordezkatuko dugu.

Theveninen tentsioa:

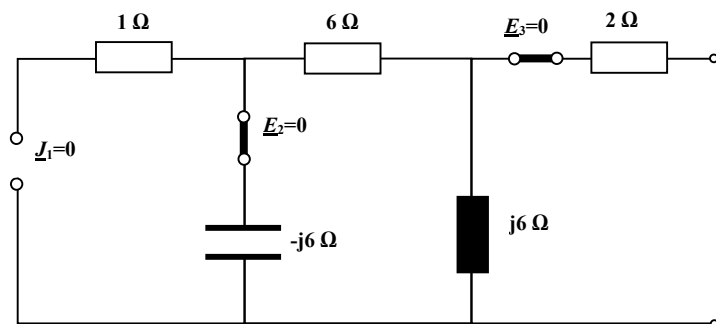
$$\underline{I}_A = \frac{120 \angle 45^\circ + 60 \angle -135^\circ}{6 + j6 - j6} = 10 \angle 45^\circ \text{ A}$$

$$\underline{U} = j6 \cdot \underline{I}_A = j6 \cdot 10_{\angle 45^\circ} = 60_{\angle 135^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{E}_{Th} = \underline{U} + \underline{E}_3 = 60_{\angle 135^\circ} + 60\sqrt{2}_{\angle 0^\circ}$$

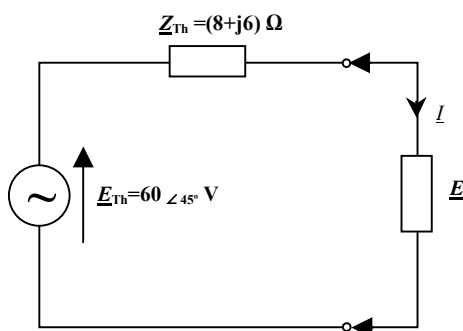
$$\underline{E}_{Th} = 60_{\angle 45^\circ} \text{ V}$$

Theveninen impedantzia: hau kalkulatzeko, jatorrizko zirkuitua pasibotuko dugu.



$$\underline{Z}_{Th} = \frac{(6 - j6) \cdot j6}{(6 - j6) + j6} + 2 = 6 + j6 + 2 = (8 + j6) \Omega$$

1.



$$\underline{E} = -j6 \Rightarrow \underline{I} = \frac{60_{\angle 45^\circ}}{8 + j6 - j6} = 7,5_{\angle 45^\circ} \text{ A}$$

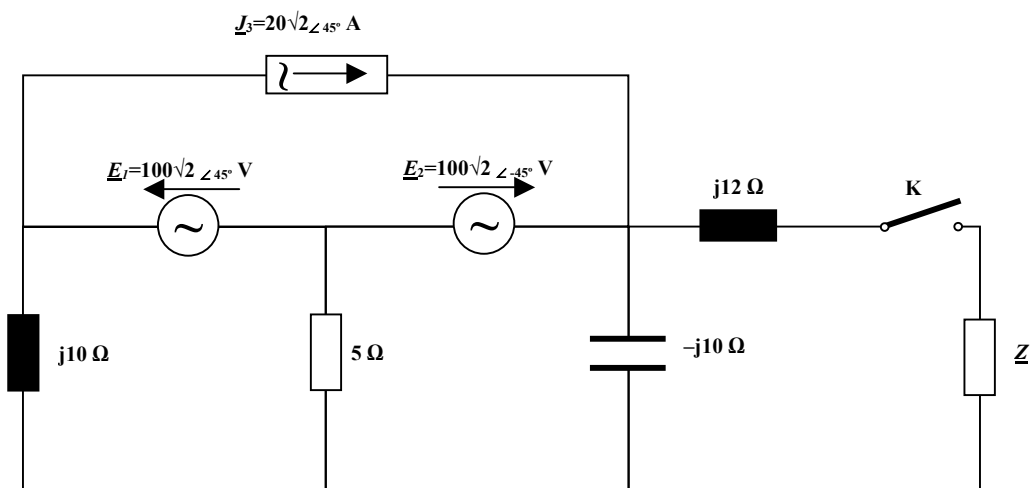
$$\underline{E} = +j2 \Rightarrow \underline{I} = \frac{60_{\angle 45^\circ}}{8 + j6 + j2} = 3,75\sqrt{2}_{\angle 0^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{E} = \underline{Z}_{Th}^* = 8 - j6 \Rightarrow$$

$$\underline{I} = \frac{60 \angle 45^\circ}{8 + j6 + 8 - j6} = 3,75 \angle 45^\circ \text{ A}$$

$$2. \quad P_{\max}(\underline{E} = \underline{Z}_{Th}^*) = R \cdot I^2 = 8 \cdot (3,75)^2 = 112,5 \text{ W}$$

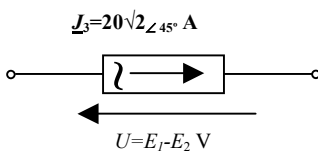
Ariketa-zenbakia: 3.10



1. Zehaztu $\underline{E}_1$ eta $\underline{J}_3$ iturrien izaera eta adierazi haien itxurazko potentziak ($\underline{S}_{E1}$ eta $\underline{S}_{J3}$) sortuak edo xurgatuak diren; kalkulatu, orobat, haien balioak K etengailua zabalik dagoenean.
2. K itxita dagoenean, kalkulatu $\underline{Z}$ -ren balioa potentzia maximoa transferi dakion.

Ebazpena

1. K zabalik



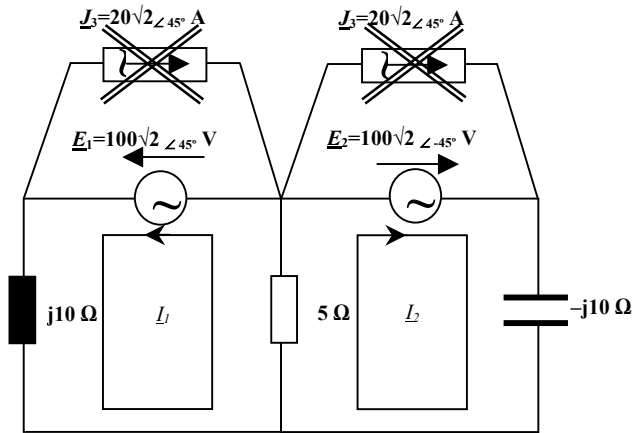
Hargailu-hitzarmena aplikatuz:

$$\underline{U} = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 = 100\sqrt{2} \angle 45^\circ - 100\sqrt{2} \angle -45^\circ$$

$$\underline{U} = 100 + j100 - 100 + j100 = 200 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$\underline{S}_{J3} = \underline{U} \cdot \underline{J}_3^* = 200 \angle 90^\circ \cdot 20\sqrt{2} \angle -45^\circ = 4.000\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ VA}$$

$$\underline{S}_{J3} = P + jQ = (4.000 + j4.000) \text{ VA} \rightarrow P_{J3} > 0 \text{ hargailua}$$

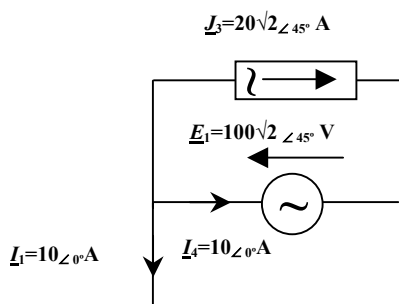


$$\begin{bmatrix} 5+j10 & 5 \\ 5 & 5-j10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\sqrt{2} \angle 45^\circ \\ 100\sqrt{2} \angle -45^\circ \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 100\sqrt{2} \angle 45^\circ & 5 \\ 100\sqrt{2} \angle -45^\circ & 5-j10 \end{vmatrix}}{(5+j10) \cdot (5-j10) - 25} = 10 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5+j10 & 100\sqrt{2} \angle 45^\circ \\ 5 & 100\sqrt{2} \angle -45^\circ \end{vmatrix}}{(5+j10) \cdot (5-j10) - 25} = 10 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Zirkuituaren geometria eraldatu dugunean, $\underline{E}_1$ iturriaren adarra ere eraldatu egin da. Beraz, adar horretako korrantea kalkulatzeko, hasierako zirkuitura itzuli beharko dugu.



K itxita

$$I_1 + I_4 + J_3 = 0$$

$$I_4 = -I_1 - J_3 = -10 - 20 - j20 = (-30 - j20) \text{ A}$$

Polaritate-erreferentzia hauekin hargailu-hitzaurrea du.

$$S_{E1} = \underline{E}_1 \cdot \underline{I}_1' = 100\sqrt{2} \angle 45^\circ \cdot (-30 - j20)^*$$

$$S_{E1} = (100 + j100) \cdot (-30 + j20) = (-5.000 - j1.000) \text{ VA}$$

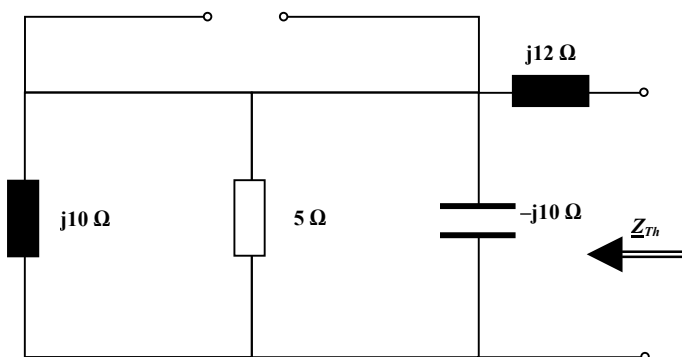
$$S_{E1} = -(5.000 + j1.000) \text{ VA} \rightarrow P_{E1} < 0 \text{ Sorgailua}$$

2. Theveninen baliokidea lortu beharko dugu inpedantziaren eta potentziaren balioak lortzeko.

Theveninen tentsioa: Etengailua zabalik dagoenean bat dator $-j10 \Omega$ -ko inpedantzia jausten den tentsioarekin. Aurreko ataletik badakigu zein den inpedantzia zeharreko korronea eta, beraz, tentsio-erorketa:

$$\underline{E}_{Th} = -j10 \cdot I_2 = 10 \angle -90^\circ \cdot 10 \angle 0^\circ = 100 \angle -90^\circ \text{ V}$$

Theveninen inpedantzia:



$$\underline{Z}_{Th} = \frac{1}{\frac{1}{j10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{-j10}} + j12 = (5 + j10) \Omega$$

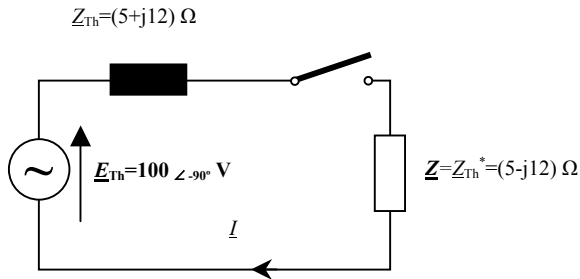
Potentzia maximoa transferi dadin: $\underline{Z} = \underline{Z}_{Th}^* = (5 - j12) \Omega$

Eta potentzia:

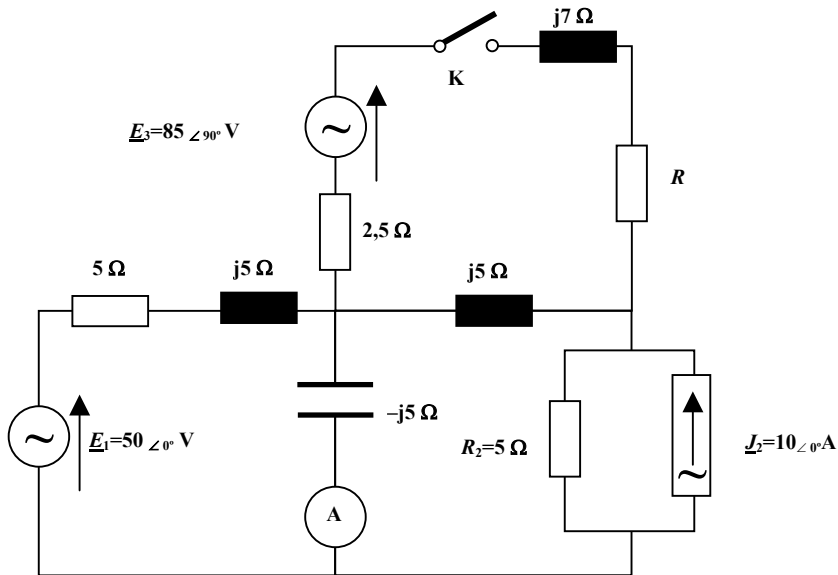
$$P_{\max} = R_{Th} \cdot I^2$$

$$I = \frac{100 \angle -90^\circ}{(5 + j12) + (5 - j12)} = \frac{100 \angle -90^\circ}{10 \angle 0^\circ} = 10 \angle -90^\circ \text{ A}$$

$$P_{\max} = R_{Th} \cdot I^2 = 5 \cdot 10^2 = 500 \text{ W}$$



Ariketa-zenbakia: 3.11



Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuiturako:

K zabalik dagoenean:

1. Amperemetroaren neurketa.
2. $\underline{E}_1$ eta $\underline{J}_2$ hargailuak edo sorgailuak diren.

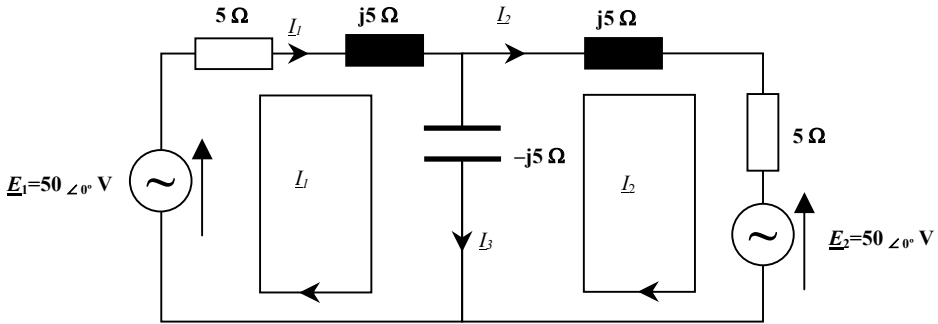
K itxita dagoenean:

R -ren balioa potentzia maximoa gal dezan. Potentzia horren balioa.

Ebazpena

K zabalik:

Korronte-iturri erreala tentsio-iturri erreala bihurtuko dugu: $R_2 = 5 \Omega$ eta $\underline{E}_2 = 10 \angle 0^\circ \cdot 5 = 50 \angle 0^\circ \text{ V}$



$$\begin{bmatrix} 5 & j5 \\ j5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \angle 0^\circ \\ -50 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 \angle 0^\circ & j5 \\ -50 \angle 0^\circ & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & j5 \\ j5 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{250 + j250}{25 + 25} = \frac{250\sqrt{2} \angle 45^\circ}{50 \angle 0^\circ} = 5\sqrt{2} \angle 45^\circ = (5 + j5) \text{ A}$$

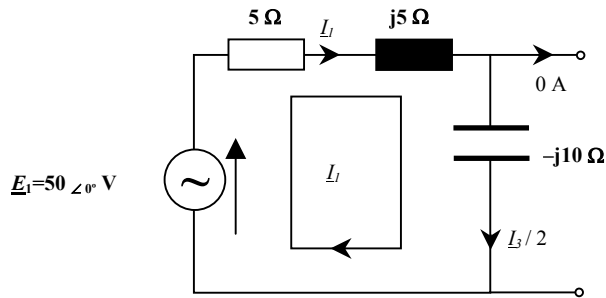
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 50 \angle 0^\circ \\ j5 & -50 \angle 0^\circ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & j5 \\ j5 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-250 - j250}{25 + 25} = 5\sqrt{2} \angle -135^\circ = (-5 - j5) \text{ A}$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = (5 + j5) - (-5 - j5) = (10 + j10) = 10\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ A}$$

Badago bide azkarrago bat adarretako korronteak kalkulatzeko, zirkuituaren simetria aprobetxatuz. Zirkuitua simetrikoa denez, kargen aldetik zein ize-en aldetik, Bartlett-en teorema aplikatuko dugu:

$$\frac{I_3}{2} = I_1 = \frac{50 \angle 0^\circ}{(5 - j5)} = 5\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ A}$$

$$I_3 = 2 \cdot I_1 = 10\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ A}$$

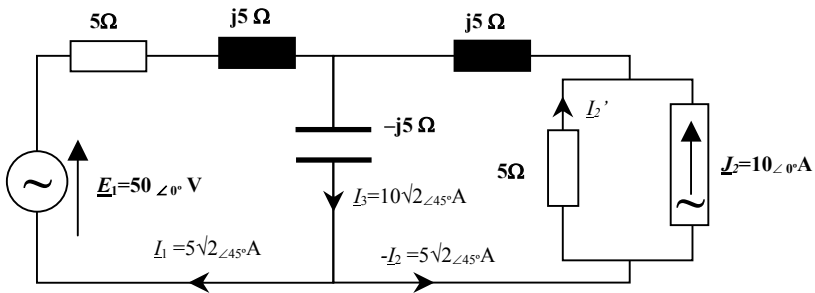


Simetria dela eta, $-I_2$ korronea eta I_1 berdinak izango dira, I_2 -ri zeinu negatiboa jarri diogu hasierako zirkuituaren I_2 -ren polaritatea errespetatzearren:

$$I_2' = -I_2 - J_2$$

$$I_2' = 5\sqrt{2} \angle 45^\circ - 10 \angle 0^\circ$$

$$I_2' = 5\sqrt{2} \angle 135^\circ \text{ A}$$



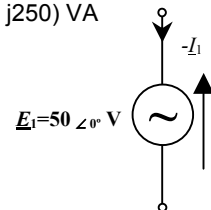
Zirkuitua aurreko prozeduretakoren bat erabiliz ebatzi ondoren:

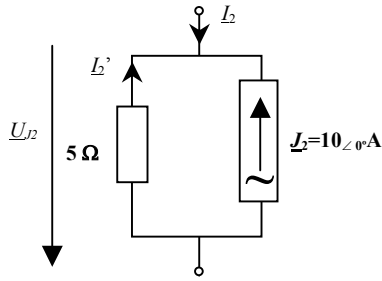
$$1. \quad A_1 = |I_3| = 10\sqrt{2} \text{ A}$$

2. Hargailu-hitzarmena hartuko dugu:

$$S_{E1} = \underline{E}_1 \cdot (-I_1)^* = 50 \angle 0^\circ \cdot (-5 + j5) = (-250 + j250) \text{ VA} = -(250 - j250) \text{ VA}$$

$$P_{E1} < 0 \rightarrow \text{SORGAILUA}$$





$$I_2 = -I_2' - 10_{\angle 0^\circ} = -5 - j5$$

$$I_2' = -(-5 - j5) - 10 = 5 + j5 - 10 = (-5 + j5) \text{ A}$$

$$U_{J2} = I_2' \cdot 5 = (-5 + j5) \cdot 5 = (-25 + j25) = 25\sqrt{2}_{\angle 135^\circ} \text{ V}$$

Hargailu-hitza mena kontuan hartuz:

$$\underline{S}_{J2} = \underline{U}_{J2} \cdot \underline{J}_2^* = 25\sqrt{2}_{\angle 135^\circ} \cdot 10_{\angle 0^\circ} = 250\sqrt{2}_{\angle 135^\circ} \text{ VA}$$

$$\underline{S}_{J2} = (-250 + j250) \text{ VA} = -(250 - j250) \text{ VA}$$

$$P_{J2} < 0 \rightarrow \text{SORGAILUA}$$

K itxita:

3. Theveninen inpedantzia eta tentsioa lortu behar ditugu. 1 eta 1' puntuen artean.

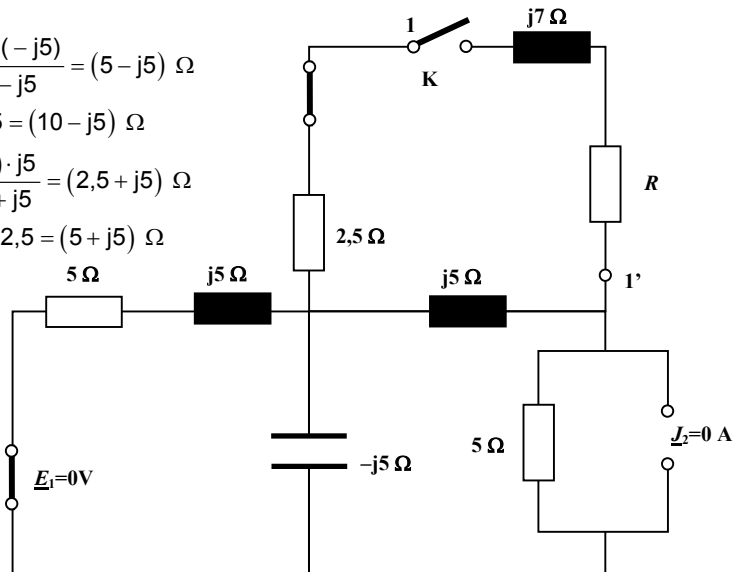
Theveninen inpedantzia:

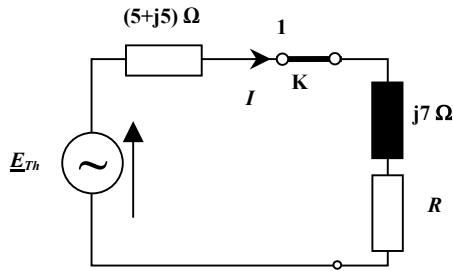
$$\underline{Z}_{\text{bal1}} = \frac{(5 + j5) \cdot (-j5)}{5 + j5 - j5} = (5 - j5) \Omega$$

$$\underline{Z}_{\text{bal2}} = 5 - j5 + 5 = (10 - j5) \Omega$$

$$\underline{Z}_{\text{bal3}} = \frac{(10 - j5) \cdot j5}{10 - j5 + j5} = (2,5 + j5) \Omega$$

$$\underline{Z}_{\text{Th}} = 2,5 + j5 + 2,5 = (5 + j5) \Omega$$





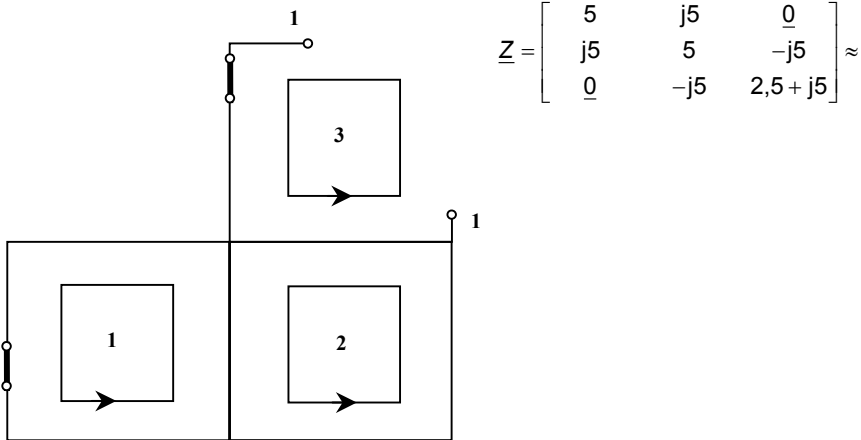
Potentzia maximoaren transferentziaren teoremaren arabera:

$$R = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_{Th} + X)^2} = \sqrt{5^2 + (5 + 7)^2}$$

$$R = \sqrt{25 + 144} = \pm 13 \Omega$$

$$\boxed{R = 13 \Omega}$$

Metodo orokorra edo matritziala da Theveninen inpedantzia lortzeko beste modu bat:

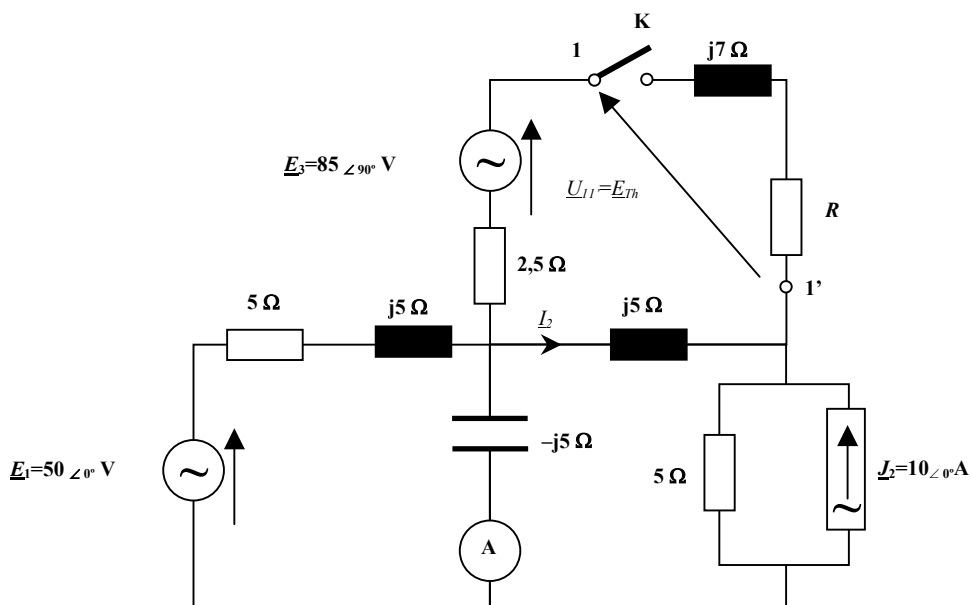


$$2. \text{ errenkada} - j \cdot 1. \text{ errenkada} \begin{bmatrix} 5 & j5 & \underline{0} \\ \underline{0} & 10 & -j5 \\ \underline{0} & -j5 & 2,5 + j5 \end{bmatrix} \approx$$

$$3. \text{ errenkada} + j/2 \cdot 2. \text{ errenkada} \begin{bmatrix} 5 & j5 & \underline{0} \\ \underline{0} & 10 & -j5 \\ \underline{0} & 0 & 5 + j5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{Z}_{Th} = Z_{33} = (5 + j5) \Omega}$$

Theveninen tentsioa:

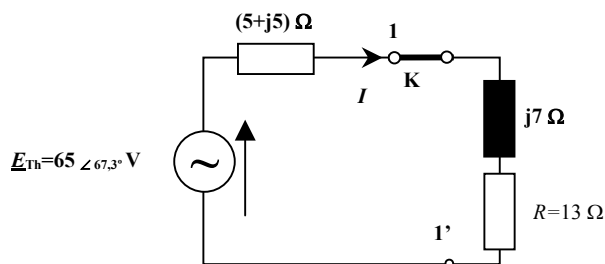


$$\underline{U}_{11'} = \underline{E}_3 + \underline{I}_2 \cdot j5$$

$$\underline{U}_{11'} = 85_{\angle 90^\circ} + (-5 - j5) \cdot j5$$

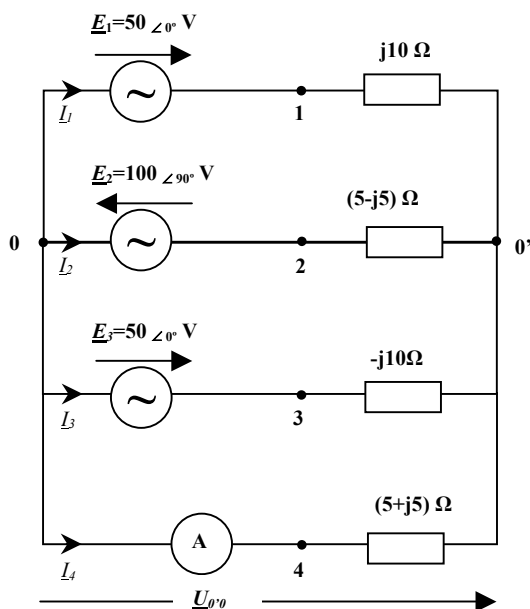
$$\underline{U}_{11'} = j85 - j25 + 25 = (25 + j60) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{11'} = \underline{E}_{Th} = 65_{\angle 67,3^\circ} \text{ V}$$



$$P_{\max} = R \cdot I^2 = R \cdot \frac{E_{Th}^2}{Z^2} = 13 \cdot \frac{65^2}{(\sqrt{18^2 + 12^2})^2} = 13 \cdot \frac{65^2}{468} = 117,36 \text{ W}$$

Ariketa-zenbakia: 3.12



Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuiturako:

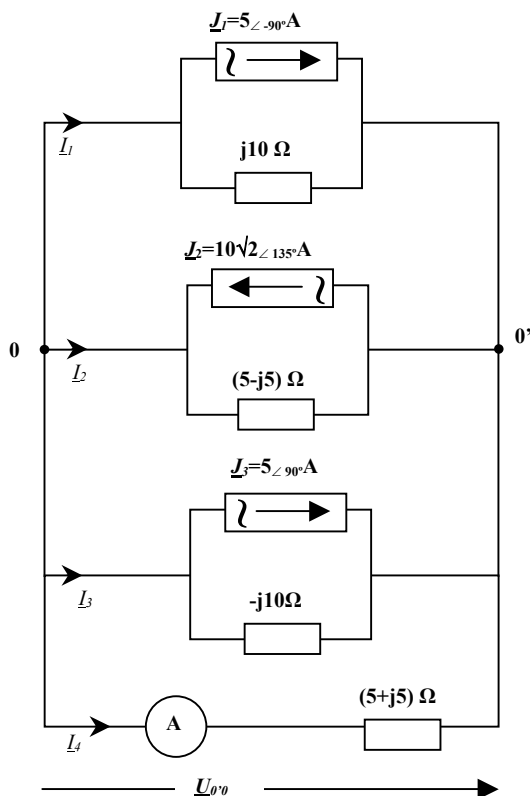
1. Amperemetroaren neurketa.
2. Iturrien izaera, eta adierazi zein potentzia-faktoreekin ari diren lan egiten.

Ebazpena

1. Millman-en teorema aplikatuz ebatziko dugu:

$$\begin{aligned}
 U_{0'0} &= \frac{U_{10} \cdot Y_1 + U_{20} \cdot Y_2 + U_{30} \cdot Y_3 + U_{40} \cdot Y_4}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4} = \\
 &= \frac{50 \angle 0^\circ \cdot \frac{1}{j10} - 100 \angle 90^\circ \cdot \frac{1}{5-j5} + 50 \angle 0^\circ \cdot \frac{1}{-j10} + 0 \cdot \frac{1}{5+j5}}{\frac{1}{j10} + \frac{1}{5-j5} + \frac{1}{-j10} + \frac{1}{5+j5}} = \frac{-j100 \cdot \frac{5+j5}{25+25}}{\frac{5+j5}{25+25}} = \\
 &= \frac{500 - j500}{10} = (50 - j50) \text{ V} = 50\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

$\underline{U}_{0'0}$ tentsioa korapiloen metodoa aplikatuz ere lor daiteke. Baina, korapiloen metodoa aplikatu ahal izateko, tentsio-iturri errealak korrante-iturri erreala bihurtu behar ditugu, eta ebatzi beharreko zirkuituak itxura hau hartuko du:



Tentsio-iturriak korrante-iturri bihurtuko ditugu:

$$\underline{J}_1 = \frac{50 \angle 0^\circ}{10 \angle 90^\circ} = 5 \angle -90^\circ \text{ A}$$

$$\underline{J}_2 = \frac{100 \angle 90^\circ}{5\sqrt{2} \angle -45^\circ} = 10\sqrt{2} \angle 135^\circ \text{ A}$$

$$\underline{J}_3 = \frac{50 \angle 0^\circ}{10 \angle -90^\circ} = 5 \angle 90^\circ \text{ A}$$

$n-1 = 1$ da; tentsio bakarra, beraz. Eta sistema 1×1 dimentsiokoa izango da.

$$\left(\frac{1}{j10} + \frac{1}{5-j5} + \frac{1}{-j10} + \frac{1}{5+j5} \right) \cdot (\underline{U}_{0'0}) = (5 \angle -90^\circ - 10\sqrt{2} \angle 135^\circ + 5 \angle 90^\circ) 90^\circ$$

$$\left(\frac{5 + j5 + 5 - j5}{25 + 25} \right) \cdot (\underline{U}_{0'0}) = (10 - j10)$$

$$\underline{U}_{0'0} = \frac{10 - j10}{\frac{10}{50}} = (50 - j50) \text{ V} = 50\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ V}$$

Aurrera jarraitzeko, lehenengo metodoan (Millman) erabilitako zirkuitua hartuko dugu, eta adierazpen hauek planteatuko ditugu, adar bakoitzean Kirchhoffen bigarren legea aplikatuz:

$$\underline{U}_{0'0} + j10 \cdot \underline{I}_1 - 50 \angle 0^\circ = 0 \Rightarrow \quad \underline{I}_1 = 5 \angle 0^\circ \text{ A}$$

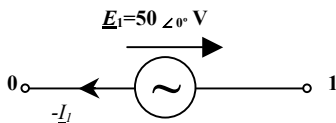
$$\underline{U}_{0'0} + (5 - j5) \underline{I}_2 + 100 \angle 90^\circ = 0 \Rightarrow \quad \underline{I}_2 = 10 \angle -90^\circ \text{ A}$$

$$\underline{U}_{0'0} - j10 \cdot \underline{I}_3 - 50 \angle 0^\circ = 0 \Rightarrow \quad \underline{I}_3 = 5 \angle 180^\circ \text{ A}$$

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 = 0 \text{ A} \Rightarrow \quad \underline{I}_4 = -(-5 - j10 + 5) = j10 = 10 \angle 90^\circ \text{ A}$$

1. $A_I = |\underline{I}_4| = 10 \text{ A}$

2.



Hargailu-hitzarmena hartuz:

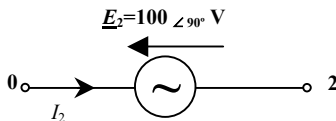
$$\underline{S}_{E1} = \underline{E}_1 \cdot (-\underline{I}_1)^* = 50 \angle 0^\circ \cdot 5 \angle 180^\circ = 250 \angle 180^\circ \text{ VA}$$

$$\underline{S}_{E1} = (-250 + j0) \text{ VA} = -(250 - j0) \text{ VA}$$

SORGAILUA da.

$$\cos \varphi = 1$$

Hargailu-hitzarmena hartuz:

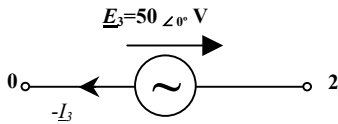


$$\underline{S}_{E2} = \underline{E}_2 \cdot (\underline{I}_2)^* = 100 \angle 90^\circ \cdot 10 \angle 90^\circ = 1.000 \angle 180^\circ \text{ VA}$$

$$\underline{S}_{E2} = (-1.000 + j0) \text{ VA} = -(1.000 - j0) \text{ VA}$$

SORGAILUA da.

$$\cos \varphi = 1$$



Hargailu-hitzarmena hartuz:

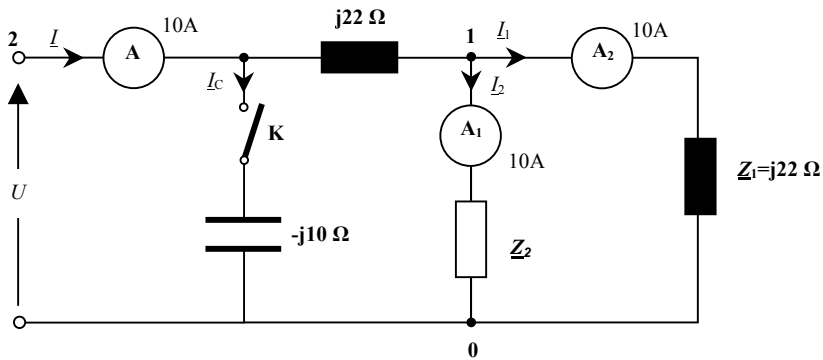
$$\underline{S}_{E3} = \underline{E}_3 \cdot (-\underline{I}_3)^* = 50 \angle 0^\circ \cdot 5 \angle 0^\circ = 250 \angle 0^\circ \text{ VA}$$

$$\underline{S}_{E3} = (250 + j0) \text{ VA}$$

HARGAILUA da.

$$\cos \varphi = 1$$

Ariketa-zenbakia: 3.13



Irudiko zirkuituan K etengailua zabalik dagoenean, hiru amperemetroek balio bera neurtzen dute (10 A). Kalkulatu:

K zabalik dagoenean:

1. $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, eta $\underline{I}$ korranteen fasoreak, faseen jatorrian $\underline{U}_{10}$ kokatuz gero.
2. $\underline{Z}_2$ inpedantziaren balioa, modu binomikoan adierazita.
3. Faseen diagrama eta zirkuituak xurgatutako potentziak.

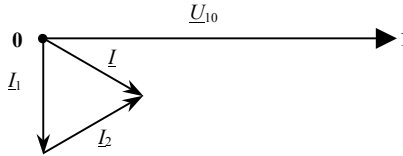
K itxita dagoenean:

4. Potentzia-faktorea unitateraino hobetu. Zein izango dira $\underline{I}_C$ eta Q_C -ren balioak?

Ebazpena

K zabalik

1. Enuntziatuak esan bezala, $\underline{U}_{10}$ faseen jatorrian kokatuko dugu.



$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ denez, hiru bektorek triangelu bat osatu beharko dute.

$|\underline{I}| = |\underline{I}_1| = |\underline{I}_2| = 10 \text{ A}$ betetzen denez, triangeluak aldeakidea izan beharko du.

$\underline{I}_1$ korranteak haril bat zeharkatzen duenez, $\underline{U}_{10}$ -rekiko 90° atzeratuta egon beharko du: $\underline{I}_1 = 10 \angle -90^\circ \text{ A}$

Eta korronteen faseak hauek izango dira:

$$\underline{I}_1 = 10 \angle -90^\circ \text{ A}; \quad \underline{I}_2 = 10 \angle 30^\circ \text{ A}; \quad \underline{I} = 10 \angle -30^\circ \text{ A}$$

2. Bestetik:

$$\underline{U}_{10} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 = j22 \cdot (-j10) = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

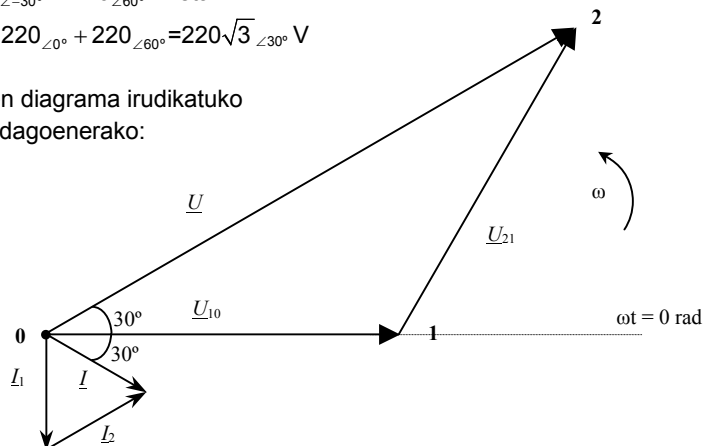
Eta inpedantziaren balioa:

$$\underline{Z}_2 = \frac{220 \angle 0^\circ}{10 \angle 30^\circ} = 22 \angle -30^\circ \Omega \quad \text{edo} \quad \underline{Z}_2 = (11\sqrt{3} - j11) \Omega \quad \text{izango da; kapazitiboa, beraz.}$$

3. $\underline{U}_{21} = 22 \angle 90^\circ \cdot 10 \angle -30^\circ = 220 \angle 60^\circ \text{ V}$ eta

$$\underline{U} = \underline{U}_{21} + \underline{U}_{10} = 220 \angle 0^\circ + 220 \angle 60^\circ = 220\sqrt{3} \angle 30^\circ \text{ V}$$

Ondoren, faseen diagrama irudikatuko dugu K zabalik dagoenerako:



$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}' = 220\sqrt{3} \angle_{30^\circ} (10 \angle_{-30^\circ})^* = 220\sqrt{3} \angle_{30^\circ} \cdot 10 \angle_{30^\circ} = 2.200\sqrt{3} \angle_{60^\circ} \text{ VA}$$

$$P = S \cos 60^\circ = 2.200\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 1.100\sqrt{3} \text{ W}$$

$$Q = S \sin 60^\circ = 2200\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.300 \text{ var}$$

$$\underline{S} = P + jQ = (1.100\sqrt{3} + j3.300) \text{ VA}$$

K itxita:

4. Potentzia-faktorea unitateraino hobetzeko, kondentsadoreek potentzia erreaktibo hau eman beharko dute:

$$Q_C = P \cdot (\tan \varphi - \tan \varphi') = 1.100\sqrt{3} \cdot (\tan 60^\circ - \tan 0^\circ) = 3.300 \text{ var kap}$$

$$Q_C = -3.300 \text{ var}$$

Ez genuen zertan kalkulu hau egin behar, potentzia erreaktibo osoa konpentsatu behar baitugu.

Kondentsadoreen zeharreko korrontea:

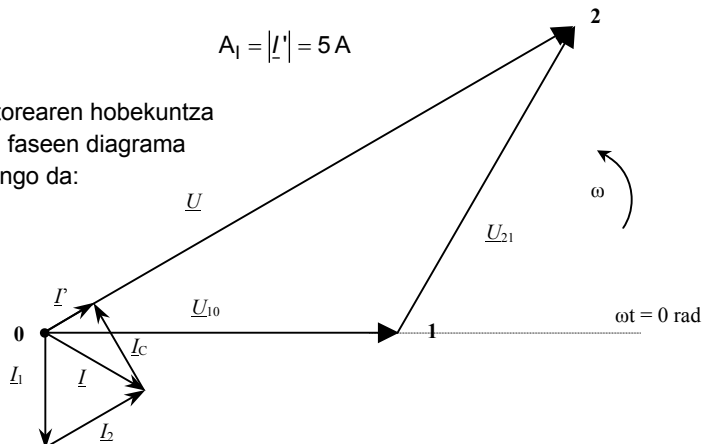
$$\text{Modulua: } I_C = \frac{Q_C}{U} = \frac{3.300}{220\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3} \text{ A}$$

Argumentua: 90° aurreratuta egon beharko du kondentsadoreek jasaten duten tentsioarekiko. Tentsioak 30° -ko desfasea duenez, korrontearen desfasea 120° izango da. Beraz:

$$\underline{I}_C = 5\sqrt{3} \angle_{120^\circ} \text{ A}$$

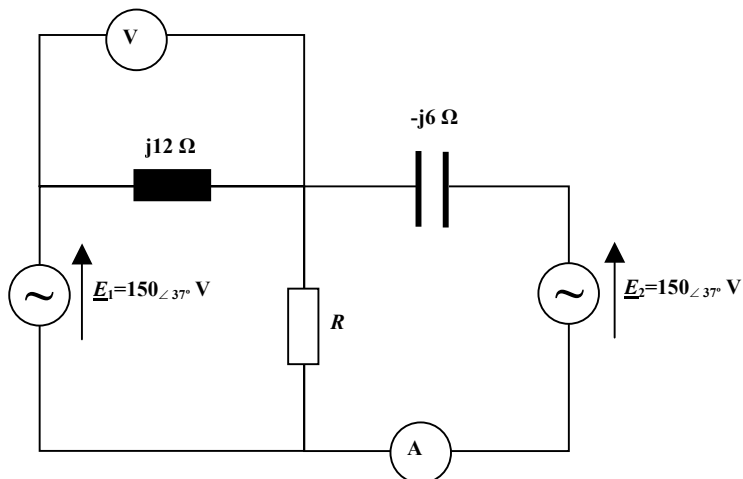
Korrante total berria: $\underline{I}' = \underline{I} + \underline{I}_C = 10 \angle_{-30^\circ} + 5\sqrt{3} \angle_{120^\circ} = 5 \angle_{30^\circ} \text{ A}$ fasean $\underline{U}$ -rekin behar zuten bezala.

Potentzia-faktorearen hobekuntza egin eta gero, faseen diagrama berria hau izango da:



Behar zuen bezala, korrante total berria, I_1' , sarrerako tentsioarekiko fasean dago.

Ariketa-zenbakia: 3.14



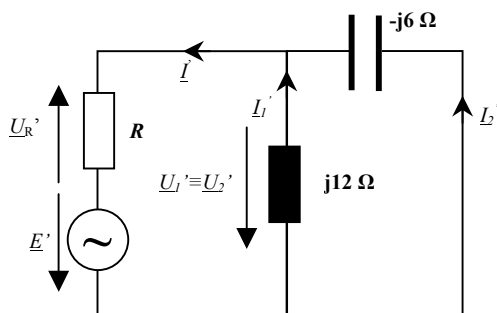
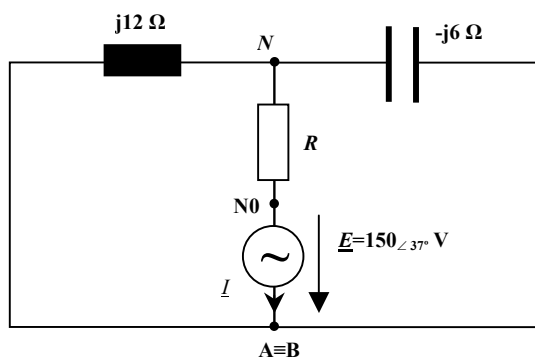
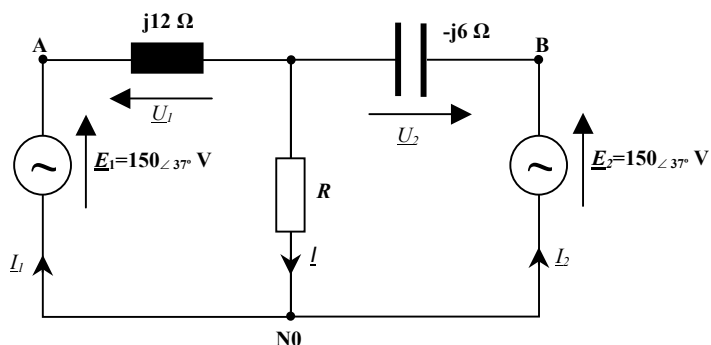
Aplikatu linealtasunaren teorema irudiko zirkuituan, eta kalkulatu:

1. R -ren balioa, baldin eta zirkuituak xurgatutako potentzia 900 W bada.
2. Kalkulatu, era berean, tresnen neurketak.
3. Adierazi iturri bien jokabidea eta emandako edo xurgatutako potentziak.

Oharra: Erresistentziaren balioarentzako emaitza bat baino gehiago badago, txikiena hartu.

Ebazpena

- Linealtasuna aplikatu ahal izateko zirkuitua iturri bakar batez elikatuta egon behar duenez, iturri bakarra lortzeko, zirkuituaren geometria eraldatuko dugu:



$$\underline{E} \equiv \underline{E}_1 \equiv \underline{E}_2 \quad \text{eta} \quad \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

Zirkuitua prestatu eta gero, $\dot{I}_1 = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$ dela suposatu eta linealtasuna aplikatuko dugu:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = j12 \cdot \dot{I}_1 = 12 \angle 90^\circ \cdot 1 \angle 0^\circ = 12 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{-j6} = \frac{12 \angle 90^\circ}{6 \angle -90^\circ} = 2 \angle 180^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 1 \angle 0^\circ + 2 \angle 180^\circ = 1 \angle 180^\circ \text{ A}$$

Erresistentziaren borneen artean jausten den tentsioa:

$$\underline{U}_R = R \cdot 1 \angle 180^\circ = -R \text{ V}$$

$$\underline{E}' = \underline{U}_R' + \underline{U}_1' = (-R + j12) \text{ V}$$

Linealtasun konstantea kalkulatu dugu iturriaren benetako balioaren eta kalkulatuaren arteko zatiketa eginez:

$$150 \angle 37^\circ = \underline{E}' \cdot \underline{k} \rightarrow \underline{k} = \frac{150 \angle 37^\circ}{-R + j12}$$

$\underline{U}_R$ benetakoa lortzeko, $\underline{k}$ konstanteaz biderkatu behar dugu $\underline{U}_R'$:

$$\underline{U}_R = \underline{U}_R' \cdot \underline{k}$$

$$\underline{U}_R = -R \cdot \underline{k} = -R \cdot \frac{150 \angle 37^\circ}{-R + j12}$$

$$|\underline{U}_R| = \frac{R \cdot 150}{\sqrt{R^2 + 12^2}}$$

R -k 900 W-eko potentzia xurgatzen du. Ekuazio baten bidez adierazita:

$$P = \frac{U_R^2}{R} = \frac{\left[\frac{R \cdot 150}{\sqrt{R^2 + 12^2}} \right]^2}{R} = \frac{150^2 \cdot R}{R^2 + 12^2} = 900 \text{ W} \Rightarrow \begin{cases} R = 9 \Omega \\ \text{edo} \\ R = 16 \Omega \end{cases}$$

Enuntziatuan txikiena hartzeko adierazi digutenez, $R = 9 \Omega$ izango da.

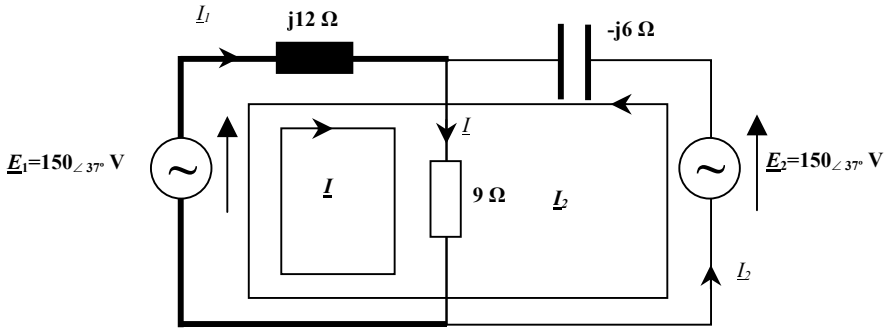
$$\underline{k} = \frac{150 \angle 37^\circ}{-9 + j12} = \frac{150 \angle 37^\circ}{15 \angle 127^\circ} = 10 \angle -90^\circ = j10$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_1' \cdot \underline{k} = 1 \angle 0^\circ \cdot 10 \angle -90^\circ = 10 \angle -90^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = I_2' \cdot k = 2_{\angle 180^\circ} \cdot 10_{\angle -90^\circ} = 20_{\angle 90^\circ} \text{ A}$$

$$I_1 = I_1' \cdot k = 1_{\angle 180^\circ} \cdot 10_{\angle -90^\circ} = 10_{\angle 90^\circ} \text{ A}$$

2. Tresnen neurketak lortzeko, atzera egin beharko dugu hasierako zirkuituraino, zirkuituaren geometria eraldatu baitugu.



Oinarrizko eraztunen metodoaren bidez ebartziko dugu. Sistema matritzialean tentsioen bektorean 0 bat lortzeko, irudiko zuhaitza hartu dugu.

Sistema matritziala:

$$\begin{bmatrix} j6 & -j12 \\ -j12 & 9 + j12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 150_{\angle 37^\circ} \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -j12 \\ 150_{\angle 37^\circ} & 9 + j12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j6 & -j12 \\ -j12 & 9 + j12 \end{vmatrix}} = \frac{1.800_{\angle 127^\circ}}{90_{\angle 37^\circ}} = 20_{\angle 90^\circ} \text{ A}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} j6 & 0 \\ -j12 & 150_{\angle 37^\circ} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j6 & -j12 \\ -j12 & 9 + j12 \end{vmatrix}} = \frac{900_{\angle 127^\circ}}{90_{\angle 37^\circ}} = 10_{\angle 90^\circ} \text{ A}$$

Amperemetroaren neurketa:

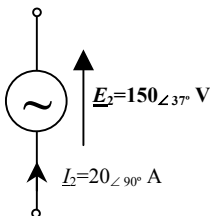
$$A_1 = |I_2| = 20 \text{ A}$$

Voltmetroaren irakurketa:

$$V_1 = |I_1 \cdot j12| = |10_{\angle -90^\circ} \cdot 12_{\angle 90^\circ}| = |120_{\angle 0^\circ}| = 120 \text{ V}$$

$$I_1 = I - I_2 = 10 \angle 90^\circ - 20 \angle 90^\circ = 10 \angle -90^\circ \text{ A}$$

3. Iturrien jokabidea eta emandako edo xurgatutako potentziak:



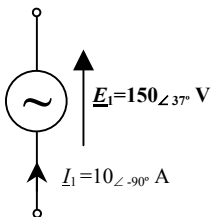
Hargailu-hitzairena aplikatu ahal izateko, norazkoa aldatuko diogu I_2 korronteari.

$$S_{E2} = E_2 \cdot (-I_2)^* = 150 \angle 37^\circ \cdot 20 \angle 90^\circ = 3.000 \angle 127^\circ \text{ VA}$$

$$P_{E2} = \text{Re}[S_{E2}] = 3.000 \cdot \cos(127^\circ) = -1.805,4 \text{ W}$$

$$Q_{E2} = \text{Im}[S_{E2}] = 3.000 \cdot \sin(127^\circ) = 2.395,9 \text{ var}$$

SORGAILUA da.



Hemen ere hargailu-hitzairena aplikatu ahal izateko, norazkoa aldatuko diogu I_1 korronteari:

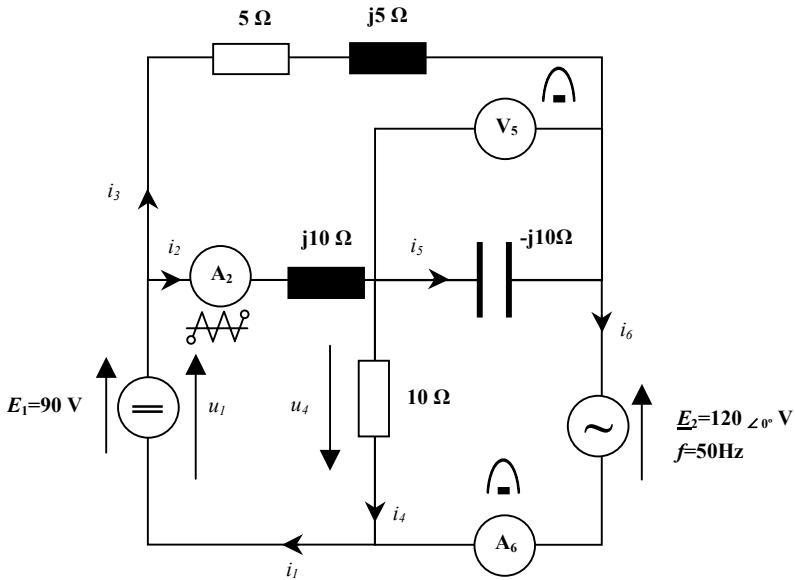
$$S_{E1} = E_1 \cdot (-I_1)^* = 150 \angle 37^\circ \cdot 10 \angle -90^\circ = 1.500 \angle -53^\circ \text{ VA}$$

$$P_{E1} = \text{Re}[S_{E1}] = 1.500 \cdot \cos(-53^\circ) = 902,7 \text{ W}$$

$$Q_{E1} = \text{Im}[S_{E1}] = 1.500 \cdot \sin(-53^\circ) = -1.197,9 \text{ var}$$

HARGAILUA da.

Ariketa-zenbakia: 3.15

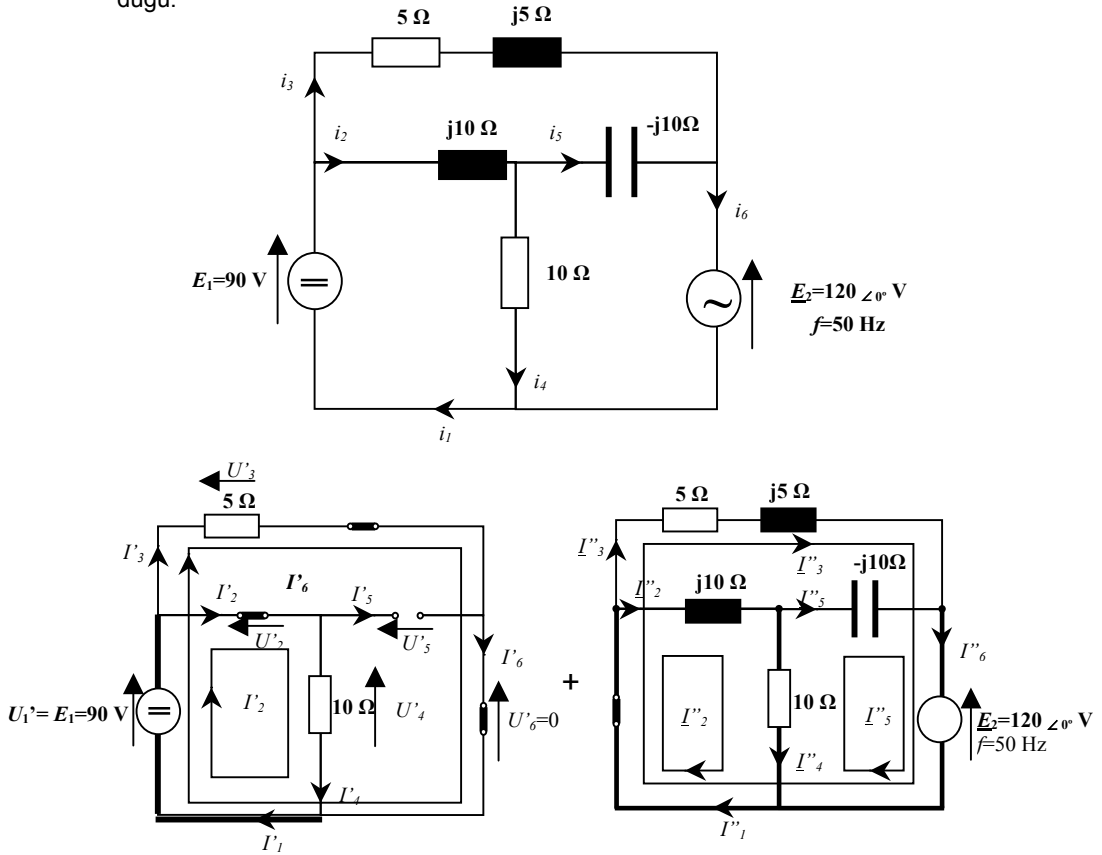


Irudiko zirkuituan, inpedantziak 50 Hz-eko maiztasunerako adierazi dira. Kalkulatu:

1. i_2 , i_3 eta i_5 korrante-intentsitateak.
2. u_4 eta u_1 tentsioak.
3. Amperemetroen neurketak.
4. Voltmetroaren neurketa.

Ebazpena

Zirkuituak hainbat izaeratako iturriak dituenenez (E_1 korronte zuzeneko, $f = 0$ Hz; eta E_2 korronte alternokoa, $f = 50$ Hz), gainezarpeneren teorema aplikatuz ebartziko dugu.



Korronte zuzeneko zirkuituaren ebazpena:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I'_2 \\ I'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 90 \end{bmatrix}$$

$$I'_2 = \frac{90}{10} = 9\text{ A}; \quad I'_6 = \frac{90}{5} = 18\text{ A}$$

$$I'_1 = I'_2 + I'_6 = 9 + 18 = 27\text{ A}$$

$$I'_2 = I'_4 = 9\text{ A}$$

$$I'_3 = I'_6 = 18\text{ A}$$

$$I'_5 = 0\text{ A}$$

50 Hz-eko zirkuituaren ebazpena:

Inpedantziak ezagutzen ditugunez, errazena da horiek erabiliz ebaztea. Gero, atzerako eraldakuntza erabiliz, aldiuneko balioetara igaroko ditugu emaitzak.

$$\begin{bmatrix} 10+j10 & 0 & -10 \\ 0 & 5+j5 & 0 \\ -10 & 0 & 10-j10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2'' \\ I_3'' \\ I_5'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 120_{\angle 180^\circ} \\ 120_{\angle 180^\circ} \end{bmatrix} \quad \text{Errenkadak garatuz ebatziko dugu.}$$

$$2. \text{ errenkada: } I_3'' = \frac{120_{\angle 180^\circ}}{5+j5} = 12\sqrt{2}_{\angle 135^\circ} \text{ A}$$

$$1. \text{ errenkada: } (10+j10) \cdot I_2'' - 10I_5'' = 0 \longrightarrow I_5'' = (1+j) \cdot I_2''$$

3. errenkada, 1. errenkadaren emaitza ordezkaturik duelarik:

$$-10 \cdot I_2'' + (10-j10) \cdot (1+j) \cdot I_2'' = 120_{\angle 180^\circ} \longrightarrow I_2'' = 12_{\angle 180^\circ} \text{ A}$$

1. errenkadako ekuazioan I_2'' -ren balioa ordezkatuta, I_5'' lortuko dugu:

$$I_5'' = (1+j) \cdot I_2'' = 12\sqrt{2}_{\angle -135^\circ} \text{ A}$$

$$i_3'' = 24 \cdot \cos(314t + 135^\circ) \text{ A} = 24 \cos(100\pi \cdot t + \frac{3}{4}\pi) \text{ A}$$

$$i_2'' = 12\sqrt{2} \cdot \cos(314t + 180^\circ) \text{ A} = 12\sqrt{2} \cos(100\pi t + \pi) \text{ A}$$

$$i_5'' = 24 \cdot \cos(314t - 135^\circ) \text{ A} = 24 \cos(100\pi t - \frac{3}{4}\pi) \text{ A}$$

1. $i_2 = 9 + 12\sqrt{2} \cdot \cos(314t + 180^\circ) \text{ A}$ korronte alernoz eta zuzenez osatua dago.

$i_3 = 18 + 24 \cdot \cos(314t + 135^\circ) \text{ A}$ korronte zuzenez eta alernoz osatua dago.

$i_5 = i_5'' = 24 \cdot \cos(314t - 135^\circ) \text{ A} = 24 \cos(100\pi t - \frac{3}{4}\pi) \text{ A}$ korronte alernoz bakarrik osatua.

2. u_4 tentsioa:

$$\underline{U}_4'' = \underline{I}_4'' \cdot 10 = (I_2'' - I_5'') \cdot 10 = 120_{\angle 90^\circ} \text{ V} \rightarrow u_4'' = 120\sqrt{2} \cos(314t + 90^\circ) \text{ V}$$

$$U_4' = I_4' \cdot 10 = 9 \cdot 10 = 90 \text{ V}$$

$$u_4 = U_4' + u_4'' = 90 + 120\sqrt{2} \cdot \cos(314t + 90^\circ) \text{ V}$$

u_1 tentsioa: $u_1 = U_1' = E_1 = 90 \text{ V}$, tentsio-iturri ideala baita.

3. Burdina mugikorreko amperemetroak neurtuko duena izango da i_2 korrontearen balio efikaza edo eraginkorra: $i_2 = 9 + 12\sqrt{2} \cdot \cos(314t + 180^\circ) \text{ A}$.

Integrazio-denboraren eremuan lan egin beharrean, aldagai-aldaketa egingo dugu α -ren eremura igaroz; beraz, integrazio-tarteak ere aldatu egin beharko ditugu. Hona hemen aldaketa:

$$\left| \begin{array}{l} \omega t + 180^\circ = \alpha \\ dt = \frac{1}{\omega} d\alpha \end{array} \right.$$

$$\overline{i_2^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (9 + 12\sqrt{2} \cos \alpha)^2 \cdot d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (81 + 216\sqrt{2} \cos \alpha + 288 \cos^2 \alpha) \cdot d\alpha$$

$$\overline{i_2^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (81 + 216\sqrt{2} \cos \alpha + 144 - 144 \cos 2\alpha) \cdot d\alpha$$

$$\overline{i_2^2} = \frac{1}{2\pi} [81\alpha - 216 \sin \alpha + 144\alpha + 72 \sin 2\alpha]_0^{2\pi} = 225 \text{ A}^2$$

$$I_2 = \sqrt{\overline{i_2^2}} = \sqrt{225} = 15 \text{ A}$$

$$A_{2I} = 15 \text{ A}$$

$$\text{Edo: } A_{2I} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ A}$$

Koadro mugikorreko amperemetroak i_6 korrontearen batez bestekoa neurtuko du:

$$I_6'' = I_3'' + I_5'' = 12\sqrt{2} \angle 135^\circ + 12\sqrt{2} \angle -135^\circ = -24 = 24 \angle 180^\circ \text{ A}$$

$$i_6'' = 24\sqrt{2} \cdot \cos(314t + 180^\circ) \text{ A} = 24\sqrt{2} (\cos 100\pi t + \pi) \text{ A}$$

$$i_6 = 18 + 24\sqrt{2} \cdot \cos(314t + 180^\circ) \text{ A}$$

Eta erraz asko ikus daitekeenez, amperemetroaren irakurketa 18 A-koa izango da, osagai sinusoidalaren batezbestekoa nulua delako.

$$A_{6I} = 18 \text{ A}$$

4. Koadro mugikorreko voltmetroak u_5 tentsioaren batezbestekoa emango du:

$$\underline{U}_5'' = 10 \angle -90^\circ \cdot 12\sqrt{2} \angle -135^\circ = 120\sqrt{2} \angle 135^\circ \text{ V}$$

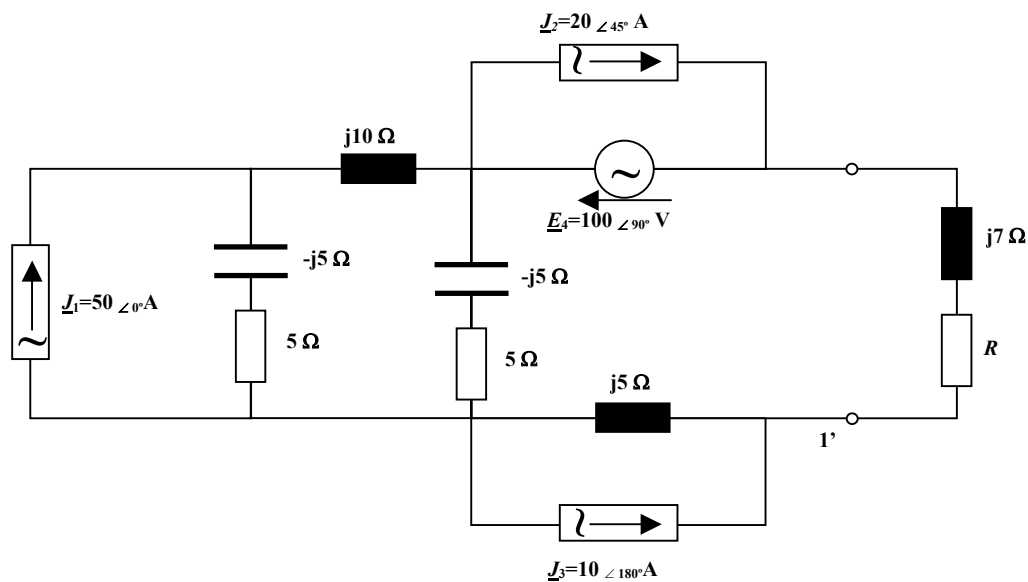
$$u_5'' = 240 \cdot \cos(314t + 135^\circ) \text{ V}$$

$$U_5' = U_4' = 90 \text{ V}$$

$$u_5 = 90 + 240 \cdot \cos(314t + 135^\circ) \text{ V}$$

$$V_{5I} = 90 \text{ V}$$

Ariketa-zenbakia: 3.16

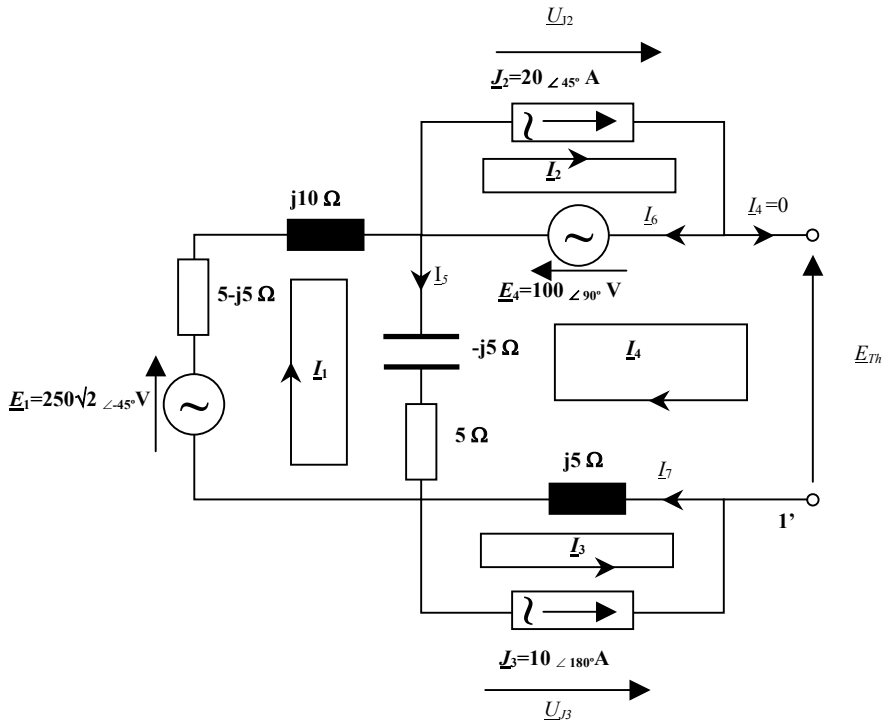


Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuiturako:

1. Theveninen baliokidea 1 eta 1' puntuen artean.
2. R -ren balioa, 1 eta 1' puntuen artean potentzia maximoa transferi dadin.

Ebazpena

1.- Theveninen tentsioa:



Sareen metodoa aplikatu ahal izateko, $\underline{I}_1$ korrante-iturri erreala tentsio-iturri erreal bihurtu dugu. Bestetik, ordezkapenaren legea erabiliko dugu, eta korrante-iturriak ordezkatzeko ditugu korrante ezaguneko tentsio-iturriez. Era berean, suposatuko dugu 1 eta 1' puntuen artean $\underline{E}_{Th}$ tentsioa dagoela eta korrante nuluko beste tentsio-iturri bat dugula.

Ikusten den bezala, hiru aldiz erabiliko dugu ordezkapenaren legea ariketa honetan.

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & -(5-j5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j5 & j5 \\ -(5-j5) & 0 & j5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ 20 \angle 45^\circ \\ 10 \angle 180^\circ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250\sqrt{2} \angle -45^\circ \\ 100 \angle -90^\circ + \underline{U}_{J2} \\ \underline{U}_{J3} \\ -100 \angle -90^\circ - \underline{E}_{Th} \end{bmatrix}$$

$$10 \cdot \underline{I}_1 = 250\sqrt{2} \angle -45^\circ \rightarrow$$

$$\underline{I}_1 = 25\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A}$$

$$0 = 100 \angle -90^\circ + \underline{U}_{J2} \rightarrow$$

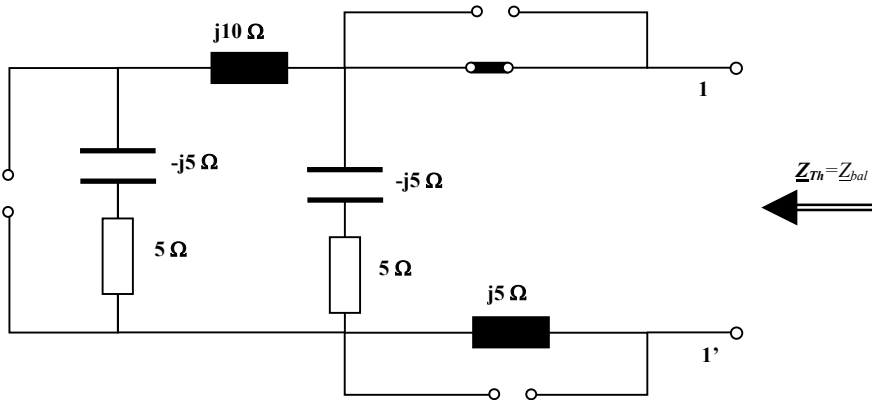
$$\underline{U}_{J2} = -100 \angle -90^\circ \text{ V} = 100 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$j5 \cdot 10 \angle 180^\circ = \underline{U}_{J3} \rightarrow$$

$$\underline{U}_{J3} = 50 \angle 270^\circ \text{ V} = 50 \angle -90^\circ \text{ V}$$

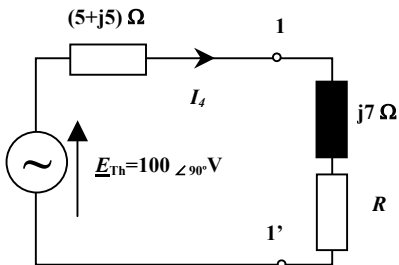
$$-(5 - j5) \cdot 25\sqrt{2} \angle -45^\circ + j5 \cdot 10 \angle 180^\circ = -100 \angle -90^\circ - \underline{E}_{Th} \rightarrow \underline{E}_{Th} = 100 \angle -90^\circ \text{ V}$$

Theveninen inpedantzia:



$$\underline{Z}_{Th} = \frac{(5 + j5) \cdot (5 - j5)}{5 + j5 + 5 - j5} + j5 = (5 + j5) \Omega = 5\sqrt{2} \angle 45^\circ \Omega$$

2. Oraingoan, 1 eta 1' artean jarri behar dugun kargaren osagai induktiboa datua da, eta, horren ondorioz, aldagai bakarra osagai erreala; hori zehazteko, potentzia maximoaren transferentziaren teoremara jo behar dugu zuzenean.



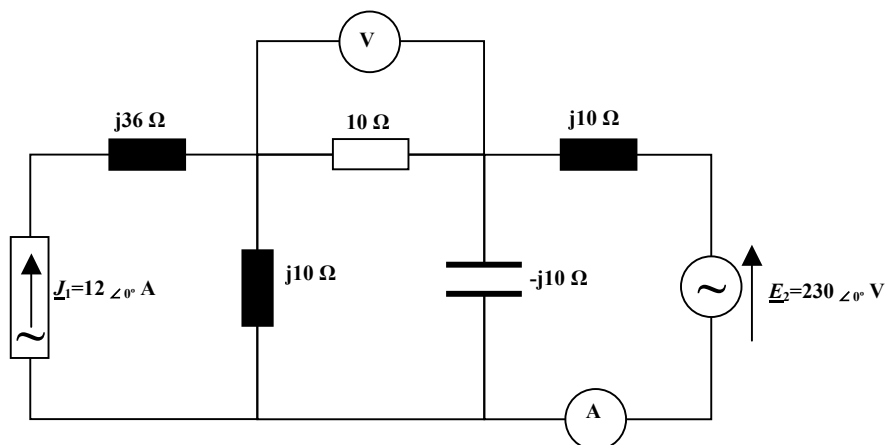
$$R = \sqrt{5^2 + (5 + 7)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = \pm 13 \Omega$$

$$\boxed{R = 13 \Omega}$$

$$I_4^2 = \frac{100^2}{(5 + 13)^2 + (5 + 7)^2} = \frac{10.000}{468} \text{ A}^2$$

$$P_{\max} = 13 \cdot \frac{10.000}{468} = \frac{2.500}{9} \text{ W}$$

Ariketa-zenbakia: 3.17



Irudiko zirkuituan, kalkulatu:

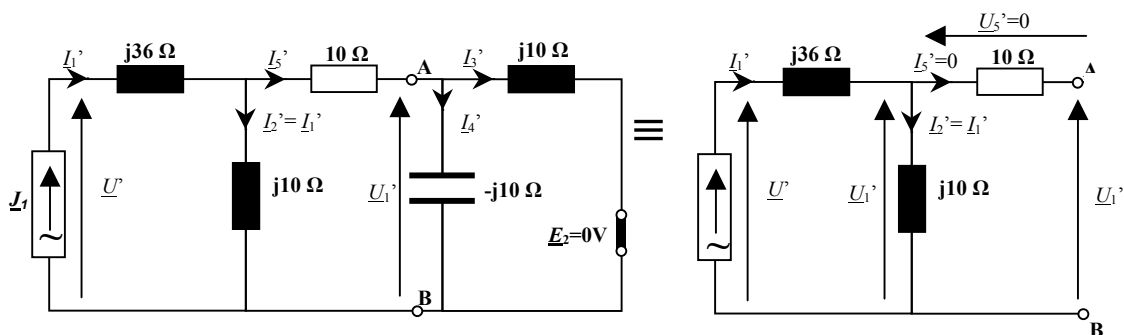
1. Korrante-iturriaren borneen arteko tentsioa.
2. Tresnen neurketak.

Ebazpena

Gainezarpena aplikatuz ebatziko dugu. Zirkuitu batek korrante-iturria izango du eta besteak tentsio-iturria.

Lehen zirkuitua: Korrante-iturria besterik ez duen zirkuitua ebatziko dugu lehendabizi.

3. eta 4. adar paraleloek osatzen duten taldea erresonantea da, eta bien paralelo-elkarketatik sortzen den inpedantzia, infinitua. Horregatik, 5. adarrean ez dago korrante-zirkulaziorik, ezta tentsio-erorketarik ere..



1. zirkuitua

$$\underline{Z}_{\text{bal AB}} = \frac{j10 \cdot (-j10)}{j10 - j10} = \infty$$

Beraz:

$$\underline{I}_1' = \underline{I}_2' = \underline{J}_1 = 12 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\underline{U}_1' = j10 \cdot \underline{I}_2' = j10 \cdot 12 = j120 \text{ V} = 120 \angle 90^\circ \text{ V}$$

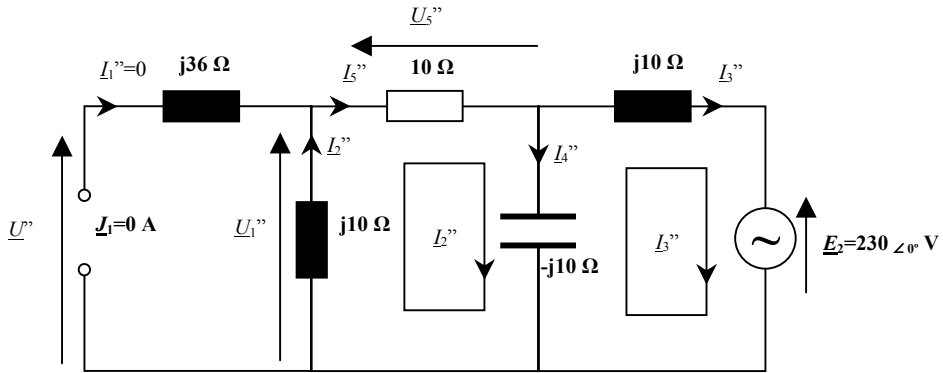
Tentsio hori bat dator 4. eta 3. adarretako tentsioekin.

$$\underline{I}_3' = \frac{\underline{U}_1'}{j10} = \frac{j120}{j10} = 12 \angle 0^\circ \text{ A} \quad \underline{I}_4' = \frac{\underline{U}_1'}{-j10} = \frac{j120}{-j10} = 12 \angle 180^\circ \text{ A}$$

Korronte-iturriaren borneen arteko tentsioa:

$$\underline{U}' = \underline{U}_1' + j36 \cdot \underline{I}_1' = j120 + j36 \cdot 12 = j120 + j432 = j552 \text{ V} = 552 \angle 90^\circ \text{ V}$$

Bigarren zirkuitua: Tentsio-iturriaren elikadurapean dugun zirkuitua aztertuko dugu orain.



2. zirkuitua

$$\begin{bmatrix} 10 & j10 \\ j10 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_2'' \\ \underline{I}_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -230 \end{bmatrix}$$

$$\text{2. lerroa: } \underline{I}_2'' = \frac{-230}{j10} = j23 = 23 \angle 90^\circ \text{ A}$$

$$\text{1. lerroa: } \underline{I}_3'' = \frac{-10 \cdot j23}{j10} = -23 = 23 \angle 180^\circ \text{ A}$$

$$\underline{U}_1'' = -j10 \cdot \underline{I}_2'' = -j10 \cdot j23 = 230 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}'' = \underline{U}_1'' = 230 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Amaitzeko, bi zirkuituetako emaitzen gainezarpena aplikatuko dugu.

1. Korronte-iturriaren borneen arteko tentsioa:

$$\underline{U} = \underline{U}' + \underline{U}'' = (230 + j552) \text{ V} = 598 \angle 67,38^\circ \text{ V}$$

2. Amperemetroaren neurketa:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_3' + \underline{I}_3'' = 12 - 23 = -11 = 11 \angle 180^\circ \text{ A}$$

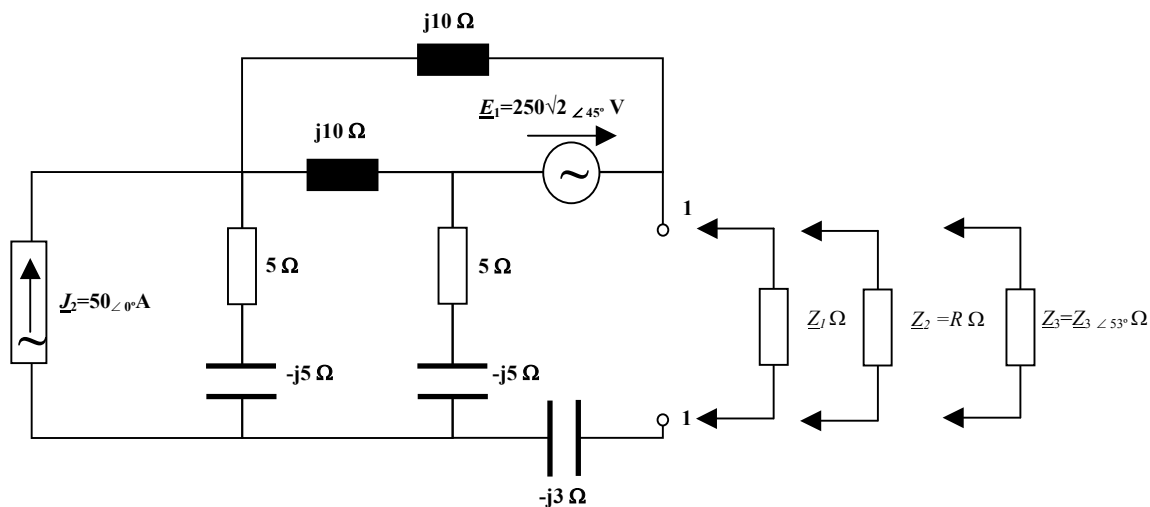
$$A_1 = |\underline{I}_3| = 11 \text{ A}$$

Voltmetroaren neurketa:

$$\underline{U}_5 = \underline{U}_5' + \underline{U}_5'' = 0 + 10 \cdot j23 = j230 \text{ V} = 230 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$V_1 = |\underline{U}_5| = 230 \text{ V}$$

Ariketa-zenbakia: 3.18



Irudiko zirkuituan, kalkulatu:

1. Theveninen baliokidea 1 eta 1' puntuen artean.
2. $\underline{Z}_1$ inpedantziaren balioa, transferitzen zaion potentzia maximoa izan dadin.
3. $\underline{Z}_2=R$ inpedantziaren balioa, transferitzen zaion potentzia maximoa izan dadin.
4. $\underline{Z}_3=\underline{Z}_{3\angle 53^\circ} \Omega$ inpedantziaren balioa, transferitzen zaion potentzia maximoa izan dadin.

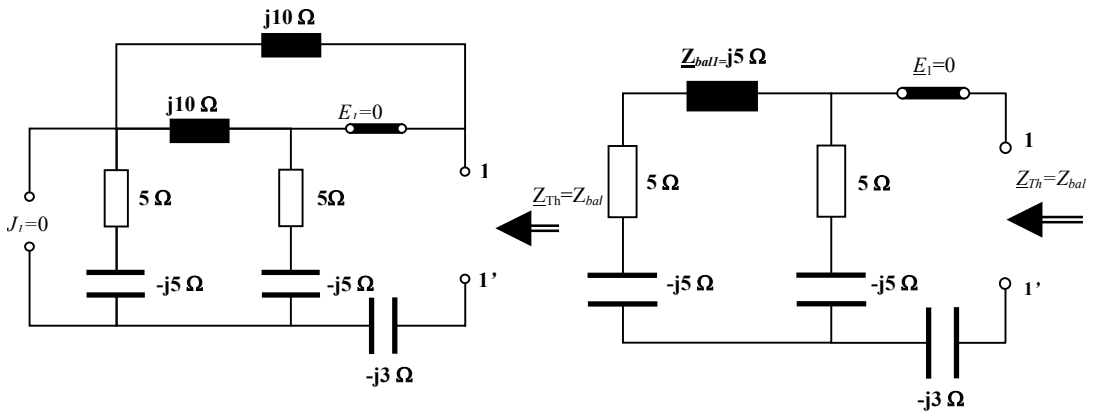
Kasu guztietan, adierazi zein den potentziaren balioa.

Ebazpena

1.- Theveninen inpedantzia: Zirkuitu pasibotuta

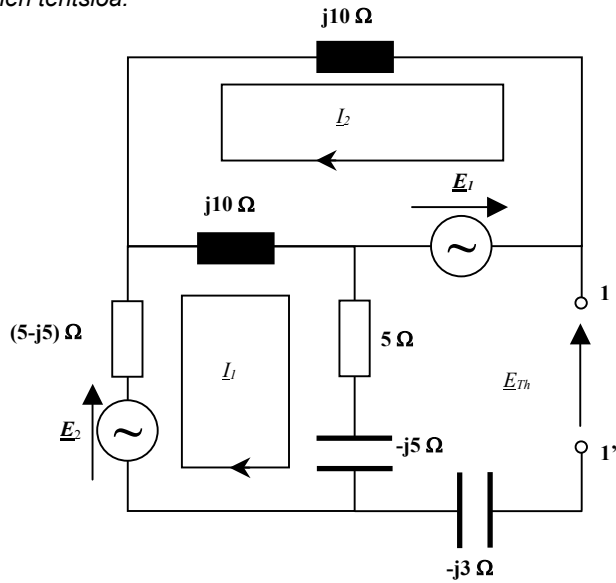
Haril biak paraleloan daude.

$$\underline{Z}_{bal1} = \frac{j10 \cdot j10}{j10 + j10} = j5 \Omega$$



$$\underline{Z}_{Th} = \underline{Z}_{bal} = -j3 + \frac{5 \cdot (5-j5)}{5+5-j5} = (3-j4) \Omega = 5 \angle -53^\circ \Omega$$

Theveninen tentsioa:



Korronte-iturria tentsio-iturri bihurtuko dugu.

$$\underline{E}_2 = \underline{J}_2 \cdot (5 - j5) = 50 \angle 0^\circ \cdot 5\sqrt{2} \angle -45^\circ$$

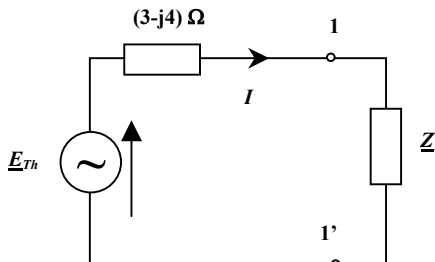
$$\underline{E}_2 = 250\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ V}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -j10 \\ -j10 & j20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250\sqrt{2} \angle -45^\circ \\ -250\sqrt{2} \angle 45^\circ \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 250\sqrt{2} \angle -45^\circ & -j10 \\ -250\sqrt{2} \angle 45^\circ & j20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & -j10 \\ -j10 & j20 \end{vmatrix}} = 25\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\underline{E}_{Th} = (5 - j5) \cdot (25 - j25) + 250\sqrt{2} \angle 45^\circ = 250 \angle 0^\circ \text{ V}$$

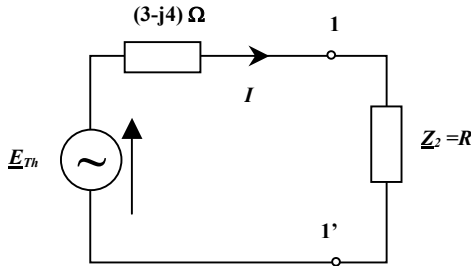
2.



$$\underline{Z}_1 = (\underline{Z}_{Th})^* = (3 + j4) \Omega$$

$$P_{\max} = R \cdot I^2 = \frac{R \cdot E_{Th}^2}{(R + R_{Th})^2 + (X + X_{Th})^2} = \frac{3 \cdot 250^2}{(3+3)^2 + 0} = 5208,3 \text{ W}$$

3.

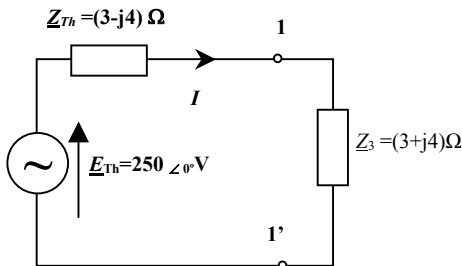


$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Omega$$

$$\boxed{Z_2 = 5 \Omega}$$

$$P_{\max} = R \cdot I^2 = \frac{R \cdot E_{Th}^2}{(R + R_{Th})^2 + X_{Th}^2} = \frac{5 \cdot 250^2}{(5+3)^2 + (-4)^2} = 3.906,25 \text{ W}$$

4.



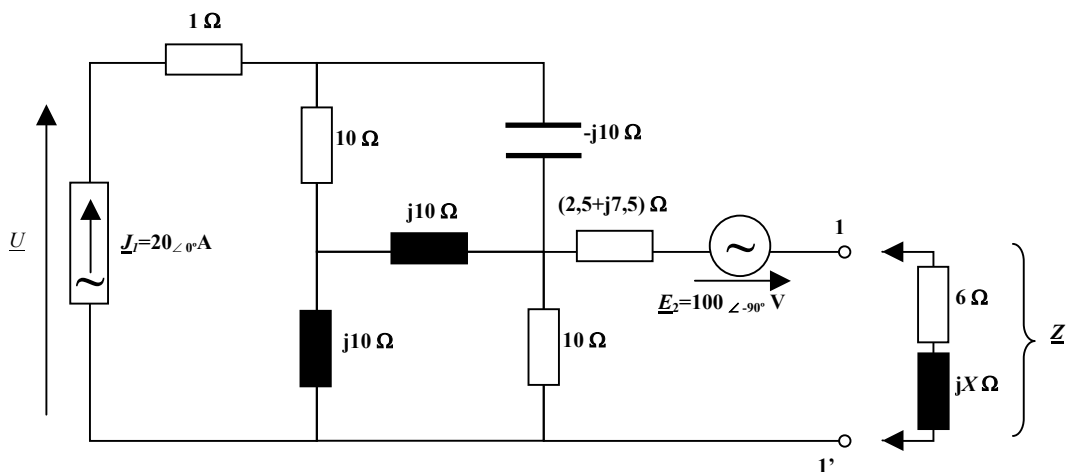
$$|Z_3| = |Z_{Th}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Omega$$

$$Z_3 = 5 \angle 53^\circ \Omega = (3 + j4) \Omega$$

$$\boxed{Z_3 = (3 + j4) \Omega}$$

$$P_{\max} = \frac{250^2}{(3+3)^2 + (4-4)^2} \cdot 3 = \frac{250^2}{12} = 5.208,3 \text{ W}$$

Ariketa-zenbakia: 3.19

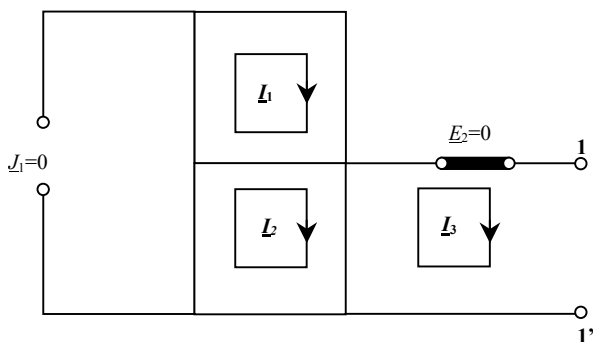


Irudiko zirkuituan, kalkulatu:

1. $\underline{U}_1$ iturriaren borneen arteko tentsioa.
2. Theveninen baliokidea 1 eta 1' puntuen artean.
3. 1 eta 1' puntuen artean $\underline{Z}=(6+jX) \Omega$ inpedantzia konektatzen da. Kalkulatu X-ren balioa, inpedantziari transferituko zaion potentzia maximoa izan dadin. Kalkulatu, orobat, potentzia maximo horren balioa.

Ebazpena

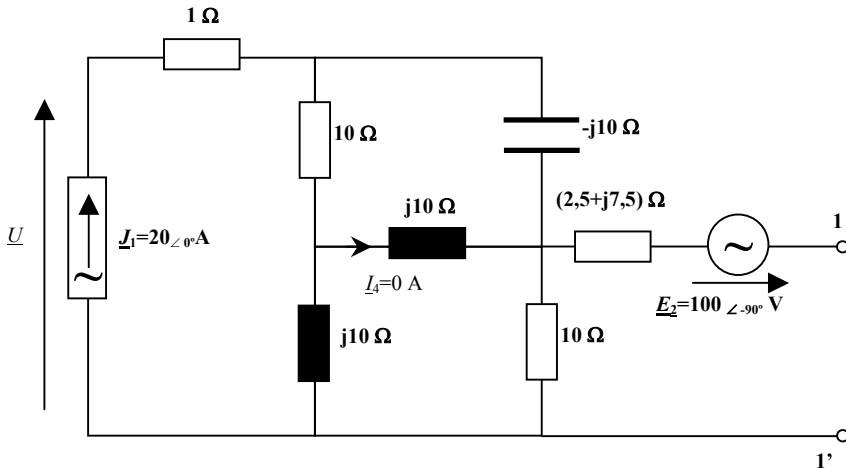
1. *Theveninen inpedantzia:* Metodo matriziala erabiliko dugu.



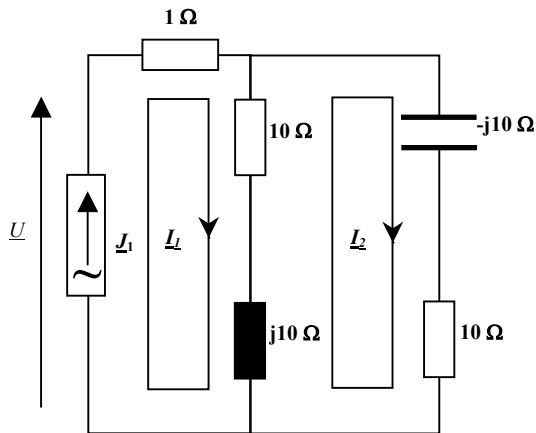
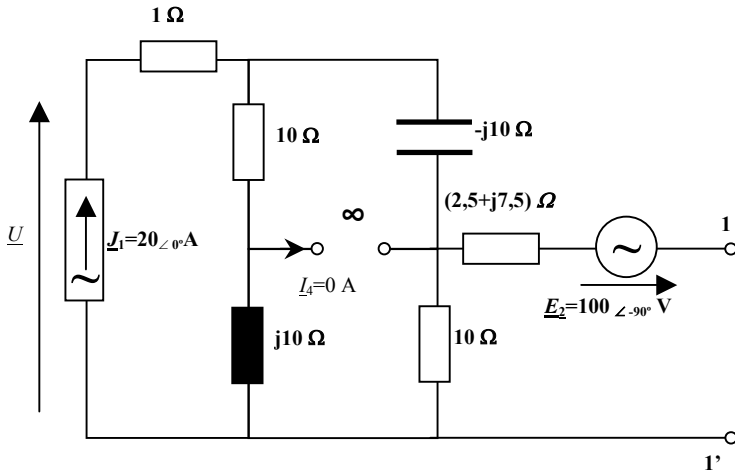
$$\begin{bmatrix} 10 & -j10 & 0 \\ -j10 & 10 + j20 & -10 \\ 0 & -10 & 12,5 + j7,5 \end{bmatrix} = \underline{Z}$$

$$\underline{Z}_{Th} = \frac{\Delta Z}{\Delta_{33}} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -j10 & 0 \\ -j10 & 10 + j20 & -10 \\ 0 & -10 & 12,5 + j7,5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & -j10 \\ -j10 & 10 + j20 \end{vmatrix}} = (10 + j10) \, \Omega$$

Theveninen tentsioa lortzeko, zirkuitu honen ezaugarri berezi batez baliatuko gara. Izan ere, zubia (erdiko bi sareez eratuta dagoena) orekatuta dago: $10 \cdot 10 = j10 \cdot -j10$; horrek esan nahi du 4. adarrean zeharreko korrontea nulua dela. Horregatik, berdin dio 4. adarrean R infinitua edo nulua egon, eta sinpleagoak diren I. edo II. zirkuituak ebatz daitezke jatorrizko zirkuiturako emaitza berak lortuz.



1.



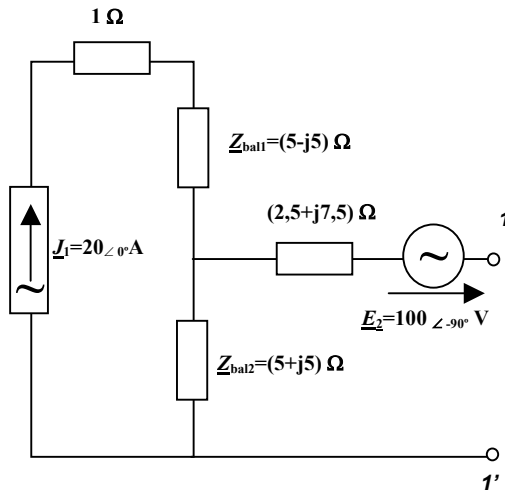
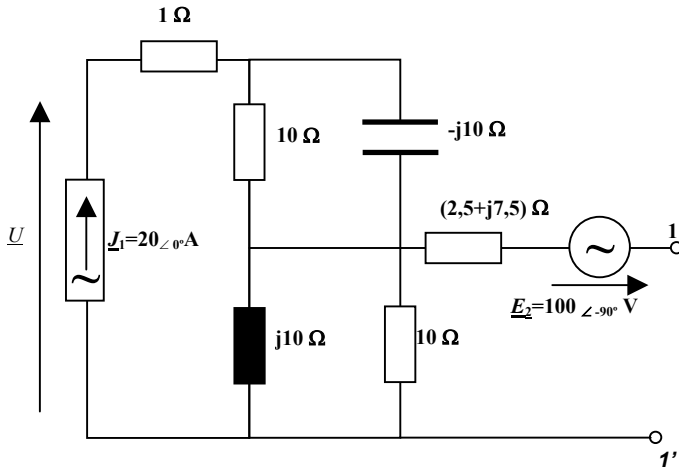
$$\begin{bmatrix} 11 + j10 & -10 - j10 \\ -10 - j10 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20 \angle 0^\circ \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. errenkada garatuz: $I_2 = \frac{(10 + j10) \cdot 20 \angle 0^\circ}{20} = (10 + j10) \text{ A} = 10\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ A}$

1. errenkada garatuz: $\underline{U} = (11 + j10) \cdot 20 \angle 0^\circ - (10 + j10) \cdot (10 + j10) = 220 \text{ V}$

eta $\underline{E}_{Th} = (10 + j10) \cdot 10 - j100 = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$

2.-



$$\underline{Z}_{bal1} = \frac{10 \cdot (-j10)}{10 - j10} = \frac{10 - j10}{2} = (5 - j5) \, \Omega$$

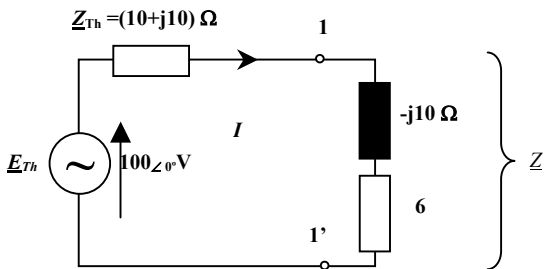
$$\underline{Z}_{bal2} = \frac{10 \cdot j10}{10 + j10} = \frac{10 + j10}{2} = (5 + j5) \, \Omega$$

Beraz:

$$\underline{U} = (1 + 5 - j5 + 5 + j5) \cdot 20 \angle 0^\circ = 220 \angle 0^\circ \, \text{V} \quad \text{eta}$$

$$\underline{E}_{Th} = (5 + j5) \cdot 20 \angle 0^\circ - j100 = 100 \angle 0^\circ \, \text{V}$$

3.

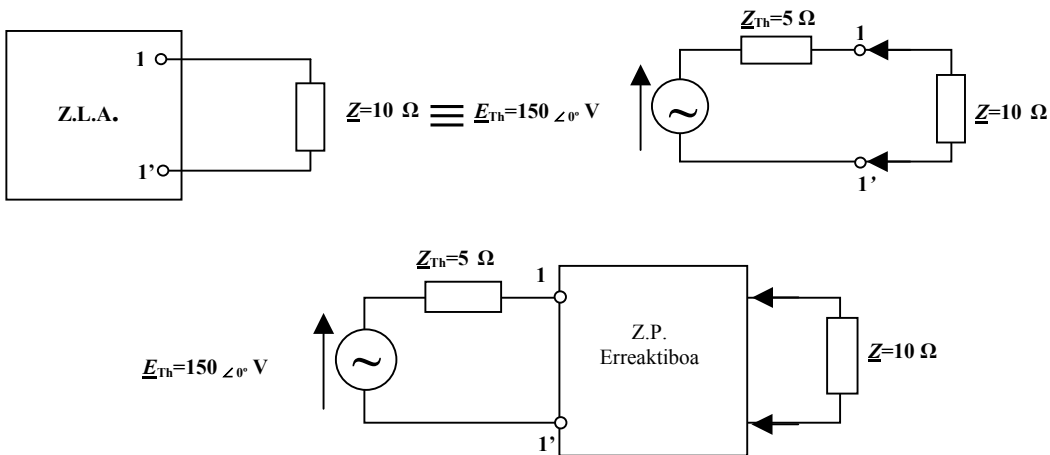


$$X = -X_{Th}; \quad X = -10; \quad \underline{Z} = (6 - j10) \Omega$$

$$I^2 = \frac{E_{Th}^2}{Z^2} = \frac{100^2}{16^2 + 0^2}$$

$$\text{eta } P_{\max} = \frac{6 \cdot 100^2}{256} = 234 \text{ W}$$

Ariketa-zenbakia: 3.20

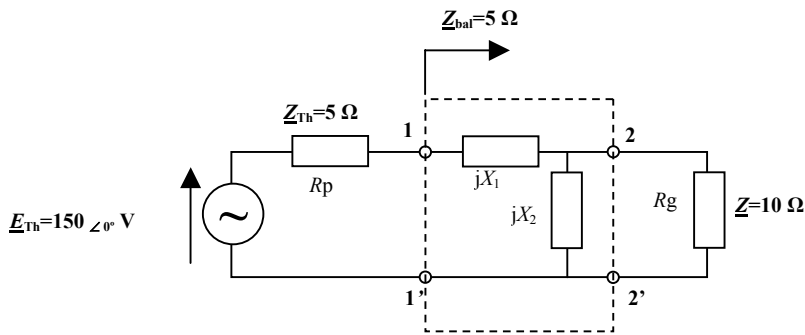


Zirkuitu jakin baten bi borneen artean, 10 Ω -eko erresistentzia dugu.

1. Baldin bi borne horien arteko Theveninen baliokidea bada $\underline{E}_{Th}=150\angle 0^\circ\text{V}$, $\underline{Z}_{Th}=5\angle 0^\circ\Omega$, zehaztu zirkuitua eta 10 Ω -eko kargaren artean jarri beharreko zirkuitu pasibo erreaktiboa, kargari transferituko zaion potentzia maximoa izan dadin (egokitzapen konjugatua).
2. Errepikatu aurrekoa, baina oraingoan Theveninen baliokidea izan dadila $\underline{E}_{Th}=150\angle 0^\circ\text{V}$, $\underline{Z}_{Th}=(5-j2)\Omega$, eta kargaren balioa $\underline{Z}=(10-j3)\Omega$.

Ebazpena

1. Inpedantzien egokitzapen konjugatu bat dugu. Everitt-en teorema aplikatuz,



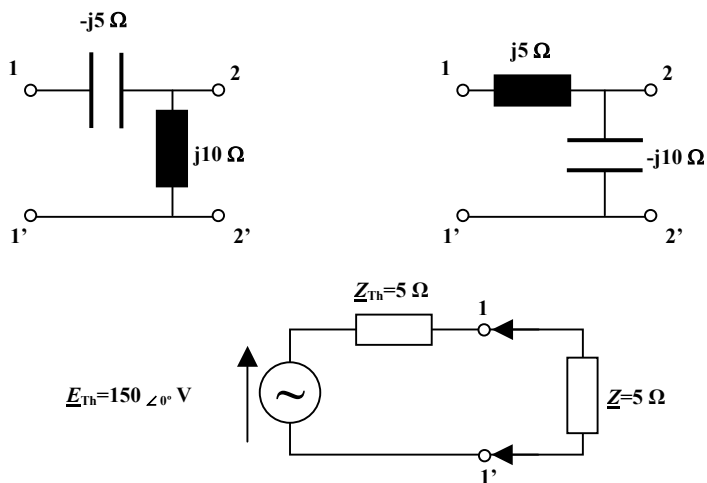
- a) Paraleloan dugun elementua X_2 erresistentziaren balio handiena duen inpedantziarekin batera joango da, kasu honetan, R_g .

$$X_2 = R_g \cdot \sqrt{\frac{R_p}{R_g - R_p}} \quad \text{beraz:} \quad X_2 = \pm 10 \cdot \sqrt{\frac{5}{10 - 5}} = \pm 10\Omega \quad \begin{cases} jX_2 = j10\Omega \\ jX_2 = -j10\Omega \end{cases}$$

- b) Seriean dugun elementua X_1 erresistentziaren balio txikien duena inpedantziarekin batera joango da, R_p , eta:

$$X_1 = \mp \sqrt{R_p \cdot (R_g - R_p)} = \mp \sqrt{5 \cdot (10 - 5)} = \mp 5\Omega \quad \begin{cases} jX_1 = -j5\Omega \\ jX_1 = j5\Omega \end{cases}$$

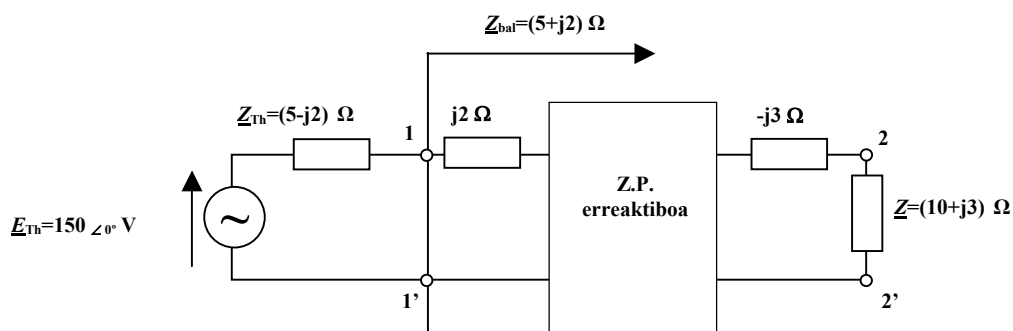
Potentzia maximoaren kalkulua:



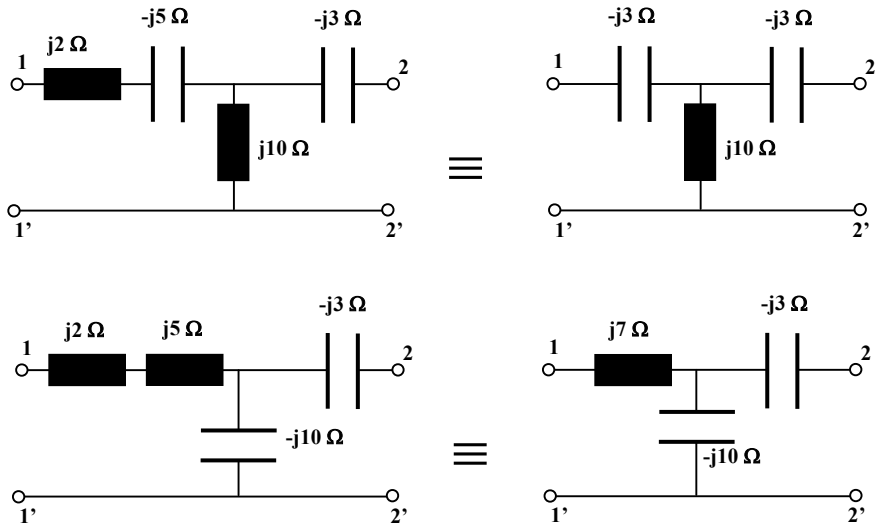
$$P = 5 \cdot \left(\frac{150}{10} \right)^2 = 1.125 \text{ W}$$

2. Egin dezagun ariketa beste datu hauekin: $E_{Th} = 150 \angle 0^\circ \text{ V}$, $Z_{Th} = (5 - j2) \Omega$ eta kargaren balioa $Z = (10 - j3) \Omega$.

Zirkuitu berri hori aurreko zirkuitu bilakatuko da, baldin eta:



Potentzia maximoa, beraz, ondoren agertzen diren zirkuituekin lortuko litzateke:



Eta $P = 1.125\text{ W}$

4

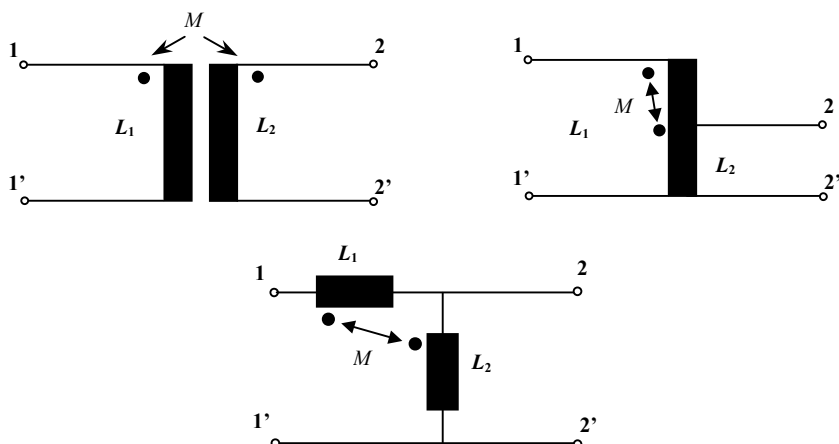
Lotura magnetikoko zirkuituak

4.1 LOTURA MAGNETIKOKO ZIRKUITUAK

Zirkuitu bat eroankorra izango da zirkuituko bi punturen arteko energiaren transmisioa kondukzioz bakarrik egiten denean. Zirkuitu bat induktiboa dela esango dugu zirkuituko bi punturen arteko energiaren transmisioa eremu magnetiko baten bitartez egiten denean, hau da, indukzioz.

Zenbait zirkuitutan, energiaren transmisioa bi moduetan egiten da, parte bat kondukzioz eta bestea indukzioz.

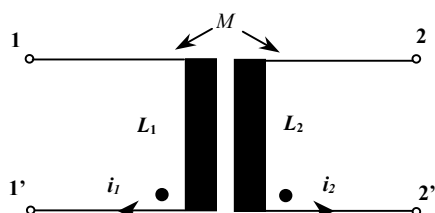
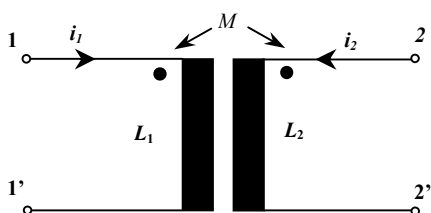
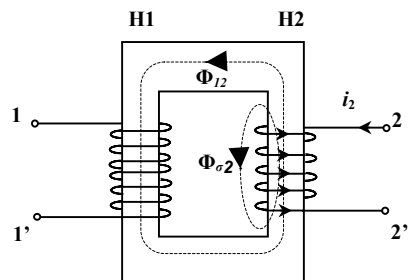
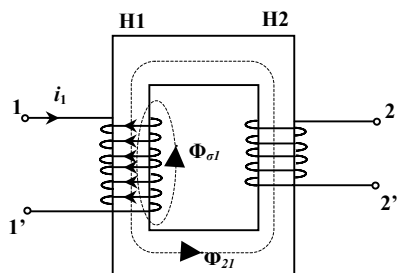
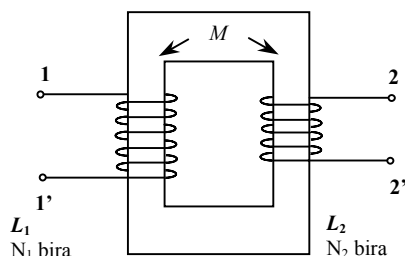
Bi zirkuitu mota horiek lotura magnetikoko zirkuituak izenez dira ezagunak. Industrian badira zirkuitu horien adibideak, transformadorea eta autotransformadorea, esate baterako.



4.2 PUNTUEN ERREGELA LOTURA MAGNETIKOKO HARILETAN

Puntuen erregela harilen adierazpen sinplifikatua egiteko erabiltzen da.

Magnetikoki lotutako bi haril emanda ($H1$ eta $H2$), haril bakoitzean zehar hautazko noranzkoa duten bi korrante i_1 eta i_2 hartzen baditugu, eskuin-eskuaren legea erabiliz, korranteek eragindako fluxuen noranzkoak Φ_{12} eta Φ_{21} aztertuko ditugu. Fluxu gehigarriak eragingo dituzten korranteak hariletara sartzen diren borneetan jarriko ditugu puntuak.



4.3 ELKARREKIKO INDUKZIO-KOEFIZIENTEA (M)

$$M = K \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

Non:

- L_1 eta L_2 : harilen autoindukzio-koefizienteak.
- K : lotura magnetikoaren koefizientea da. Koefiziente hau beti izango da $K \leq 1$.

K batekiko oso hurbil badago, lotura sendoa da eta ia ez dago sakabanatze-fluxurik; aldiz, K zerora hurbiltzen bada, lotura ahula da.

4.4 LOTURA MAGNETIKOKO ZIRKUITU BATI LOTURIKO ENERGIA

$$W = \frac{1}{2} L_1 \cdot i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot i_2^2 \pm M \cdot i_1 \cdot i_2$$

Lotura magnetikoari dagokion azken termino horrek zeinu positiboa hartuko du korrante biak elkarrekiko puntuetatik sartu edo irteten diren kasuetan. Eta zeinu negatiboa, berriz, korrante bat puntutik sartu eta bestea puntutik irteten direnean.

4.5 KATEATUTAKO GUZTIZKO FLUXUAK ETA ESPIRA BAKOITZEKO FLUXUA

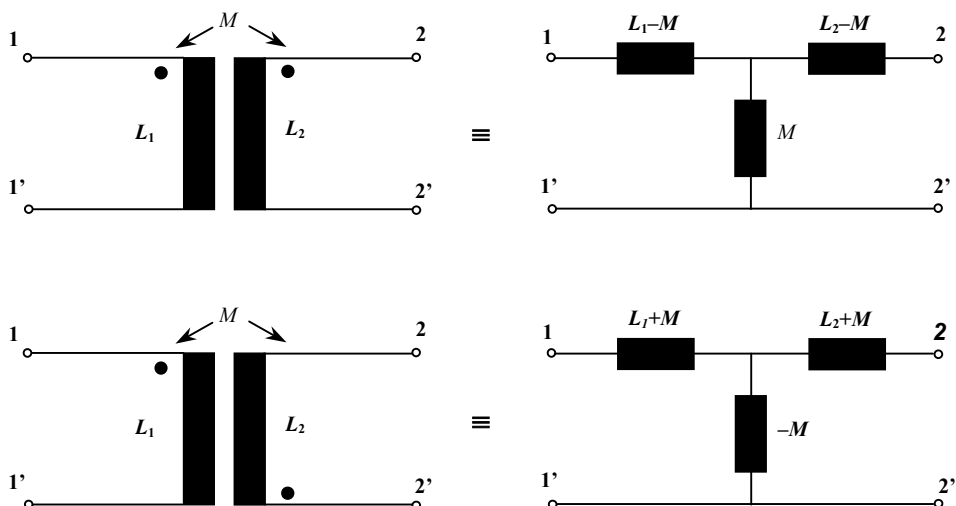
N_1 eta N_2 bira kopuruko bi haril magnetikoki lotuta daudenean, hau beteko da:

$$N_1 \cdot \Phi_{12} = M \cdot i_2 \rightarrow \Phi_{12} = \frac{M}{N_1} \cdot i_2 \quad \text{eta} \quad N_2 \cdot \Phi_{21} = M \cdot i_1 \rightarrow \Phi_{21} = \frac{M}{N_2} \cdot i_1$$

Bestetik, elkarrekiko fluxua $\Phi = \Phi_{12} \pm \Phi_{21}$ izango da. Hor, zeinu positiboa hartuko da fluxuak gehigarriak direnean eta negatiboa fluxuak kengarriak badira.

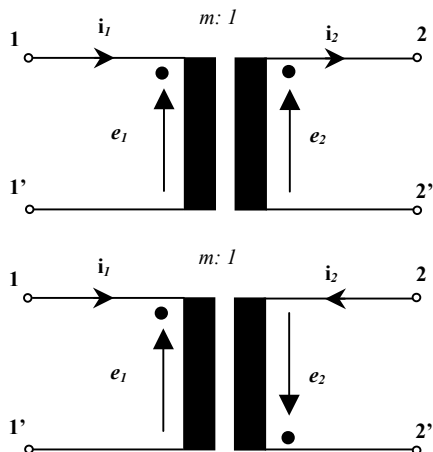
4.6 ZIRKUITU INDUKTIBO BATEN ZIRKUITU EROANKOR BALIOKIDEA

Magnetikoki lotutako bi harilak dauzkan zirkuitu inductibo bat T zirkuitu eroankorraz ordeztza daiteke. Lotura magnetikoaren puntuen arabera, zirkuitu eroankorren parametroak irudi hauetan adierazten den moduan kalkulatu dira:



4.7 TRANSFORMADORE IDEALA

Korronteei behar bezalako noranzkoak (bata puntutik sartu eta bestea irten) emanik eta tentsio biak puntuetatik sartzen edo irteten daudelarik, transformadorearen ekuazioa modu honetan adieraz daiteke:



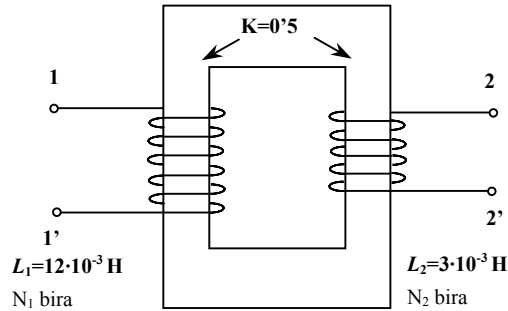
Non:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2} = m$$

Eta sekundarioan konektatutako inpedantzia primarioa murriztua (primariotik ikusita) hau izango da:

$$\underline{Z}'_2 = m^2 \cdot \underline{Z}_2$$

Ariketa-zenbakia: 4.1



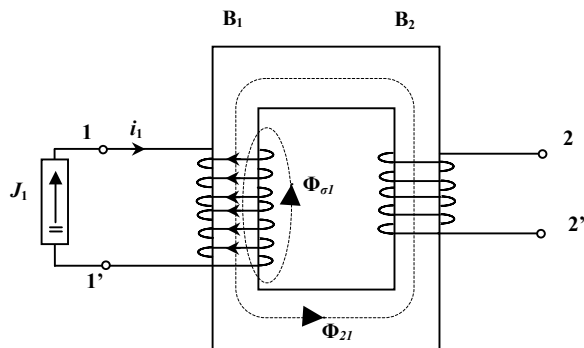
Irudiko zirkuitu induktiboaren lotura-koefizientea $K=0,5$ da.

Kalkulatu:

1. Zirkuitu induktiboari dagokion puntudun zirkuitua.
2. Zirkuitu konduktibo baliokidea.

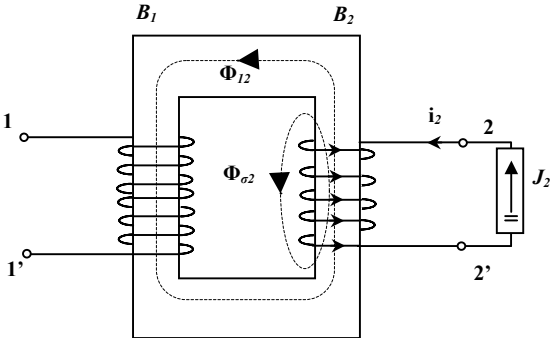
Ebazpena

1.

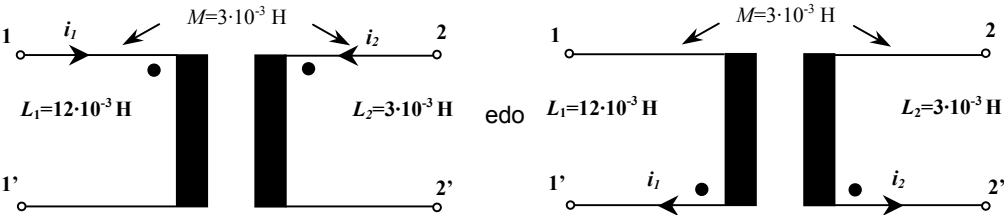


Zirkulazio-noranzko bat aukeratuko dugu i_1 korrontearentzat. Noranzko horrekin B_1 harilari eskuin-eskuaren legea aplikatuko diogu, eta Φ_{21} fluxuaren noranzkoa ezarriko dugu.

Gauza bera egingo dugu B_2 harilarekin, Φ_{12} lortzeko.



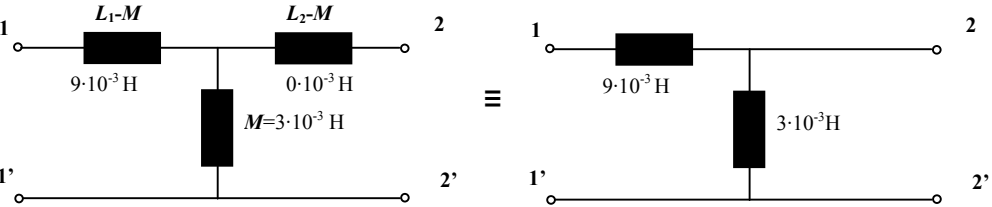
Fluxuek noranzko bera dutenez, batu egiten dira. Puntu elkarrekikoak aurreko korrante biak sartu edo irteten diren lekuetan jarri beharko dira.



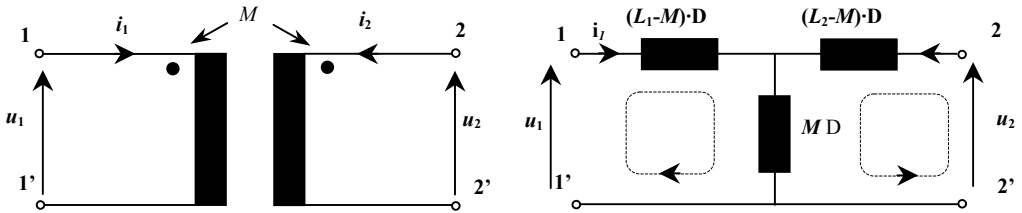
Bestetik, elkarrekiko indukzio-koefizientea:

$$M = K \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} = 0,5 \cdot \sqrt{12 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{H} = 3\text{mH}$$

2. Zirkuitu konduktibo baliokidea, autoindukzio-koefizienteak erabiliz,



Inpedantzia operazionalak erabiliz,

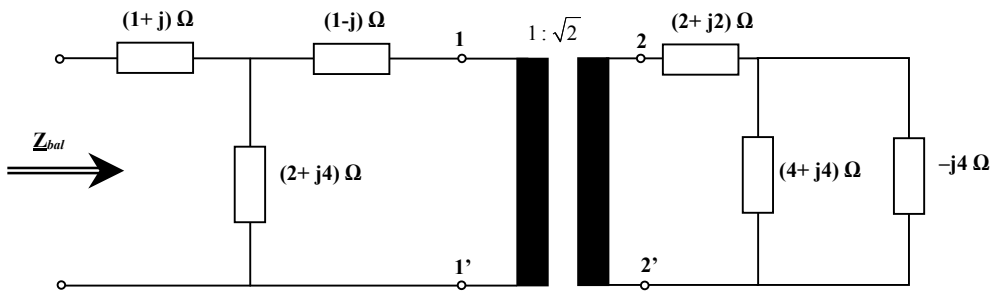


$$\begin{bmatrix} L_1 \cdot D & M \cdot D \\ M \cdot D & L_2 \cdot D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \cdot 10^{-3} D & 3 \cdot 10^{-3} D \\ 3 \cdot 10^{-3} D & 3 \cdot 10^{-3} D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \cdot 10^{-3} & 3 \cdot 10^{-3} \\ 3 \cdot 10^{-3} & 3 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Ariketa-zenbakia: 4.2

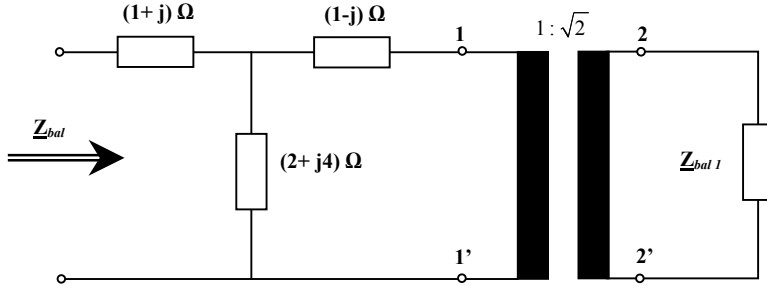


Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

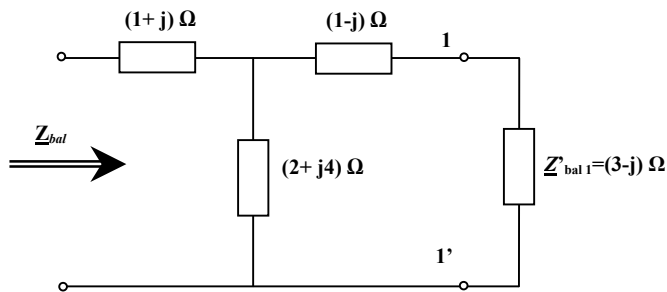
1. Inpedantzia baliokidea.

Ebazpena

1.

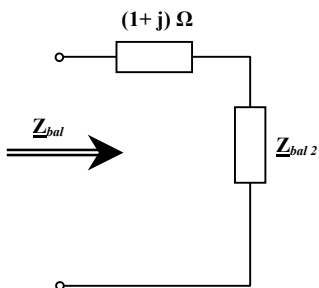


$$\begin{aligned} Z_{bal1} &= \frac{(4+j4) \cdot (-j4)}{4+j4-j4} + 2+j2 = \\ &= \frac{(4+j4) \cdot (-j) + 2+j2}{4-j4} \\ Z_{bal1} &= (6-j2) \Omega \end{aligned}$$



Primaria murriztutako inpedantzia baliokidea:

$$Z'_{bal1} = \frac{6-j2}{(\sqrt{2})^2} = (3-j) \Omega$$

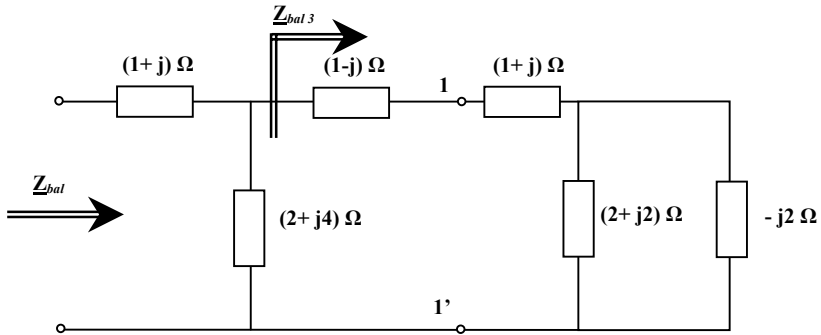


$$\begin{aligned} Z_{bal2} &= \frac{(4-j2) \cdot (2+j4)}{4-j2+2+j4} = \frac{(4-j2) \cdot (2+j4)}{6+j2} = \\ &= \frac{(2-j) \cdot (2+j4)}{3+j} = \frac{8+j6}{3+j} \cdot \frac{3-j}{3-j} = (3+j) \Omega \\ Z_{bal} &= 3+j+1+j = (4+j2) \Omega \end{aligned}$$

Ikus daitekeenez, inpedantzia baliokideak ez du elkarrekiko puntuekiko mendekotasunik; horregatik ez dira jarri enuntziatuan.

Hona hemen ariketa egiteko beste modu bat:

Tentsio altuko aldeko inpedantziak behe-tentsioko aldera murriztu daitezke, $(\sqrt{2})^2 = 2$ zenbakiaz (transformazio-erlazioa) zatituta, besterik gabe.



$$\frac{2+j2}{2} \rightarrow (1+j) \Omega$$

$$\frac{4+j4}{2} \rightarrow (2+j2) \Omega$$

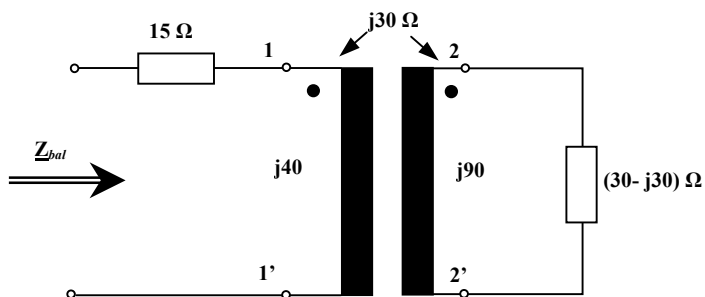
$$\frac{-j4}{2} \rightarrow (-j2) \Omega$$

Zuzenean ebazten den zirkuitu konduktibo honetan, berehala lortuko dugu inpedantzia baliokidea:

$$Z_{bal/3} = \frac{(2+j2) \cdot (-j2)}{2+j2-j2} + 1+j+1-j = (4-j2) \Omega$$

$$Z_{bal} = \frac{(4-j2) \cdot (2+j4)}{4-j2+2+j4} + 1+j = 3+j+1+j = (4+j2) \Omega$$

Ariketa-zenbakia: 4.3

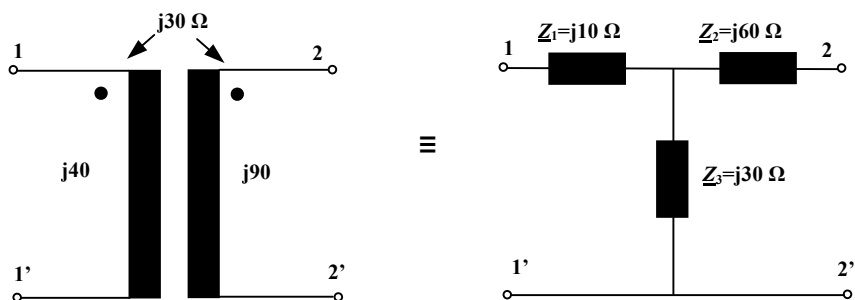


Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

1. Inpedantzia baliokidea.
2. Sarrerako tentsioaren balioa, zirkuituan $P = 2.100 \text{ W}$ -eko potentzia xahutu dadin.

Ebazpena

1.

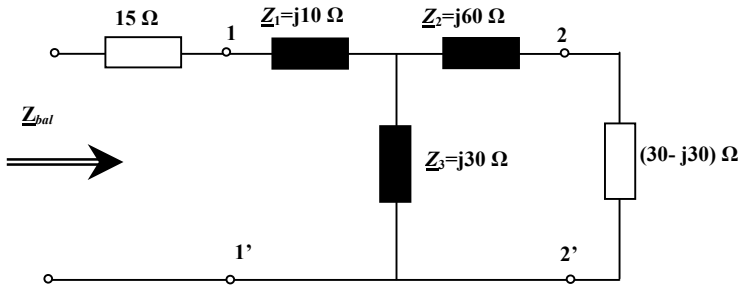


$$\underline{Z}_3 = j30 \Omega$$

$$\underline{Z}_1 = j40 - j30 = j10 \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = j90 - j30 = j60 \Omega$$

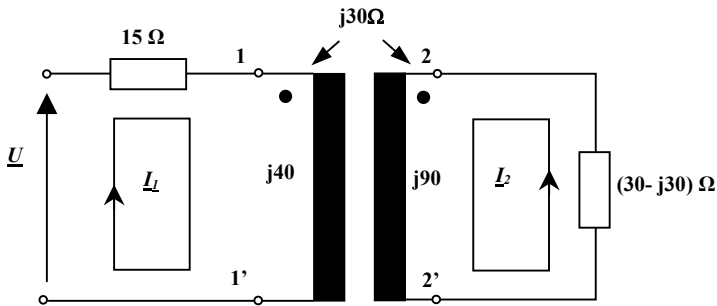
Eta, beraz,



$$\underline{Z}_{bal1} = \frac{(30 + j30) \cdot (j30)}{30 + j30 + j30} = \frac{(30 + j30) \cdot j}{1 + j2} = \frac{(-30 + j30)}{(1 + j2)} \cdot \frac{(1 - j2)}{(1 - j2)} = (6 + j18) \Omega$$

$$\underline{Z}_{bal} = 6 + j18 + 15 + j10 = (21 + j28) = 35 \angle 53^\circ \Omega$$

Ariketa egiteko beste era bat da metodo orokorra erabiltzea.



$$\begin{bmatrix} 15 + j40 & j30 \\ j30 & 30 + j60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zirkuituan, sarrerako puntuetan ikusten den inpedantzia ($\underline{Z}_{bal}$) puntu horietan dauden tentsioaren eta korrontearen arteko zatidura gisa kalkula daiteke:

$$\underline{Z}_{bal} = \frac{U}{I_1}; \text{ beraz,}$$

Eta sistema matritzalean $\frac{U}{I_1}$ egiten badugu:

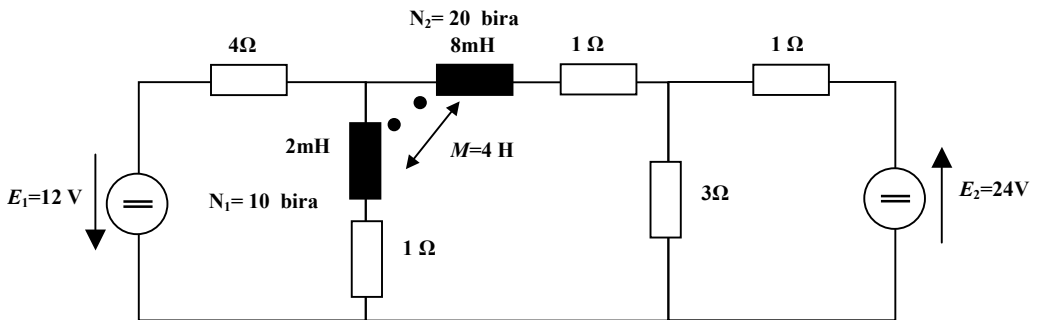
$$Z_{bal} = \frac{\Delta Z}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 15 + j40 & j30 \\ j30 & 30 + j60 \end{vmatrix}}{30 + j60} = 21 + j28 = 35 \angle 53^\circ \Omega$$

2. $21 \cdot I_1^2 = 2.100 \text{ W}$

$$I_1 = \sqrt{\frac{2.100}{21}} = 10 \text{ A}$$

Eta, beraz, tentsioa: $U = I_1 \cdot Z_{bal} = 10 \cdot 35 = 350 \text{ V}$

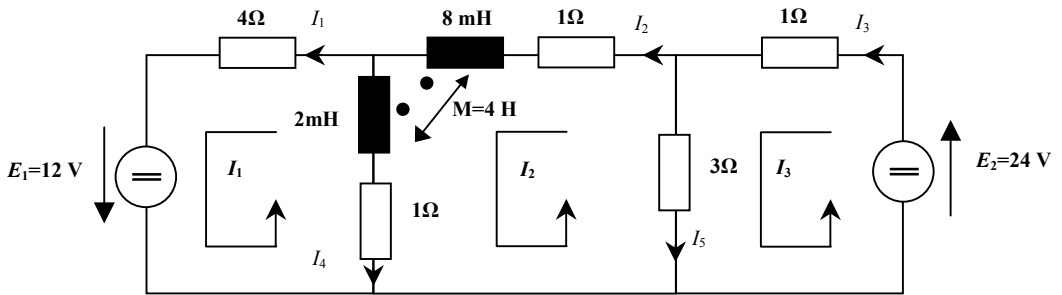
Ariketa-zenbakia: 4.4



Irudiko zirkuituan:

1. Adierazi E_1 eta E_2 iturrien izaera.
2. Kalkulatu lotura magnetikoan metatutako energia.
3. Kalkulatu haril bakoitzean zehar dabilen fluxua: Φ_1 , Φ_2 .

Ebazpena



$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Koefizienteen matrizearen diagonalak hertsiki nagusia da; ikus dezagun:

$$\begin{cases} |5| > |-1| + |0|; \\ |5| > |-1| + |-3|; \\ |4| > |0| + |-3|; \end{cases}$$

Horregatik, zirkuitua definitzen duen sistema matriziala Gaussen metodoa erabiliz ebatziko dugu:

2. errenkada + 1.errenkada · 0,2

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 4,8 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2,4 \\ 24 \end{bmatrix}$$

3. errenkada + 2.errenkada · 0,625

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 4,8 & -3 \\ 0 & 0 & 2,125 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2,4 \\ 25,5 \end{bmatrix}$$

Eta,

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 4,8 & -3 \\ 0 & 0 & 2,125 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2,4 \\ 25,5 \end{bmatrix}$$

3. errenkada garatuz: $I_3 = \frac{25,5}{2,125} = 12 \text{ A}$

2. errenkada garatuz: $4,8 \cdot I_2 - 3 \cdot 12 = 2,4 \rightarrow I_2 = \frac{2,4 + 36}{4,8} = 8 \text{ A}$

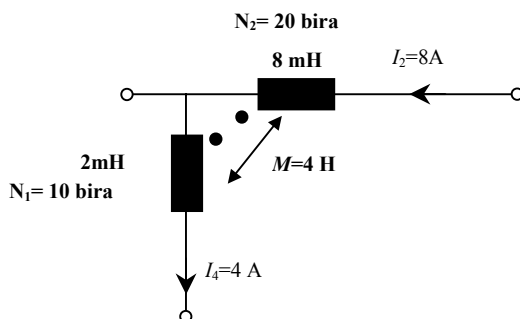
1. errenkada garatuz: $5 \cdot I_1 - 1 \cdot 8 = 12 \rightarrow I_1 = \frac{12 + 8}{5} = 4 \text{ A}$

Bestetik: $I_4 = I_2 - I_1 = 8 - 4 = 4 \text{ A}$

1. E_1 sorgailua da, I_1 eta E_1 noranzko berean daudelako.

E_2 sorgailua da, I_3 eta E_2 noranzko berean daudelako.

2.



Fluxuak kengarriak dira, I_2 8 mH-ko harilaren puntu elkarrekikotik irteten delako, eta I_4 2 mH-ko harilaren puntu elkarrekikotik sartzen delako. Beraz, lotura magnetikoari lotutako energia hau izango da:

$$W = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 8^2 - 4 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 8 = 144 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 144 \text{ mJ}$$

3. K lotura-koefizientea honako hau da:

$$K = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{8 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} = 1$$

Lotura perfektua da; horrek esan nahi du ez dagoela dispertsio-fluxurik. Eta, horren ondorioz, haril bakoitzean dabilen fluxua eta elkarbanatutakoa bera da.

$$\Phi = \Phi_1 = \Phi_2$$

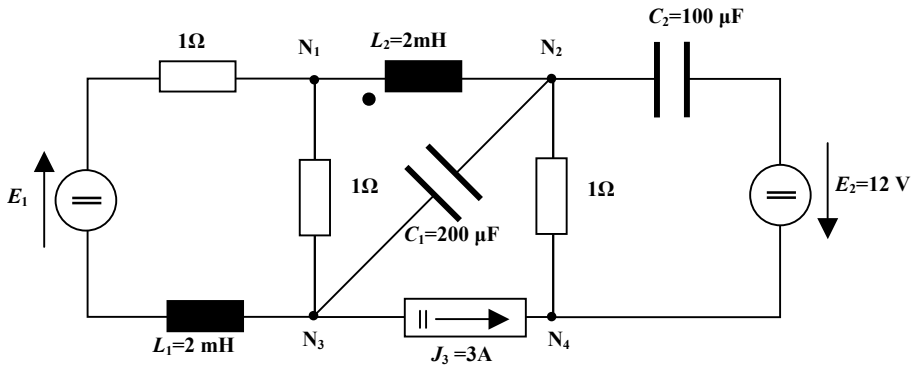
$$\left. \begin{aligned} \varphi_{21} = N_2 \cdot \Phi_{21} = M \cdot I_1 \rightarrow \Phi_{21} &= \frac{M}{N_2} \cdot I_1 \\ \varphi_{12} = N_1 \cdot \Phi_{12} = M \cdot I_2 \rightarrow \Phi_{12} &= \frac{M}{N_1} \cdot I_2 \end{aligned} \right\} \Phi = \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_{12} - \Phi_{21} = M \cdot \left(\frac{I_1}{N_2} - \frac{I_2}{N_1} \right)$$

$$\Phi = 4 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{4}{20} - \frac{8}{10} \right) = -2,4 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} = -2,4 \text{ mWb}$$

$$\Phi_{12} - \Phi_{21} < 0$$

Azken adierazpen horrek esan nahi du fluxua ez doala 1. hariletik 2. harilera, baizik eta alderantziz: 2.tik 1era.

Ariketa-zenbakia: 4.5



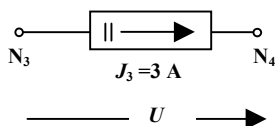
Irudiko zirkuituan, badakigu J korrante-iturriak zirkuituari 21 W ematen dizkiola. Kalkulatu:

1. E_1 iturriaren indar elektroeragilea.
2. $C_1 = 200 \mu\text{F}$ -eko kondentsadoreari loturiko energia.
3. $C_2 = 100 \mu\text{F}$ -eko kondentsadorearen karga eta polaritatea.
4. Zehaztu lotura magnetikoaren puntu elkarrekikoak, baldin eta zirkuituak metatutako guztizko energia $W = 18,65 \text{ mJ}$ -ekoa bada.
5. Harilen lotura-koefizientearen balioa.

Bi harilen arteko elkarrekiko autoindukzio-koefizientea $M = 1 \text{ mH}$ da.

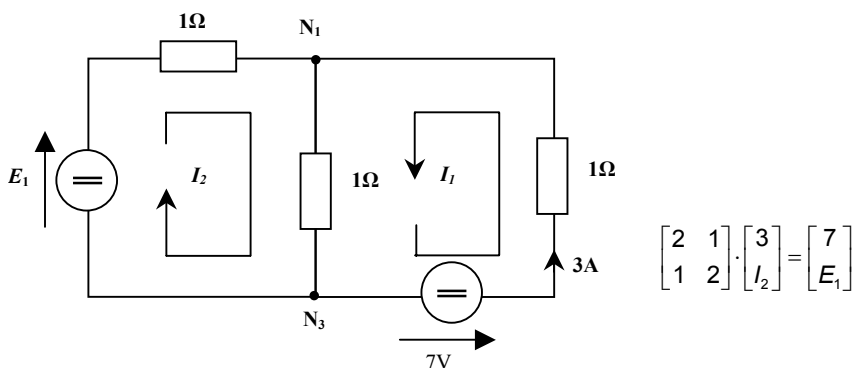
Ebazpena

1. Korrante-iturriaren borneen arteko tentsioa honako hau da:



$$\left. \begin{aligned} P_{J3} &= 21 \text{ W} \\ P_{J3} &= U \cdot J \end{aligned} \right\} U = \frac{P}{J} = \frac{21}{3} = 7 \text{ V}$$

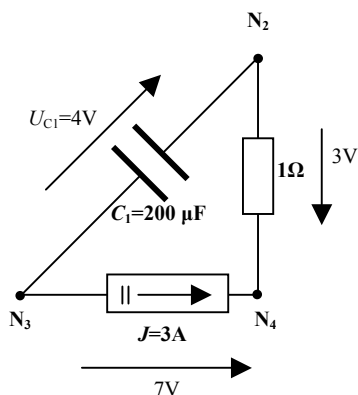
Orain, sareen metodoa erabiliz ebatziko dugu zirkuitua. Horretarako, ordezkapenaren legea aplikatuko dugu eta korrante-iturria 7 V-eko tentsio-iturriaz ordezkatzeko dugu.



$$1.\text{errenkada} \rightarrow 2 \cdot 3 + 1 \cdot I_2 = 7 \Rightarrow I_2 = \frac{7-6}{1} = 1 \text{ A}$$

$$2.\text{errenkada} \rightarrow 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = E_1 \Rightarrow E_1 = 5 \text{ V}$$

- 2.



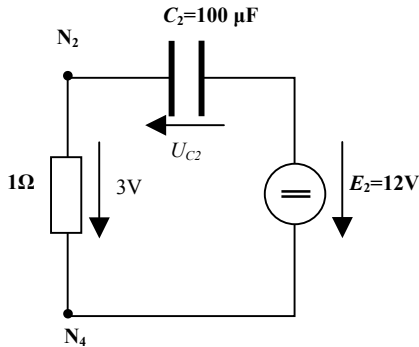
1 Ω-eko erresistentziaren borneen arteko tentsioa

$U_{C1} = 1 \cdot 3 = 3 \text{ V}$ da; beraz, aldameneko bide itxian zehar K2L besterik gabe aplikatuz: $7 - 3 - U_{C1} = 0 \rightarrow U_{C1} = 4 \text{ V}$

eta

$$W_{C1} = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 10^{-6} \cdot 4^2 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 1,6 \text{ mJ}$$

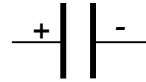
3.



K2L aplikatuko dugu:

$$12 - 3 - U_{C2} = 0 \rightarrow U_{C2} = 9V$$

$U_{C2} > 0V$ da; horrek esan nahi du polaritate egokia hartu dugula.



$$\text{Eta } Q_2 = C_2 \cdot U_{C2} \rightarrow Q_2 = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 9 = 0,9 \cdot 10^{-3} C = 0,9 \text{ mC}$$

4. Lotura magnetiko batean metatutako energia adierazpen honen arabera emana dator:

$$W = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot I_2^2 \pm M \cdot I_1 \cdot I_2 \quad (\text{non zeinuak elkarrekiko puntuak zehazten baititu}).$$

Kondentsadoreetako energia, biek metatutako energien batura izango da:

$$W_{C2} = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 9^2 = 4,05 \text{ mJ}, \text{ eta lehen kalkulatu dugunaren arabera:}$$

$$W_C = W_{C1} + W_{C2} = 1,6 + 4,05 = 5,65 \text{ mJ} \quad (\text{eremu elektriko gisa metatutako energia}).$$

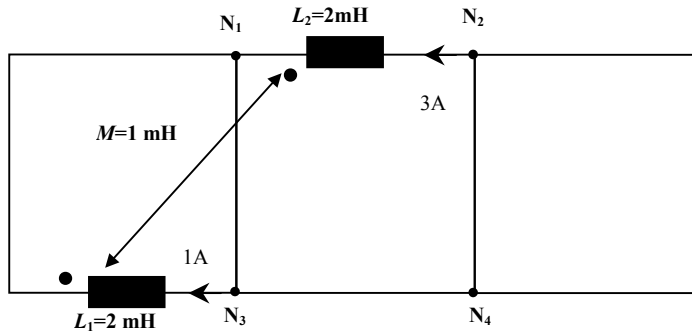
Lotura magnetikoan metatutako energia, beraz, honako hau izango da:

$$W = W_{\text{totala}} - W_C = 18,65 - 5,65 = 13 \text{ mJ}$$

$$\text{Eta horren ondorioz: } W = 13 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 3^2 \pm 1 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 3$$

edo $13 = 1 + 9 \pm 3$.

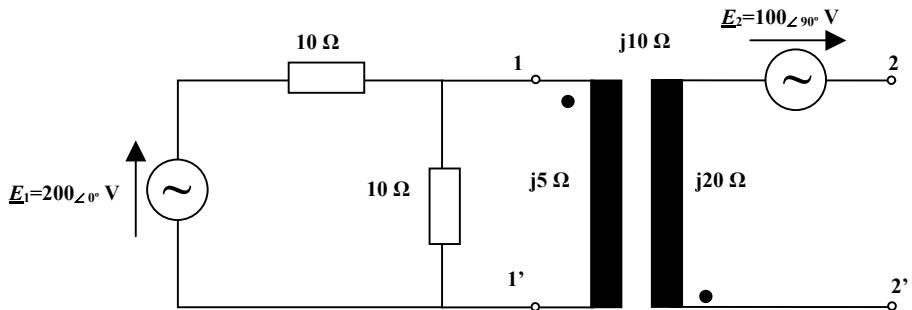
Azken berdintza hori bete dadin, zeinu positiboa hartu beharko dugu. Horrek esan nahi du loturan fluxuak batu beharko direla. Edo puntuen erregelaren arabera esanda, korranteek bi hariletan elkarrekiko puntuetatik sartu edo irten beharko dute. Hala, irudian ikus daitekeen bezala, L_1 harilaren puntuaren kokapena finkatuko dugu.



5. Lotura-koefizientea honako hau da:

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} = 0,5$$

Ariketa-zenbakia: 4.6

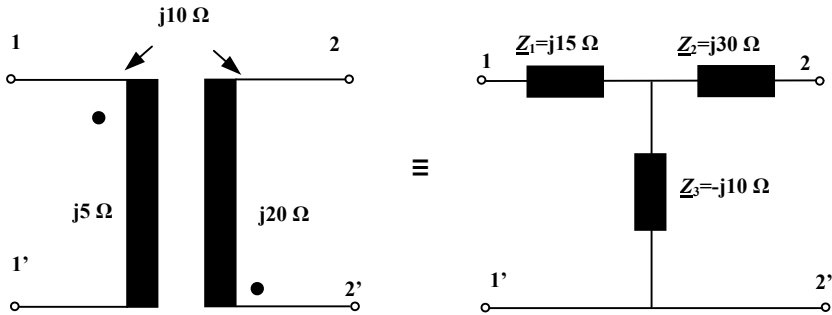


Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

1. Theveninen baliokidea, 2 eta 2' puntuen artean.
2. Bi puntu horien artean zirkuitu honek transferi dezakeen potentzia maximoa.

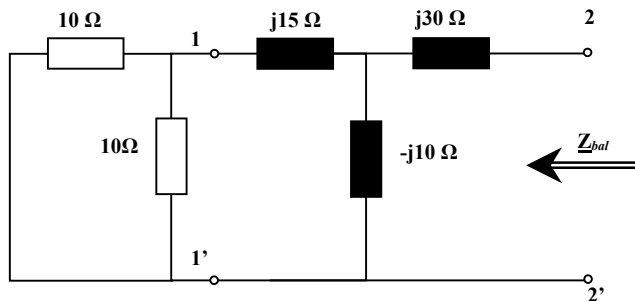
Ebazpena

1. Lotura magnetikoa bere zirkuitu konduktibo baliokideaz ordezkatzuz ebatziko dugu. Metodo hau ez da orokorra.



$$\begin{aligned} Z_3 &= -j10 \, \Omega \\ Z_1 &= j5 + j10 = j15 \, \Omega \\ Z_2 &= j20 + j10 = j30 \, \Omega \end{aligned}$$

Theveninen inpedantzia:



- Z_{bal1} : $10 \, \Omega$ eta $10 \, \Omega$ erresistentzien paralelo-elkarketa: $Z_{bal1} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \, \Omega$
- Z_{bal2} : $5 \, \Omega$ eta $j15 \, \Omega$ inpedantzien serie-lotura: $Z_{bal2} = (5 + j15) \, \Omega$
- Z_{bal3} : $(5 + j15)$ eta $-j10$ inpedantzien paralelo-elkarketa:

$$Z_{bal3} = \frac{(5 + j15) \cdot (-j10)}{5 + j15 - j10} = \frac{(5 + j15) \cdot (-j10)}{5 + j5} = \frac{(5 + j15) \cdot (-j2)}{1 + j} =$$

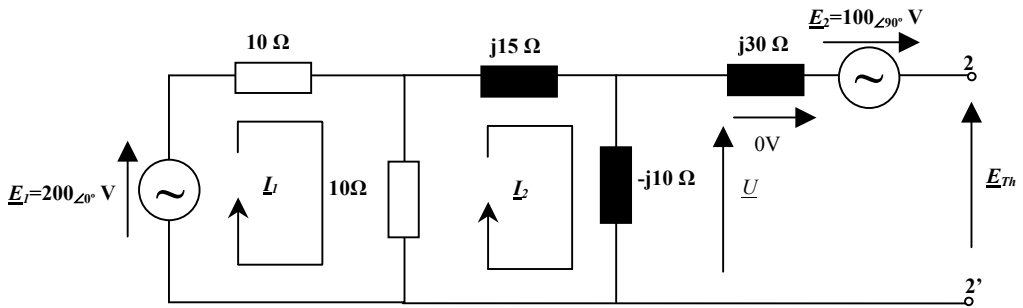
$$= \frac{30 - j10}{1 + j} \cdot \frac{1 - j}{1 - j} = \frac{20 - j40}{2} =$$

$$\underline{Z}_{bal3} = (10 - j20) \Omega$$

- $\underline{Z}_{bal} = \underline{Z}_{Th}$:

$$\underline{Z}_{bal3} \text{ eta } j30 \text{ inpedantzien serie-elkarketa: } \underline{Z}_{Th} = 10 - j20 + j30 = (10 + j10) \Omega$$

Theveninen tentsioa:



$$\begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 10 + j5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. errenkada + 0,5 aldiz 1. errenkada: $\begin{bmatrix} 20 & -10 \\ 0 & 5 + j5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \angle 0^\circ \\ 100 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$

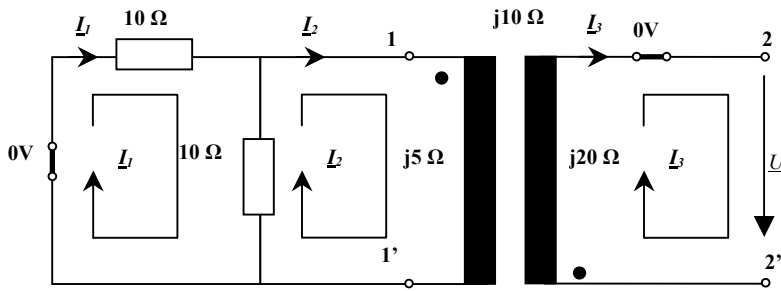
$$I_2 = \frac{100 \angle 0^\circ}{5 + j5} = \frac{100 \angle 0^\circ}{5\sqrt{2} \angle 45^\circ} = 10\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\text{eta } \underline{U} = 10\sqrt{2} \angle -45^\circ \cdot 10 \angle -90^\circ = 100\sqrt{2} \angle -135^\circ \text{ V}$$

$$\text{Azkenik: } \underline{E}_{Th} = 100\sqrt{2} \angle -135^\circ + 100 \angle 90^\circ = 100 \angle 180^\circ \text{ V}$$

Orain, metodo orokorra erabiliz ebatziko dugu.

Theveninen inpedantzia:



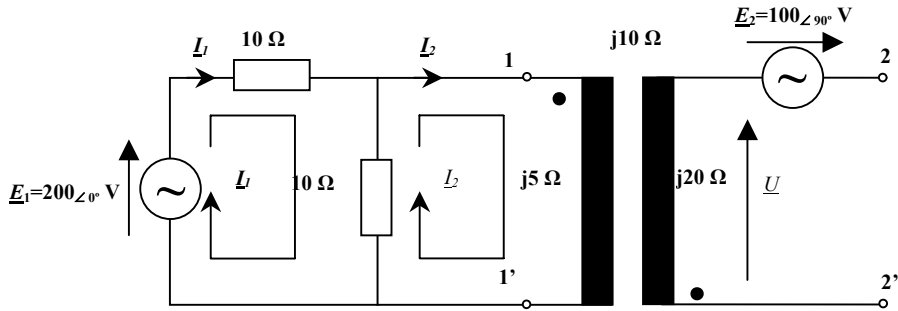
$$Z = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -10 & 10 + j5 & j10 \\ 0 & j10 & j20 \end{bmatrix}$$

$$Z_{bal} = Z_{Th} = \frac{\Delta Z}{\Delta_{33}} = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -10 & 10 + j5 & j10 \\ 0 & j10 & j20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 10 + j5 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{0 \cdot \begin{vmatrix} -10 & 10 + j5 \\ 0 & j10 \end{vmatrix} - j10 \cdot \begin{vmatrix} 20 & -10 \\ 0 & j10 \end{vmatrix} + j20 \cdot \begin{vmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 10 + j5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 10 + j5 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{2000}{200 + j100 - 100} + j20 = (10 + j10) \Omega$$

Theveninen tentsioa:



$$\begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 10 + j5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Errazago ebazteko, 2. errenkadari lehenengoaren erdia batuko diogu:

$$\begin{bmatrix} 20 & -10 \\ 0 & 5 + j5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \angle 0^\circ \\ 100 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

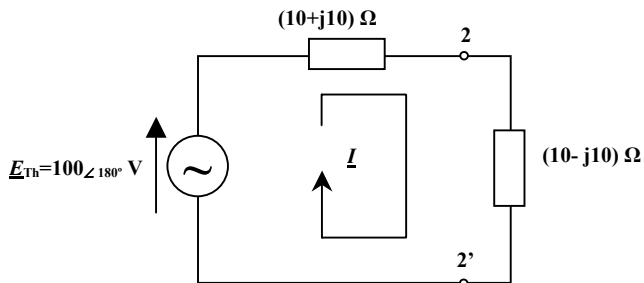
Bigarren errenkada garatuz: $I_2 = \frac{100 \angle 0^\circ}{5 + j5} = 10\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A}$

Eta $\underline{U} = -10\sqrt{2} \angle -45^\circ \cdot j10 = 100\sqrt{2} \angle -135^\circ \text{ V}$

Azkenik:

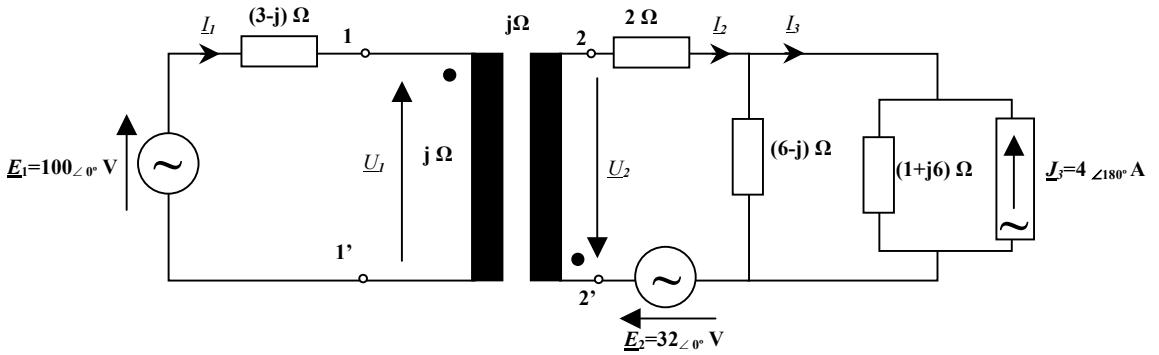
$$\underline{E}_{Th} = 100\sqrt{2} \angle -135^\circ + 100 \angle 90^\circ = 100 \angle 180^\circ \text{ V}$$

2.



$$P_{\max} = \left(\frac{100}{10 + 10} \right)^2 \cdot 10 = 250 \text{ W}$$

Ariketa-zenbakia: 4.7

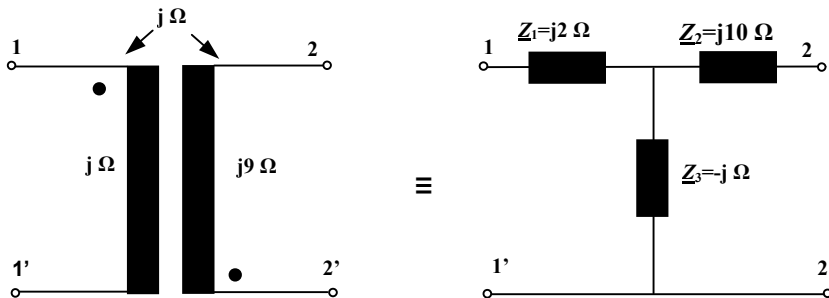


Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

1. Iturrien izaera eta potentzia.
2. Lotura magnetikoaren $\underline{U}_1$ eta $\underline{U}_2$ tentsioak.

Ebazpena

Zirkuitu konduktibo baliokideaz ordezkatzuz ebatziko dugu.

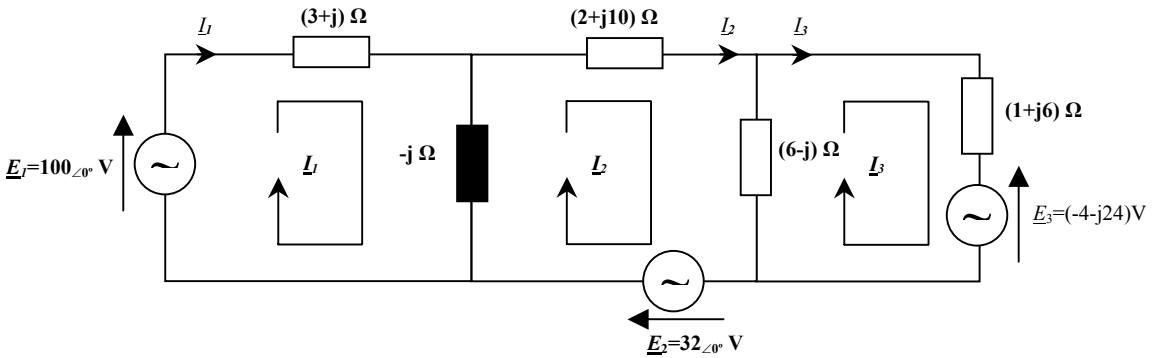


$$\underline{Z}_3 = -j \Omega$$

$$\underline{Z}_1 = j + j = j2 \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = j9 + j = j10 \Omega$$

Ondoren agertzen da zirkuitu inductiboarekiko baliokidea den zirkuitu konduktiboa. Sareen metodoa erabiliz ebatziko dugunez, korrante-iturri erreala horren tentsio-iturri erreal baliokideaz ordezkatu dugu.



$$\begin{bmatrix} 3 & j & 0 \\ j & 8+j8 & -6+j \\ 0 & -6+j & 7+j5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\angle 0^\circ \\ 32\angle 0^\circ \\ 4+j24 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 100\angle 0^\circ & j & 0 \\ 32\angle 0^\circ & 8+j8 & -6+j \\ 4+j24 & -6+j & 7+j5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & j & 0 \\ j & 8+j8 & -6+j \\ 0 & -6+j & 7+j5 \end{vmatrix}} = \frac{-1.600 + j10.528}{-50 + j329} = 32\angle 0^\circ \text{ A}$$

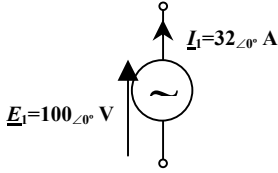
I_2 kalkulatzeko, sistema matrizialeko lehenengo errenkada garatuko dugu:

$$3 \cdot 32\angle 0^\circ + j \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 = 100\angle 0^\circ \rightarrow I_2 = \frac{100 - 3 \cdot 32}{j} = -j4 \text{ A} = 4\angle -90^\circ \text{ A}$$

Era berean, I_3 kalkulatzeko, sistema matrizialeko hirugarren errenkada garatuko dugu:

$$I_1 \cdot 0 + (-6+j) \cdot (-j4) + (7+j5) \cdot I_3 = 4+j24 \rightarrow I_3 = \frac{0}{7+j5} = 0 \text{ A}$$

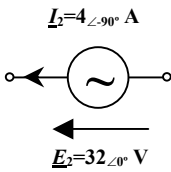
1. Lotutako korronteen balioekin, azter ditzagun iturrien jokabideak:



$$\begin{aligned} \underline{S}_{E1} &= 100_{\angle 0^\circ} \cdot [32_{\angle 180^\circ}]^* = 3.200_{\angle 180^\circ} = \\ &= (-3.200 + j0) \text{ VA} \end{aligned}$$

Sorgailua da eta $P_{E1} = -3.200 \text{ W}$; $Q_1 = 0 \text{ var}$ eta $S_{E1} = -3.200 \text{ VA}$

(Hargailu-irizpidea hartu da kontuan)



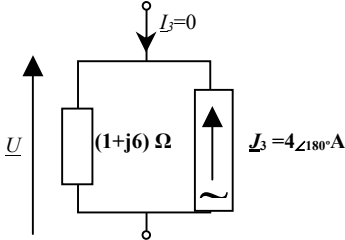
$$\underline{S}_{E2} = 32_{\angle 0^\circ} \cdot [4_{\angle 90^\circ}]^* = 128_{\angle -90^\circ} = (0 - j128) \text{ VA}$$

$P_{E2} = 0 \text{ W}$ ezin dugu iturriaren jokabidea zehaztu; sorgailu zein hargailu izan daiteke.

$$P_{E2} = 0 \text{ W}; Q_{E2} = -128 \text{ var eta } S_{E2} = 128 \text{ VA.}$$

$$\underline{U} = (1 + j6) \cdot (4_{\angle 180^\circ}) = (-4 - j24) \text{ V}$$

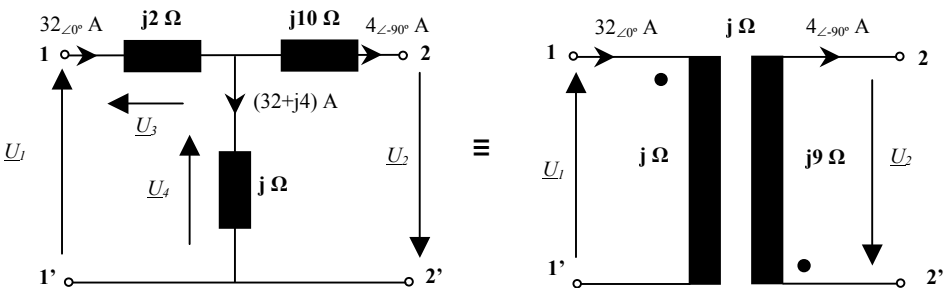
Hargailu-irizpidea aplikatzeko, tentsioaren noranzkoa aldatuko diogu:



$$\underline{S}_{J3} = (4 + j24) \cdot [4_{\angle 180^\circ}]^* = (-16 - j96) \text{ VA}$$

Hutsean dagoen sorgailua da. $P_{J3} = -16 \text{ W}$; $Q_{J3} = -96 \text{ var}$ eta $S_{J3} = 97,32 \text{ VA}$.

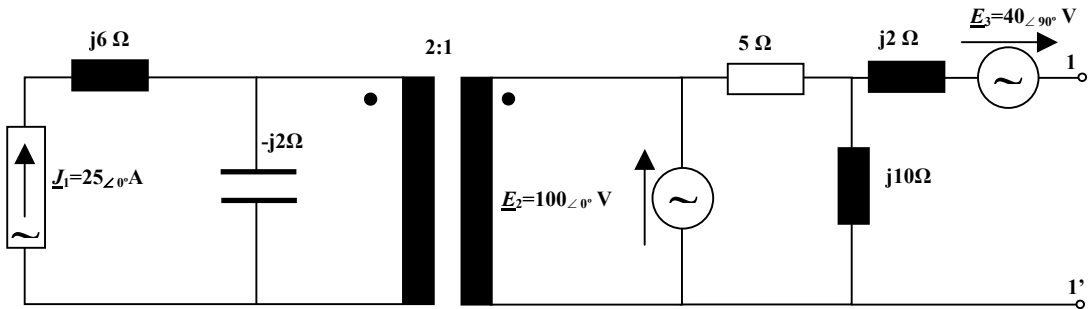
- 2.



$$\underline{U}_1 = \underline{U}_3 + \underline{U}_4 = j2 \cdot 32 + (32 + j4) \cdot (-j) = j64 - j32 + 4 = (4 + j32) = 32,25_{\angle 83^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_2 = -\underline{U}_4 + \underline{U}_5 = -(32 + j4) \cdot (-j) + j10 \cdot (-j4) = -4 + j32 + 40 = (36 + j32) = 48,17_{\angle 41,6^\circ} \text{ V}$$

Ariketa-zenbakia: 4.8

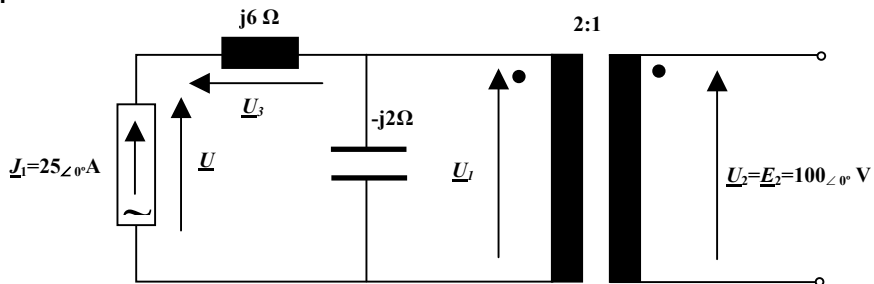


Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

1. $\underline{U}_1$ iturriaren tentsioa, eta adierazi sorgailu edo hargailu gisa lan egiten duen. Era berean, kalkulatu xurgatutako edo emandako potentziak.
2. Theveninen baliokidea 1 eta 1' puntuen artean.
3. Aurreko puntu horien artean jarri beharreko inpedantziaren balioa, potentzia maximoa transferi dakion; inpedantzia horrek, gainera, $\underline{Z} = \underline{Z}_{\angle 30^\circ} \Omega$ -en itxura izan beharko du.

Ebazpena

1.



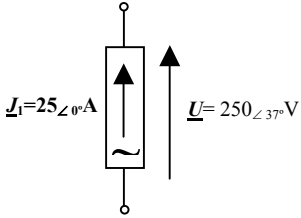
$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_3$$

$$\underline{U}_1 = 100 \angle 0^\circ \cdot 2 = 200 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_3 = j6 \cdot 25 \angle 0^\circ = j150 \text{ V}$$

$$\underline{U} = (200 + j150) \text{ V} = 250 \angle 37^\circ \text{ V}$$

$\underline{J}_1$ iturriaren jokabidea



Tentsioaren polaritatea esleitzean, iturriak sorgailu gisa jotatuko duela suposatu dugu; baina iturriaren jokabidea aztertzeko hargailu-irizpidea aplikatzen dugunez, tentsioaren noranzkoa aldatuko dugu.

$$\underline{S}_{J1} = -\underline{U} \cdot (\underline{J}_1)^* = (-200-j150) \cdot (25+j0) = (-5000 - j3750) = 6250 \angle 37^\circ \text{ VA}$$

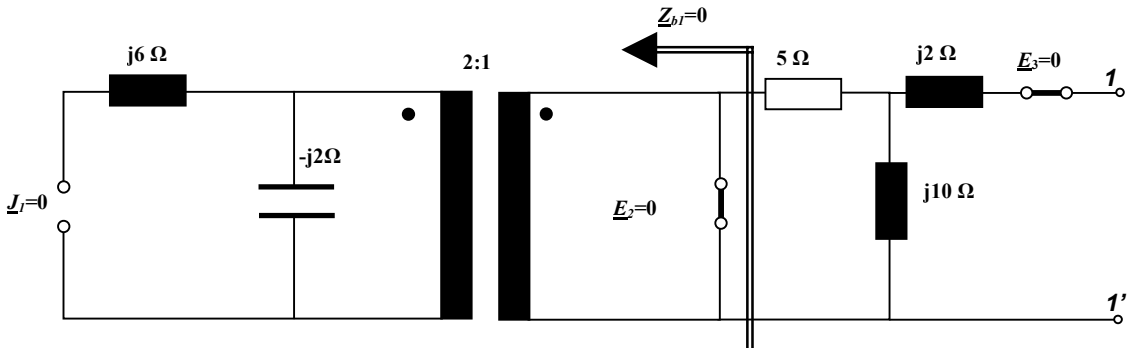
Iturriak sorgailu gisa egingo du lan, eta hauek izango dira potentziak:

$$P_{J1} = 5.000 \text{ W} = 5 \text{ kW}$$

$$Q_{J1} = 3.750 \text{ var} = 3,75 \text{ kvar}$$

$$S_{J1} = 6.250 \text{ VA} = 6,250 \text{ kVA}$$

2. Theveninen inpedantzia:

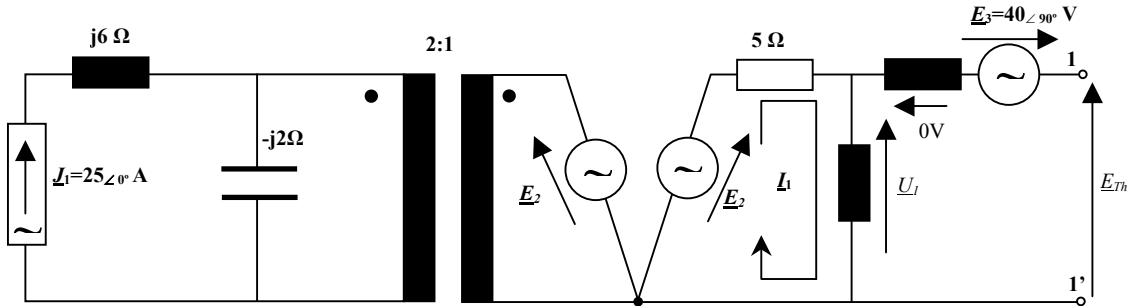


$$\underline{Z}_{\text{bal}} = \underline{Z}_{\text{Th}} = \frac{5 \cdot j10}{5 + j10} + j2 = \frac{j50}{5 + j10} + j2 =$$

$$\frac{j10}{1 + j2} \cdot \frac{1 - j2}{1 - j2} + j2 = \frac{j10 + 20}{5} + j2 = 4 + j2 + j2$$

$$\underline{Z}_{\text{Th}} = 4 + j4 = 4\sqrt{2} \angle 45^\circ \Omega$$

Theveninen tentsioa: Theveninen tentsioa lortzeko, zirkuituaren geometria eraldatuko dugu.



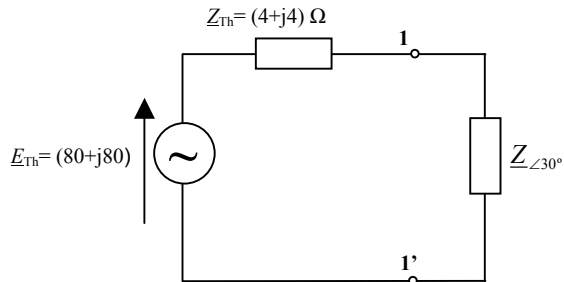
$$\underline{E}_{Th} = \underline{U}_1 + 40 \angle 90^\circ$$

$$\underline{I}_1 = \frac{100 \angle 0^\circ}{5 + j10} = \frac{20 \angle 0^\circ}{(1 + j2)} \cdot \frac{(1 - j2)}{(1 - j2)} = \frac{20 - j40}{5} = (4 - j8) \text{ A}$$

$$\underline{U}_1 = j10 \cdot (4 - j8) = j40 + 80 = (80 + j40) \text{ V}$$

$$\text{eta } \underline{E}_{Th} = 80 + j40 + j40 = 80 + j80 = 80\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ V}$$

3. Potentzia maximoa transferituko duen inpedantzia:



$$|Z| = |Z_{Th}| \text{ beraz } \underline{Z}_{\angle 30^\circ} = 4\sqrt{2} \angle 30^\circ \Omega$$

5

Zirkuitu doigarriak

5.1 PUNTU BATEN ALDERANTZIZKO KONPLEXUA LORTZEA

Puntua unitate-zirkunferentziatik kanpo badago (a puntua)

Urrats hauei jarraitu behar zaie:

- Lotu a puntua inbertsio-zentroarekin $(0,0)$.
- Eraiki unitate-zirkunferentziarekiko ukitzailea a puntutik.
- Egin a eta zentroa lotzen dituen zuzen elkarzuta ukitze-puntutik. Ebaketa-puntua a' , edo a-ren alderantzizkoa, izango da.
- Alderantzizko konplexua lortzeko, a' -ren ardatz errealarekiko puntu simetrikoa lortu behar da; a'' lortzen da.

Puntua unitate-zirkunferentziaren barruan badago (c puntua)

Jarraitu beharreko urratsak:

- Lotu c puntua $(0,0)$ -rekin.
- Egin c eta $(0,0)$ puntua lotzen dituen zuzenarekiko zuzen elkarzuta c-tik.
- Zuzen horrek unitate-zirkunferentzia mozten duen puntuan, eraiki zirkunferentziarekiko zuzen ukitzailea.

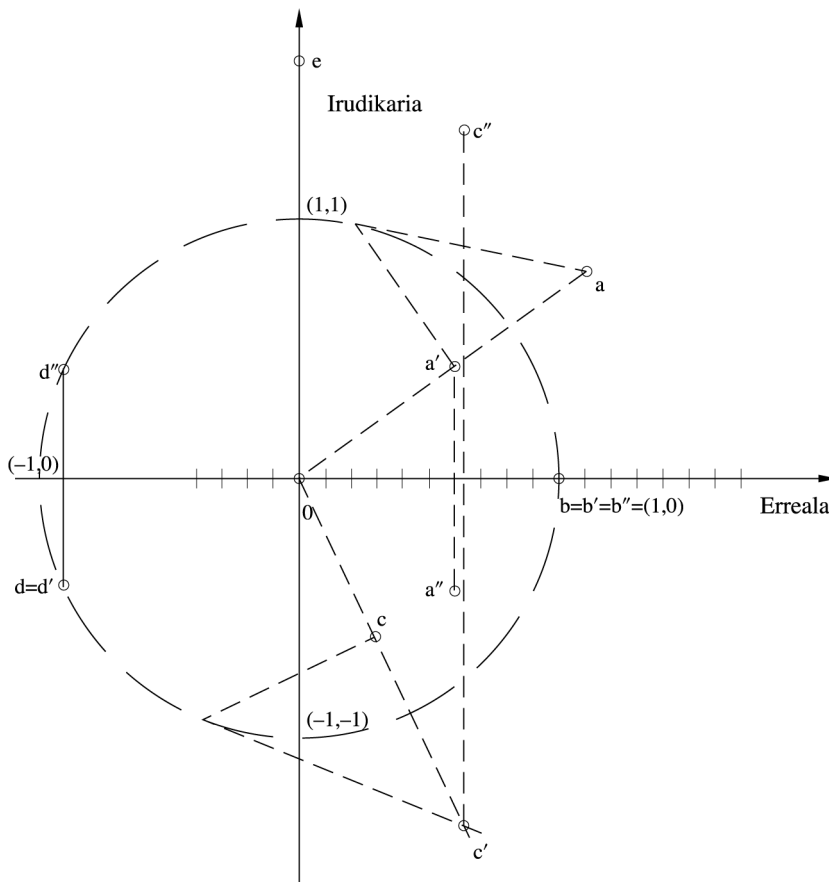
- Ukitaileak $(0,0)$ -c zuzena moztzen duen puntuan c' egongo da.
- Horren alderantzizko konplexua lortzeko, ardatz errealarekiko puntu simetrikoa irudikatuko dugu, c'' .

Puntua unitate-zirkunferentzian badago (d puntua)

Puntua eta bere alderantzizkoa bat datoz ($d=d'$). Alderantzizko konplexua lortzeko, puntuaren simetrikoa egin behar da ardatz errealarekiko.

Puntua $(0,1)$ edo $(-1,0)$ bada

Puntua, bere alderantzizkoa eta alderantzizko konplexua puntu berean bat datoz. (Irudiko b puntua $b = b' = b''$)



5.1 irudia

ONDORIOAK

Unitate-zirkunferentziaren barruan dauden puntuen alderantzizko konplexuak kanpoan egongo dira.

Planoerdi positiboan dauden puntuak planoerdi negatiboan geratuko dira.

Puntuak unitate-zirkunferentzian bertan badaude, bere alderantzizko konplexuak ere unitate-zirkunferentzian egongo dira.

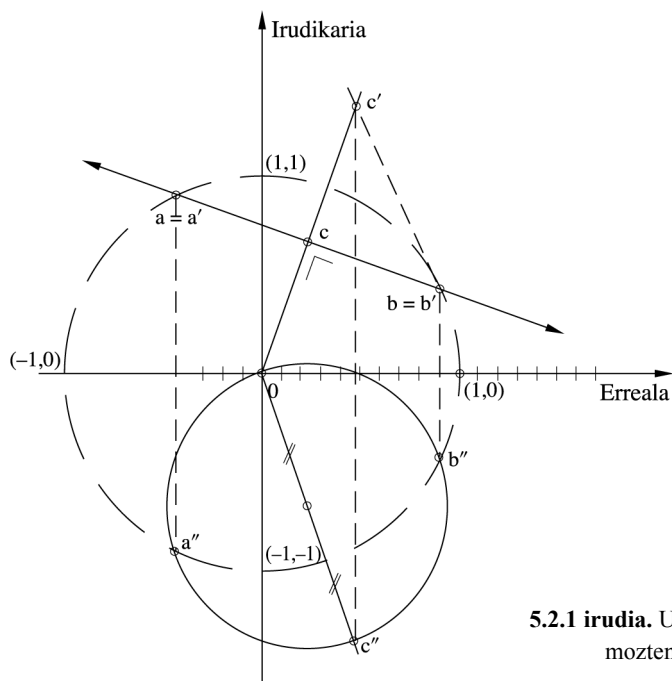
5.2 INBERTSIO-ZENTROTIK IGAROTZEN EZ DEN ZUZENAREN ALDERANTZIZKO KONPLEXUA

Bere alderantzizko konplexua inbertsio-puntutik igarotzen den zirkunferentzia izango da, zuzena $-\infty$ -tik $+\infty$ -ra baitoa, eta ∞ -ren zein $-\infty$ -ren alderantzizkoak zero dira.

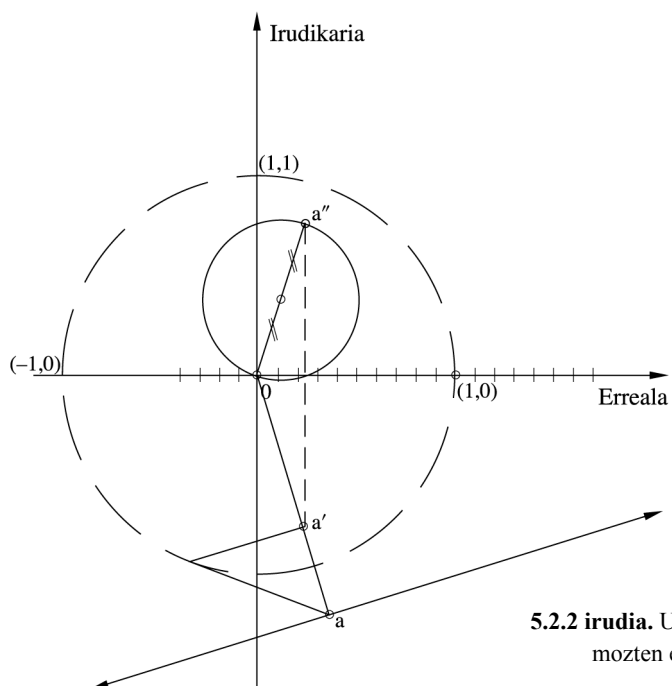
Zuzenaren alderantzizko konplexua eraikitzeke, bi aukera dauzkagu: hiru punturen alderantzizko konplexuak lortu eta gero, hiru puntu horiekin zirkunferentzia eraiki, hiru punturen bidez zirkunferentzia bat eraikitzeke metodoa erabiliz; edo diametroa eratzen duten bi punturen alderantzizko konplexuak lortu, gero zirkunferentzia eraikitzeke.

Bigarren aukera laburragoa da, eta hori erabiliko dugu.

Diametro bat osatzen duten bi puntu: inbertsio-zentrotik hurbilen eta urrutien dauden bi puntuak. Urrutien daudenak $+\infty$ eta $-\infty$ dira, eta euren alderantzizko konplexua $(0,0)$ puntua izango da. Zentrotik hurbilen dagoena lortzeko, zentrotik zuzenera zuzen elkarzut bat egingo dugu. Ebaketa-puntua izango da zentrotik hurbilen dagoen zuzeneko puntua. Ebaketa-puntu horren alderantzizko konplexua lortuz gero, gure zirkunferentziaren diametroa izango dugu; zentroa bilatu, eta badugu zirkunferentzia.



5.2.1 irudia. Unitate-zirkunferentzia mozten duen zuzena.



5.2.2 irudia. Unitate-zirkunferentzia mozten ez duen zuzena.

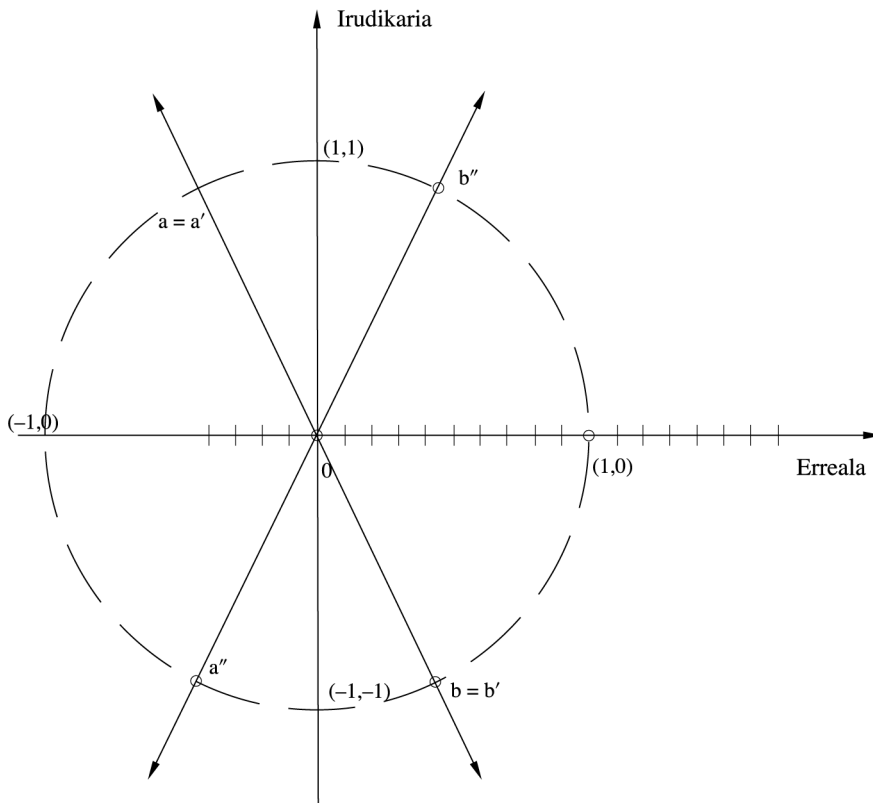
ONDORIOAK

Unitate-zirkunferentziatik kanpo dauden zuzenaren puntuak, alderantzizkoa egiterakoan, unitate-zirkunferentziaren barruan geratuko dira, eta barruan dauden zuzenaren puntuen alderantzizko konplexuak, aldiz, kanpoan.

5.3 INBERTSIO-ZENTROTIK IGAROTZEN DEN ZUZENAREN INBERTSIOA

(0,0) puntuaren alderantzizkoa $\pm\infty$ denez, zuzen horren alderantzizko konplexua ez da zirkunferentzia bat izango, baizik eta inbertsio-zentrotik igaroko den beste zuzen bat.

Zuzen hori marrazteko bi puntu behar direnez, jatorrizko zuzenetik edozein bi punturen alderantzizko konplexuak egingo ditugu. Lana errazteko, unitate-zirkunferentzia moztan duten bi puntuak aukeratuko ditugu, eta, horrela, haien simetrikoak lortzea baino ez dugu.

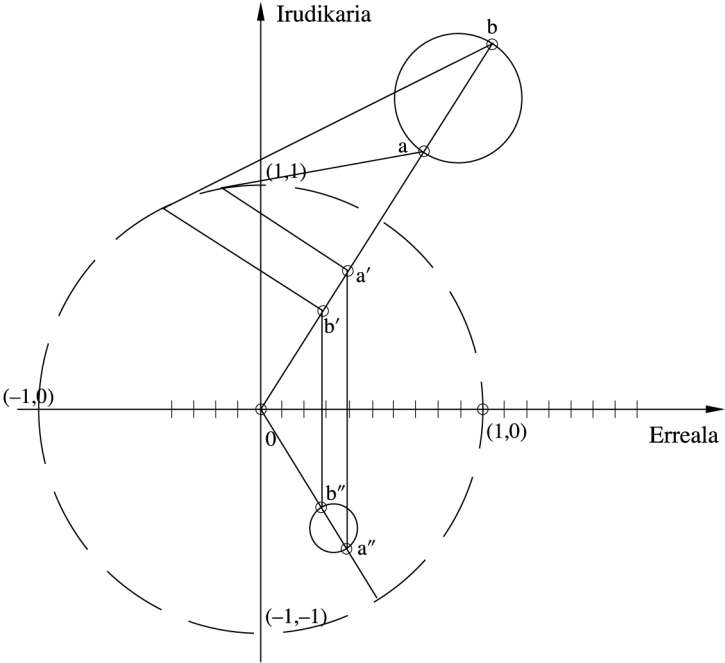


5.3 irudia

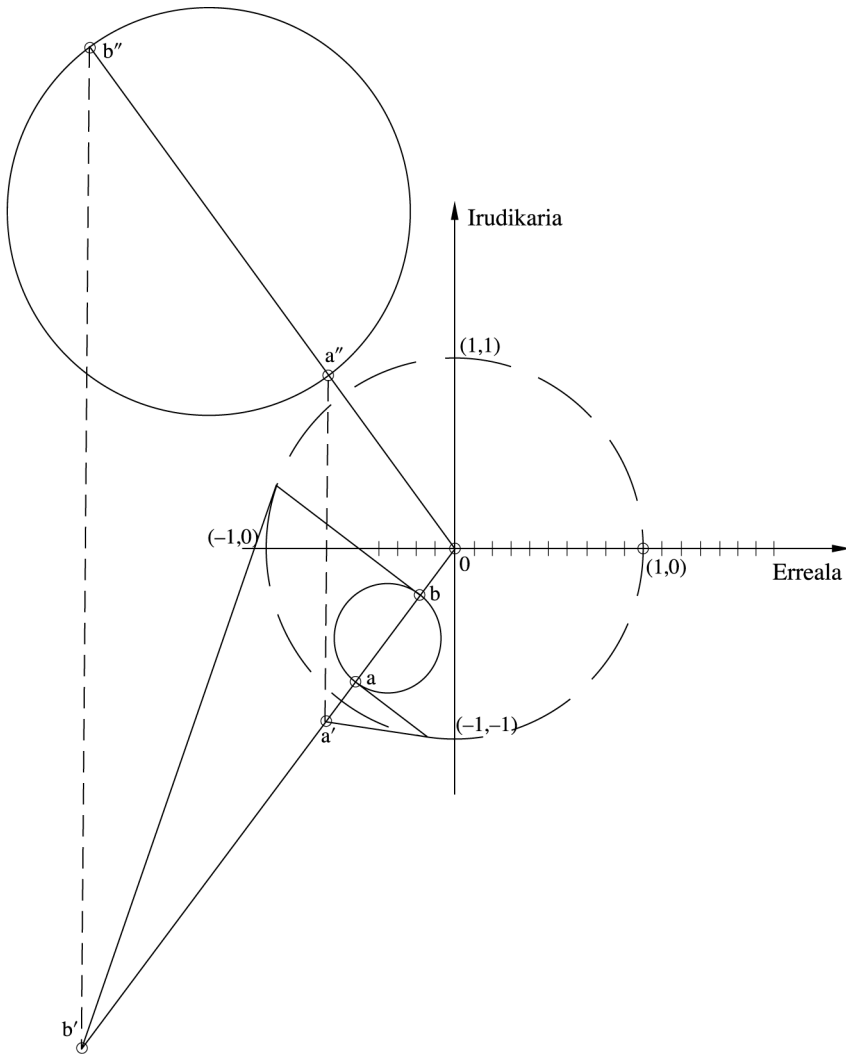
5.4 INBERTSIO-ZENTROTIK IGAROTZEN EZ DEN ZIRKUNFERENTZIAREN INBERTSIOA

Inbertsio-zentrotik igarotzen ez den beste zirkunferentzia bat izango da.

Komeni zaigu diametroa eratzen duten bi punturen alderantzizkoak egitea. Gainera, puntu horiek inbertsio-zentrotik hurbilen eta urrutien daudenak badira, inbertsioa egitean, urrunen eta hurbilen daudenak izatera igaroko dira hurrenez hurren. Puntu urrunen eta hurbilen horiek kokatzeko, zirkunferentziaren zentroa inbertsio-zentroarekin lotuko dugu, eta zuzen horrek mozten dituen zirkunferentziaren puntuak gure puntuak izango dira. Bi horiekin, zirkunferentzia berria eraikiko dugu.



5.4.1 irudia. Unitate-zirkunferentziaren barneko zirkunferentzia.



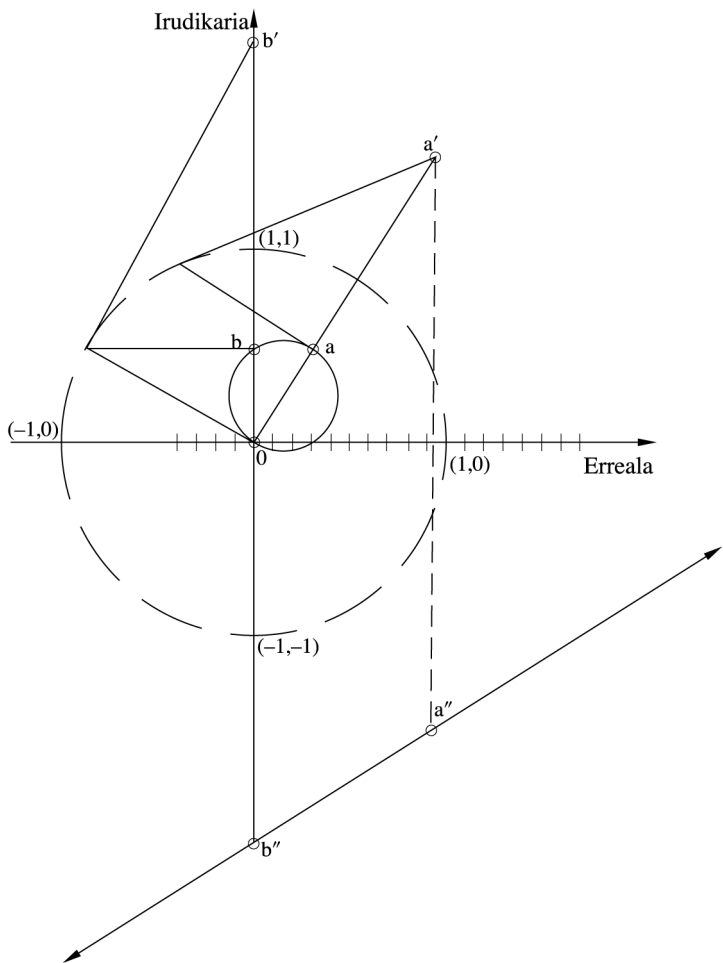
5.4.2. irudia. Unitate-zirkunferentziatik kanpoko zirkunferentzia.

5.5 INBERTSIO-ZENTROTIK IGAROTZEN DEN ZIRKUNFERENTZIAREN INBERTSIOA

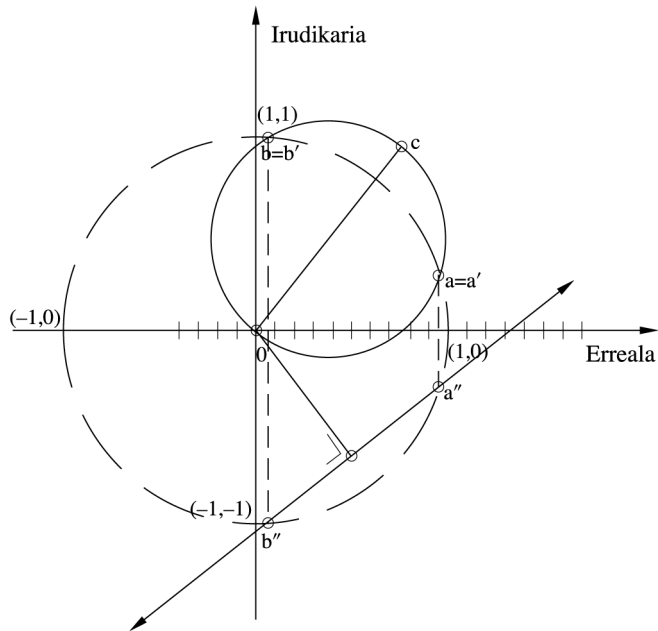
Inbertsio-zentrotik igarotzen ez den zuzena izango da.

Alderantzizko konplexua lortzeko, edozein bi punturen alderantzizko konplexuak behar dira; kasu bakoitzean eraikuntza grafikoa erraztuko digutenak hautatuko ditugu.

Orain ere, inbertsio-zentrotik urrunen dagoena, alderantzizkoa egitean, hurbilen egongo da.

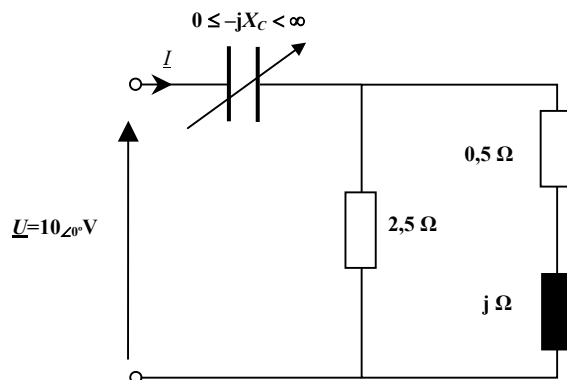


5.5.1 irudia. Unitate-zirkunferentzia mozten ez duen zirkunferentzia.



5.5.2. irudia. Unitate-zirkunferentzia mozten duen zirkunferentzia.

Ariketa-zenbakia: 5.1



Irudiko zirkuituan, kalkulatu:

1. Zirkuituko inpedantzia totalaren leku geometrikoa.
2. Intentsitatearen balio maximoa, $\hat{I}$.

3. Inpedantzia totalaren desfase maximoa eta minimoa.

Ebazpena

1. $\hat{I} = \underline{U} \cdot \hat{Y}_T$ adierazpena ezagutuz, zirkuituaren admitantzia baliokidea lortu beharko dugu korrantearen balioa lortzeko; $\underline{U}$ datua baita.

Admitantzia totalaren leku geometrikoa lortzeko, bi adar paraleloen inpedantzia baliokidea lortuko dugu lehenengo:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_P &= \frac{2,5 \cdot (0,5 + j)}{2,5 + 0,5 + j} = \frac{1,25 + j2,5}{3 + j} = \frac{(1,25 + j2,5) \cdot (3 - j)}{(3 + j) \cdot (3 - j)} = \frac{3,75 + j7,5 - j1,25 + 2,5}{9 + 1} = \\ &= \frac{6,25 + j6,25}{10} = (0,625 + j0,625) = 0,625\sqrt{2} \angle 45^\circ \Omega\end{aligned}$$

Ondoren, inpedantzia horri harekin seriean duen elementu aldakorra batuko diogu:

$$\underline{Z}_{TLG} = 0,625\sqrt{2} \angle 45^\circ - jX_C; \quad 0 \leq X_C < \infty$$

edo

$$\underline{Z}_{TLG} = 0,625 + j(0,625 - X_C); \quad 0 \leq X_C < \infty$$

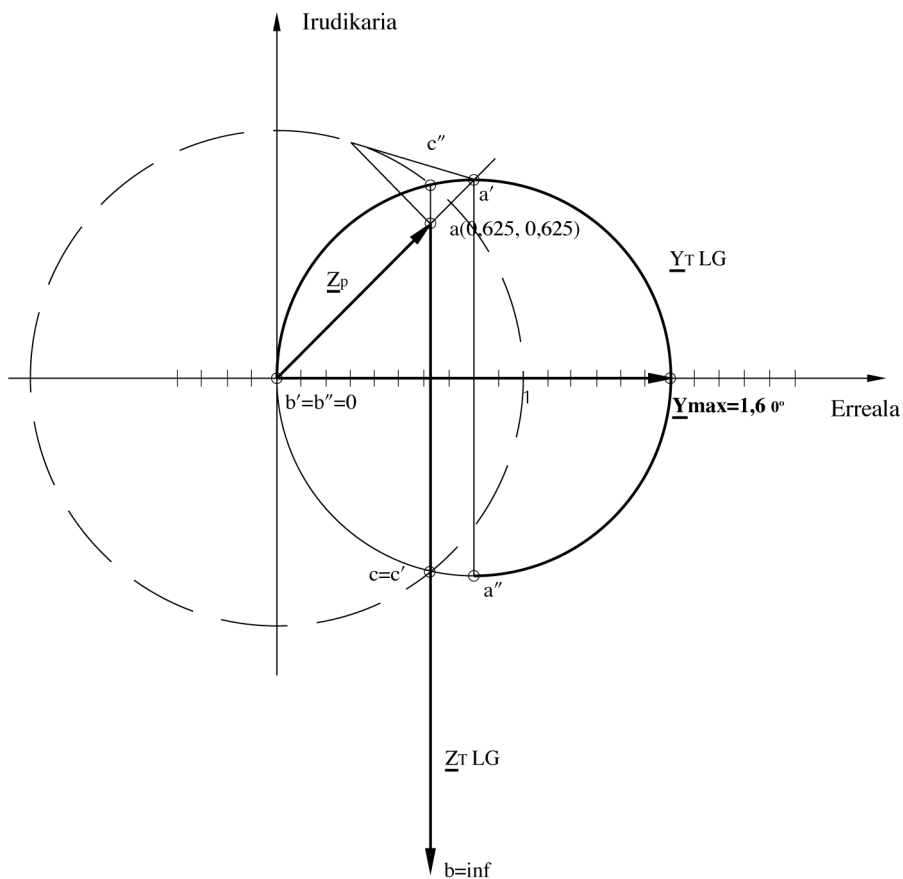
Elementu aldakor bat dugunez, inpedantzia totala leku geometrikoa izango da.

Grafikoki, inpedantzia totalaren leku geometrikoaren alderantzizko konplexua eginez, admitantzia totalaren leku geometrikoa lortuko dugu.

2. Eraikuntza grafikoan, modulu handieneko admitantziaren balioa ($\hat{Y}_T = 1,6 \angle 0^\circ \text{S}$) edo modulu txikieneko inpedantziaren balioa ($\hat{Z}_T = 0,625 \angle 0^\circ \Omega$) hautatuz, korrante maximoa kalkulatu dugu:

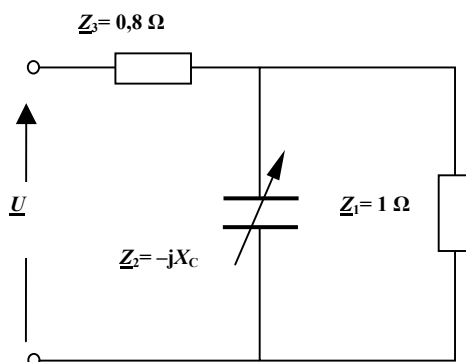
$$\overset{\vee}{\underline{Z}}_T = 0,625 \angle 0^\circ \Omega \quad \text{eta} \quad \hat{Y}_T = \frac{1}{0,625 \angle 0^\circ} = 1,6 \angle 0^\circ \text{S}$$

$$\hat{I} = \frac{\underline{U}}{\overset{\vee}{\underline{Z}}_T} = \underline{U} \cdot \hat{Y}_T = 10 \angle 0^\circ \cdot 1,6 \angle 0^\circ = 16 \angle 0^\circ \text{A}$$



3. $\hat{\varphi} = 45^\circ$ eta $\check{\varphi} = -90^\circ$

Ariketa-zenbakia: 5.2



Irudiko zirkuituan:

1. Kalkulatu inpedantzia totalaren leku geometrikoa eta admitantzia totalaren leku geometrikoa.
2. Kalkulatu inpedantzia totalaren angelu maximoa.
3. Zehaztu erresonantzia-puntuak.

Ebazpena

1. Zirkuituaren inpedantzia totala lortu beharko dugu; horretarako, lehenik eta behin, paraleloan dauden bi adarren inpedantziak elkartuko ditugu. Horietako bat elementu aldakorra denez, grafikoki batura egin ahal izateko, lehenengo bi adarretako admitantziak kalkulatu ditugu: $\underline{Y}_1 = 1 \angle 0^\circ \text{ S}$

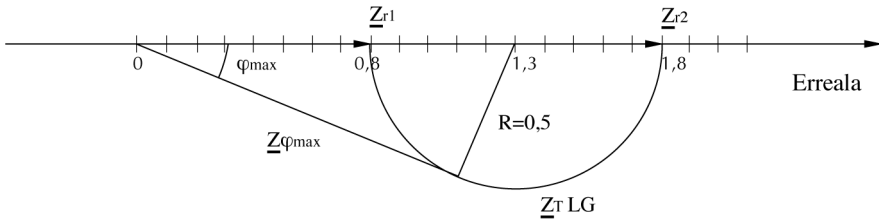
$\underline{Y}_{2LG}$ leku geometriko bat izango da. Zuzen bertikala planoerdi positiboan, alegia.

Biak batuz, paraleloan dauden bi adarren elkarketaren leku geometrikoa lortuko dugu: $\underline{Y}_{pLG}$.

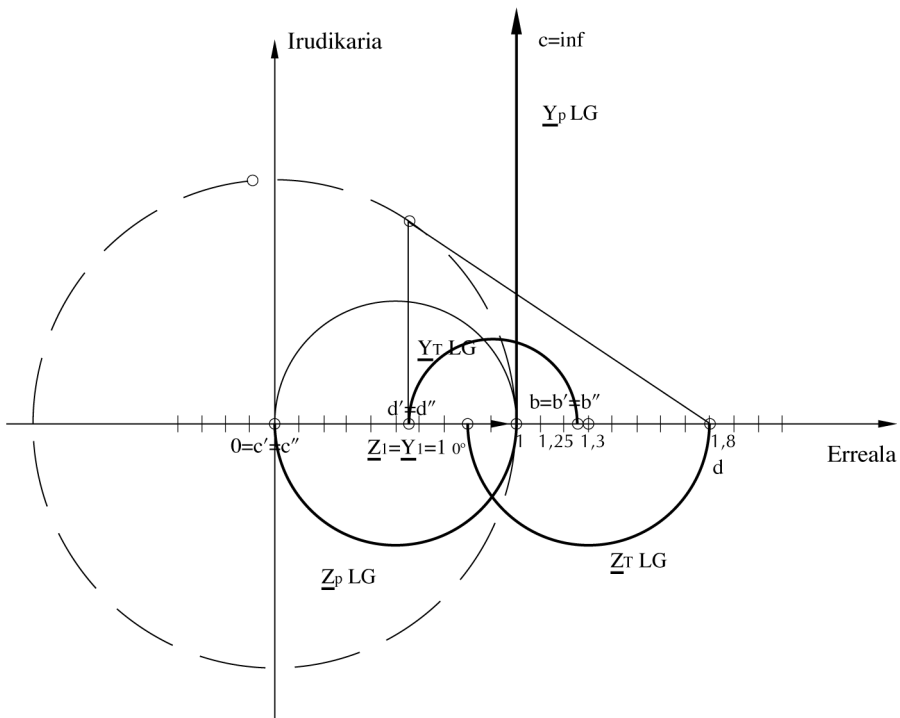
Horri, gero, harekin seriean dagoen $\underline{Z}_3$ inpedantzia batu beharko diogu. Hori egin ahal izateko, $\underline{Y}_{pLG}$ -ren alderantzizkoa irudikatuko dugu: $\underline{Z}_{pLG}$.

Eta $\underline{Z}_{pLG}$ -ri $\underline{Z}_3$ batuz, inpedantzia totalaren leku geometrikoa ($\underline{Z}_{TLG}$) lortuko dugu. Eta admitantzia totala, berriz, $\underline{Y}_{TLG}$ inpedantzia totalaren alderantzizko konplexua eginez lortuko dugu.

2. $\underline{Z}_{TLG}$ zirkunferentzierdi bat denez, jatorritik zirkunferentzia horrekiko ukitzailea egingo dugu. Ukitze-puntua izango da angelu handieneko $\underline{Z}_T$ -ren balioa. Inpedantziaren angelua lortzeko, eraikuntza grafiko honetaz baliatuko gara:



$$\left. \begin{aligned} |Z_{\hat{\phi}}| &= \sqrt{1,3^2 - 0,5^2} = 1,2 \, \Omega \\ \hat{\phi} &= \arcsin \frac{-0,5}{1,3} = -22,61^\circ \end{aligned} \right\} \underline{Z}_{\hat{\phi}} = 1,2 \angle -22,61^\circ \, \Omega$$

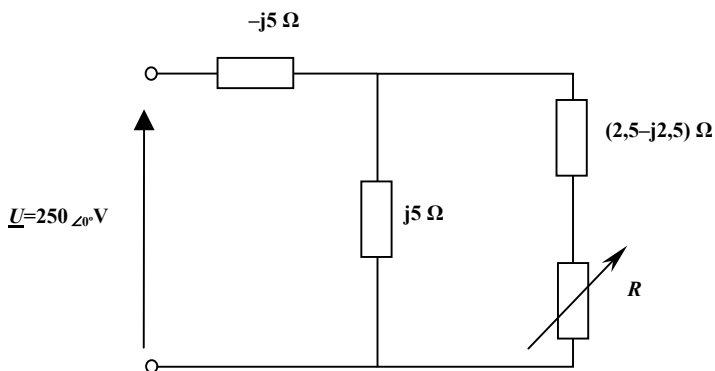


3. Osagai erresistibo hutsa duten inpedantzia totalaren balioak izango dira erresonantzia-puntuak; ardatz errealean daudenak, alegia.

$$\underline{Z}_{r1} = 0,8 \, \Omega$$

$$\underline{Z}_{r2} = 1,8 \, \Omega$$

Ariketa-zenbakia: 5.3

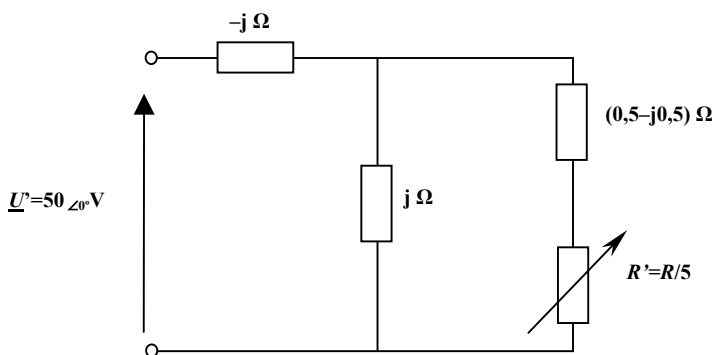


Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

1. Inpedantzia totalaren eta admitantzia totalaren leku geometrikoak.
2. Modulu handieneko inpedantziaren balioa.
3. Desfase maximo eta minimoa.
4. Korrante minimoaren balioa.

Ebazpena

Lehenik eta behin, zirkuituaren eskala aldatuko dugu, eta tentsioaren eta inpedantzien balioak bost aldiz txikiagoak egingo ditugu. Orain dituzten neurriekin alderantzizkoak egitean oso balio txikiak irtengo baitira eta ezingo baititugu grafikoki behar bezala erabili. Zirkuitu hau ebatzi beharko dugu, beraz:



1. Inpedantzia totalaren leku geometrikoa eraikitzeko, urrats hauei jarraituko diegu:

$\underline{Z}_{1LG} = (0,5 - j0,5) + R'$ zuzena ardatz errealekiko paraleloa da. Horrekin paraleloan dagoen adarraren inpedantzia $\underline{Z}_2 = j \Omega$ da eta admitantzia $\underline{Y}_2 = -j \text{ S}$. Paraleloan dauden bi adarren baliokidea egin ahal izateko, $\underline{Y}_{1LG}$ lortu beharko dugu, $\underline{Z}_{1LG}$ inpedantziaren alderantzizkoa eginez. Paralelo-elkarketa horren balioa $\underline{Y}_{PLG} = \underline{Y}_{1LG} + \underline{Y}_2$ izango da. Baina seriean duen inpedantziarekin lotu behar dugu hori. Lotzeko, bere inpedantzia kalkulatu beharko dugu, $\underline{Y}_{PLG}$ -ren alderantzizko konplexua eginez: $\underline{Z}_{PLG}$.

Eta, azkenik, $\underline{Z}_{TLG} = \underline{Z}_{PLG} - j$ guztizko inpedantzia. Admitantzia totala lortzeko, inpedantzia totalaren alderantzizko konplexua egin beharko dugu.

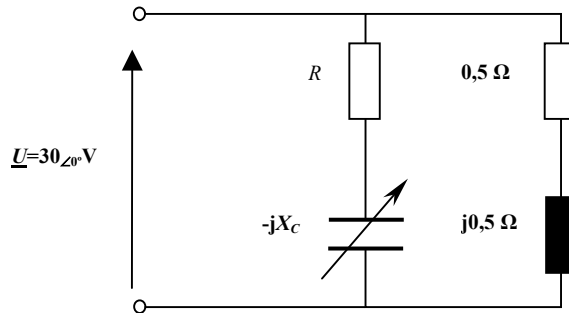
2. Modulu handieneko inpedantzia muturra (1,-1) puntuan duen bektorea izango da:

$$\hat{\underline{Z}}_T = \sqrt{2} \angle -45^\circ \cdot 5 = 5\sqrt{2} \angle -45^\circ \Omega$$

3. Eraikuntza grafikotik zuzenean lor daitezke desfase maximoa eta minimoa, inpedantzia totalaren leku geometrikoan.

$$\begin{cases} \hat{\varphi} = 0^\circ \\ \varphi = -45^\circ \end{cases}$$

Ariketa-zenbakia: 5.4



Zehaztu R erresistentziaren balioa, zirkuituak erresonantzia-puntu bakarra izan dezan.

Kalkulatu, era berean:

1. Admitantzia totalaren leku geometrikoa.
2. Erresonantzia-korrontearen balioa.
3. Korronte maximoa eta minimoa.
4. Desfasearen balio maximoa eta minimoa.

Ebazpena

1. Zirkuituan bi adar paralelo ditugu, eta horietako batean elementu aldakor bat. Bien elkarketa egin ahal izateko, beraz, admitantziak lortu beharko ditugu:

$$\underline{Z}_1 = (0,5 + j0,5) \Omega \rightarrow \underline{Y}_1 = (1 - j) \text{ S}$$

$\underline{Z}_{2LG} = (R - jX_C) \Omega \rightarrow \underline{Y}_{2LG}$; R ezezaguna denez, ezin dugu admitantzia horren leku geometriko zehatza kalkulatu, baina bai horrek izango duen itxura: zirkunferentzia baten goiko zirkunferentzierdia.

$\underline{Y}_{TLG} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_{2LG}$ da. Badakigu, enuntziatuak esan digulako, admitantzia totalaren leku geometrikoak erresonantzia-puntu bakarra izan dezakeela.

$\underline{Y}_1$ bektoreari, beraz, erradio ezberdineko zirkunferentzierdiak batuz joango gara erresonantzia-puntu bakarra eragingo duen $\underline{Y}_{TLG}$ lortu arte. $r = 0,5$ erradioko zirkunferentziarekin lortuko dugu hori.

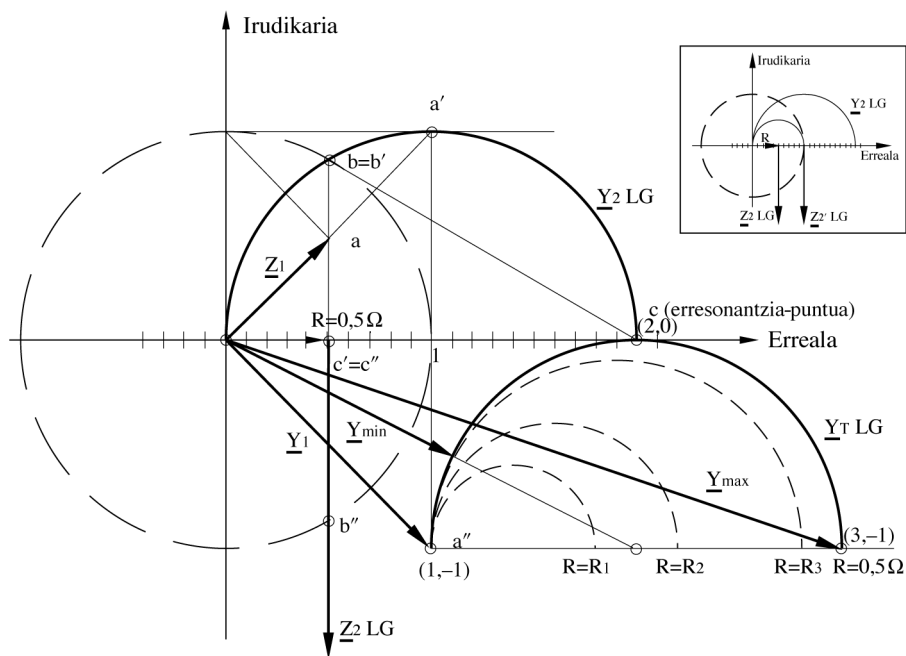
Orain, R -ren balioa lortzeko, eraikuntza grafikoaz baliatuko gara. $\underline{Y}_G$ -ren leku geometrikotik atzerako bidea egingo dugu urrats hauei jarraituz: $\underline{Y}_{TLG}$ -ri $\underline{Y}_1$ bektorea kenduko diogu, eta $\underline{Y}_{2LG}$ lortuko dugu. Horren alderantzizkoa eginda, $\underline{Z}_{2LG}$ lortuko dugu, eta horri erreaktantzia kapazitiboa ($j\underline{X}_C$) kenduta, R lortuko dugu.

$$R = 0,5 \Omega$$

$R > 0,5 \Omega$ baldin bada, ez da erresonantzia-punturik egongo

$R < 0,5 \Omega$ bada, bi erresonantzia-puntu egongo dira.

- 2. Admitantzia totalaren leku geometrikoaren adierazpen grafikotik:**



Erresonantzia-korrontearen balioa:

$$I_{\text{erresonantzia}} = \underline{U} \cdot \underline{Y}_{\text{erresonantzia}} = 30_{\angle 0^\circ} \cdot 2_{\angle 0^\circ} = 60_{\angle 0^\circ} \text{ A}$$

- 3. Korrante maximoa:**

$$\hat{I} = U \cdot \hat{Y}$$

Modulu handieneko admitantzia jatorritik urrunen dagoena izango da (ikus eraikuntza grafikoa), eta modulu eta argumentu hauek izango ditu:

$$\begin{cases} |\hat{Y}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ S} \\ \varphi_{\hat{Y}} = \arctg \frac{-1}{3} = -18,44^\circ \end{cases}$$

$$\text{Beraz: } \hat{I} = \underline{U} \cdot \hat{Y} = 30_{\angle 0^\circ} \cdot 3,162_{\angle -18,44^\circ} = 94,86_{\angle -18,44^\circ} \text{ A}$$

Korrontearen balio minimoa:

$$\check{I} = \underline{U} \cdot \check{Y}$$

Modulu txikieneko admitantzia jatorritik hurbilen dagoena izango da (ikus eraikuntza grafikoa). Hori lortzeko, $\underline{Y}_{TLG}$ den zirkunferentziaren zentroarekin lotu beharko dugu (0,0) puntua; bi puntuak batzen dituen zuzenak zirkunferentzierdia mozten duen puntuan egongo da $\check{Y}$. Eta modulu eta argumentu hauek izango ditu:

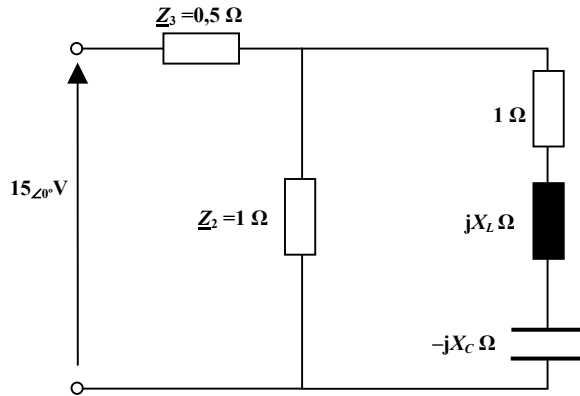
$$\begin{cases} |\check{Y}| = \sqrt{2^2 + 1^2} - 1 = \sqrt{5} - 1 = 1,236 \text{ S} \\ \varphi_{\check{Y}} = \arctg \frac{-1}{2} = -26,56^\circ \end{cases}$$

$$\text{Beraz, } \check{I} = \underline{U} \cdot \check{Y} = 30_{\angle 0^\circ} \cdot 1,236_{\angle -26,56^\circ} = 37,08_{\angle -26,56^\circ} \text{ A}$$

4. Desfase maximoak eta minimoak zuzenean ondorioztatuko ditugu eraikuntza grafikotik. Kontuan hartu behar da admitantzia totalaren leku geometrikoa dugula. Dese fase maximoa eta minimoa inpedantziaren leku geometrikotik lortu behar dira. Baina jakinik admitantziaren desfase maximoa inpedantziaren desfase minimoa izango dela eta admitantziaren desfase minimoa inpedantziaren desfase maximoa izango dela, admitantzia totalaren leku geometrikoa erabil daiteke:

$$\hat{\varphi} = 45^\circ \text{ eta } \check{\varphi} = 0^\circ$$

Ariketa-zenbakia: 5.5



Irudiko zirkuituan, maiztasuna aldakorra da 0 eta ∞ Hz artean.

Kalkulatu:

1. $\underline{Z}_T$ -ren leku geometrikoa.
2. Erresonantziako korrontea.
3. Desfase maximoko intentsitatea.

Ebazpena

Maiztasuna aldakorra denez, jX_C eta jX_L ere aldakorrak izango dira:

$$0 \leq f < \infty \left\{ \begin{array}{l} -jX_C = -j \frac{1}{2\pi fC} \rightarrow -\infty \leq -jX_C \leq 0 \\ jX_L = 2\pi fL \rightarrow 0 \leq jX_L \leq \infty \end{array} \right\} -\infty < (X_L - X_C) < \infty$$

1. Serie-paralelo zirkuitua da. Admitantzia totala lortzeko, paraleloan dauden adarren admitantzien batuketa egin beharko dugu lehenengo; admitantzia paraleloa leku geometrikoa da.

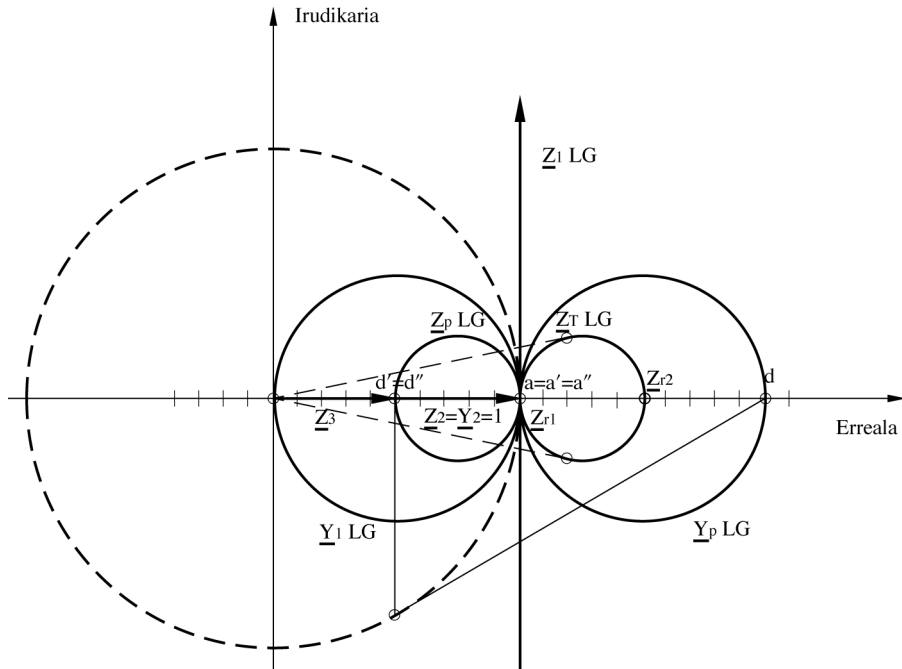
$$\underline{Z}_{1LG} = 1 + j(X_L - X_C)\Omega$$

$\underline{Y}_{1LG}$ grafikoki lortuko dugu, $\underline{Z}_{1LG}$ -ren alderantzizko konplexua eginez.

Paraleloan dauden adarren admitantziak batuta, admitantzia paraleloa lortuko dugu: $\underline{Y}_{pLG} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_{1LG}$.

Admitantzia paraleloaren leku geometrikoaren alderantzizko konplexua eginez, inpedantzia paraleloa lortuko dugu, $\underline{Z}_{PLG}$. Eta horri $0,5 \Omega$ -eko erresistentzia grafikoki batuz, zirkuituaren inpedantzia totala lortuko dugu.

$$\underline{Z}_{TLG} = 0,5 + \underline{Z}_{PLG}$$



2. Inpedantzia totalaren leku geometrikoan ikus daitekeenez, bi erresonantzia-puntu daude:

$$\underline{Z}_{r1} = 1_{\angle 0^\circ} \Omega$$

$$\underline{Z}_{r2} = 1,5_{\angle 0^\circ} \Omega$$

eta, beraz, bi erresonantzia-korronte:

$$I_{r1} = \frac{U}{\underline{Z}_{r1}} = \frac{15_{\angle 0^\circ}}{1_{\angle 0^\circ}} = 15_{\angle 0^\circ} \text{ A}$$

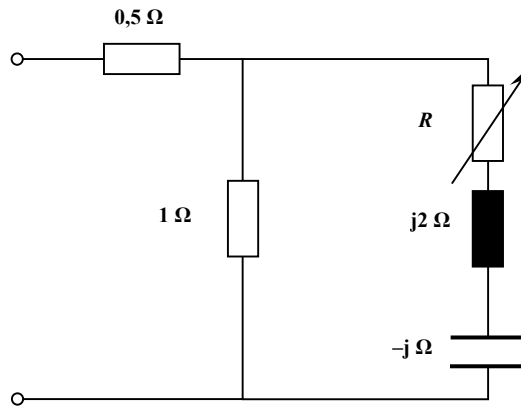
$$I_{r2} = \frac{U}{\underline{Z}_{r2}} = \frac{15_{\angle 0^\circ}}{1,5_{\angle 0^\circ}} = 10_{\angle 0^\circ} \text{ A}$$

3. Jatorritik $\underline{Z}_{TLG}$ zirkunferentziarekiko ukitzaileak eginez lortuko ditugun ukitze-puntuak izango dira desfase maximoko eta minimoko inpedantzien balioak.

$$\begin{cases} |\underline{Z}_{\phi}| = \sqrt{1,25^2 - 0,25^2} = 1,22 \\ \hat{\phi} = \arcsin \frac{0,25}{1,25} = 11,53^\circ \end{cases} \rightarrow I_{\hat{\phi}} = \frac{U}{\underline{Z}_{\phi}} = \frac{15_{\angle 0^\circ}}{1,22_{\angle 11,53^\circ}} = 12,24_{\angle -11,53^\circ} \text{ A}$$

$$\begin{cases} |\underline{Z}_{\varphi}| = \sqrt{1,25^2 - 0,25^2} = 1,22 \\ \varphi = \arcsin \frac{-0,25}{1,25} = -11,53^\circ \end{cases} \rightarrow I_{\varphi} = \frac{U}{\underline{Z}_{\varphi}} = \frac{15_{\angle 0^\circ}}{1,22_{\angle -11,53^\circ}} = 12,24_{\angle 11,53^\circ} \text{ A}$$

Ariketa-zenbakia: 5.6



Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

1. Zirkuituko inpedantzia totalaren leku geometrikoa.
2. Inpedantzia totalaren balio handiena eta txikiena.

Ebāzpena

1. Zirkuituaren inpedantzia totala lortzeko, lehenengo paraleloan dauden bi adarren admitantziak batuko ditugu.

$$\underline{Z}_{1LG} = (R + j) \Omega$$

Leku geometrikoa da, R aldakorra delako; eta bere alderantzizko konplexua eginez, $\underline{Y}_{1LG}$ lortuko dugu.

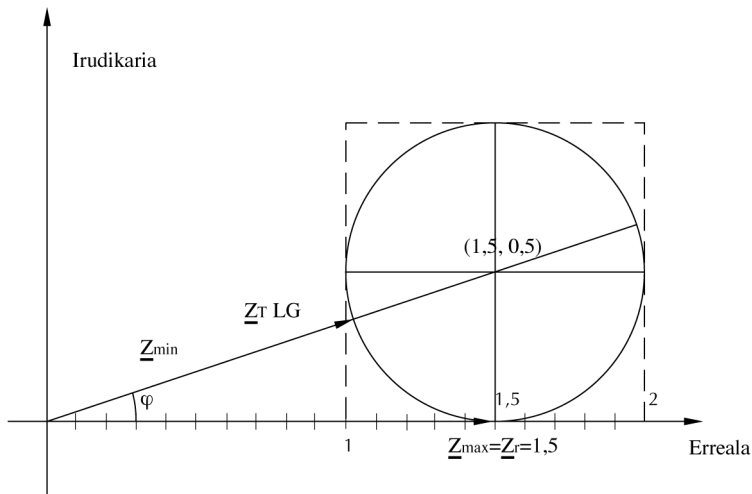
Beste adar paraleloaren admitantzia $\underline{Y}_2 = 1_{\angle 0^\circ} \text{ S}$ izango da, eta bien batura:

$$\underline{Y}_{-pLG} = \underline{Y}_{-1LG} + \underline{Y}_{-2}$$

$\underline{Y}_{-pLG}$ -ren alderantzizko konplexua eginez, $\underline{Z}_{pLG}$ lortuko dugu

Azkenik, inpedantzia paraleloa $\underline{Z}_3 = 0,5\Omega$ -rekin batuz, $\underline{Z}_{TLG}$ lortuko dugu.

2.

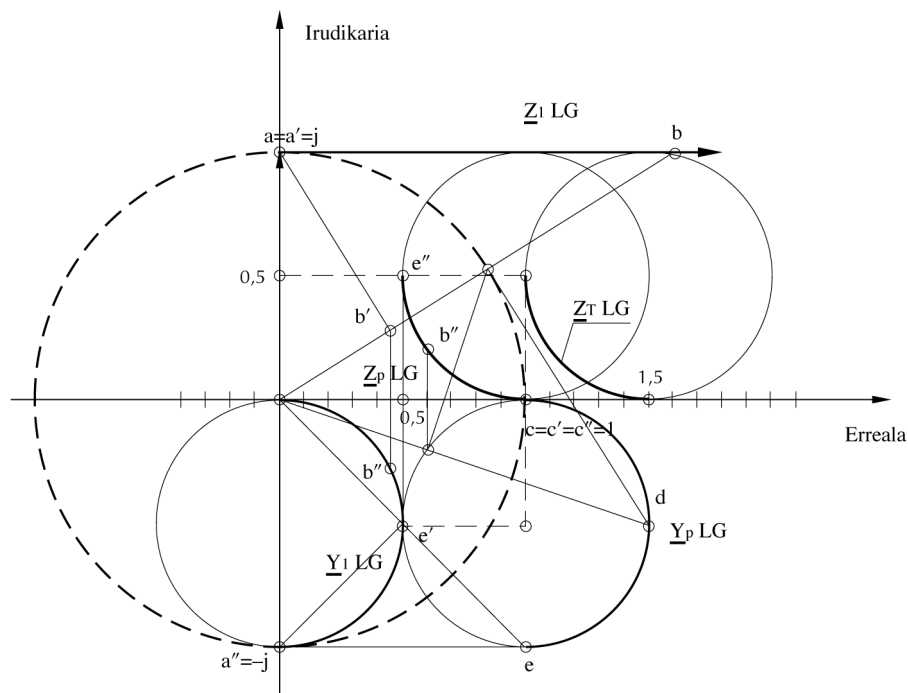


Inpedantzia maximoa erresonantzia-inpedantziarekin bat dator, eta balio hau du:

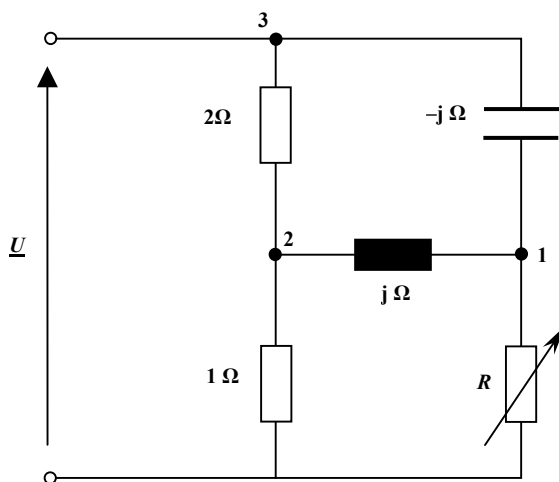
$$\hat{\underline{Z}} = \underline{Z}_r = 1,5_{\angle 0^\circ} \Omega$$

Z lortzeko, eraikuntza grafikora joko dugu. Jatorria lotzen badugu inpedantzia totalaren leku geometrikoa den zirkunferentzia-laurdenaren zentroarekin, zuzenak zirkunferentzia moztzen duen puntua izango da inpedantzia txikieneko puntua.

$$\left. \begin{aligned} \left| \underline{\overset{\vee}{Z}} \right| &= \sqrt{1,5^2 + 0,5^2} - 0,5 = 1,08 \\ \varphi &= \arctg \frac{0,5}{1,5} = 18,43^\circ \end{aligned} \right\} \underline{\overset{\vee}{Z}} = 1,08 \angle_{18,43^\circ} \Omega$$



Ariketa-zenbakia: 5.7

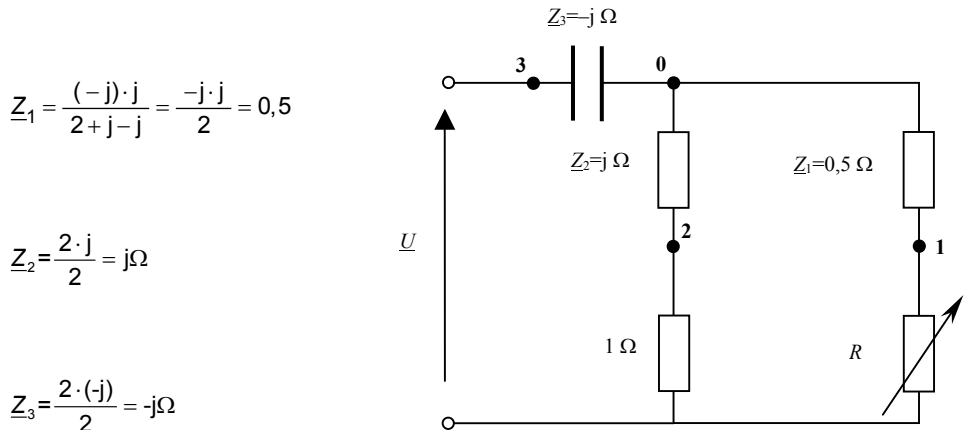


Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

1. $\underline{Z}_T$ -ren eta $\underline{Y}_T$ -ren leku geometrikoak.
2. Desfase maximoa eta minimoa.

Ebazpena

Triangelu-izar transformazioa erabiliz,



$$\underline{Z}_1 = \frac{(-j) \cdot j}{2 + j - j} = \frac{-j \cdot j}{2} = 0,5$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{2 \cdot j}{2} = j\Omega$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{2 \cdot (-j)}{2} = -j\Omega$$

Orain, serie-paralelo zirkuitu arrunt bat dugu, eta ohi bezala ebatziko dugu:

Seriean dauden $(R + \underline{Z}_1)$ eginez, $\underline{Z}_{LG}$ lortuko dugu: $\underline{Z}_{LG} = (R + 0,5)\Omega$.

$\underline{Z}_{LG}$ -ren alderantzizko konplexua eginez, $\underline{Y}_{LG}$ determinatuko dugu.

Bestetik, $\underline{Z}_2 = j\Omega$ eta 1Ω batuz, $\underline{Z}_{II}$ lortuko dugu; $\underline{Z}_{II} = (1 + j)\Omega$ da, eta horren alderantzizkoa eginez: $\underline{Y}_{II} = (0,5 - j0,5) \text{ S}$.

Orain, bi adar paraleloen batuketa egin ahal izango dugu $\underline{Y}_{PLG} = \underline{Y}_{LG} + \underline{Y}_{II}$.

Admitantzia paraleloari, inpedantzia bihurtu eta gero, $\underline{Z}_3$ inpedantzia batu behar zaio inpedantzia totala lortzeko. Azkenik, $\underline{Z}_{TLG}$ -ren alderantzizko konplexua kalkulatu dugu $\underline{Y}_{TLG}$ lortzeko. Admitantzia totalaren leku geometrikoa inpedantzia totalaren leku geometrikoaren ardatz errealekiko simetrikoa izango da, inpedantzia totalaren leku geometrikoa unitate-zirkunferentzian baitago.

2. $\underline{Z}$ totalaren modulua konstantea da eta unitatea balio du; beraz, ez dago ez modulu maximorik, ez minimorik. Zirkuitu desfasatzailea da.

Desfase maximoa $\hat{\phi} = 0^\circ$

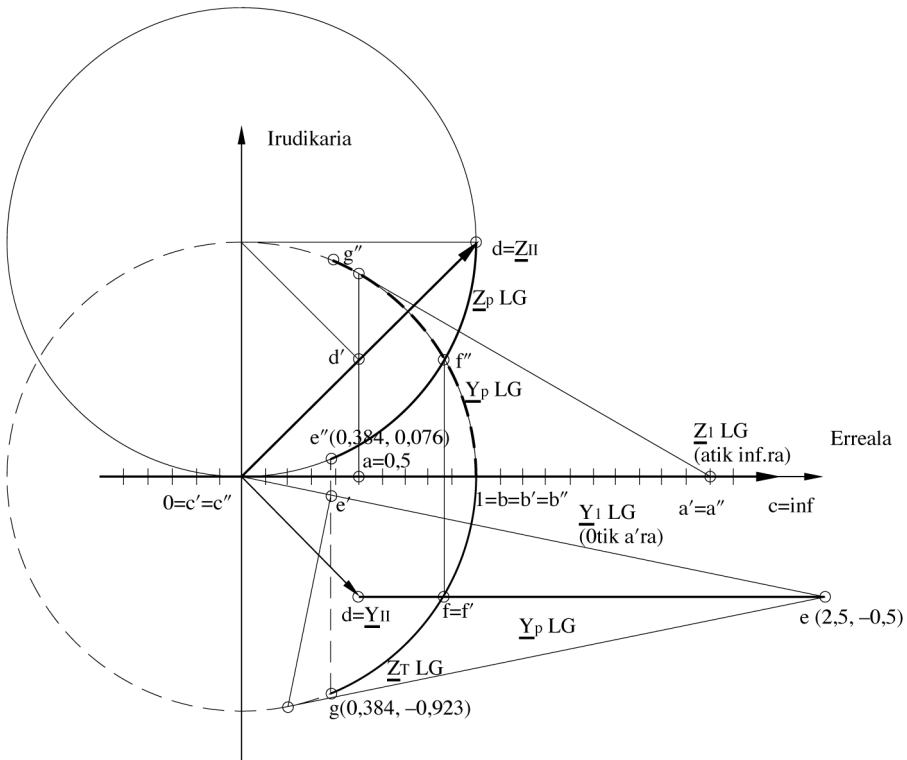
Desfase minimoa: Dese fase minimoko g puntua lortzeko, e'' puntuari $(-j)$ batu behar zaio. Horretarako, lehenengo $e(2,5, -0,5)$ puntuaren alderantzizko konplexua kalkulatu dugu.

$$e'' = \frac{1}{(2,5 - j0,5)} \cdot \frac{(2,5 + j0,5)}{(2,5 + j0,5)} = \frac{2,5 + j0,5}{6,5} = (0,384 + j0,076) \Omega$$

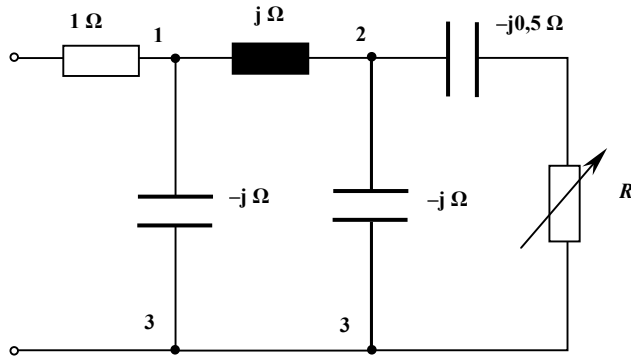
g puntua lortzeko, e'' -ri $(-j)$ batuko diogu:

$$g = e'' - j = (0,384 + j0,076) - j = (0,0384 - j0,923)$$

$$\eta = \varphi = \arctg \frac{-0,923}{0,0384} = -87,61^\circ$$



Ariketa-zenbakia: 5.8

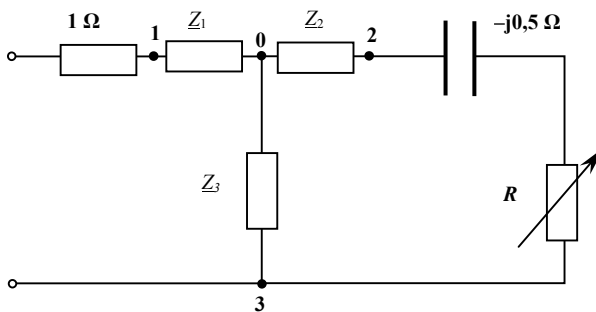


Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

1. Zirkuitu osoko inpedantziaren leku geometrikoa.
2. Inpedantzia total horren desfase maximoa eta minimoa.
3. Modulu maximoa duen inpedantziaren balioa

Ebazpena

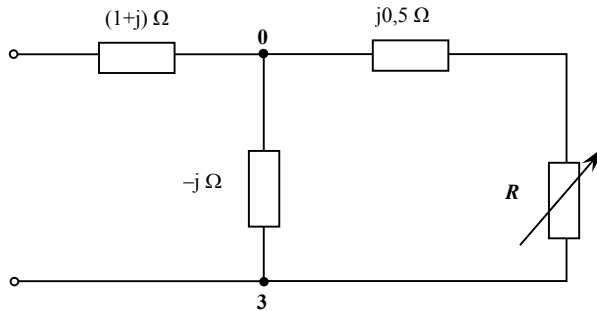
1. 1, 2 eta 3 puntuen artean triangelu-izar transformazioa egingo dugu, eta, hala, serie-paralelo zirkuitu bat izango dugu.



$$\underline{Z}_1 = \frac{j \cdot (-j)}{j - j - j} = j \, \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{j \cdot (-j)}{j - j - j} = j \, \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{-j \cdot (-j)}{j - j - j} = -j \, \Omega$$



$\underline{Z}_{ILG} = (j0,5 + R) \Omega$ izango da. Horren alderantzizkoa eginez gero, $\underline{Y}_{ILG}$ lortuko dugu; horri $\underline{Y}_2 = j$ batuz gero, $\underline{Y}_{PLG}$ lortuko dugu.

$\underline{Y}_{PLG}$ -ren alderantzizkoa eginez, $\underline{Z}_{PLG}$ lortuko dugu; horri $\underline{Z}_{II} = (1+j) \Omega$ batuz, $\underline{Z}_{TLG}$ izango dugu.

2. Desfase maximoa eta minimoa duten inpedantziak lortzeko, inpedantzia totalaren leku geometrikoaren desfase maximoa eta minimoa eragingo dituzten puntuekin lotuko dugu jatorria eta dimentsioak aterako ditugu eraikuntza geometrikotik. Ikus dezagun:

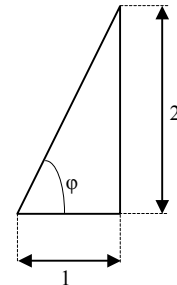
Desfase maximoa:

Luzera, Pitagoras aplikatuz,

$$|\underline{Z}_{\hat{\varphi}}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Angelua bi katetoen neurrietatik lor daiteke:

$$\arctg \frac{2}{1} = 63,435^\circ \longrightarrow \underline{Z}_{\hat{\varphi}} = \sqrt{5} \angle 63,435^\circ \Omega$$

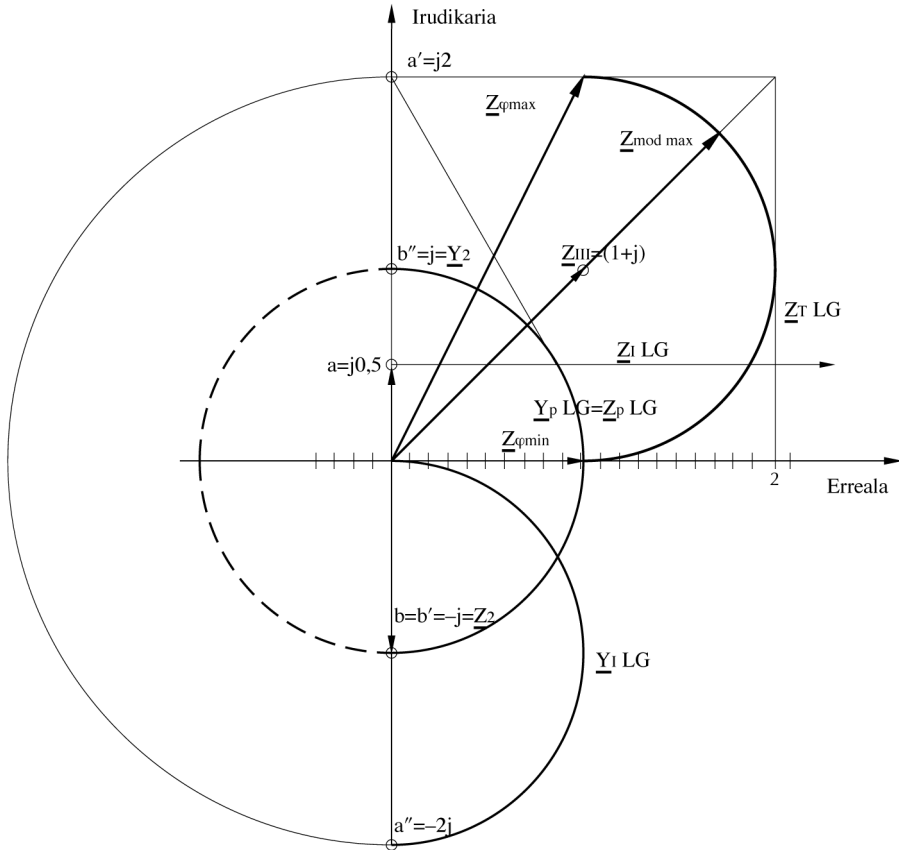


Desfase minimoa:

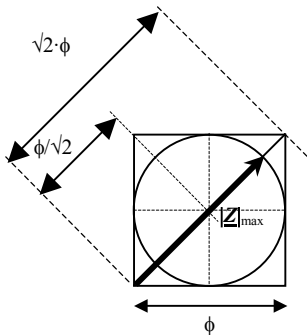
Bektore horizontala da, eta eraikuntza grafikoan zuzenean ikus daitekeenez:

$$\underline{Z}_{\varphi} = 1 \angle 0^\circ \Omega$$

Eta bat dator erresonantzia-inpedantziarekin.



3. Modulu handieneko inpedantzia lortzeko, inpedantziaren zirkunferentziaren zentroarekin lotuko dugu jatorria, eta zirkunferentzia ebaki arte luzatuko dugu zuzena. Ondoren, eraikuntza grafiko hau erabiliko dugu, segmentuaren luzera kalkulatzeko.

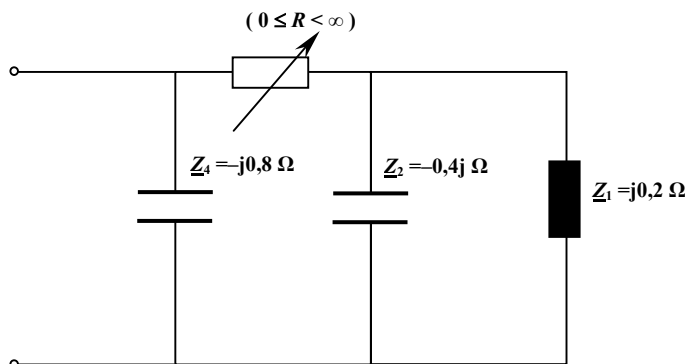


Leku geometrikoaren zirkunferentzia karratu batez zirkunskribatuko dugu. Karratuaren aldeak zirkunferentziaren diametroaren neurria du, eta karratuaren diagonalak $\sqrt{2} \cdot \phi$ da. $\phi=2$ da.

$$|\hat{Z}| = \frac{\text{Diagonala}}{2} + r = \sqrt{2} + 1 = 2,4142 \Omega$$

$$\hat{Z} = 2,4142 \angle 45^\circ \Omega$$

Ariketa-zenbakia: 5.9



Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

1. Modulu handieneko eta txikieneko inpedantzia totalen balioak.
2. Inpedantzia totalaren desfase maximoa eta minimoa.
3. Erresonantzia-inpedantziarik badago, horren balioa.

Ebazpena

Zirkuituaren inpedantzia totala lortu behar da. Urrats guztiak grafikoki egingo ditugu.

Lehenengo, paraleloan dauden $\underline{Z}_1$ eta $\underline{Z}_2$ inpedantziak batuko ditugu. Paraleloan daudenez, admitantziak lortu eta batu beharko ditugu $\underline{Y}_{P1}$ lortzeko:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{Y}_1 = -j5 \text{ S} \\ \underline{Y}_2 = j2,5 \text{ S} \end{array} \right\} \underline{Y}_{P1}; \text{ beraz: } \underline{Y}_{P1} = -j5 + j2,5 = -j2,5 \text{ S}$$

$\underline{Y}_{P1}$ -en alderantzizko konplexua egin beharko dugu, talde honekin seriean dagoen erresistentzia aldakorarekin grafikoki batu ahal izateko. $\underline{Z}_{P1} = j0,4 \text{ S}$ izango da.

Orain, $\underline{Z}_{P1} + R = \underline{Z}_{3LG}$ leku geometriko bat izango da. Ardatz errealekiko paraleloa den zuzena.

$\underline{Z}_{3LG}$ -ren alderantzizko konplexua egingo dugu $\underline{Y}_{3LG}$ lortu eta $\underline{Y}_4$ -rekin batzeko; $\underline{Y}_4 = j1,25 \text{ S}$ da.

Azkenik, admitantzia totala lortuko dugu: $\underline{Y}_{TLG} = \underline{Y}_{3LG} + \underline{Y}_4$

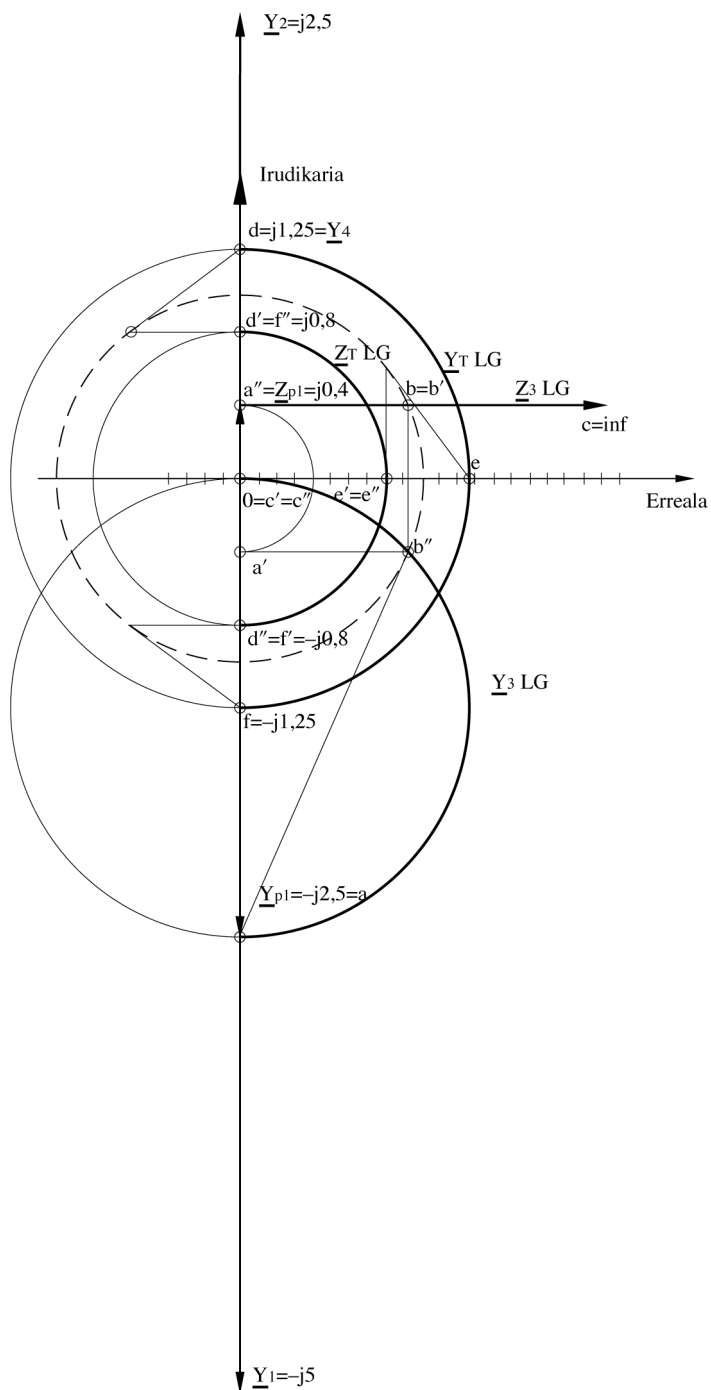
Enuntziatuan eskatzen diren gauza guztiak inpedantzia totalaren ingurukoak direnez, admitantzia totalaren alderantzizkoa egingo dugu inpedantzia totala lortzeko: $\underline{Z}_{TLG}$.

1. Inpedantzia totalaren leku geometrikoa jatorrian zentroa duen $0,8 \Omega$ -eko zirkunferentzierdi bat izanik, inpedantzia guztien moduluen balioak berdinak dira, $0,8 \Omega$ -ekoak.

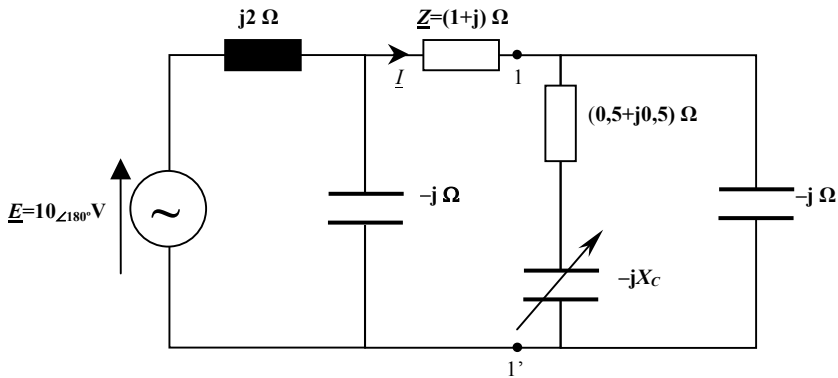
Beraz: $|\underline{\hat{Z}}| = |\underline{\check{Z}}| = 0,8 \Omega$

2. $\underline{Z}_{\hat{\varphi}} = 0,8 \angle 90^\circ \Omega$
 $\underline{Z}_{\check{\varphi}} = 0,8 \angle -90^\circ \Omega$

3. Inpedantzia totalaren leku geometrikoak ardatz erreal positiboa behin mozten du $(0,8, 0)$ puntuan; beraz, $\underline{Z}_r = 0,8 \angle 0^\circ \Omega$.



Ariketa-zenbakia: 5.10



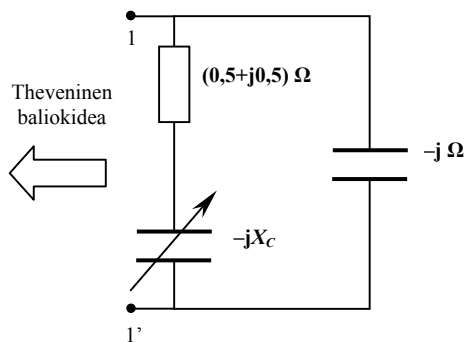
Kalkulatu datu hauek irudiko zirkuituan:

1. $\underline{Z}$ inpedantziaren potentziaren balio minimoa eta potentzia hori ahalbidetuko lukeen erreaktantziaren, $-jX_C$, balioa.
2. Potentziaren balio maximoa.

Ebazpena

1 eta 1' puntuen artean Theveninen baliokidea lortuko dugu. Ezkerreko zirkuituaren zatia Theveninen inpedantziak eta harekin seriean jarritako Theveninen tentsioa duen iturriaz ordezkatuko dugu.

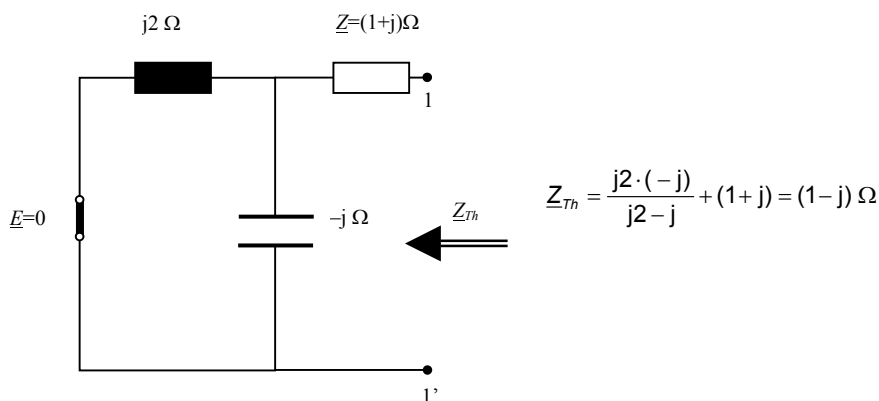
Zirkuituaren eskuineko ataleko inpedantzia totala leku geometriko batez ordezka dezakegu.



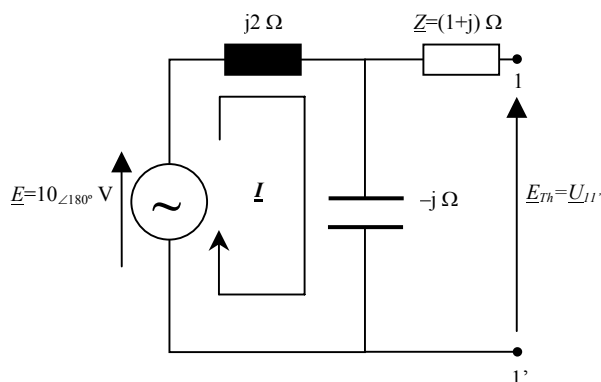
Paraleloan dauden bi adarren baliokidea egingo dugu. Horretarako, $\underline{Z}_1 = -j \Omega$ inpedantziaren alderantzizko konplexua eginez admitantzia lortuko dugu: $\underline{Y}_1 = j \Omega$. Beste adarraren inpedantzia, berriz, leku geometriko bat izango da $\underline{Z}_{2LG} = (0,5 + j0,5) - jX_C$. Azken inpedantzia horren admitantzia, $\underline{Y}_{2LG}$, ere lortu beharko dugu, $\underline{Z}_2$ -ren alderantzizko konplexua eginez. Eta bi admitantzia horien batura izango da $\underline{Y}_{PLG}$. Zirkuituko atal horren inpedantzia, $\underline{Z}_{PLG}$, berriz, $\underline{Y}_{PLG}$ -ren alderantzizkoa eginez lortuko dugu.

Zirkuituko ezkerreko atala bere Theveninen baliokideaz ordezkatzeko dugu. Kalkula dezagun, beraz, Theveninen baliokide hori.

Theveninen inpedantzia:

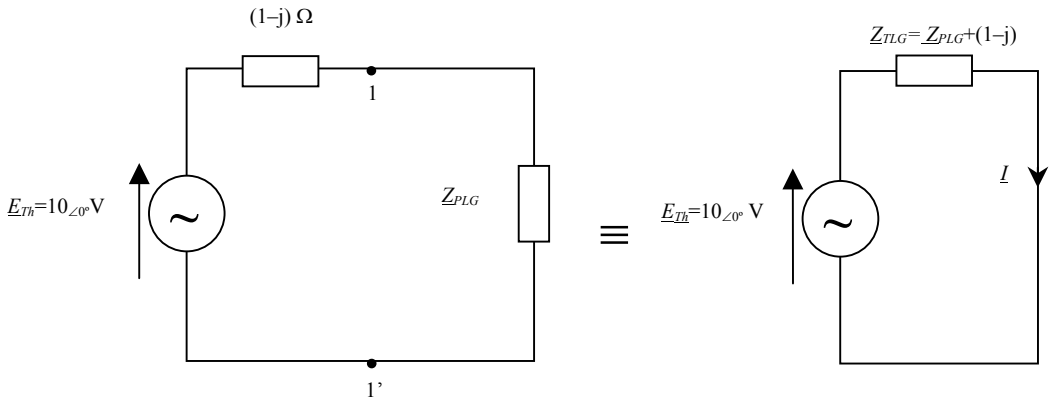


Theveninen tentsioa:



$$\underline{I} = \frac{10 \angle 180^\circ}{j2 - j} = \frac{10 \angle 180^\circ}{1 \angle 90^\circ} = 10 \angle 90^\circ \text{ A} \quad \text{eta} \quad \underline{U}_{11'} = \underline{E}_{Th} = -j \cdot \underline{I} = -j \cdot j10 = 10 = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Eskuineko eta ezkerreko zirkuituak berreskuratuz, 'zirkuitu baliokidea' izango dugu:

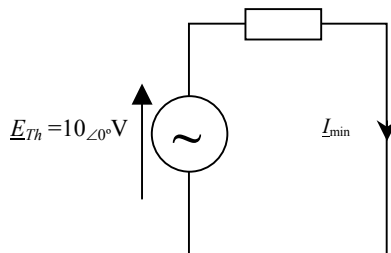


1. $\underline{Z}$ inpedantziak xurgatutako potentzia minimoa izan dadin, inpedantzia horretatik ahalik eta korrante txikienak zirkulatu beharko du. Identifika dezagun korrante hori zein den: $\underline{Z}$ inpedantziatik zirkulatzen duen korrantea 1 eta 1' puntuen arteko eskuineko zirkuitura sartzen den korrantea da. Eta hori, bi zirkuituak (eskuinekoa eta ezkerrekoa) batu ditugunean, bat dator $\underline{Z}_{PLG}$ ordezkatzen duen inpedantziatik zirkulatzen duen korrantearekin. Eta era berean, zirkuitu baliokidearen korrantearekin. Korrante horren balioa lortzeko, azken zirkuitu horrekin lan egingo dugu eta $\underline{Z}_{PLG}$ -ri $\underline{Z}_{Th} = (1-j) \Omega$ inpedantzia batuko zaio, $\underline{Z}_{TLG}$ lortzeko.

Inpedantzia totalaren leku geometrikoan modulu handieneko inpedantzia hautatuz, korrante txikienak zirkulatuko du zirkuitutik.

Modulu handienekoak diren bi puntu daude; beraz, bi kasuak aztertuko ditugu.

$$\underline{Z}_{TLG} = (2-j) \Omega \text{ edo } \underline{Z}_{TLG} = (1-j2) \Omega$$



$\underline{\hat{Z}} = (2-j) \Omega$ A puntua, leku geometrikoaren adierazpenean.

$$\underline{\hat{I}}_{\min} = \frac{10 \angle 0^\circ}{2-j} = \frac{10 \angle 0^\circ}{\sqrt{5} \angle -26,56^\circ} = 2\sqrt{5} \angle 26,56^\circ \text{ A}$$

$$\underline{\underline{\hat{S}}} = \underline{\underline{U}} \cdot \left[\underline{\underline{\hat{I}}} \right]^* = \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{\hat{I}}} \cdot \left[\underline{\underline{\hat{I}}} \right]^* = (1+j) \cdot 2\sqrt{5} \angle -26,56^\circ \cdot 2\sqrt{5} \angle 26,56^\circ = 20\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ VA}$$

$$\underline{\underline{\hat{S}}} = (20 + j20) \text{ VA}$$

$$\underline{\underline{\hat{P}}} = 20 \text{ W}$$

$-jX_C$ -ren balioa lortzeko, A puntua kondentsadorearen leku geometrikoaren adierazpenean kokatu beharko dugu. Hori lortzeko, atzetik aurrera, leku geometriko guztietan A puntua kokatuz joango gara. Eta ikusiko dugu $-jX_C = 0 \Omega$ balio beharko duela.

$\underline{\underline{\hat{Z}}} = (1-j2) \Omega$ B puntua, leku geometrikoaren adierazpenean.

$$\underline{\underline{\hat{I}}} = \frac{10 \angle 0^\circ}{1-j2} = \frac{10 \angle 0^\circ}{\sqrt{5} \angle -63,43^\circ} = 2\sqrt{5} \angle 63,43^\circ \text{ A}$$

$$\underline{\underline{\hat{S}}} = \underline{\underline{U}} \cdot \left[\underline{\underline{\hat{I}}} \right]^* = \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{\hat{I}}} \cdot \left[\underline{\underline{\hat{I}}} \right]^* = (1+j) \cdot 2\sqrt{5} \angle 63,43^\circ \cdot 2\sqrt{5} \angle -63,43^\circ = 20\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ VA}$$

$$\underline{\underline{\hat{S}}} = (20 + j20) \text{ VA}$$

$$\underline{\underline{\hat{P}}} = 20 \text{ W}$$

Aurreko kasuan jarraitutako prozedura bera aplikatuz, B puntua kokatuz joango gara. $\underline{Z}_{TLG}$ -ra heltzean jatorriarekin bat datorrela ikusten da. Horrek esan nahi du $\underline{Z}_2$ leku geometrikoan infinituan dagoen puntuarekin bat datorrela; beraz, $-jX_C = \infty \Omega$ balio beharko du.

2. Potentziaren balio maximoa lortzeko, korronteak maximoa izan beharko du eta inpedantziak ahalik eta txikiena. Beraz, $\underline{Z}_{TLG}$ -ren adierazpen grafikotik modulu txikiena duen $\underline{Z}$ lortzeko, $\underline{Z}_{TLG}$ -ren zirkunferentziaren zentroarekin lotuko dugu jatorria. Zuzen horrek $\underline{Z}_{TLG}$ moztzen duen puntua modulu txikiena izango duen inpedantzia izango da.

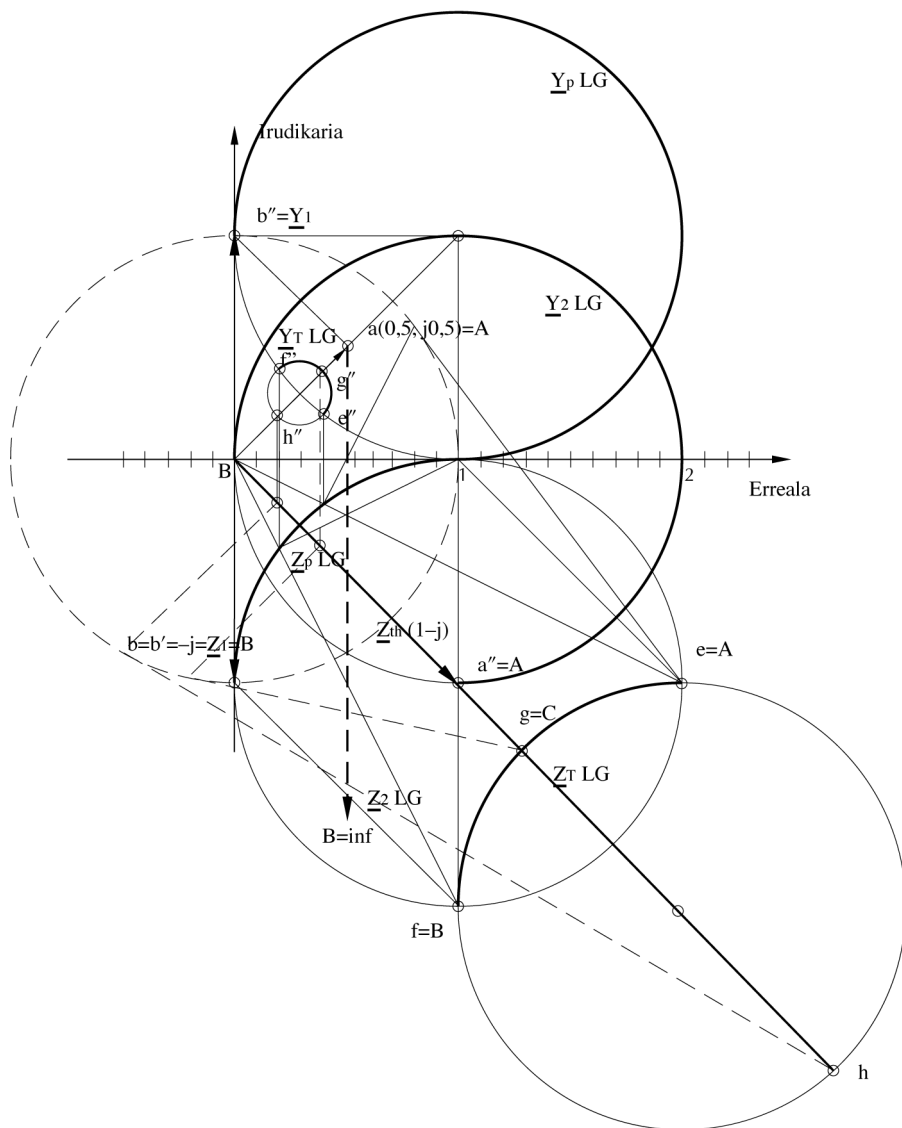
Irudiko C puntua kokatu dugu aurreko azalpenari jarraituz. Orain, inpedantzia horren balioa kalkulatu dugu.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \underline{\underline{\hat{Z}}} \right| = 2\sqrt{2} - 1 = 1,8284 \\ \varphi = -45^\circ \end{array} \right. \quad \underline{\underline{\hat{I}}} = \frac{10 \angle 0^\circ}{1,8284 \angle -45^\circ} = 5,47 \angle 45^\circ \text{ A}$$

$$\underline{\underline{\hat{S}}} = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{\hat{I}}}^* = \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{\hat{I}}} \cdot \underline{\underline{\hat{I}}}^* = (1+j) \cdot 5,47 \angle 45^\circ \cdot 5,47 \angle -45^\circ = 30\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ VA}$$

$$\hat{\underline{S}} = (30 + j30) \text{ VA}$$

$$\hat{P} = 30 \text{ W}$$



6

Zirkuitu trifasikoak

6.1 TENTSIOTAN OREKATUTAKO SISTEMA TRIFASIKOAK

Tentsiotan orekatutako sistema trifasiko batean, hiru faseko tentsioen moduluak berdinak dira, eta tentsioek euren artean 120° -ko desfasea izango dute.

Sistema trifasikoetan bi tentsio talde daude, eta bietan betetzen da aurrekoa.

- Tentsio konposatuak, lineakoak edo faseen artekoak: U_K ($\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$ eta $\underline{U}_{31}$)
- Tentsio sinpleak edo fase eta neutroaren artekoak: U_S ($\underline{U}_{10}$, $\underline{U}_{20}$ eta $\underline{U}_{30}$)

Bi tentsio talde horien moduluen artean erlazio hau beteko da: $U_K = \sqrt{3} U_S$; eta desfaseei dagokienez, 30° -ko desfasea egongo da sistema bien artean.

Bestalde, tentsio-sistema horiek grafikoki adierazteko bi era daude:

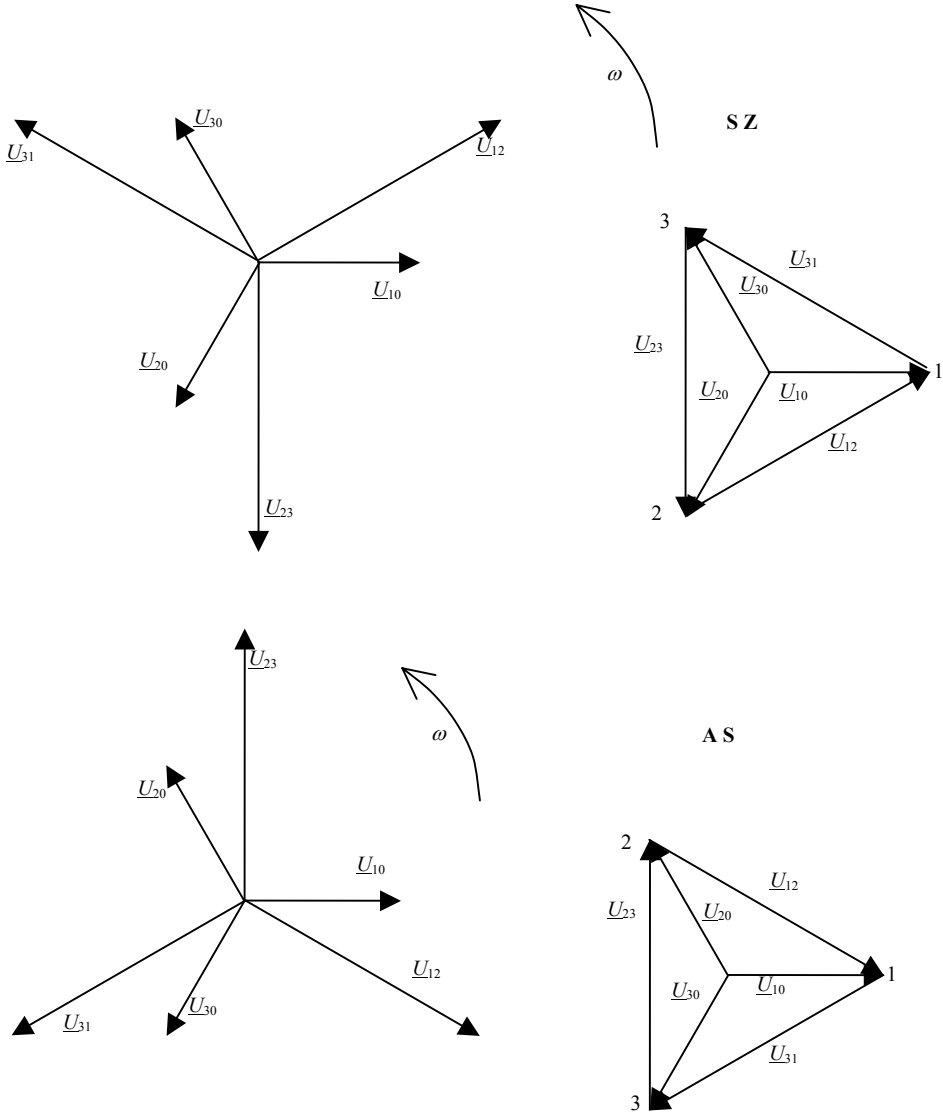
- Sorta erakoa: tentsio eta korrante guztiak jatorria adieraziko lukeen puntu batetik irteten diren adierazpena. Baliagarria izango da bektoreen arteko desfaseak kalkulatzeko.
- Tentsioen triangelua: adierazpen honetan 1, 2, 3 eta 0 puntuek benetako esanahia dute, potentzialaren aldetik.

Bektore biragarri horien biraketa-noranzkoa erlojuaren orratzen aurkakoa da, ω abiadura angeluarrak adierazten duen bezala.

Bektoreak puntu jakin batetik igarotzean 1-2-3 ordenan igarotzen badira (2-3-1 edo 3-1-2 ere bai), sekuentzia zuzeneko (SZ) sistema dugula esango dugu. Aldiz, 3-2-1 ordenan igaroz gero (1-3-2 edo 2-1-3 ere bai), alderantzizko sekuentzia (AS) izango dugu.

SZ izatekotan, tentsio sinpleak 30° atzeratuta egongo dira tentsio konposatuekiko. AS izatekotan, berriz, tentsio sinpleak 30° aurreratuta egongo dira tentsio konposatuekiko.

Ondoren, sekuentzia bietarako adierazpen biak agertzen dira:

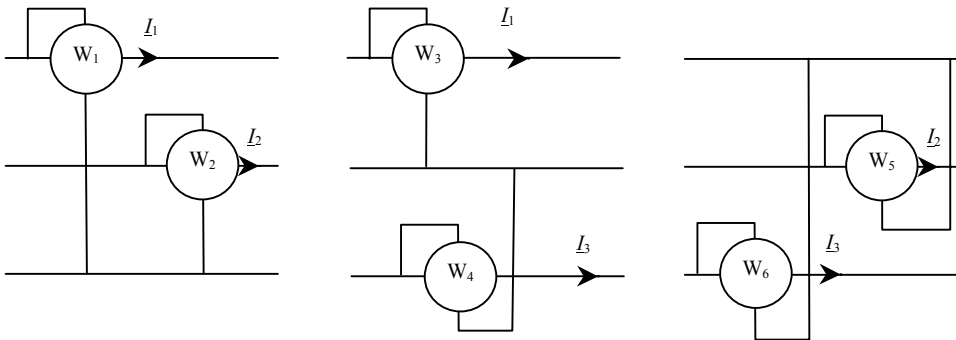


6.2 SISTEMA TRIFASIKOETAN POTENTZIAK NEURTZEA

Aron metodoa

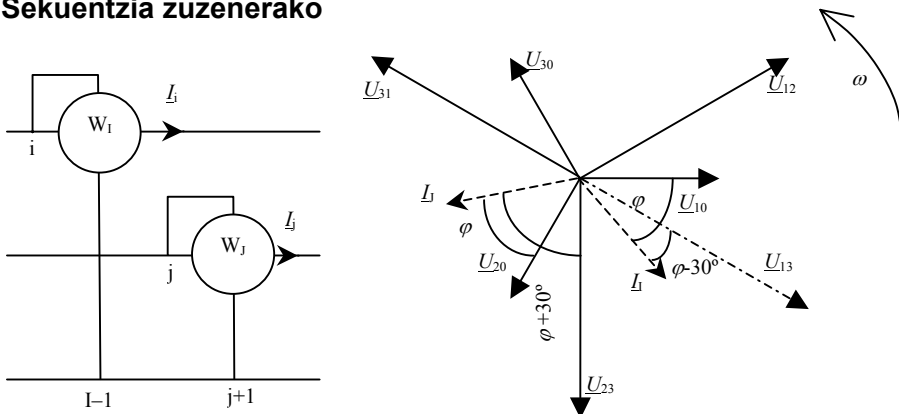
Metodo honen bidez, karga orekatua duten sistemetan potentzia aktiboa zein erreaktiboa neur daitezke, sekuentzia zuzenerako eta alderantzizkorako. Karga desorekatua duten sistemetan, berriz, soilik potentzia aktiboa neurtu ahal izango da (SZerako zein ASrako).

Metodo honetako wattmetroen konexioak egitean, hiru aukera baliokide daude:



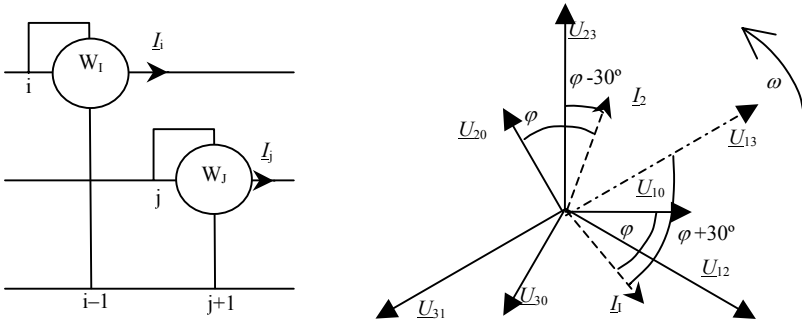
Hiruretan, wattmetroetako batek “ i ” fasean hartzen du korrontea eta tentsioa “ i ” fase beretik “ $i-1$ ” faseraino. Azalpen honetan, wattmetro horri W_i deituko diogu. Beste wattmetroak, berriz, “ j ”= “ $i+1$ ” fasean hartzen du intentsitatea, eta tentsioa “ j ” fase eta “ $j+1$ ” fasearen artean. Wattmetro horri W_j esaten zaio. Ondoren, karga orekatua aztertuko dugu:

Sekuentzia zuzenerako



$$\begin{aligned}
 W_i &= I_i \cdot U_{i,i-1} \cdot \cos \left(I_i \hat{U}_{i,i-1} \right) = I_L \cdot U_K \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = \\
 &= I_L \cdot U_K \cdot (\cos \varphi \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \sin \varphi) = W_1 \\
 W_j &= I_j \cdot U_{j,j+1} \cdot \cos \left(I_j \hat{U}_{j,j+1} \right) = I_L \cdot U_K \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = \\
 &= I_L \cdot U_K \cdot (\cos \varphi \cdot \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin \varphi) = W_2
 \end{aligned}$$

Alderantzizko sekuentziarako



$$\begin{aligned}
 W_i &= I_i \cdot U_{i,i-1} \cdot \cos \left(I_i \hat{U}_{i,i-1} \right) = I_L \cdot U_K \cdot \cos(\varphi + 30^\circ) = \\
 &= I_L \cdot U_K \cdot (\cos \varphi \cdot \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin \varphi) = W_2 \\
 W_j &= I_j \cdot U_{j,j+1} \cdot \cos \left(I_j \hat{U}_{j,j+1} \right) = I_L \cdot U_K \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = \\
 &= I_L \cdot U_K \cdot (\cos \varphi \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \sin \varphi) = W_1
 \end{aligned}$$

Wattmetroen jokabidea zein den ikus dezakegu, hainbat φ angelutarako eta sekuentzia bietarako.

	SZ	AZ
φ	$W_I = I_L \cdot U_K \cdot \cos(\varphi - 30^\circ)$ $W_J = I_L \cdot U_K \cdot \cos(\varphi + 30^\circ)$	$W_I = I_L \cdot U_K \cdot \cos(\varphi + 30^\circ)$ $W_J = I_L \cdot U_K \cdot \cos(\varphi - 30^\circ)$
$\varphi = 0^\circ$	$W_I = W_J > 0$	$W_I = W_J > 0$
$\varphi = 30^\circ$	$W_I = 2W_J > 0$	$W_J = 2W_I > 0$
$\varphi = 60^\circ$	$W_I > 0 = W_J$	$W_J > 0 = W_I$
$60^\circ < \varphi < 90^\circ$	$W_I > 0 > W_J$	$W_J > 0 > W_I$
$\varphi = 90^\circ$	$W_I = -W_J$ $W_I > 0 > W_J$	$W_J = -W_I$ $W_J > 0 > W_I$
$\varphi = -30^\circ$	$W_J = 2W_I > 0$	$W_I = 2W_J > 0$
$\varphi = -60^\circ$	$W_J > 0 = W_I$	$W_I > 0 = W_J$
$-60^\circ < \varphi < -90^\circ$	$W_J > 0 > W_I$	$W_I > 0 > W_J$
$\varphi = -90^\circ$	$W_J = -W_I$ $W_J > 0 > W_I$	$W_I = -W_J$ $W_I > 0 > W_J$

Beraz, sistema trifasikoaren sekuentzia, kargaren izaera eta wattmetroen irakurketen datuetatik bi ezagutuz gero, hirugarrena ondoriozta daiteke.

Bestalde, wattmetroen irakurketekin eragiketak egiten baditugu, sekuentzia edozein delarik ere, hau dugu:

$$W_1 + W_2 = 2 \cdot I_L \cdot U_K \cdot (\cos \varphi \cdot \cos 30^\circ) = 2 \cdot I_L \cdot U_K \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot I_L \cdot U_K \cdot \cos \varphi = P$$

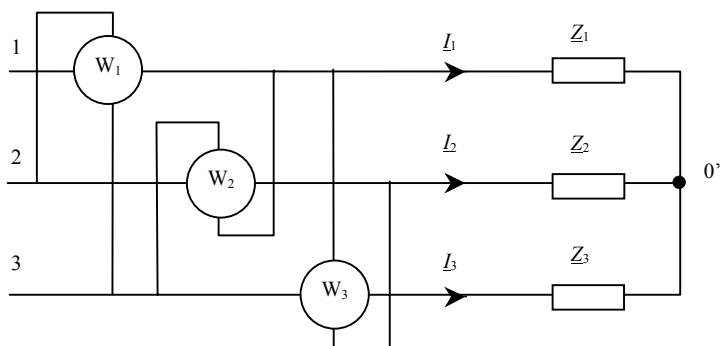
$$W_1 - W_2 = 2 \cdot I_L \cdot U_K \cdot (\sin 30^\circ \cdot \sin \varphi) = 2 \cdot I_L \cdot U_K \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \varphi = I_L \cdot U_K \cdot \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Beraz, Aron metodoarekin, karga trifasiko orekatu baten potentzia aktiboa zein erreaktiboa neur daitezke. Karga desorekatuen potentzia aktiboa ere neur daiteke.

$$P = W_1 + W_2 \quad ; \quad Q = \sqrt{3} \cdot (W_1 - W_2)$$

Potentzia erreaktiboa kalkulatzeko, erabat beharrezkoa da W_1 eta W_2 identifikatzea. Horretarako, wattmetrorik gabeko fasean kokatuko gara (erabilitako kasuetan, hirugarren fasea), eta, faseen sekuentziaren jarraipena kontuan izanda, hurrengo fasean aurkituko dugun wattmetroa W_1 izango da (W_1 sekuentzia zuzenerako eta W_2 alderantzizko sekuentziarako). Bestea, berriz, W_2 wattmetroa izango da (W_2 sekuentzia zuzenerako eta W_1 alderantzizko sekuentziarako).

Potentzia erreaktiboa neurtzea karga desorekatuekin



Wattmetroen konexioak irudikoak direnean, hiru aparatuen irakurketen batura eginez, sistemak xurgatutako potentzia erreaktiboa lor daiteke:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} (W_1 + W_2 + W_3)$$

Bestetik, karga orekatua izango balitz:

$$W_1 = W_2 = W_3$$

$$Q = \sqrt{3} W_1 = \sqrt{3} W_2 = \sqrt{3} W_3$$

wattmetroetako bat bakarrik konektatuz, sistemako guztizko potentzia erreaktiboa lortuko genuke.

Ariketa-zenbakia: 6.1

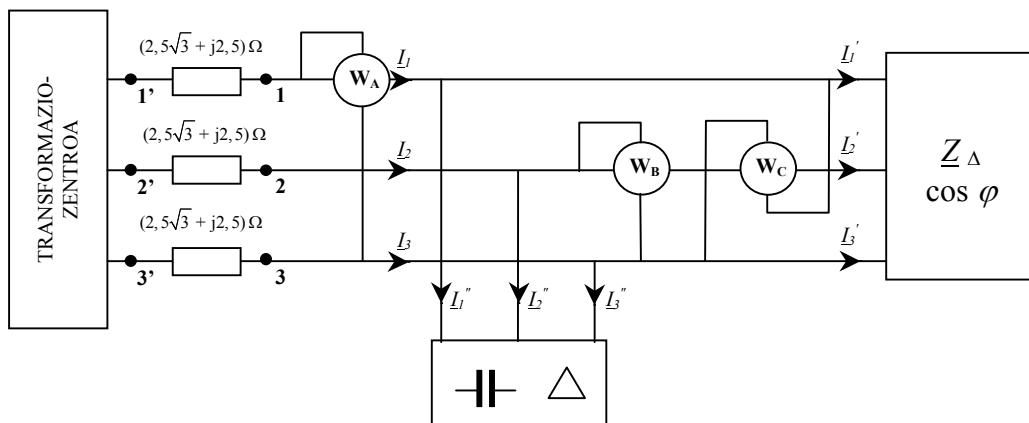
Irudiko zirkuituak tailer industrial baten instalazio elektrikoa irudikatzen du eta ezaugarri nagusi hauek ditu:

- Elikatze-sarea sekuentzia zuzeneko da.
- Sareko tentsioa: $u_{12}(t) = 220\sqrt{6} \cos(314t + 30^\circ) \text{ V}$
- Wattmetroen irakurketak: $W_A = 4.840\sqrt{3}$ zati ($K_A = 1$); $W_B = 0$ zati ($K_B = 1$) eta $W_C = 7.260\sqrt{3}$ zati ($K_C = 1$).
- Tailerreko kargak orekatuak dira, eta karga paralelo baliokide birekin adieraz daitezke:
 - Triangeluan dagoen karga ($\underline{Z}_\Delta$).
 - Triangeluan dagoen karga kapazitibo hutsa.

Zehaztu:

1. Karga baliokide biek xurgatzen dituzten korronteak (lineakoak).
2. $\underline{Z}_\Delta$ inpedantziaren balioa.
3. Kondentsadoreen kapazitatea.
4. Tailerreko potentziak eta potentzia-faktorea; baita tailerreko karga bakoitzarenak ere.
5. Transformazio-zentroko irteeran izan beharreko tentsioa, baldin tailerra transformazio-zentroarekin lotzen duen lineako inpedantzia $2,5\sqrt{3} + j2,5\Omega$ bada.
6. Tailerreko potentzia-faktorea $\cos \varphi = 0,95$ izateko asmoarekin, triangelu eran konektatutako kondentsadoreen batera erabiltzen da. Adierazi kondentsadore horien kapazitatea eta arrazoitu non konektatu behar diren.
7. Adierazi zer aldatuko den instalazioan, aurreko potentzia-faktorearen hobekuntzaren eraginez.

8. Diagrama bektoriala.



Ebazpena

1. Badakigu $W_B = 0$ dela eta zirkuitua sekuentzia zuzenak elikatzen duela. Horrek esan nahi du Z_Δ induktiboa dela $\cos\varphi=60^\circ$ -rekin.

$W_C = 7.260\sqrt{3}$ zati konexioak dauden moduan daudelarik, karga orekatua denez, potentzia erreaktiboa bider $\sqrt{3}$ neurtuko du. Ondorioz:

$$Q_{Z_\Delta} = \sqrt{3} \cdot 7.260\sqrt{3} = 21.780 \text{ var} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I_L \sin\varphi = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot \sqrt{3} \cdot I_L \sin 60^\circ$$

Azken adierazpen horretatik lineako korrontearen modulua lor dezakegu:

$$I_L = \frac{21.780}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ} = 22\sqrt{3} \text{ A}$$

Era berean:

$$\dot{I}'_1 = 22\sqrt{3} \angle -60^\circ \text{ A} \quad \dot{I}'_2 = 22\sqrt{3} \angle 180^\circ \text{ A} \quad \dot{I}'_3 = 22\sqrt{3} \angle 60^\circ \text{ A}$$

$$P_{Z_\Delta} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I_L \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot 220\sqrt{3} \cdot 22\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = 7.260\sqrt{3} \text{ W}$$

Bestalde, badakigu $P_{Z_\Delta} + P_{X_C} = P_{Z_\Delta}$ dela, kondentsadoreek ez baitute potentzia aktiborik xurgatzen. Potentzia erreaktibo totala lortzeko, trikimailu bat erabiliko dugu: W_A wattmetroarekin batera Aron konexioa eratuko lukeena, beste W_D wattmetro bat izango bagenu:

$$P_{Z_\Delta + C_\Delta} = W_A + W_D = 7260\sqrt{3} \text{ W}$$

$$W_D = 7.260\sqrt{3} - W_A = 7.260\sqrt{3} - 4.840\sqrt{3} = 2.420\sqrt{3} \text{ zati}$$

$$Q_{Z\Delta+C\Delta} = \sqrt{3} (W_A - W_D) = \sqrt{3} \cdot 2.420\sqrt{3} = 7.260 \text{ var}$$

Gainera, beste ondorio bat ere atera dezakegu: $\varphi_{Z\Delta+C\Delta} = 30^\circ$ induktibo dela.

Izan ere, $W_A = 2W_D > 0$ da.

Lor dezagun $Q_{C\Delta}$ -ren balioa. $Q_{Z\Delta}$ eta totala ezagutzen ditugunez:

$$Q_{C\Delta} = Q_{Z\Delta+C\Delta} - Q_{Z\Delta} = 7.260 - 21.780 = -14.520 \text{ var kapazitiboak}$$

$$Q_{C\Delta} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I'' \sin(-90^\circ) \longrightarrow I'' = \frac{14.520}{\sqrt{3} \cdot 220\sqrt{3}} = 22 \text{ A}$$

$$I''_1 = 22_{\angle 90^\circ} \text{ A} \quad I''_2 = 22_{\angle -30^\circ} \text{ A} \quad I''_3 = 22_{\angle -150^\circ} \text{ A}$$

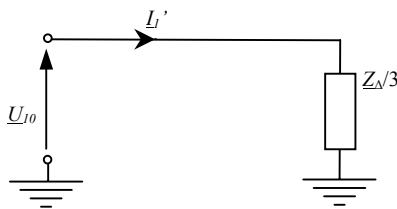
Eta, orain, zirkuituko korrante guztiak kalkula ditzakegu:

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = 22\sqrt{3}_{\angle -60^\circ} + 22_{\angle 90^\circ} = 22_{\angle -30^\circ} \text{ A}$$

$$I_2 = 22_{\angle -150^\circ} \text{ A}$$

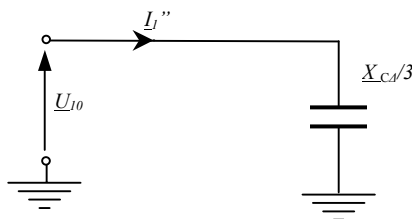
$$I_3 = 22_{\angle 90^\circ} \text{ A}$$

2. Korranteak ezagunak dira, eta baliokide monofasikoa aplikatuz gero, kargen izar baliokideen balioak lortu ahal izango ditugu:



$$\begin{aligned} \frac{Z_A}{3} &= \frac{U_{10}}{I'_1} \Rightarrow Z_A = 3 \cdot \frac{U_{10}}{I'_1} = \\ &= 3 \cdot \frac{220_{\angle 0^\circ}}{22\sqrt{3}_{\angle -60^\circ}} = 10\sqrt{3}_{\angle -60^\circ} = \\ &= (5\sqrt{3} + j15) \Omega \end{aligned}$$

3.



$$\frac{X_{CA}}{3} = \frac{|U_{10}|}{|I''_1|} = \frac{220}{22} = 10 \Omega$$

$$X_{CA} = 30 \Omega = \frac{1}{\omega \cdot C_A}$$

$$C_A = \frac{1}{\omega \cdot X_{CA}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 30} = 106 \mu\text{F}$$

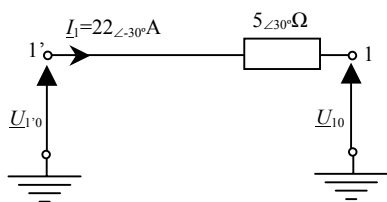
4. Taldekako potentziak eta totalak dagoeneko 1. atalean kalkulaturik daude; beren balioak laburbilduko ditugu:

$$P_{Z\Delta} = 7.260\sqrt{3} \text{ W} \quad Q_{Z\Delta} = 21.780 \text{ var} \quad S_{Z\Delta} = 14.520\sqrt{3} \text{ VA}$$

$$P_{C\Delta} = 0 \text{ W} \quad Q_{C\Delta} = -14.520 \text{ var} \quad S_{C\Delta} = 14.520 \text{ VA}$$

$$P_{\text{Totala}} = 7.260\sqrt{3} \text{ W} \quad Q_{\text{Totala}} = 7.260 \text{ var} \quad S_{\text{Totala}} = 14.520 \text{ VA}$$

5. Transformazio-zentroko tentsioa lortzeko, baliokide monofasikoa erabiliko dugu:



$$\underline{U}_{1'1} = 5 \angle 30^\circ \cdot 22 \angle -30^\circ = 110 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{1'0} = \underline{U}_{1'1} + \underline{U}_{10} = 110 \angle 0^\circ + 220 \angle 0^\circ = 330 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Tentsio konposatuak:

$$\underline{U}_{1'2'} = 330\sqrt{3} \angle 30^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{2'3'} = 330\sqrt{3} \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{3'1'} = 330\sqrt{3} \angle 150^\circ \text{ V}$$

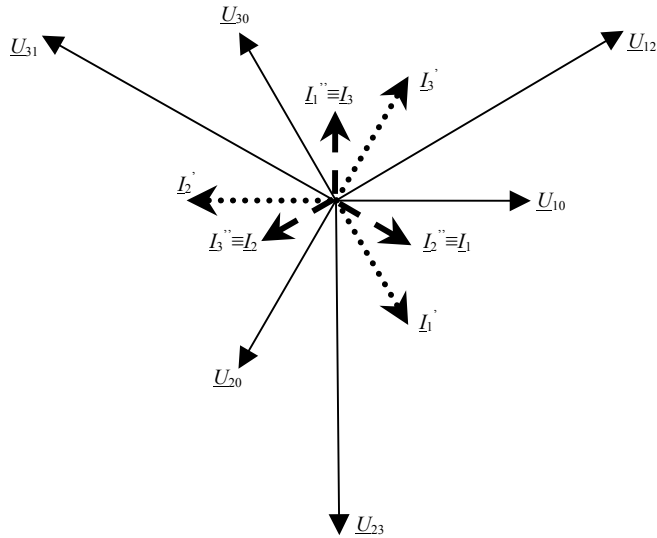
6. Kondentsadoreak 1, 2 eta 3 puntuetan jarriko ditugu sarrerako tentsioa ez aldatzearen, eta, banaketa-lineako korrontea murriztearen, Joule efektuagatiko galerak murriztuko ditugu hala. $\cos \varphi' = 0,95$ -ra hobetzeko, $\varphi' = 18,195^\circ$ izan behar du.

$$Q_C = P_{Z\Delta+C\Delta} \cdot (\tan \varphi - \tan \varphi') = 7.260\sqrt{3} \cdot (\tan 30^\circ - \tan 18,195^\circ) = 3.126,9 \text{ var}$$

$$Q_C = \frac{3 \cdot U_C^2}{X_{C\Delta}} \Rightarrow C_\Delta = \frac{Q_C}{3 \cdot \omega \cdot U_C^2} = \frac{3.126,9}{3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot (220\sqrt{3})^2} = 22,85 \text{ } \mu\text{F}$$

7. Lineako intentsitatea, lineako tentsio-erorketa eta transformazio-zentroaren iteerako tentsioak aldatuko dira.

8.



Ariketa-zenbakia: 6.2

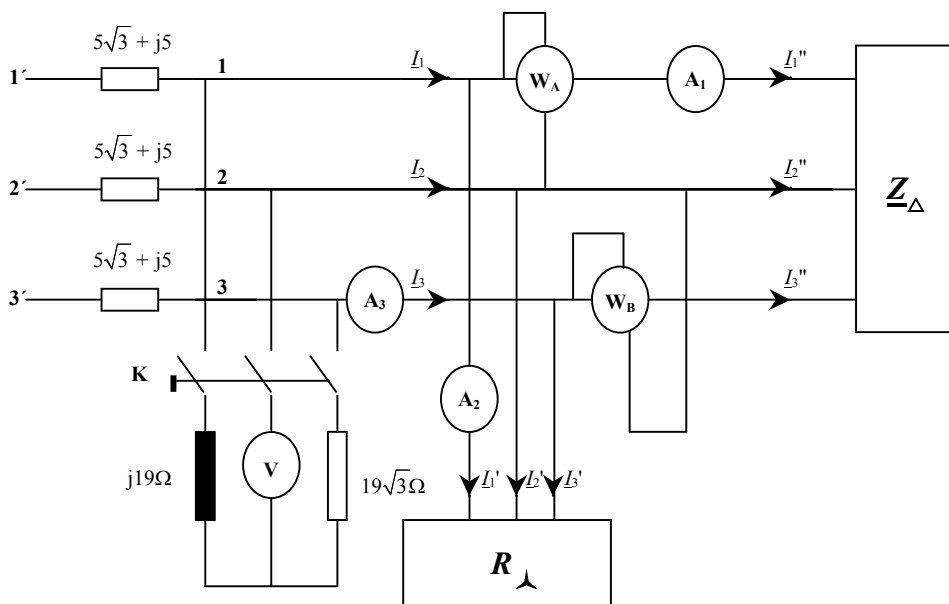
Irudiko zirkuituan, datu hauek ezagutzen ditugu:

- K etengailua itxita dagoenean, voltmetroaren irakurketa $V_1 = 380$ zati dela esaten digute ($K_V = 1/2$).
- W_B -ren eta W_A -ren irakurketen artean, $W_B > 0 = W_A$ erlazioa dago.
- A_1 eta A_2 amperemetroen irakurketak berdinak dira, eta $A_3 = \sqrt{3} A_1 = \sqrt{3} A_2$.
- Tentsioak: $u_{12}(t) = 220\sqrt{6}\cos(314t + 30^\circ)$ V eta $u_{1'2'}(t) = 440\sqrt{6}\cos(314t + 30^\circ)$ V.

Kalkulatu:

1. Zirkuituan zeharreko korranteak eta amperemetroen neurketak (neurketa zuzeneko aparatuak direla suposatu).
2. Potentzia partzialak eta potentzia totalak.
3. 25.000 var, 1.000V eta 50 Hz-eko kondentsadoreak izatekotan, $\underline{Z}_\Delta$, kalkulatu zenbat kondentsadore jarri behar diren kargaren potentzia-faktorea ahalik eta gehien hobetzeko. Adierazi, era berean, non jarriko zenituzkeen kondentsadore

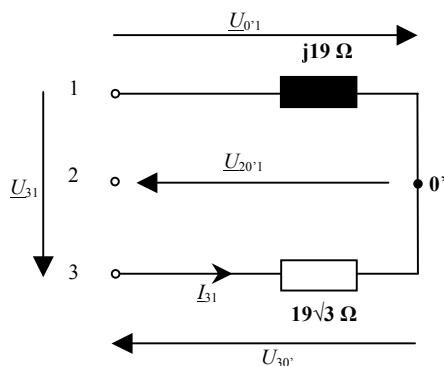
horiek 1-2-3 puntuko tentsioak konstante mantentzen daitezzen, eta zehaztu egin beharreko konexioa. Potentzia-faktorea hobetu eta gero, zehaztu zirkuituko tentsio eta korrante berriak.



Ebazpena

1. Voltmetroaren irakurketa $V_1 = 380$ zati dela esaten digute, konstantearen balioa $K_V = 0,5 \frac{V}{\text{zati}}$ izanda. Beraz, $U_{20'} = 190V$

Orain, faseen sekuentzia zehaztean, faseen jatorrian hartuko dugu $\underline{U}_{31}$, kalkuluak errazteko. Kontuan hartu enuntziatua eman diguten tentsioen erreferentzia aldatu dugula, baina gero kalkulu guztietarako enuntziatuaren erreferentzia berreskuratuko dugula.



$$I_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{19\sqrt{3} + j19} = \frac{380 \angle 0^\circ}{38 \angle 30^\circ} = 10 \angle -30^\circ$$

$$\underline{U}_{0'1} = j19 \cdot I_{31} = 190 \angle 60^\circ$$

$$\underline{U}_{30'} = 19\sqrt{3} \cdot I_{31} = 190\sqrt{3} \angle -30^\circ$$

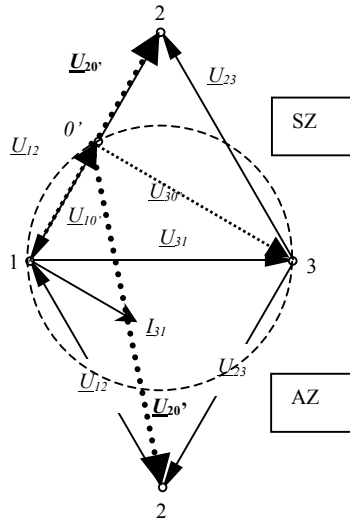
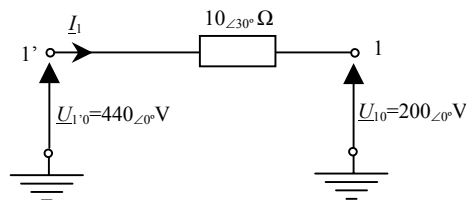


Diagrama bektorialean SZ eta AS-ko tentsio konposatuaren sistema biak irudikatu ondoren, $0'$ puntua kokatu dugu. Hala, sekuentzia bakoitzari voltmetroaren neurketa desberdin bat dagokio ($\underline{U}_{20'}$ desberdinak). Horietatik, SZ-koa (goikoa) aukeratuko dugu; izan ere, alderantzizko sekuentziakoan, $\underline{U}_{20'}$ bektorearen modulua tentsio konposatuarena ($220\sqrt{3}$ V) baino handiagoa da. Eta badakigu voltmetroaren neurketak 190 V izan behar duela; tentsio konposatua baino txikiagoa, alegia.

K zabalik

Wattmetroek Aron konexioa eratzen dute, eta badakigu $W_B = 2 \cdot W_A$ dela eta SZ-ko sistema baten aurrean gaudela. Beraz, $\underline{Z}_\Delta$ kargak $\varphi=30^\circ$ -ko karga induktiboa izan beharko du.

Bestetik, amperemetroen irakurketak berdinak dira. Horrek esan nahi du, neurtzen dituzten korronteen moduluak ere berdinak izango direla. Beraz: $|\underline{I}_1| = |\underline{I}_1''|$



$$I_1 = \frac{U_{1'1}}{10 \angle 30^\circ}$$

$$\underline{U}_{1'1} = \underline{U}_{1'0} - \underline{U}_{10} = 440_{\angle 0^\circ} - 220_{\angle 0^\circ} = 220_{\angle 0^\circ} \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{\underline{U}_{1'1}}{10_{\angle 30^\circ}} = \frac{220_{\angle 0^\circ}}{10_{\angle 30^\circ}} = 22_{\angle -30^\circ} \text{ A}$$

$A_{3l} = 22 \text{ A}$ da, eta badakigu amperemetroen irakurketen arteko erlazioa $A_{3l} = \sqrt{3} \cdot A_{1l} = \sqrt{3} \cdot A_{2l}$ dela. Beraz, erlazio horretatik I_1' eta I_1'' korronteen moduluak kalkula ditzakegu: $A_{3l} = 22$; $A_{1l} = \frac{22}{\sqrt{3}}$; $A_{2l} = \frac{22}{\sqrt{3}}$; eta korronteak:

$$I_1' = \frac{22}{\sqrt{3}}_{\angle 0^\circ}; I_1'' = \frac{22}{\sqrt{3}}_{\angle -60^\circ}$$

$$2. \quad P_{Z\Delta} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I_L \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot \frac{22}{\sqrt{3}} \cdot \cos 60^\circ = 4.180 \text{ W}$$

$$Q_{Z\Delta} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I_L \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot \frac{22}{\sqrt{3}} \cdot \sin 60^\circ = 4.180\sqrt{3} \text{ var}$$

$$S_{Z\Delta} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I_L = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot \frac{22}{\sqrt{3}} = 8.360 \text{ VA}$$

$$P_{Rizarra} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I_L \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot \frac{22}{\sqrt{3}} \cdot \cos 0^\circ = 8.360 \text{ W}$$

$$Q_{Rizarra} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I_L \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot \frac{22}{\sqrt{3}} \cdot \sin 0^\circ = 0 \text{ var}$$

$$S_{Rizarra} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I_L = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot \frac{22}{\sqrt{3}} = 8.360 \text{ VA}$$

$$P_{Totala} = 8.360 + 4.180 = 12.540 \text{ W}$$

$$Q_{Totala} = 4.180\sqrt{3} \text{ var}$$

$$S_{Totala} = 14.479,94 \text{ VA}$$

$$P_{LINEA} = 3 \cdot R_L \cdot I_L^2 = 3 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 22^2 = 7.260\sqrt{3} \text{ W}$$

$$Q_{LINEA} = 3 \cdot X_L \cdot I_L^2 = 3 \cdot 5 \cdot 22^2 = 7.260 \text{ var}$$

$$S_{LINEA} = \sqrt{P_L^2 + Q_L^2} = \sqrt{\left((7.260\sqrt{3})^2 + (7.260)^2\right)} = 14.520 \text{ VA}$$

4. Instalazioko potentzia-faktorea ahalik eta gehien hobetzea eskatzen digute. Horretarako, gure helburua izango da kondentsadoreek instalazioko potentzia erreaktibo osoa konpentsatzea. Gainera, instalazioan bi karga ditugu, eta horietako bat erresistibo hutsa delarik, konpentsatu beharko dugun potentzia induktibo bakarra Z_{Δ} kargak eragiten duena izango da. Beraz, kondentsadoreen potentzia erreaktiboaren moduluak.

$$Q_C = Q_{Z_{\Delta}} = 4.180\sqrt{3} \text{ var izan beharko du.}$$

Horretaz gain, badakigu kondentsadoreek jasaten duten tentsioa $U_C = 1.000 \text{ V}$ denean haien potentzia unitarioa 25.000 var dela. Beraz,

$$Q_C' = \frac{U_C'^2}{X_C} \Rightarrow X_C = \frac{U_C'^2}{Q_C'} = \frac{1.000^2}{25.000} = 40 \Omega$$

C_{Δ}

Kondentsadoreak triangeluan konektatuz gero, $220\sqrt{3}\text{V}$ -ko tentsiopean izango dira. Beraz,

$$Q_C'' = \frac{U_C''^2}{X_C} = \frac{(220\sqrt{3})^2}{40} = 3.630 \text{ var}$$

eta jarri beharreko kondentsadore kopurua: $C_{\Delta \text{ kop.}} = \frac{4.180\sqrt{3}}{3.630} = 1,99$

Baina, triangelu-konexioa egiteko, gutxienez hiru kondentsadore behar ditugu (bat fase bakoitzean). Eta hiru kondentsadore erabiliz gero, instalazioa kapazitibo bihurtuko dugu. Behar baino potentzia erreaktibo kapazitibo handiagoa sartuko litzateke, eta, beraz, ezingo dugu triangelu-konexioa erabili.

C_{Izarra}

Azter dezagun zer gertatzen den kondentsadoreak izarrean konektatzen baditugu:

$$Q_C''' = \frac{U_C'''^2}{X_C} = \frac{(220)^2}{40} = 1.210 \text{ var}$$

eta jarri beharreko kondentsadore kopurua:

$$C_{Izar \text{ kop.}} = \frac{4.180\sqrt{3}}{1.210} = 5,98$$

Sei kondentsadore erabiliz gero, aurreko egoera berean izango gara eta potentzia-faktore kapazitiboko instalazioa izango dugu. Horregatik, izarraren adar bakoitzean kondentsadore bat jarriko dugu.

Hala, gaineratuko dugun potentzia erreaktibo kapazitiboa:

$$Q_C = -3 \times 1.210 = -3.630 \text{ var}$$

Eta zirkuituko potentzia total berriak:

$$P_{TB} = P_{Z\Delta} + P_{R\text{Izarra}} = 12.540 \text{ W}$$

$$Q_{TB} = Q_{Z\Delta} + Q_C = 4.180\sqrt{3} - 3.630 = 3.609,97 \text{ var}$$

$$S_{TB} = \sqrt{(P_{TB}^2 + Q_{TB}^2)} = \sqrt{(12.540^2 + 3.609,97^2)} = 13.049,27 \text{ VA}$$

$$\cos \varphi_{TB} = 0,96 \Rightarrow \varphi_{TB} = 16^\circ$$

Bestalde, lineako korrante berri hauek xurgatuko dira saretik:

$$S_{TB} = 13.049,27 \text{ VA} = \sqrt{3} U_K I_{LB} = \sqrt{3} \cdot 220\sqrt{3} \cdot I_{LB} \Rightarrow$$

$$I_{LB} = \frac{13.049,27}{\sqrt{3} \cdot 220\sqrt{3}} = 19,77 \text{ A}$$

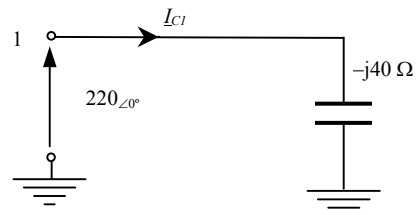
$$I_{1B} = 19,77 \angle -16^\circ \text{ A}; \quad I_{2B} = 19,77 \angle -136^\circ \text{ A}; \quad I_{3B} = 19,77 \angle 104^\circ \text{ A}$$

Eta hauek zirkulatuko dute kondentsadoreetatik:

$$I_{C1} = \frac{U_{10}}{-j40} = \frac{220 \angle 0^\circ}{40 \angle -90^\circ} = 55 \angle 90^\circ \text{ A}$$

$$I_{C2} = 55 \angle -30^\circ \text{ A}$$

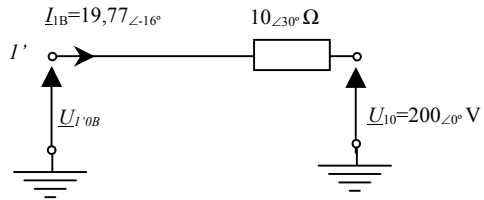
$$I_{C1} = 55 \angle -150^\circ \text{ A}$$



Gainerako korranteek lehengo balioak mantenduko dituzte, kondentsadoreak instalazioko sarreran konektatuko dira eta.

Azkenik, zirkuituko sarreran aplikatu beharreko tentsio berriak:

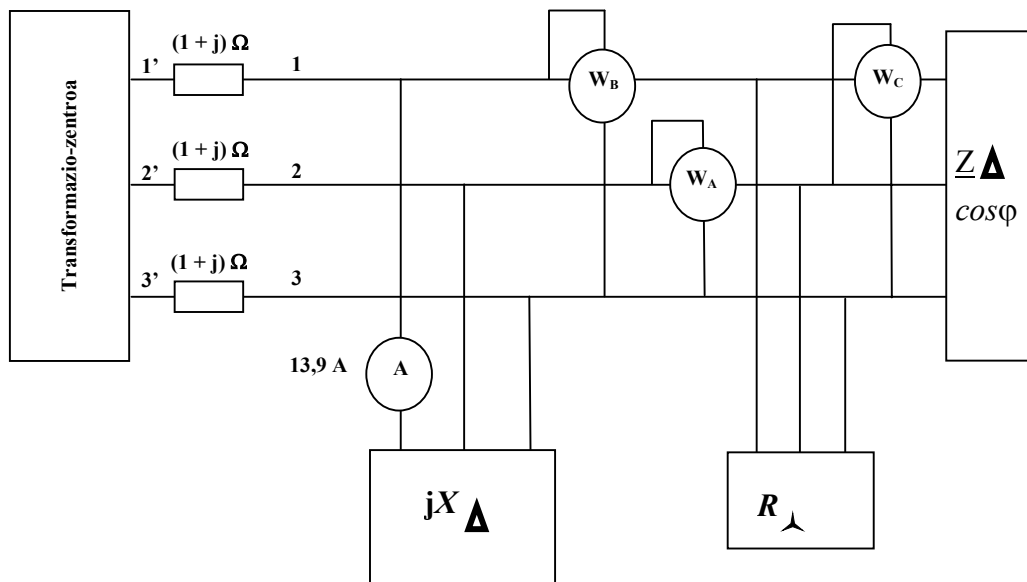
$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{1'0B} &= \underline{U}_{1'1} + \underline{U}_{10} = \\
 &= 19,77 \angle -16^\circ \cdot 10 \angle 30^\circ + 220 \angle 0^\circ = \\
 &= 414,59 \angle 6,6^\circ \text{ V} = \underline{U}_{1'0B} \\
 \underline{U}_{2'0B} &= 414,59 \angle -113,4^\circ \text{ V} \\
 \underline{U}_{3'0B} &= 414,59 \angle 126,6^\circ \text{ V} \\
 \underline{U}_{1'2'B} &= 414,59 \angle 36,6^\circ \text{ V} \\
 \underline{U}_{2'3'B} &= 414,59 \angle -83,4^\circ \text{ V} \\
 \underline{U}_{3'1'B} &= 414,59 \angle 156,6^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$



Ariketa-zenbakia: 6.3

Tailer bateko instalazio elektrikoa irudiko eskemaren bidez adieraz daiteke:

- Elikatze-sarea sekuentzia zuzeneko da.
- Sareko tentsioa: $u_{12}(t) = 220\sqrt{6} \cos(314t + 30^\circ) \text{ V}$
- W_A eta W_B wattmetroek irakurketa bera ematen dute (7.260 zati) eta W_B wattmetroarena 14.520 zati da. Bestalde, amperemetroak 13,9 zati irakurtzen du. Kasu guztietan, konstanteak 1 balio dute. ($K_W = K_A = 1$).
- Tailerreko hiru kargak orekatuak dira:
 - Triangeluan dagoen karga mistoa.
 - Izarrean dagoen karga erresistibo hutsa (10 Ω /fase).
 - Triangeluan dagoen karga induktibo hutsa.



Kalkulatu:

1. Karga mistoaren zein erresistiboaren balioak.
2. Tailerreko lineetatik zirkulatzen duten korronteak.
3. Tailerreko potentzia totalak eta potentzia-faktorea. Baita tailerreko karga bakoitzarenak ere.
4. Transformazio-zentroko irteeran behar den tentsioa, baldin eta tailerra transformazio-zentroarekin lotzen duen lineako inpedantzia $(1 + j) \Omega$ bada.
5. Diagrama bektoriala.
6. Instalazioko potentzia-faktorea $\cos\varphi = 0,95$ izan dadin, triangeluan konektatutako kondentsadoreen bateria bat erabiltzen da. Kalkulatu kondentsadore horien kapazitatea eta justifikatu non konektatu beharko diren.
7. Adierazi zer aldatuko den instalazioan, aurreko potentzia-faktorearen hobekuntzarekin.

Ebazpena

1. Wattmetroen irakurketetatik informazio hau eskuratu dezakegu:

$$P_{R \text{ Izarra} + Z_{\Delta}} = W_B + W_A = 14.520 + 7.260 = 21.780 \text{ W}$$

$$Q_{R \text{ Izarra} + Z_{\Delta}} = \sqrt{3} (W_B - W_A) = \sqrt{3} W_C = \sqrt{3} \cdot 7.260 \text{ var}$$

Izan ere, R_{izarra} -k 0 var-eko potentzia erreaktiboa du.

R_{izarra} -ren balioa 10Ω izanik, badakigu:

$$P_{R \text{ Izarra}} = 3 \cdot \frac{U_S^2}{R} = 3 \cdot \frac{220^2}{10} = 14.520 \text{ W}$$

Eta Boucherot-en teorema aplikatuz,

$$P_{Z_{\Delta}} = P_{Z_{\Delta} + R \text{ Izarra}} - P_{R \text{ Izarra}} = 21.780 - 14.520 = 7.260 \text{ W}$$

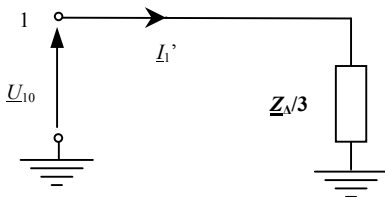
$$Q_{Z_{\Delta}} = 7.260 \sqrt{3} \text{ var}$$

$$\tan \varphi_{Z_{\Delta}} = \sqrt{3} \rightarrow \varphi_{Z_{\Delta}} = 60^\circ \text{ induktiboak.}$$

$$P_{Z_{\Delta}} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I_L \cdot \cos \varphi \rightarrow I_L = \frac{P_{Z_{\Delta}}}{\sqrt{3} \cdot 220 \sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ} = \frac{7.260}{\sqrt{3} \cdot 220 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}} = 22 \text{ A}$$

$$I_1' = 22 \angle 60^\circ \text{ A}$$

Baliokide monofasikoa erabiliz,



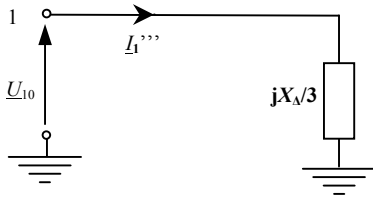
$$\frac{Z_{\Delta}}{3} = \frac{220 \angle 0^\circ}{22 \angle -60^\circ} = 10 \angle 60^\circ \Omega$$

$$Z_{\Delta} = 30 \angle 60^\circ \Omega = (15 + j15\sqrt{3}) \Omega$$

Izarrean dagoen kargan zehar dabilen korrontea:

$$I_1'' = \frac{U_{10}}{10 \angle 0^\circ} = \frac{220 \angle 0^\circ}{10 \angle 0^\circ} = 22 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Triangeluan dagoen karga induktibo hutsak xurgatzen duen korrontearen modulua amperemetroarena izango da, eta, kargaren izaera kontuan hartuta, angelua ere ezaguna da.



$$\frac{jX_A}{3} = \frac{U_{10}}{I_1'''} = \frac{220 \angle 0^\circ}{13,9 \angle -90^\circ} = 15,83 \angle 90^\circ \Omega$$

$$Q_{X\Delta} = \sqrt{3} \cdot 220\sqrt{3} \cdot 13,9 = 9.174 \text{ var}$$

2.

$$\begin{aligned} I_{L1} &= I_1' + I_1'' + I_1''' = 22 \angle -60^\circ + 22 \angle 0^\circ + 13,9 \angle -90^\circ = \\ &= 22 + 11 - j11\sqrt{3} - j13,9 = 33 - j33 = \\ &= 33\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$$I_{L2} = 33\sqrt{2} \angle -165^\circ \text{ A}$$

$$I_{L3} = 33\sqrt{2} \angle 75^\circ \text{ A}$$

3.

$$P_{Z\Delta} = 7.260 \text{ W}$$

$$P_{R \text{ Izarra}} = 14.520 \text{ W}$$

$$P_{X\Delta} = 0 \text{ W}$$

$$Q_{Z\Delta} = 7.260\sqrt{3} \text{ var}$$

$$Q_{R \text{ Izarra}} = 0 \text{ var}$$

$$Q_{X\Delta} = 9.174 \text{ var}$$

$$S_{Z\Delta} = 14.520 \text{ VA}$$

$$S_{R \text{ Izarra}} = 14.520 \text{ VA}$$

$$S_{X\Delta} = 9.174 \text{ VA}$$

$$\cos \varphi_{Z\Delta} = 0,5$$

$$\cos \varphi_{R \text{ Izarra}} = 1$$

$$\cos \varphi_{X\Delta} = 0$$

Potentzia totalak:

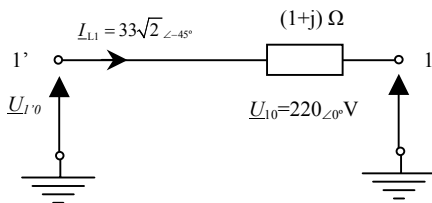
$$P_{\text{Totala}} = 21.780 \text{ W}$$

$$Q_{\text{Totala}} = 21.780 \text{ var}$$

$$S_{\text{Totala}} = 30.757,29 \text{ VA}$$

$$\cos \varphi_{\text{Totala}} = 0,7$$

4. Linearen baliokide monofasikoa lehenengo fasean aplikatuz,

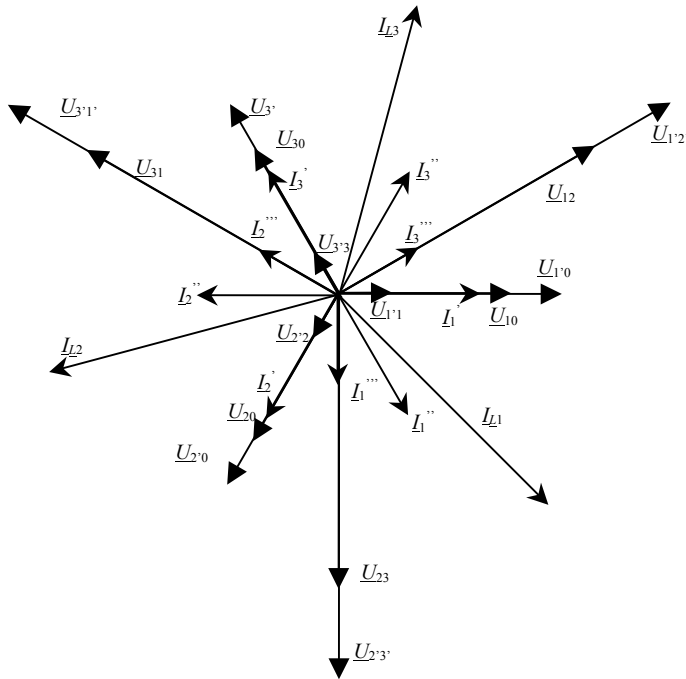


$$U_{1'1} = 33\sqrt{2} \angle -45^\circ \cdot \sqrt{2} \angle 45^\circ = 66 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$U_{1'0} = U_{1'1} + U_{10} = 286 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$U_{1'2'} = 286\sqrt{3} \angle 30^\circ \text{ V}$$

5.



6. $\cos \varphi' = 0,95 \rightarrow \varphi' = 18,1948^\circ$

$$Q_C = P_{\text{Totala}} \cdot (\text{tg } \varphi - \text{tg } \varphi') = 21.780 \cdot (\text{tg } 45^\circ - \text{tg } 18,1948^\circ) = 14.621,26 \text{ var}$$

$$C_\Delta = \frac{Q_C}{3 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot U_C^2} = \frac{14.621,26}{3 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot (220\sqrt{3})^2} = 106,84 \mu\text{F}$$

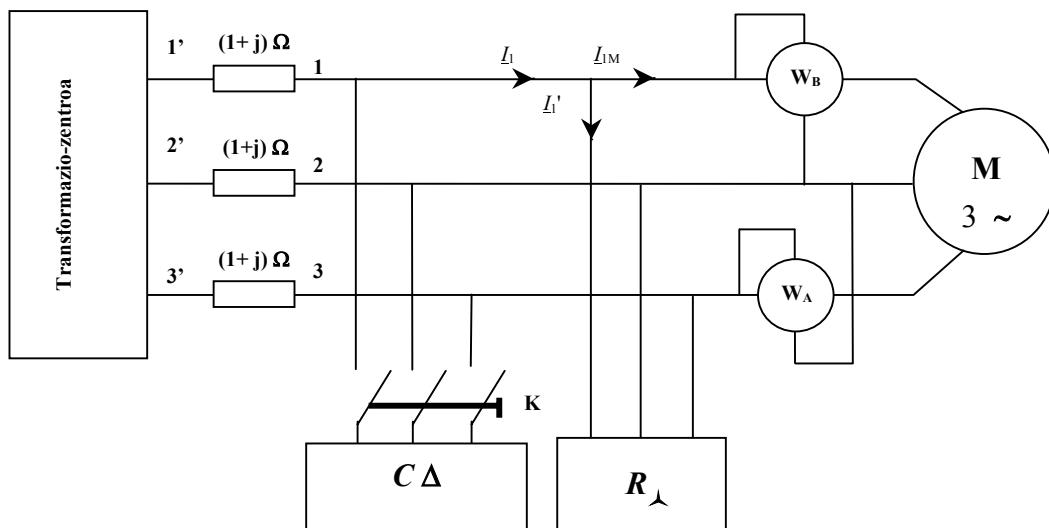
Non U_C baita kondentsadoreek jasaten duten tentsioa.

7. 1-2-3 puntuetan konektatuko ditugu, lantegiko sarrera-tentsioa aldatu ez dadin. Magnitude hauek aldatuko dira: lineako inpedantzia gertatzen den tentsio-erorketa, transformazio-zentroko irteerako tentsioa eta lineatik zirkulatzen duen korronteak.

Ariketa-zenbakia: 6.4

Irudiko zirkuitua instalazio industrial baten eskema da:

- Elikatze-sarea sekuentzia zuzenekoa da.
- Sareko tentsioa: $u_{12}(t) = 220\sqrt{6} \cos(314t + 30^\circ) \text{ V}$
- Wattmetroen irakurketak (motorrak karga osoan lan egiten duenean): $W_A = 3.854,625$ zati eta $W_B = 501,374$ zati ($K_A = K_B = 1$).
- Instalazioko karga guztiak orekatuak dira:
 - 3.484,8 W-eko motor trifasikoa (triangeluan konektatua eta izar-triangelu abioaren bidez martxan jartzeko prestatua).
 - Izarrean dagoen karga erresistibo hutsak ($100 \Omega/\text{fase}$).



Zehaztu:

1. Motorrak duen inpedantzia faseko. Baita haren ezaugarri-xaflan agertu beharreko tentsioa, errendimendua eta potentzia-faktorea ere.
2. Instalazioko lineetatik zirkulatzen duten korronteak.
3. Instalazioko potentziak eta potentzia-faktorea. Baita karga bakoitzarenak ere.

- Transformazio-zentroko irteeran behar den tentsioa, baldin eta instalazioa transformazio-zentroarekin lotzen duen lineako inpedantzia $(1 - j) \Omega$ bada.
- Diagrama bektoriala.
- Instalazioko potentzia-faktorea $\cos \varphi = 0,95$ izan dadin, triangeluan konektatutako kondentsadoreen bateria bat erabiltzen da. Kalkulatu kondentsadore horien kapazitatea.
- Adierazi zer aldatuko den instalazioan, aurreko potentzia-faktorearen hobekuntzarekin.

Ebazpena

- Izar-triangelu abioa egin ahal izateko, motorrak kondizio hau bete behar du: ezaugarrien xaflako tentsio baxuenak bat etorri behar du sareko tentsio konposatuarekin, eta altuenak $\sqrt{3}$ aldiz handiagoa izan behar du. Beraz, ezaugarrien xaflan: $660 / 220\sqrt{3} \text{ V}$

Potentzia elektrikoa $P = W_A + W_B$ denez,

$$P_{\text{motorra}} = W_A + W_B = 3.854,625 + 501,374 = 4.356 \text{ W}$$

$$Q_{\text{motorra}} = \sqrt{3} (W_A - W_B) = \sqrt{3} (3.854,625 - 501,374) = 5.808 \text{ var}$$

$$\tan \varphi_{\text{motorra}} = \frac{5.808}{4.356} = 1,33 \Rightarrow \varphi_{\text{motorra}} = 53^\circ \Rightarrow \cos \varphi_{\text{motorra}} = 0,6$$

Eta potentzia mekanikoaren balioa (ardatzean dugun potentzia erabilgarria)

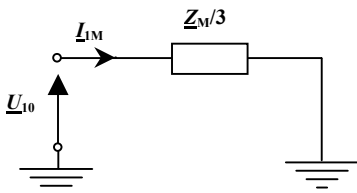
$P_{\text{erabilgarria}} = 3.484,8 \text{ W}$ denez, bi balio hauek zatituz lortuko dugu errendimendua:

$$\% \eta = \frac{3.484,8}{4.356} \cdot 100 = \% 79,81$$

Bestetik:

$$P_{\text{Motorra}} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I_{1M} \cdot \cos \varphi_{\text{Motorra}} \Rightarrow I_{1M} = \frac{P_{\text{Motorra}}}{\sqrt{3} \cdot U_K \cdot \cos \varphi_{\text{Motorra}}} = \frac{4.356}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0,6} = 11 \text{ A}$$

Baliokide monofasikoa erabiliz,

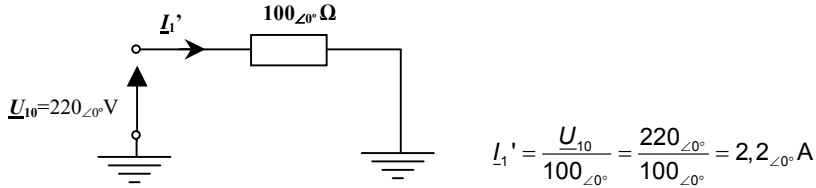


$$\frac{Z_M}{3} = \frac{220 \angle 0^\circ}{11 \angle -53^\circ} = 20 \angle 53^\circ$$

$$Z_M = 60 \angle 53^\circ = (36 + j48) \Omega$$

Izarrean dagoen karga erresistibo hutsetik zehar doan korronea:

2.



$$I_1 = I_1' + I_{1M} = 2,2 \angle 0^\circ + 11 \angle -53^\circ = 2,2 + 11 \cdot 0,6 - j11 \cdot 0,8 = 8,8 - j8,8 = 8,8\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = 8,8\sqrt{2} \angle -165^\circ \text{ A} \quad I_3 = 8,8\sqrt{2} \angle 75^\circ \text{ A}$$

3. $P_{motorra} = 4.356 \text{ W}$

$$Q_{motorra} = 5.808 \text{ var}$$

$$S_{motorra} = \sqrt{3} \cdot 220 \sqrt{3} \cdot 11 = 7.260 \text{ VA}$$

$$\cos \varphi_{motorra} = 0,6$$

$$P_{R \text{ Izarra}} = 3 \cdot R \cdot (I_1')^2 = 3 \cdot 100 \cdot (2,2)^2 = 1.452 \text{ W}$$

$$Q_{R \text{ Izarra}} = 0 \text{ var}$$

$$S_{R \text{ Izarra}} = 1.452 \text{ VA}$$

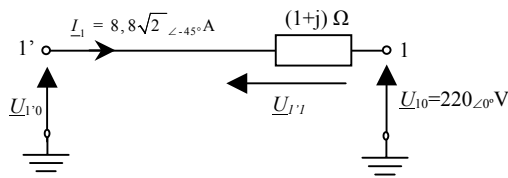
$$\cos \varphi_{R \text{ Izarra}} = 1$$

Potentzia totalak:

$$P_{Totala} = P_{motorra} + P_{R \text{ Izarra}} = 5.808 \text{ W} \quad Q_{Totala} = Q_{motorra} + Q_{R \text{ Izarra}} = 5.808 \text{ var}$$

$$S_{Totala} = 5.808\sqrt{2} \text{ VA} \quad \cos \varphi_{Totala} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

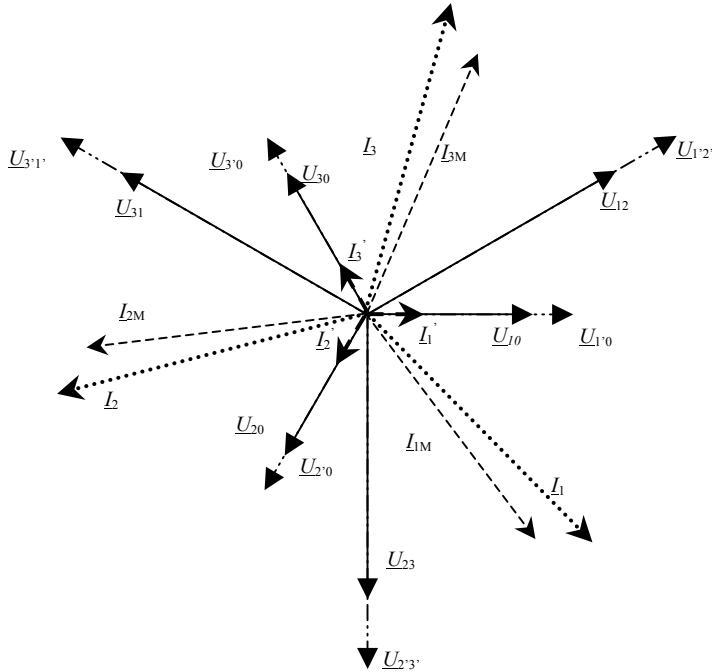
4. Transformazio-zentroaren irteeran ditugun tentsioak lortzeko, lehen bezala baliatuko gara baliokide monofasikoaz:



$$\underline{U}_{1'1} = 8,8\sqrt{2} \angle -45^\circ \cdot \sqrt{2} \angle -45^\circ = 17,6 \angle 0^\circ$$

$$\underline{U}_{1'0} = \underline{U}_{1'1} + \underline{U}_{10} = 237,6 \angle 0^\circ \text{ V}$$

5.



6. $\cos \varphi' = 0,95 \Rightarrow \varphi' = 19,1948^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi' = 0,328683$

$$Q_C = P_{Totala} \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi') = 5.808 \cdot (\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 18,1948^\circ) = 3.900 \text{ var}$$

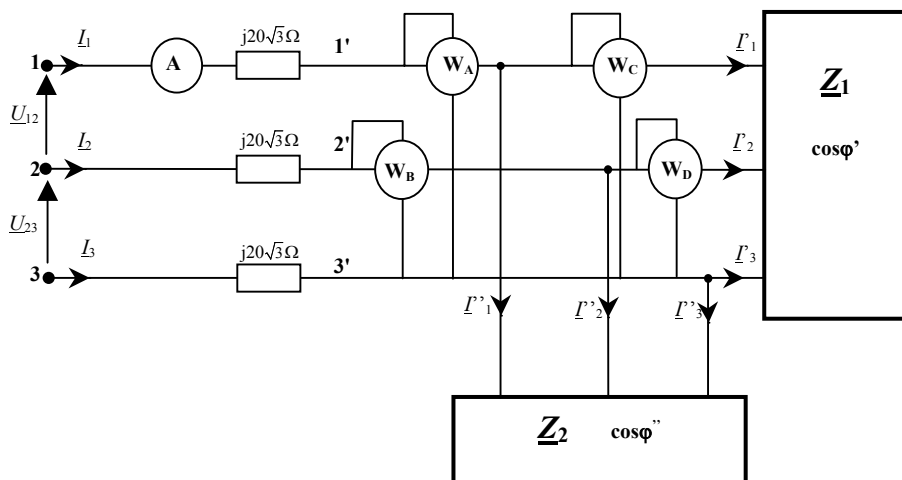
$$C_\Delta = \frac{Q_C}{3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot U_C^2} = 28,49 \mu\text{F}$$

7. 1-2-3 puntuetan konektatuko ditugu, lantegiko sarrera-tentsioa aldatu ez dadin. Magnitude hauek aldatuko dira: lineako inpedantzia gertatzen den tentsio-erorketa, transformazio-zentroko irteerako tentsioa eta linean zeharreko korroneak.

Ariketa-zenbakia: 6.5

Irudiko zirkuitua lantegi baten barneko instalazioa da. Instalazio horren sarrerako tentsioa $u_{12}(t) = 220\sqrt{6}\cos(\omega t + \alpha^\circ)\text{V}$ dela jakinda, amperemetroaren irakurketa 11 zati dela ($K_A = 0,5$) eta wattmetroena $W_A = W_B = W_C = 907,5$ zati eta $W_D = 0$ zati (kasu guztietan $K_W = 1$), kalkulatu:

1. $\underline{Z}_1$ eta $\underline{Z}_2$ inpedantziak balioa binomikoan; baita haien potentzia-faktoreak ere.
2. Zirkuituko korronte guztiak.
3. Tentsio eta korronteen diagrama bektoriala.
4. Elektrizitate-banaketako enpresak ezarriko digun gainordaina.
5. Zirkuitu osoko potentzia-faktorea; ahalik eta onena izan dadin, 960 var, 480 V eta 50 Hz-eko kondentsadoreak erabiltzen dira. Justifikatu kondentsadoren kopurua eta konexioa. Irudikatu jarri beharreko kondentsadoreak eta haien arteko konexioak.



Ebazpena

Sareko datuak eta neurgailuen irakurketak kontuan hartuta:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{12} &= 220\sqrt{3}\angle\alpha^\circ \text{ V} & \Rightarrow & \underline{U}_{10} = 220\angle\alpha - 30^\circ \text{ V} \\ \underline{U}_{23} &= 220\sqrt{3}\angle\alpha - 120^\circ \text{ V} & \Rightarrow & \underline{U}_{20} = 220\angle\alpha - 150^\circ \text{ V} \\ \underline{U}_{31} &= 220\sqrt{3}\angle\alpha + 120^\circ \text{ V} & \Rightarrow & \underline{U}_{30} = 220\angle\alpha + 90^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

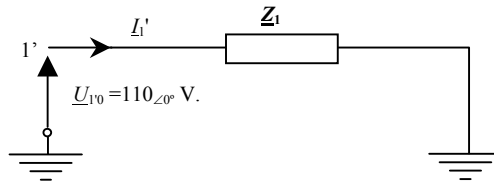
$$W_A = W_B \Rightarrow \varphi(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = 0^\circ$$

$$W_C > 0 = W_D \Rightarrow \varphi(\underline{Z}_1) = 60^\circ \quad (\text{INDUKTIBOAK})$$

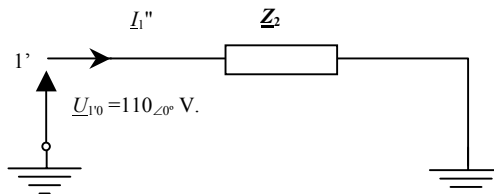
$$A_1 = 11 \text{ Dib.}; \text{ kA} = 0,5 \Rightarrow |I_1| = 5,5 \text{ A}$$

1.

$$P_{Z_1+Z_2} = W_A + W_B = 1.815 \text{ W} = \sqrt{3} \cdot I_1 \cdot U_{1'2'} \cdot \cos 0^\circ \Rightarrow \begin{cases} U_{1'2'} = \frac{1.815}{\sqrt{3} \cdot 5,5} = 190,52 \text{ V} \\ U_{1'0} = \frac{190,52}{\sqrt{3}} = 110 \text{ V} \end{cases}$$



$$\underline{Z}_1 = \frac{U_{1'0}}{I_1'} = \frac{110 \angle 0^\circ}{5,5 \angle -60^\circ} = 20 \angle 60^\circ = (10 + j10\sqrt{3}) \Omega$$



$$I_1'' = I_1 - I_1' = 5,5 \angle 0^\circ - 5,5 \angle -60^\circ = 5,5 \angle 60^\circ \text{ A}$$

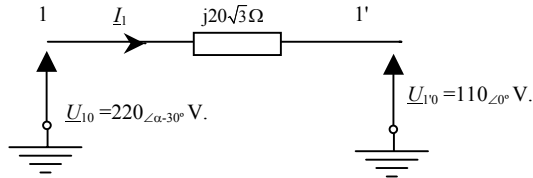
$$\underline{Z}_2 = \frac{U_{1'0}}{I_1''} = \frac{110 \angle 0^\circ}{5,5 \angle 60^\circ} = 20 \angle -60^\circ = (10 - j10\sqrt{3}) \Omega$$

2. $\underline{I}_1 = 5,5 \angle 0^\circ \text{ A}; \quad \underline{I}_2 = 5,5 \angle -120^\circ \text{ A}; \quad \underline{I}_3 = 5,5 \angle 120^\circ \text{ A}$

$\underline{I}_1' = 5,5 \angle -60^\circ \text{ A}; \quad \underline{I}_2' = 5,5 \angle 180^\circ \text{ A}; \quad \underline{I}_3' = 5,5 \angle 60^\circ \text{ A}$

$\underline{I}_1'' = 5,5 \angle 60^\circ \text{ A}; \quad \underline{I}_2'' = 5,5 \angle 180^\circ \text{ A}; \quad \underline{I}_3'' = 5,5 \angle -60^\circ \text{ A}$

3.



$$\underline{U}_{11'} = 5,5 \angle 0^\circ \cdot 20\sqrt{3} \angle 90^\circ = 110\sqrt{3} \angle 90^\circ \text{ V}$$

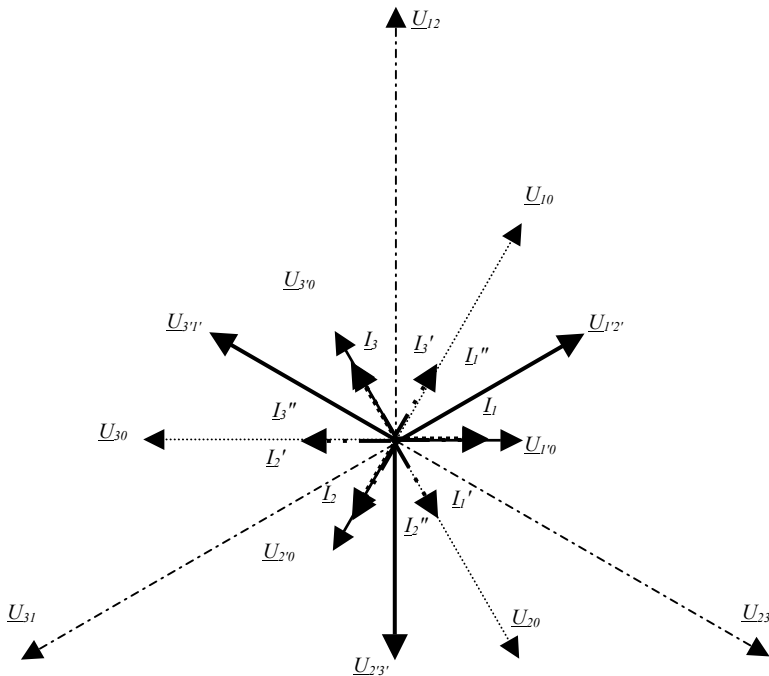
$$\underline{U}_{10} = 110 + j110\sqrt{3} = 220 \angle 60^\circ \text{ V}$$

$$\alpha - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$$\underline{U}_{12} = 220\sqrt{3} \angle 90^\circ \text{ V} \Rightarrow \underline{U}_{10} = 220 \angle 60^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{23} = 220\sqrt{3} \angle -30^\circ \text{ V} \Rightarrow \underline{U}_{20} = 220 \angle -60^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{31} = 220\sqrt{3} \angle -150^\circ \text{ V} \Rightarrow \underline{U}_{30} = 220 \angle 180^\circ \text{ V}$$



4.

$$\varphi = \underline{U}_{10} \hat{I}_1 = 60^\circ \text{INDUKTIBOAK}$$

$$\% K_r = \frac{29,16}{\cos^2 \varphi} - 36 = \% 80,64$$

Gainorde maximoa gainditzen denez, % 50,7ko gainordea ezarriko digu.

5. Konpentsatu beharreko potentzia zirkuitu osoarena da.

$$Q_{\text{Totala}} = \sqrt{3} U_K I_L \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot 220 \sqrt{3} \cdot 5,5 \cdot \sin 60^\circ = 1.815 \sqrt{3} \text{ var}$$

Kondentsadoreen ezaugarri teknikoak ezagutuz gero, haien erreaktantzia kalkula dezakegu:

$$X_c = \frac{U_c^2}{Q_c} = \frac{480^2}{960} = 240 \Omega$$

Bestalde, triangeluan konektatuz gero, kondentsadoreek sareko tentsio konposatua jasango dute. Hala, kondentsadore bakoitzak ondorengo potentzia erreaktibo kapazitibo hau izango du.

$$Q_{C\Delta} = \frac{U_c^2}{X_c} = \frac{(220\sqrt{3})^2}{240} = 605 \text{ var/kondentsadore}$$

Beraz, unitatea balio duen potentzia-faktorea lortzeko beharko den kondentsadore kopurua:

$$\frac{1.815\sqrt{3}}{605} = 5,19 \text{ kondentsadore}$$

Orduan, hiru faseetan kondentsadore bana ipiniko dugu, eta zirkuituko potentzia erreaktibo berria:

$$Q_{\text{Totala}} = Q + Q_{C\Delta} = 1.815\sqrt{3} - (605 \cdot 3) = 1.328,67 \text{ var}$$

Orain, izar-konexioaren kasua aztertuko dugu. Konexio horretan kondentsadoreek ez dute jasango sareko tentsio konposatua, baizik eta sinplea.

$$Q_{C \text{ izarra}} = \frac{U_s^2}{X_c} = \frac{220^2}{240} = 201,66 \Omega$$

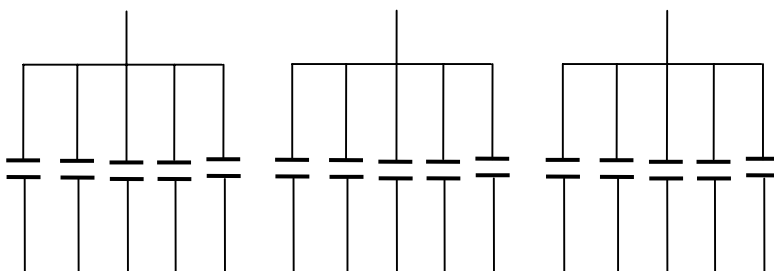
Horren ondorioz, kondentsadore gehiago beharko dugu aurreko efektu bera lortzeko:

$$\frac{1.815\sqrt{3}}{201,66} = 15,58 \text{ kondentsadore}$$

Kasu horretan, 15 kondentsadore erabiliko ditugu, 5 izararren fase bakoitzean. Eta, potentzia erreaktibo berriak balio hau hartuko du:

$$Q_{\text{Totala}} = Q + Q_{C \text{ izarra}} = 1.815\sqrt{3} - (201,66 \cdot 15) = 118,6 \text{ var}$$

Beraz, kondentsadore gehiago erabili behar ditugun arren, izar-konexioa erabilia lortzen den hobekuntza triangeluarena baino interesgarriagoa izango da. Horregatik, izarrean konektatuko ditugu, irudiko eskemari jarraituz.



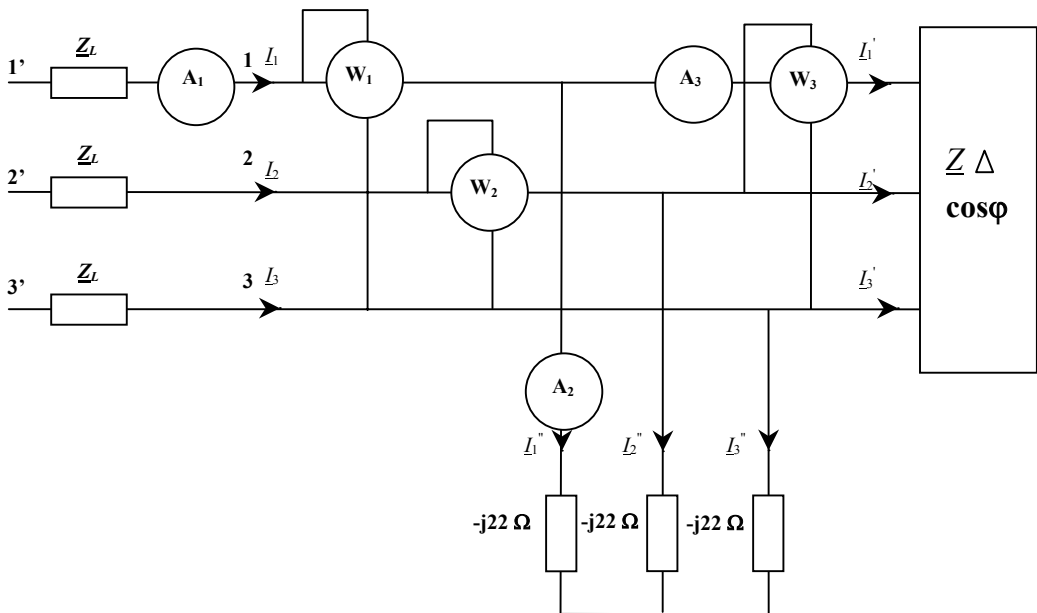
Ariketa-zenbakia: 6.6

Irudiko zirkuituan, instalazio baten elementu hauek adierazi dira: triangeluan dagoen karga, izarrean dagoen karga eta linea. Instalazio horren datu hauek ezagutzen ditugu:

- Elikatze-sarea sekuentzia zuzeneko da.
- $u_{12}(t) = 220\sqrt{6} \cos(314t) \text{ V}$ eta $u_{1'2'}(t) = 660\sqrt{2} \cos(314t + 30^\circ) \text{ V}$
- A_2 eta A_3 amperemetroek irakurketa bera adierazten dute; A_1 amperemetroan, berriz, orratza 10 zatira iristen da (kasu guztietan, $K_A = 1$).
- W_3 wattmetroan orratza $1.100\sqrt{3}$ zatira iristen da; gainerako wattmetroetan, $W_2 = 2 W_1$ erlazioa betetzen da (kasu guztietan, $K_W = 1$).

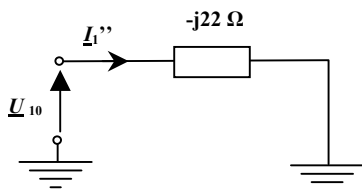
Zehaztu:

1. Neurgailu guztien irakurketak.
2. Triangeluan dagoen kargaren zein lineako inpedantzien erresistentziak eta erreaktantiak.
3. Zirkuitu osoko potentziak eta potentzia-faktorea, baita karga bakoitzarenak ere.
4. Sarrerako potentzia-faktorea unitateraino hobetu dadin, 100 var, 200 V eta 50 Hz-eko kondentsadoreak erabiltzen dira. Kalkulatu zenbat kondentsadore behar diren, baldin eta triangeluan konektatzen badira.
5. Diagrama bektoriala.



Ebazpena

1. Baliokide monofasikoa erabiliz,



$$\underline{U}_{10} = 220 \angle -30^\circ \text{ V}$$

$$\underline{I}_1'' = \frac{220 \angle -30^\circ}{-j22} = 10 \angle 60^\circ \text{ A}$$

$$|\underline{I}_1''| = |\underline{I}_1'| = 10$$

Wattmetroen irakurketetatik informazio hau lor dezakegu:

$$W_{2I} = 2 \cdot W_{1I} \rightarrow \varphi_{\text{Totala}} = 30^\circ \text{ kapazitiboak}$$

Beste datu bat $|I_1| = 10 \text{ A}$ da. Eta φ_{Totala} -ren balioa jakinda zehaztu daiteke $I_1 = 10 \angle 0^\circ$ dela. Eta bi korrante ezagututa, hirugarrena lortuko dugu:

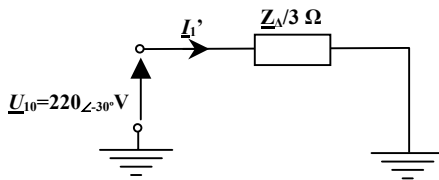
$$I_1' = I_1 - I_1'' = 10 \angle 0^\circ - 10 \angle 60^\circ = (10) - (5 + j5\sqrt{3}) = 5 - j5\sqrt{3} = 10 \angle -60^\circ \text{ A}$$

$$W_{1I} = I_1 \cdot U_{13} \cdot \cos \left(I_1 \hat{U}_{13} \right) = 10 \cdot 220\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = 1.100\sqrt{3} \text{ zati}$$

$$W_{2I} = I_2 \cdot U_{23} \cdot \cos \left(I_2 \hat{U}_{23} \right) = 10 \cdot 220\sqrt{3} \cdot \cos 0^\circ = 2.200\sqrt{3} \text{ zati}$$

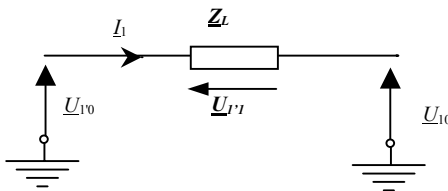
$$A_{1I} = A_{2I} = A_{3I} = 10 \text{ zati}$$

2. Triangeluan dagoen inpedantzia baliokide monofasikoaren bidez zehaztuko dugu:



$$\frac{Z_{\Delta}}{3} = \frac{220 \angle -30^\circ}{10 \angle -60^\circ} = 22 \angle 30^\circ \Omega$$

$$Z_{\Delta} = 66 \angle 30^\circ = (33\sqrt{3} + j33) \Omega$$



$$220\sqrt{3} \angle 0^\circ = Z_L \cdot 10 \angle 0^\circ + 220 \angle -30^\circ$$

$$Z_L = \frac{220\sqrt{3} \angle 0^\circ - 220 \angle -30^\circ}{10 \angle 0^\circ}$$

$$Z_L = (11\sqrt{3} + j11) = 22 \angle 30^\circ \Omega$$

3. $P_{Z_{\Delta}} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I_1' \cdot \cos \varphi_{Z_{\Delta}} = \sqrt{3} \cdot 220\sqrt{3} \cdot 10 \cdot \cos 30^\circ = 3.300\sqrt{3} \text{ W}$

$$Q_{Z_{\Delta}} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I_1' \cdot \sin \varphi_{Z_{\Delta}} = \sqrt{3} \cdot 220\sqrt{3} \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 3.300 \text{ var}$$

$$S_{Z_{\Delta}} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I_1' = \sqrt{3} \cdot 220\sqrt{3} \cdot 10 = 6.600 \text{ VA}$$

$$P_{C \text{ Izarra}} = 0 \text{ W}$$

$$Q_{C \text{ Izarra}} = -3 \cdot X_C \cdot I_1^2 = -3 \cdot 22 \cdot 10^2 = -6.600 \text{ var}$$

$$S_{C \text{ Izarra}} = 6.600 \text{ VA}$$

$$P_{\underline{Z}_L} = 3 \cdot R_L \cdot I_1^2 = 3 \cdot 11\sqrt{3} \cdot 10^2 = 3.300\sqrt{3} \text{ W}$$

$$Q_{\underline{Z}_L} = 3 \cdot X_L \cdot I_1^2 = 3 \cdot 11 \cdot 10^2 = 3.300 \text{ var}$$

$$S_{\underline{Z}_L} = 6.600 \text{ VA}$$

$$P_{\text{Totala}} = 3.300\sqrt{3} + 0 + 3.300\sqrt{3} = 6.600\sqrt{3} \text{ W}$$

$$Q_{\text{Totala}} = 3.300 - 6.600 + 3.300 = 0 \text{ var}$$

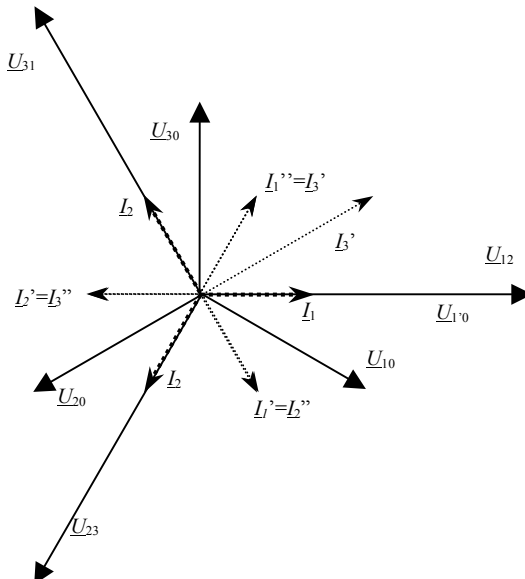
$$S_{\text{Totala}} = 6.600\sqrt{3} \text{ VA}$$

4. Sarreratik potentzia-faktore hau ikusten da:

$$\cos \varphi_{\text{Totala}} = \cos \left(\underline{U}_{1'0} \wedge \underline{I}_1 \right) = \cos 0^\circ = 1$$

Linea instalazio barnekoa denez, eta potentzia-faktore totalak 1 balio duenez, ez da potentzia-faktorea hobetu behar.

5. Diagrama bektoriala:



Ariketa-zenbakia: 6.7

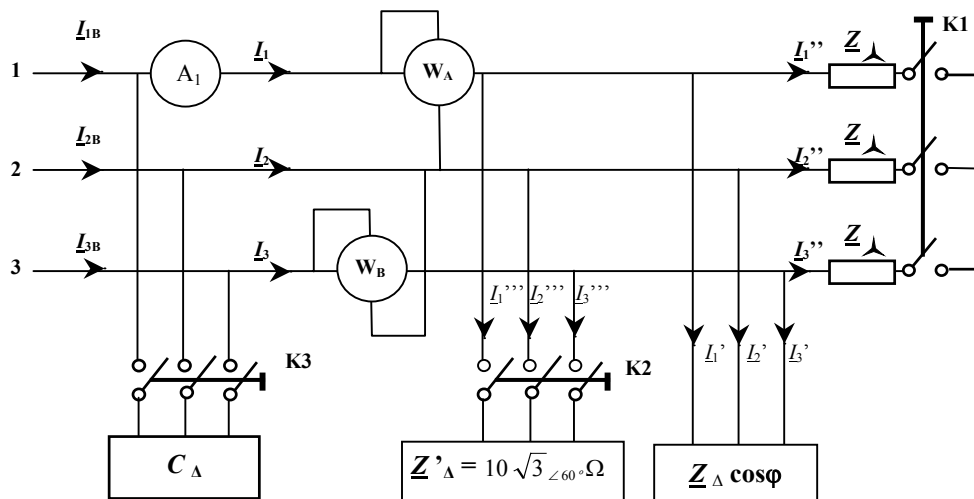
Irudiko zirkuituan:

- Elikatze-sarea sekuentzia zuzeneko da.
- $u_{12}(t) = 220\sqrt{6} \cos(314t + 30^\circ) \text{ V}$
- Etengailu guztiak zabalik daudenean: $W_B = 2 W_A$ ($K_W = 1$)
- K2 eta K3 etengailuak zabalik egonda, K1 ixten denean: $W_A = 2 W_B$
- Amperemetroaren irakurketa 11 zati da K1 etengailua itxita nahiz zabalik egonda ($K_A = 2$).

Zehaztu:

1. K2 etengailua zabalik dagoenean,
 - Wattmetroen irakurketa, K1 etengailua zabalik egonda; baita itxita egonda ere.
 - $\underline{Z}_\Delta$ eta $\underline{Z}_\Delta$ inpedantzien balioak.
2. K1 eta K2 etengailuak itxita daudenean, neurgailuen irakurketa berriak.
3. K1 eta K2 etengailuak itxita daudenean, K3 ixten da.

Kalkulatu triangeluan konektatutako kondentsadoreen kapazitatea, ordaindu beharreko fakturan % 0,85eko hobaria lortzeko.



Ebazpena

1. K2 zabalik

$$\underline{U}_{12} = 220\sqrt{3} \angle 30^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{10} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

K1 zabalik zein itxita egonda, $|\underline{I}_1| = |\underline{I}_1'| = 11 \text{ zati} \times 2 \text{ A/zati} = 22 \text{ A}$ izango da.

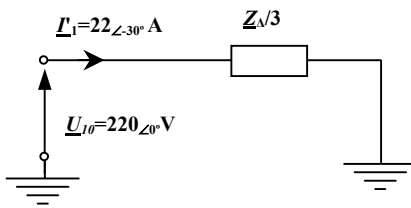
Ez da gauza bera gertatzen wattmetroen irakurketekin. Hala,

K1 zabalik dagoenean, $W_B = 2W_A$. Hau da, $\underline{Z}_\Delta$ karga inдукtibo da ($\varphi = 30^\circ$).

Beraz, K1 zabalik dagoenean:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' = 22 \angle -30^\circ \text{ A} \rightarrow \begin{cases} P_{\underline{Z}_\Delta} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I'_L \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 220\sqrt{3} \cdot 22 \cdot \cos 30^\circ = 7.260\sqrt{3} \text{ W} \\ Q_{\underline{Z}_\Delta} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I'_L \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot 220\sqrt{3} \cdot 22 \cdot \sin 30^\circ = 7.260 \text{ var} \\ S_{\underline{Z}_\Delta} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I'_L = \sqrt{3} \cdot 220\sqrt{3} \cdot 22 = 14.520 \text{ VA} \end{cases}$$

Baliokide monofasikotik:



$$\underline{Z}_\Delta = 3 \cdot \frac{220 \angle 0^\circ}{22 \angle -30^\circ} = 30 \angle 30^\circ = (15\sqrt{3} + j15) \Omega$$

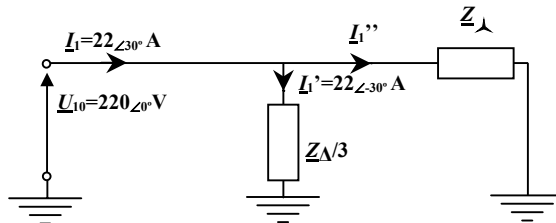
$$W_A = I_1 \cdot U_{12} \cdot \cos(\underline{I}_1 \underline{U}_{12}) = 22 \cdot 220\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = 2.420\sqrt{3} \text{ zati}$$

$$W_B = 2 \cdot W_A = 4.840\sqrt{3} \text{ zati}$$

K1 itxita dagoenean, wattmetroen irakurketetatik informazio hau lor dezakegu:

$$W_A = 2 \cdot W_B \rightarrow \varphi = 30^\circ \text{ kapazitiboak} \rightarrow \underline{I}_1 = 22 \angle 30^\circ \text{ A}$$

Izarrean dagoen inpedantzia baliokide monofasikoaren bidez kalkulatu dugu:



$$\underline{I}_1'' = 22 \angle 30^\circ - 22 \angle -30^\circ = 22 \angle 30^\circ + 22 \angle 150^\circ = 22 \angle 90^\circ \text{ A}$$

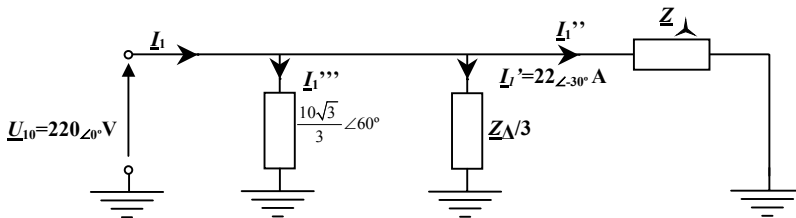
$$\underline{Z}_{\text{izarra}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{22 \angle 90^\circ} = 10 \angle -90^\circ = -j10 \Omega$$

K1 itxita

$$W_A = I_1 \cdot U_{12} \cdot \cos(I_1, U_{12}) = 22 \cdot 220\sqrt{3} \cdot \cos 0^\circ = 4.840\sqrt{3} \text{ zati}$$

$$W_B = \frac{W_B}{2} = 2.420\sqrt{3} \text{ zati}$$

2. K1 eta K2 itxita



$$I_1''' = \frac{220 \angle 0^\circ}{\frac{10}{\sqrt{3}} \angle 60^\circ} = 22\sqrt{3} \angle -60^\circ \text{ A}$$

$$I_1 = I_1' + I_1'' + I_1''' = 22 \angle -30^\circ + 22 \angle 90^\circ + 22\sqrt{3} \angle -60^\circ = 22\sqrt{3} - j22 = 44 \angle -30^\circ \text{ A}$$

Amperemetroaren irakurketa:

$$|I_1| = 44 \text{ A}, \text{ baina } K_A = 2 \frac{\text{A}}{\text{zati}}; \text{ beraz, } A_1 = \frac{44 \text{ A}}{2} = 22 \text{ zati}$$

Wattmetroen irakurketak:

$$W_A = I_1 \cdot U_{12} \cdot \cos(30^\circ + \varphi) = 44 \cdot 220\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = 4.840\sqrt{3} \text{ zati}$$

$$W_B = I_3 \cdot U_{32} \cdot \cos(\varphi - 30^\circ) = 44 \cdot 220\sqrt{3} \cdot \cos 0^\circ = 9.680\sqrt{3} \text{ zati}$$

$$P_{\text{Totala}} = W_A + W_B = 14.520\sqrt{3} \text{ W}$$

$$Q_{\text{Totala}} = \sqrt{3} (W_A - W_B) = 14.520 \text{ var}$$

$$S_{\text{Totala}} = 29.040 \text{ VA}$$

$$\cos \varphi_{\text{Totala}} = \frac{P_{\text{Totala}}}{S_{\text{Totala}}} = \frac{14.520\sqrt{3}}{29.040} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi_{\text{Totala}} = 30^\circ$$

3. k1, k2 eta k3 itxita

$$\%K_r = -0,85 = \frac{37,026}{\cos^2 \varphi'} - 41,026 \Rightarrow \cos^2 \varphi' = \frac{37,026}{41,026 - 0,85} = 0,92159$$

$$\cos \varphi' = 0,96 \rightarrow \varphi' = 16,26^\circ$$

$$Q_C = P \cdot (tg \varphi - tg \varphi') = 43.560 \cdot (tg 30 - tg 16,26) = 12.444,5466 \text{ var}$$

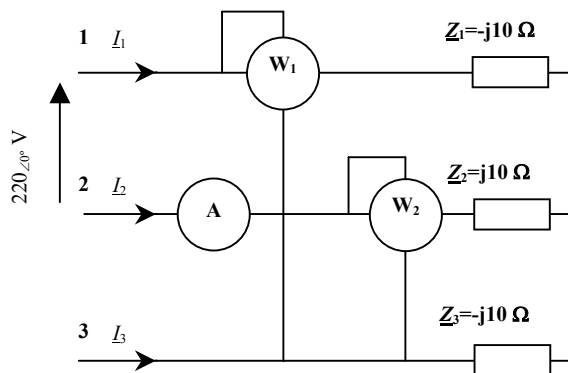
$$C_\Delta = \frac{Q_C}{3 \cdot \pi \cdot U_C^2} = \frac{12.444,5466}{3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot (220\sqrt{3})^2} = 90,93 \mu\text{F} \text{ triangeluko adar bakoitzeko.}$$

Ariketa-zenbakia: 6.8

Irudiko zirkuituari sekuentzia zuzeneko sistema trifasiko orekatua aplikatzen zaio; sistema horren faseen arteko $\underline{U}_{12}$ tentsioa $\underline{U}_{12}=220\angle 0^\circ$ V da.

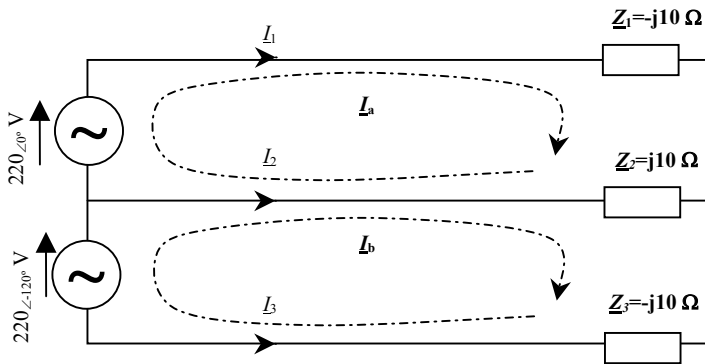
Kalkulatu:

1. $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ eta $\underline{I}_3$ intentsitateak.
2. Neurketa-tresnen irakurketak, irakurketak zuzenekoak direla suposatuz.
3. Zirkuituko tentsio eta korronteen diagrama bektoriala.



Ebazpena

1. Sareen metodoaren bidez ebartziko dugu.



Sareen bidezko analisia egiteko, ekuazio matriziala idatziko dugu:

$$\begin{bmatrix} 0 & -j10 \\ -j10 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \angle 0^\circ \\ 220 \angle -120^\circ \end{bmatrix}$$

Sareetako korrontek:

$$I_a = \frac{\begin{vmatrix} 220 \angle 0^\circ & -j10 \\ 220 \angle -120^\circ & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -j10 \\ -j10 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot 2200 \angle -30^\circ}{100} = 22 \angle -30^\circ \text{ A}$$

$$I_b = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 220 \angle 0^\circ \\ -j10 & 220 \angle -120^\circ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -j10 \\ -j10 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot 2200 \angle 90^\circ}{100} = 22 \angle 90^\circ \text{ A}$$

Lineetan zeharreko korrontek:

$$I_1 = I_a = 22 \angle -30^\circ \text{ A}$$

$$I_3 = -I_b = -j22 = 22 \angle -90^\circ \text{ A}$$

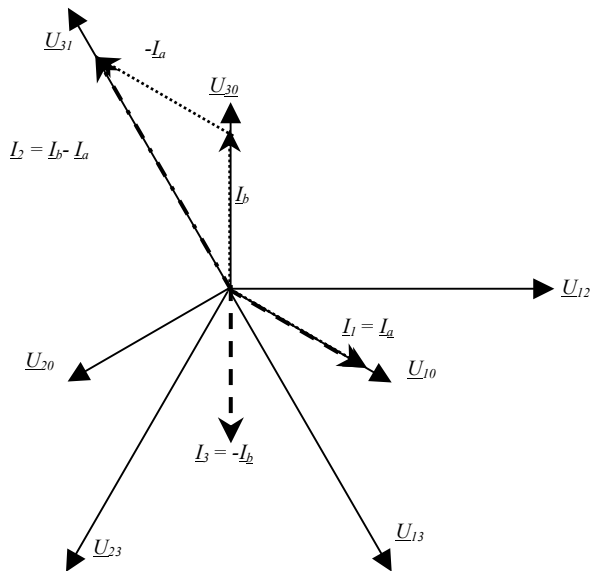
$$I_2 = I_b - I_a = 22 \angle 90^\circ - 22 \angle -30^\circ = j22 - \left(22 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - j22 \cdot \frac{1}{2} \right) = 22\sqrt{3} \angle 120^\circ \text{ A}$$

2. $A_1 = |I_2| = 22\sqrt{3}$ zati eta amperemetroaren konstantea $K_A = 1 \frac{A}{\text{zati}}$ -koa delarik,

$$W_{11} = I_1 \cdot U_{13} \cdot \cos \left(\hat{I_1 \cdot U_{13}} \right) = 22 \cdot 220 \cdot \cos 30^\circ = 2.420\sqrt{3} \text{ zati.}$$

$$W_{21} = I_2 \cdot U_{23} \cdot \cos \left(\hat{I_2 \cdot U_{23}} \right) = 22 \cdot 220 \cdot \cos 120^\circ = -2.420\sqrt{3} \text{ zati.}$$

3. Diagrama bektoriala.



Ariketa-zenbakia: 6.9

Irudiko zirkuituari sekuentzia zuzeneko tentsio-sistema trifasiko orekatua aplikatzen zaio; sistema horren faseen arteko tentsioa $\underline{U}_{12} = 380 \angle 0^\circ$ V da.

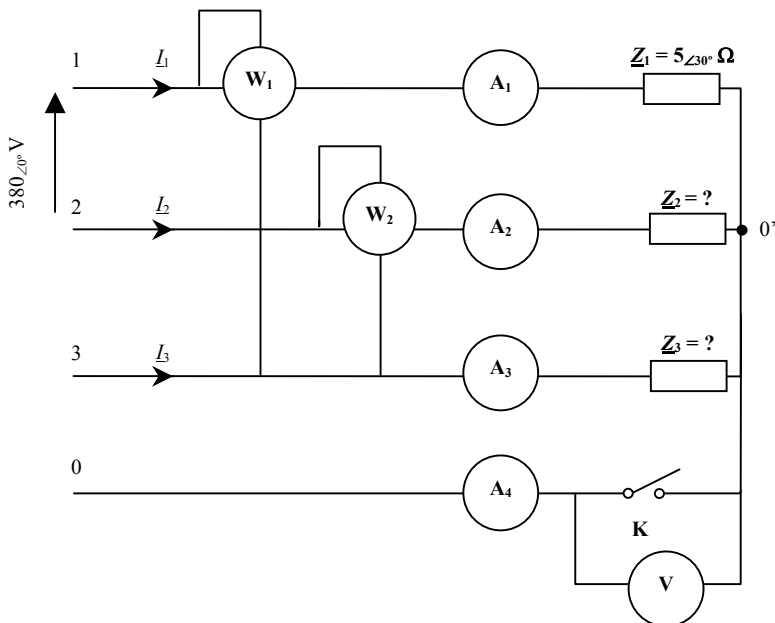
K etengailua zabalik dagoenean, neurgailuetan irakurketak hauek egiten dira: $A_1 = 0$ zati, $A_2 = 76$ zati, $W_1 = 0$ zati. eta $W_2 = 14.440\sqrt{3}$ zati (neurgailu guztien konstanteak batekoak dira).

Aurreko datuak eta irudian adierazitakoak kontuan izanda, zehaztu K etengailua zabalik dagoenean:

1. Gainerako neurgailuen irakurketak.
2. Zirkuituko inpedantzien balioak (aukera bat baino gehiago badago, hartu $\underline{Z}_2$ inpedantzia erreaktiboena egiten duena). Baita I_1 , I_2 eta I_3 korronteen balioak ere.
3. Diagrama bektoriala.

K etengailua itxita dagoenean:

1. Neurgailuen irakurketa berriak.
2. Zirkuituko potentziak eta diagrama bektoriala.



Ebazpena

K zabalik dela

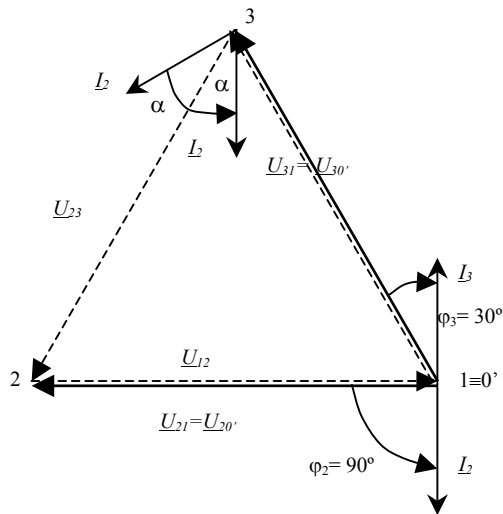
$$1. \quad \underline{Z}_1 = 5\angle 30^\circ = \left(5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + j5 \cdot \frac{1}{2} \right) \Omega$$

A_1 amperemetroaren irakurketari esker, badakigu $I_1 = 0 \text{ A}$ dela.

$$\underline{U}_{10'} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 = 0V \rightarrow 1 \equiv 0'$$

$$\underline{U}_{20'} = \underline{U}_{21} = -\underline{U}_{12} = 380 \angle 180^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{30'} = \underline{U}_{31} = 380 \angle 120^\circ \text{ V}$$



A_2 amperemetroaren irakurketa dela medio, badakigu $|I_2| = 76\text{A}$ dela. Hala ere, ez dugu I_2 korrontearen angelua ezagutzen; modulua baino ez dugu ezagutzen.

Bestetik: $I_1 + I_2 + I_3 = 0 \text{ A} \rightarrow I_2 + I_3 = 0 \text{ A} \rightarrow I_2 = -I_3$ eta $|I_2| = |I_3| = 76$ zati

Gainerako tresnen irakurketak:

$$V_I = |\underline{U}_{0'0}| = |\underline{U}_{10}| = \left| \frac{380}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ \right| = 220 \text{ zati}$$

$$A_{21} = 76 \text{ zati} \quad A_{31} = 76 \text{ zati} \quad A_{41} = 0 \text{ zati}$$

2. Wattmetroen irakurketetatik I_2 fasorearen angelua kalkula dezakegu:

$$\begin{aligned} W_2 &= 14.440\sqrt{3} = \underline{U}_{23} \cdot \underline{I}_2 \cdot \cos\left(\underline{U}_{23}^\wedge \underline{I}_2\right) \Rightarrow \cos\left(\underline{U}_{23}^\wedge \underline{I}_2\right) = \\ &= \frac{14.440\sqrt{3}}{380 \cdot 76} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \underline{U}_{23}^\wedge \underline{I}_2 = \pm 30^\circ \end{aligned}$$

Bi aukera ditugu; beraz: $I_2 = 76 \angle -150^\circ \text{ A}$ izatea edo $I_2 = 76 \angle -90^\circ \text{ A}$ izatea.

a) $I_2 = 76 \angle -150^\circ \text{ A}$ baldin bada, $\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_{20'}}{I_2} = \frac{380 \angle 180^\circ}{76 \angle -150^\circ} = 5 \angle -30^\circ \Omega$ izango da.

b) $I_2 = 76 \angle -90^\circ \text{ A}$ baldin bada, $\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_{20'}}{I_2} = \frac{380 \angle 180^\circ}{76 \angle -90^\circ} = 5 \angle -90^\circ \Omega$ izango da.

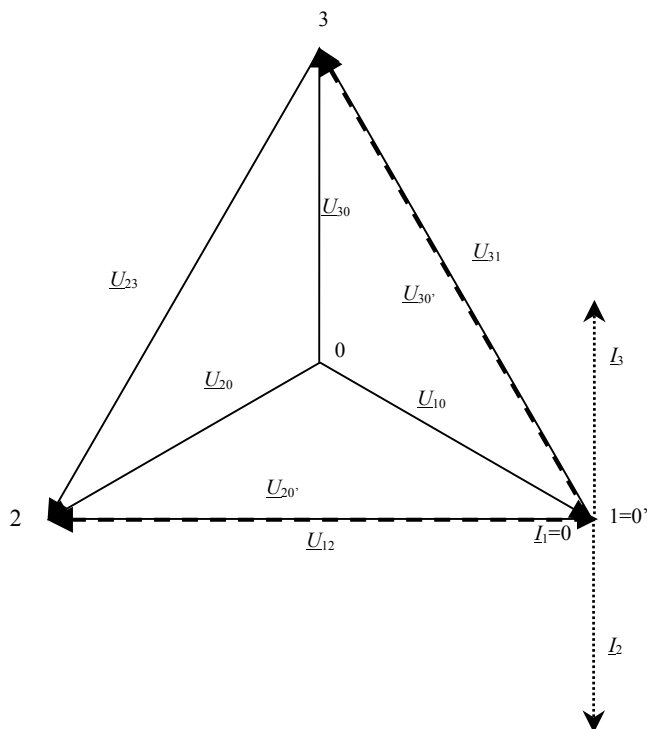
$\underline{Z}_2$ inpedantziaren baliorik erreaktiboena eskatzen dutenez, kondizio hori eragingo duen I_2 korrontea aukeratuko dugu: $I_2 = 76 \angle -90^\circ \text{ A}$. Orduan, $\underline{Z}_2 = -j5 \Omega$ izango da, erreaktibo hutsa.

Ondorioz: $I_3 = -I_2 = 76 \angle 90^\circ \text{ A}$

I_3 ezagututa, hirugarren faseko $\underline{Z}_3$ inpedantzia lortu ahal izango dugu:

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{U}_{31}}{I_3} = \frac{380 \angle 120^\circ}{76 \angle 90^\circ} = 5 \angle 30^\circ = \left(5 \frac{\sqrt{3}}{2} + j5 \frac{1}{2} \right) \Omega$$

3. Diagrama bektoriala.



4. K itxita:

Orain, K etengailua ixtean, 0' puntuak instalazioko neutroaren potentziala hartzen du ($0' \equiv 0$).

Orduan, lineako korrante berriak:

$$I_1 = \frac{U_{10}}{Z_1} = \frac{220_{\angle -30^\circ}}{5_{\angle 30^\circ}} = 44_{\angle -60^\circ} \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{U_{20}}{Z_2} = \frac{220_{\angle -150^\circ}}{5_{\angle -90^\circ}} = 44_{\angle -60^\circ} \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{U_{30}}{Z_3} = \frac{220_{\angle 90^\circ}}{5_{\angle 30^\circ}} = 44_{\angle 60^\circ} \text{ A}$$

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_0 = 0 \text{ A} \Rightarrow I_0 = -(I_1 + I_2 + I_3) =$$

$$0 - (44_{\angle -60^\circ} + 44_{\angle -60^\circ} + 44_{\angle 60^\circ}) = 44\sqrt{3}_{\angle 150^\circ} \text{ A}$$

Amperemetroen irakurketa berriak:

$$A_{11} = 44 \text{ zati} \quad A_{21} = 44 \text{ zati} \quad A_{31} = 44 \text{ zati} \quad A_{41} = 44\sqrt{3} \text{ zati}$$

Wattmetroen irakurketa berriak:

$$W_1 = U_{13} \cdot I_1 \cdot \cos(\hat{U}_{13} I_1) = 380 \cdot 44 \cdot \cos 0^\circ = 16.720 \text{ W}$$

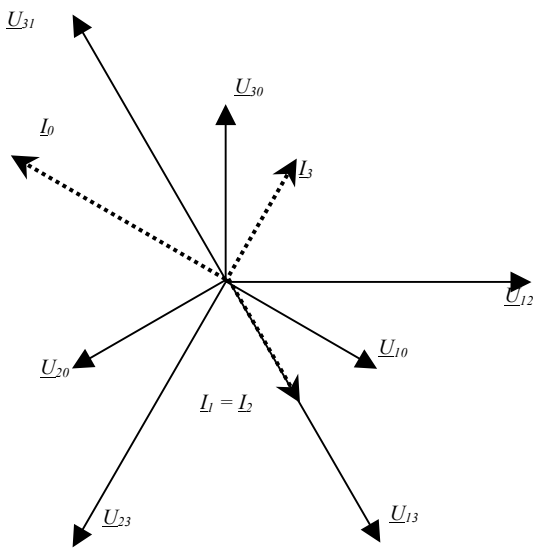
$$W_2 = U_{23} \cdot I_2 \cdot \cos(\hat{U}_{23} I_2) = 380 \cdot 44 \cdot \cos 60^\circ = 8.360 \text{ W}$$

5. Potentziak.

$$P_{\text{Totala}} = P_1 + P_2 + P_3 = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 = 5 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 44^2 + 0 + 5 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 44^2 = 16.766 \text{ W}$$

$$Q_{\text{Totala}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = X_1 \cdot I_1^2 - X_2 \cdot I_2^2 + X_3 \cdot I_3^2 = 5 \frac{1}{2} \cdot 44^2 - 5 \cdot 44^2 + 5 \frac{1}{2} \cdot 44^2 = 0 \text{ var}$$

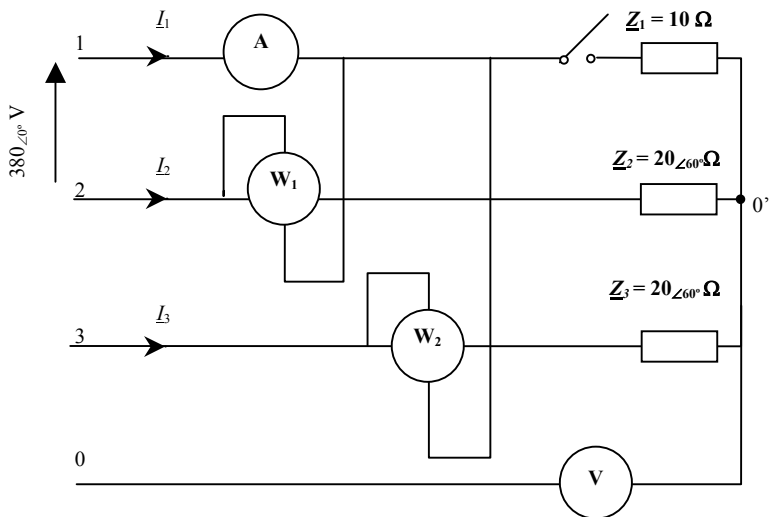
Diagrama bektoriala:



Ariketa-zenbakia: 6.10

Irudiko zirkuituari 380 V-eko tentsioa duen sekuentzia zuzeneko sistema trifasikoa aplikatzen zaio. K etengailua zabalik zein itxita dagoenean, eta eskemako datu guztiak kontuan hartuz, kalkulatu:

1. Neurketa -tresnen irakurketak.
2. Diagrama bektorial osoa.
3. Potentzien balantzea.



Ebazpena

K zabalik

1. $I_1 = 0 \text{ A}$ izanik, amperemetroaren irakurketa $A_1 = 0$ zati izango da.

Era berean, neutroan voltmetro bat dugu jarrita. Eta horrek etengailu ireki baten jokabidea duenez, neutroatik ez du korronteak zirkulatuko. Hau da, hiru hariko sistema izango dugu.

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \text{ A} \text{ dela beteko da, baina } I_1 = 0 \text{ A} \text{ denez: } I_2 = -I_3$$

$$I_2 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{380 \angle -120^\circ}{40 \angle 60^\circ} = 9,5 \angle 180^\circ \text{ A}$$

$$I_3 = -I_2 = 9,5 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$W_{11} = \underline{U}_{21} \cdot I_2 \cdot \cos(\angle \underline{U}_{21} I_2) = 380 \cdot 9,5 \cdot \cos 0^\circ = 3.610 \text{ W}$$

$$W_{21} = \underline{U}_{31} \cdot I_3 \cdot \cos(\angle \underline{U}_{31} I_3) = 380 \cdot 9,5 \cdot \cos 120^\circ = 1.805 \text{ W}$$

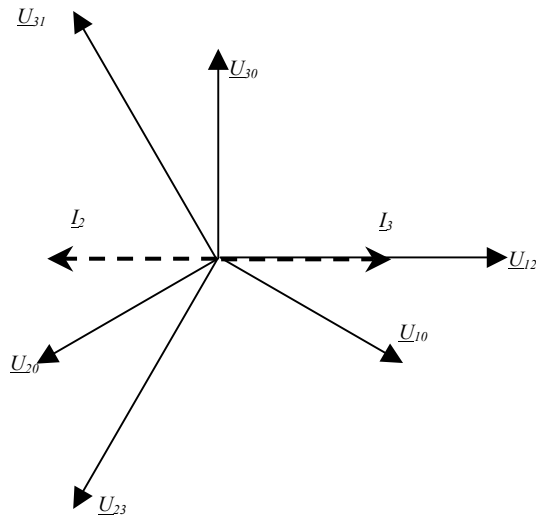
$$\underline{U}_{20'} = I_2 \cdot \underline{Z}_2 = 9,5 \angle 180^\circ \cdot 20 \angle 60^\circ = 190 \angle -120^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{20} = 380 \angle -120^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_{0'0} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{20'} = 380 \angle -120^\circ - 190 \angle -120^\circ = 190 \angle -120^\circ \text{ V}$$

$$V_1 = |\underline{U}_{0'0}| = 190 \text{ zati}$$

2.



3. Bigarren eta hirugarren faseko inpedantziak baino ez ditugu kontuan hartuko, lehenengokoak ez du potentziarik kontsumituko eta.

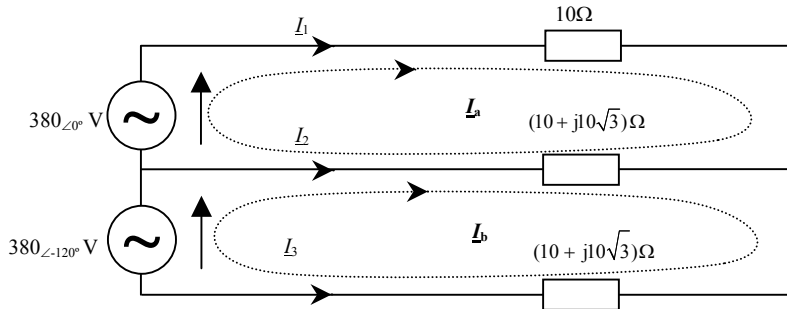
$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = 20 \angle 60^\circ = (10 + j10\sqrt{3}) \Omega$$

$$P_{\text{Totala}} = P_2 + P_3 = R_2 \cdot (I_2)^2 + R_3 \cdot (I_3)^2 = 10 \cdot (9,5)^2 + 10 \cdot (9,5)^2 = 1.805 \text{ W}$$

$$Q_{\text{Totala}} = Q_2 + Q_3 = X_2 \cdot (I_2)^2 + X_3 \cdot (I_3)^2 =$$

$$= 10\sqrt{3} \cdot (9,5)^2 + 10\sqrt{3} \cdot (9,5)^2 = 1.805\sqrt{3} \text{ var}$$

K itxita:



Ekuazio matriziala:

$$\begin{bmatrix} 20 + j10\sqrt{3} & -10 - j10\sqrt{3} \\ -10 - j10\sqrt{3} & 20 + j20\sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 380 \angle 0^\circ \\ 380 \angle -120^\circ \end{bmatrix}$$

Sareetako korroneak sistema matrizialaren ebazpenetik lortuko ditugu:

$$\begin{cases} I_a = 11\sqrt{3} \angle -60^\circ \text{ A} \\ I_b = 5,5\sqrt{3} \angle -120^\circ \text{ A} \end{cases}$$

Eta adarretako korroneak:

$$\begin{cases} I_1 = I_a = 11\sqrt{3} \angle -60^\circ \text{ A} \\ I_2 = I_b - I_a = 5,5\sqrt{3} \angle -120^\circ - 11\sqrt{3} \angle -60^\circ = -4,75 - j8,22 - 9,5 + j16,45 = 16,5 \angle 150^\circ \text{ A} \\ I_3 = -I_b = 5,5\sqrt{3} \angle 60^\circ \text{ A} \end{cases}$$

4. Amperemetroaren irakurketa: $A_1 = |I_1| = 19 \text{ zati}$ ($K_A = 1$)

$$W_{11} = U_{21} \cdot I_2 \cdot \cos\left(\angle \frac{U_{21}}{I_2}\right) = 220\sqrt{3} \cdot 9,5\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 5.445 \text{ zati}$$

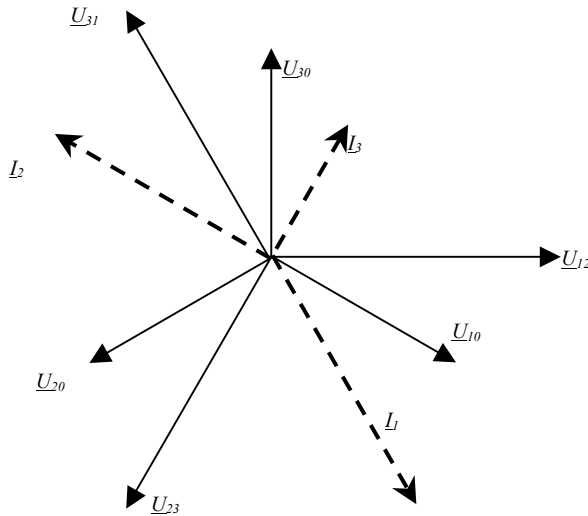
$$W_{21} = U_{31} \cdot I_3 \cdot \cos\left(\overset{\wedge}{U_{31}I_3}\right) = 220 \cdot 9,5\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = 1.815 \text{ zati}$$

Voltmetroaren irakurketa:

$$\underline{U}_{0'0} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{10'} = 220_{\angle -30^\circ} - I_1 \cdot \underline{Z}_1 = 220_{\angle -30^\circ} - 11\sqrt{3}_{\angle -60^\circ} \cdot 10 = 110_{\angle 30^\circ} \text{ V}$$

$$V_1 = |\underline{U}_{0'0}| = 110 \text{ zati}$$

5.



6.

$$P_{\text{Totala}} = P_1 + P_2 + P_3 = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 =$$

$$= 10 \cdot 19^2 + 10 \cdot (9,5\sqrt{3})^2 + 10 \cdot (9,5)^2 = 7.220 \text{ W}$$

$$Q_{\text{Totala}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = X_1 \cdot I_1^2 + X_2 \cdot I_2^2 + X_3 \cdot I_3^2 =$$

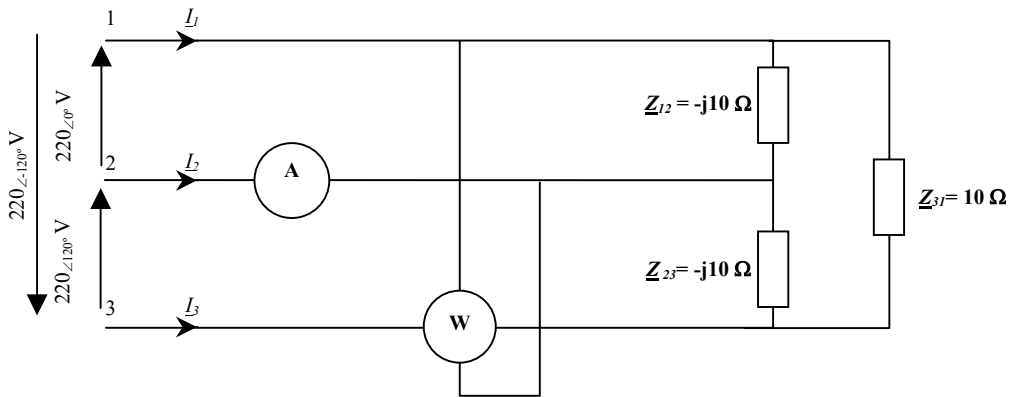
$$= 0 \cdot 19^2 + 10\sqrt{3} \cdot (9,5\sqrt{3})^2 + 10\sqrt{3} \cdot (9,5)^2 = 6.252,7 \text{ var}$$

$$S_{\text{Totala}} = \sqrt{P^2 + Q^2} = 9.551,16 \text{ VA}$$

Ariketa-zenbakia: 6.11

Irudiko zirkuituari 220 V-eko tentsioa duen sistema trifasikoa (alderantzizko sekuentziakoa) aplikatzen zaio; zirkuitu horretarako, eta eskemako datu guztiak kontuan hartuz, zehaztu:

1. Wattmetroen eta amperemetroaren irakurketak.
2. Zirkuituan barreiatutako potentzia.
3. Diagrama bektorial osoa.



Ebazpena

1. Kargako faseko korronteak:

$$I_{12} = \frac{U_{12}}{Z_{12}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{10 \angle -90^\circ} = 22 \angle 90^\circ \text{ A}$$

$$I_{23} = \frac{U_{23}}{Z_{23}} = \frac{220 \angle 120^\circ}{10 \angle -90^\circ} = 22 \angle 210^\circ = 22 \angle -150^\circ \text{ A}$$

$$I_{31} = \frac{U_{31}}{Z_{31}} = \frac{220 \angle -120^\circ}{10 \angle 0^\circ} = 22 \angle -120^\circ \text{ A}$$

Lineako korronteak:

$$I_1 = I_{12} - I_{31} = 22 \angle 90^\circ - 22 \angle -120^\circ = 22 \angle 90^\circ + 22 \angle 60^\circ = 42,5 \angle 75^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = I_{23} - I_{12} = 22 \angle -150^\circ - 22 \angle 90^\circ = 22 \angle -150^\circ + 22 \angle -90^\circ = 22\sqrt{3} \angle -120^\circ \text{ A}$$

$$I_3 = I_{31} - I_{23} = 22 \angle -120^\circ - 22 \angle -150^\circ = 22 \angle -120^\circ + 22 \angle 30^\circ = 11,388 \angle -45^\circ \text{ A}$$

Tresnen irakurketak:

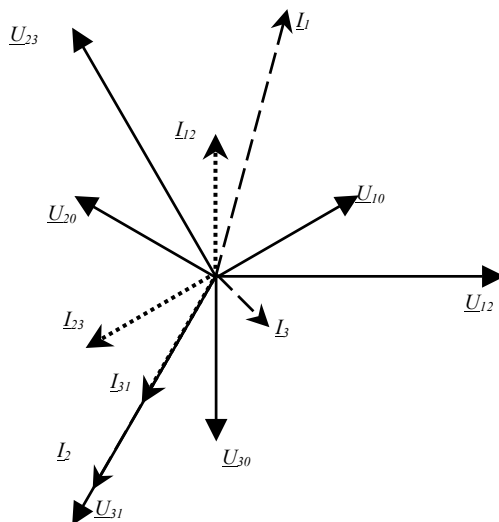
$$A_1 = |I_2| = 22\sqrt{3} \text{ zati}$$

$$W_1 = I_3 \cdot U_{12} \cdot \cos\left(I_3 \hat{U}_{12}\right) = 11,388 \cdot 220 \cdot \cos 45^\circ = 1.771,557 \text{ zati}$$

2. Z_{31} elementuak bakarrik xahutuko da potentzia, beste elementu biak kapazitibo hutsak baitira:

$$P_{\text{Totala}} = P_{31} = R_{31} \cdot I_{31}^2 = 10 \cdot 22^2 = 4.840 \text{ W}$$

3.

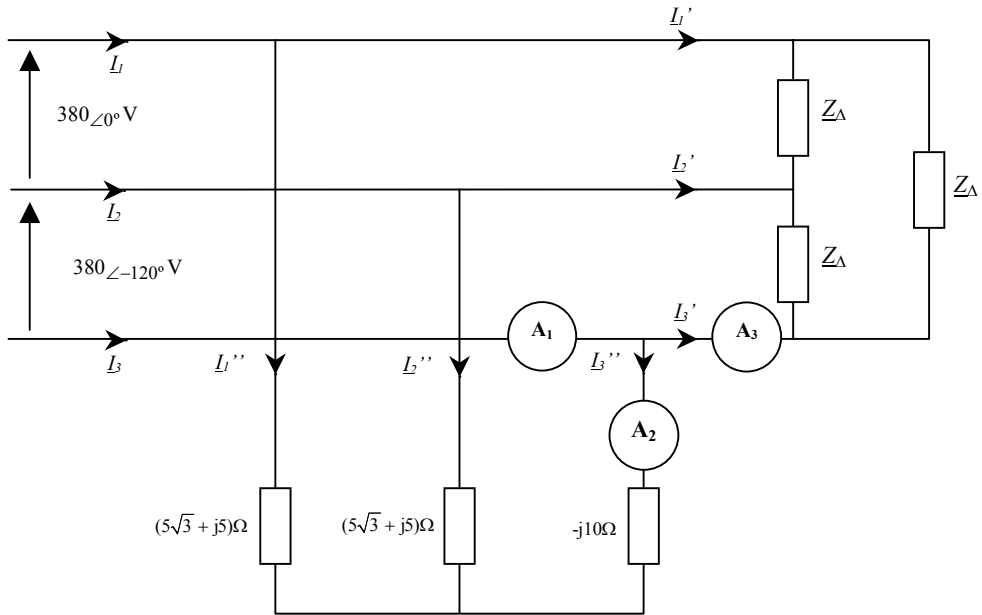


Ariketa-zenbakia: 6.12

Irudiko zirkuitua sekuentzia zuzeneko sistema trifasiko orekatu batez elikatuta dago. Hiru amperemetroen irakurketak berdinak direla eta triangeluan dagoen karga induktiboa eta orekatua dela jakinda, zehaztu:

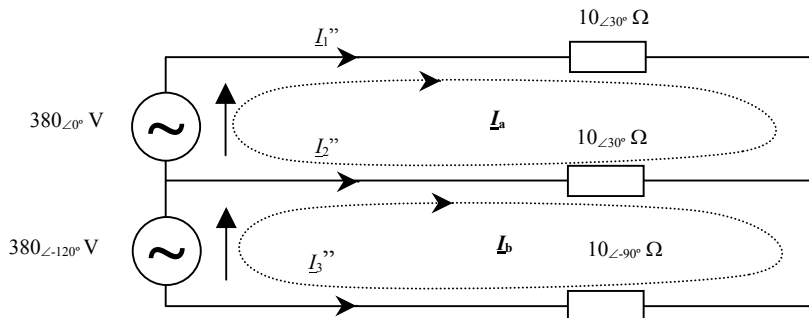
1. Amperemetroen irakurketak.
2. Z_{Δ} inpedantziaren balioa.
3. Zirkuituko adarretan zehar dabiltzan korronteak.

4. Diagrama bektorial osoa.
5. Potentzia partzialak eta zirkuitu osoko potentziak.



Ebazpena

1. Karga desorekatuaren lineako korranteak lortuko ditugu. Horretarako, sare bidezko analisia egiteko, ekuazio matritziala idatziko dugu:



$$\begin{bmatrix} 20 \angle 30^\circ & -10 \angle 30^\circ \\ -10 \angle 30^\circ & 10 \angle -30^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 380 \angle 0^\circ \\ 380 \angle -120^\circ \end{bmatrix}$$

Sareetako korronteak:

$$I_a = \frac{\begin{vmatrix} 380 \angle 0^\circ & -10 \angle 30^\circ \\ 380 \angle -120^\circ & 10 \angle -30^\circ \\ 20 \angle 30^\circ & -10 \angle 30^\circ \\ -10 \angle 30^\circ & 10 \angle -30^\circ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 220 \angle 0^\circ & -100 \angle 60^\circ \end{vmatrix}} = \frac{3.800 \angle -30^\circ + 3.800 \angle -90^\circ}{220 \angle 0^\circ - 100 \angle 60^\circ} =$$

$$= \frac{3.800 \frac{\sqrt{3}}{2} - j3.800 \frac{1}{2} - j3.800}{220 - 100 \frac{1}{2} - j100 \frac{\sqrt{3}}{2}} = 38 \angle -30^\circ \text{ A}$$

$$I_b = \frac{\begin{vmatrix} 20 \angle 30^\circ & 380 \angle 0^\circ \\ -10 \angle 30^\circ & 380 \angle -120^\circ \\ 20 \angle 30^\circ & -10 \angle 30^\circ \\ -10 \angle 30^\circ & 10 \angle -30^\circ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 220 \angle 0^\circ & -100 \angle 60^\circ \end{vmatrix}} = \frac{7.600 \angle -90^\circ + 3.800 \angle 30^\circ}{220 \angle 0^\circ - 100 \angle 60^\circ} =$$

$$= \frac{-j3.800 + 3.800 \frac{\sqrt{3}}{2} + j3.800 \frac{1}{2}}{220 - 100 \frac{1}{2} - j100 \frac{\sqrt{3}}{2}} = 38 \angle -30^\circ \text{ A}$$

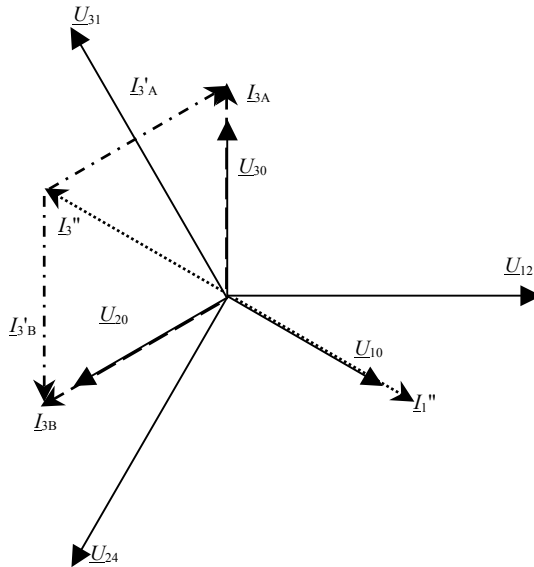
Lineetako korronteak:

$$I_1'' = I_a = 38 \angle -30^\circ \text{ A} \quad I_2'' = I_b - I_a = 0 \text{ A} \quad I_3'' = -I_b = -38 \angle -30^\circ = 38 \angle 150^\circ \text{ A}$$

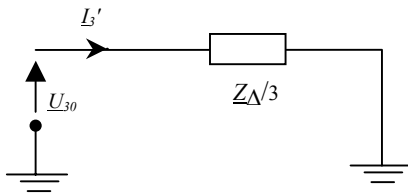
Amperemetroetako irakurketak berdinak direnez, $A_{1I} = A_{2I} = A_{3I} = |I_3''| = 38$ zati

Orduan, I_3 , I_3' eta I_3'' korronteek triangelu aldeakidea osatuko dute: $I_3 = I_3' + I_3''$

2. Informazio hori diagrama bektorialera eramaten badugu, bi balio posible agertuko zaizkigu I_3' -rentzat: $I_3'=38\angle 30^\circ$ A edo $I_3'=38\angle -90^\circ$ A.



Bietatik egokia aukeratu ahal izateko, triangeluan dagoen kargaren baliokide monofasikora joko dugu (karga hori izarrera igaro beharko dugu baliokide monofasikoa egin ahal izateko).



Lehenengo $I_3'=38\angle -90^\circ$ A hartuko dugu:

$$\frac{Z_{\Delta}}{3} = \frac{220\angle 90^\circ}{38\angle -90^\circ} = \frac{10}{\sqrt{3}}\angle 180^\circ = -\frac{10}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ \Omega$$

Baina balio hori ezinezkoa da, erresistentzia negatiborik ez baitago.

Beraz, $I_3'=38\angle 30^\circ$ hartuz,

$$\frac{Z_{\Delta}}{3} = \frac{220\angle 90^\circ}{38\angle 30^\circ} = \frac{10}{\sqrt{3}}\angle 60^\circ \Omega \Rightarrow Z_{\Delta} = 10\sqrt{3}\angle 60^\circ = (5\sqrt{3} + j15) \Omega$$

3. Triangeluan dagoen karga orekatua izanik,

$$I_1' = 38\angle -90^\circ \text{ A} \quad I_2' = 38\angle 150^\circ \text{ A} \quad I_3' = 38\angle 30^\circ \text{ A}$$

$$I_1'' = 38\angle -30^\circ \text{ A} \quad I_2'' = 0 \text{ A} \quad I_3'' = 38\angle 150^\circ \text{ A}$$

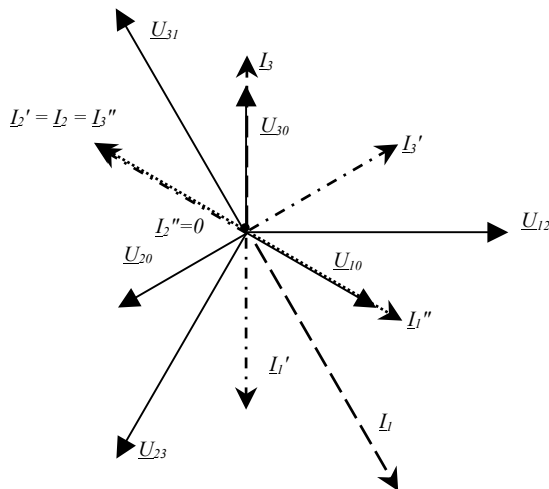
Lineako korrronteak:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 38_{\angle -90^\circ} + 38_{\angle -30^\circ} = 38\sqrt{3}_{\angle -60^\circ} \text{ A}$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = 38_{\angle 150^\circ} + 0 = 38_{\angle 150^\circ} \text{ A}$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 38_{\angle 30^\circ} + 38_{\angle 150^\circ} = 38_{\angle 90^\circ} \text{ A}$$

4.



5. Triangeluan dagoen kargako potentziak:

$$P_{\Delta} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I_L \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 38 \cdot \cos 60^\circ = 7.220\sqrt{3} \text{ W}$$

$$Q_{\Delta} = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I_L \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 38 \cdot \sin 60^\circ = 21.660 \text{ var}$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{(P_{\Delta})^2 + (Q_{\Delta})^2} = 25.010,81 \text{ VA}$$

Izar desorekatuak xurgatzen dituen potentziak hauek dira:

$$\begin{aligned} P_{Izarra} &= P_1 + P_2 + P_3 = R_1 \cdot (I_1'')^2 + R_2 \cdot (I_2'')^2 + R_3 \cdot (I_3'')^2 = \\ &= 5\sqrt{3} \cdot 38^2 + 5\sqrt{3} \cdot 0^2 + 0 \cdot 38^2 \end{aligned}$$

$$P_{Izarra} = 7.220\sqrt{3} \text{ W}$$

$$Q_{Izarra} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = X_1 \cdot (I_1'')^2 + X_2 \cdot (I_2'')^2 - X_3 \cdot (I_3'')^2 =$$

$$= 5 \cdot 38^2 + 5 \cdot 0^2 - 10 \cdot 38^2$$

$$Q_{Izarra} = -7220 \text{ var}$$

$$S_{Izarra} = \sqrt{(P_{Izarra})^2 + (Q_{Izarra})^2} = 14.440 \text{ VA}$$

Potentzia totala:

$$P_{\text{Totala}} = P_{Izarra} + P_{\Delta} = 7.220\sqrt{3} + 7.220\sqrt{3} = 14.440\sqrt{3} \text{ W}$$

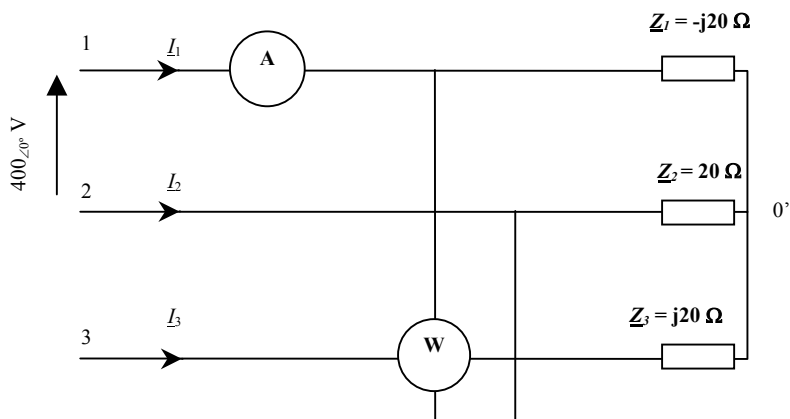
$$Q_{\text{Totala}} = Q_{Izarra} + Q_{\Delta} = -7.220 + 21.660 = 14.440 \text{ var}$$

$$S_{\text{Totala}} = \sqrt{P_{\text{Totala}}^2 + Q_{\text{Totala}}^2} = 28.880 \text{ VA}$$

Ariketa-zenbakia: 6.13

Irudiko zirkuitua $\underline{U}_{12} = 400 \angle 0^\circ$ V-eko tentsio konposatua duen sistema trifasiko orekatu batekin elikatzen da. Eskemako datuak eta sekuentzia zuzeneko sistema dela kontuan hartuz, zehaztu:

1. Wattmetroaren eta amperemetroaren irakurketak ($K_W = K_A = 1$).
2. Potentzia partzialak eta totalak.
3. Diagrama bektoriala.



Ebazpena

Millman-en teorema aplikatuz,

$$\begin{aligned}\underline{U}_{0'0} &= \frac{\underline{U}_{10} \cdot \underline{Y}_1 + \underline{U}_{20} \cdot \underline{Y}_2 + \underline{U}_{30} \cdot \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \\ &= \frac{\frac{400}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ \cdot \frac{1}{-j20} + \frac{400}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ \cdot \frac{1}{20} + \frac{400}{\sqrt{3}} \angle 90^\circ \cdot \frac{1}{j20}}{\frac{1}{-j20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{j20}} = \\ \underline{U}_{0'0} &= \frac{400}{\sqrt{3}} \cdot (1 \angle 60^\circ + 1 \angle -150^\circ + 1 \angle 0^\circ) = \frac{400}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} + 1 \right) = \\ &= (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{400}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ = 169,05 \angle 30^\circ \text{ V} \\ \underline{U}_{20'} &= \underline{U}_{20} - \underline{U}_{0'0} = \frac{400}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ - (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{400}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ = 400 \angle -150^\circ \text{ V} \\ I_2 &= \frac{\underline{U}_{20'}}{\underline{Z}_2} = \frac{400 \angle -150^\circ}{20 \angle 0^\circ} = 20 \angle -150^\circ \text{ A} \\ \underline{U}_{30'} &= \underline{U}_{30} - \underline{U}_{0'0} = \frac{400}{\sqrt{3}} \angle 90^\circ - (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{400}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ = -146,4 + j146,4 = 146,4\sqrt{2} \angle 135^\circ \\ I_3 &= \frac{\underline{U}_{30'}}{\underline{Z}_3} = \frac{146,4\sqrt{2} \angle 135^\circ}{20 \angle 90^\circ} = 7,32\sqrt{2} \angle 45^\circ = 10,35 \angle 45^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

Simetrias (ikus diagrama bektoriala), $\underline{U}_{10'}$ tentsioaren balioa:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{10'} &= \underline{U}_{10} - \underline{U}_{0'0} = \frac{400}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ - (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{400}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ = \\ &= 200 - 115,4j + 146,4 + 84,5j = 146,4\sqrt{2} \angle -75^\circ \text{ V} \\ I_1 &= \frac{\underline{U}_{10'}}{\underline{Z}_1} = \frac{146,4\sqrt{2} \angle -75^\circ}{20 \angle -90^\circ} = 7,32\sqrt{2} \angle 15^\circ = 10,35 \angle 15^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

1. Amperemetroaren irakurketa

$$A_I = |I_1| = 10,35 \text{ zati}$$

Wattmetroaren irakurketa:

$$W_I = U_{12} \cdot I_3 \cdot \cos\left(\overset{\wedge}{U_{12}I_3}\right) = 400 \cdot 10,35 \cdot \cos 45^\circ = 2.928 \text{ zati}$$

Wattmetroaren irakurketa beste modu batera ere egin zitekeen:

$$\begin{aligned} W_I &= \operatorname{Re}\left[\underline{U}_{12} \cdot \underline{I}_3^*\right] = \operatorname{Re}\left[400 \angle 0^\circ \cdot \left(7,32\sqrt{2} \angle 45^\circ\right)^*\right] = \operatorname{Re}\left[400 \angle 0^\circ \cdot 7,32\sqrt{2} \angle -45^\circ\right] = \\ &= \operatorname{Re}\left[2.928\sqrt{2} \angle -45^\circ\right] = \operatorname{Re}\left[2.928 - j2.928\right] = 2.928 \text{ zati} \end{aligned}$$

2. Potentzia partzialak

$$P_1 = 0 \text{ W} \quad Q_1 = -X_1 \cdot I_1^2 = -20 \cdot \left(7,32\sqrt{2}\right)^2 = -2.143,3 \text{ var} \quad S_1 = 2.143,3 \text{ VA}$$

$$P_2 = R_2 \cdot I_2^2 = 20 \cdot 20^2 = 8.000 \text{ W} \quad Q_2 = X_2 \cdot I_2^2 = 0 \text{ var} \quad S_2 = 8.000 \text{ VA}$$

$$P_3 = 0 \text{ W} \quad Q_3 = X_3 \cdot I_3^2 = 20 \cdot \left(7,32\sqrt{2}\right)^2 = 2.143,3 \text{ var} \quad S_3 = 2.143,3 \text{ VA}$$

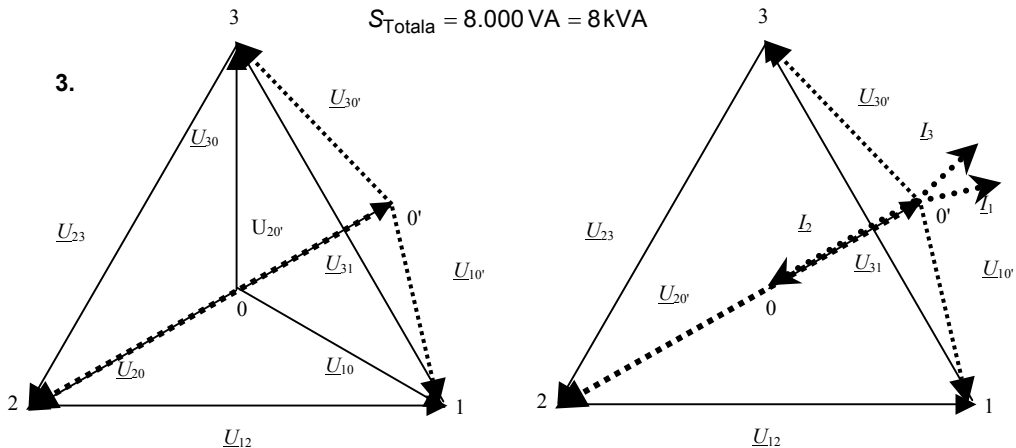
Totalak:

$$P_{\text{Totala}} = P_1 + P_2 + P_3 = 8.000 \text{ W}$$

$$Q_{\text{Totala}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \text{ var}$$

$$S_{\text{Totala}} = 8.000 \text{ VA} = 8 \text{ kVA}$$

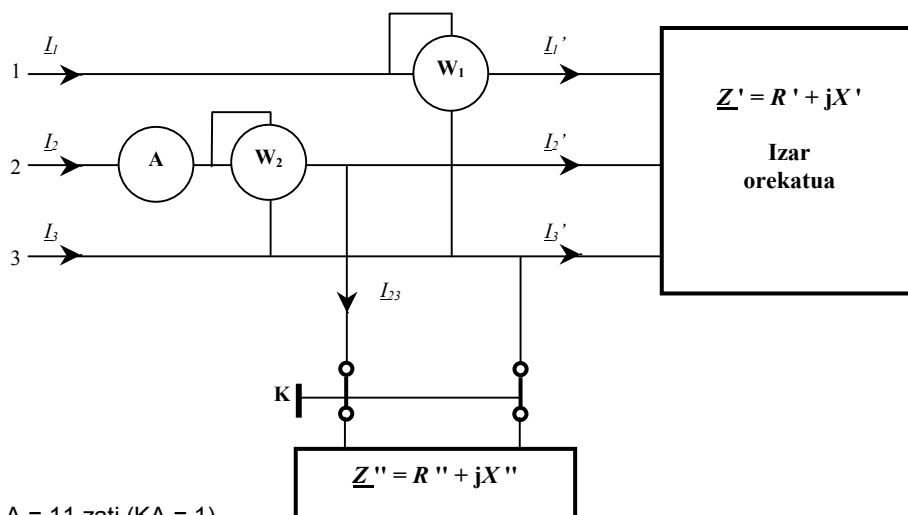
3.



Ariketa-zenbakia: 6.14

Irudiko zirkuituari sekuentzia zuzeneko sistema trifasiko orekatua aplikatzen zaio. K etengailua zabalik nahiz itxita egon neurgailu guztiek irakurketa berak ematen dituztela jakinik, zehaztu:

1. Lineako tentsioa.
2. Zirkuituko korronteak, K etengailua itxita dagoenean.
3. Diagrama bektoriala.
4. Zirkuituko inpedantziak ($\underline{Z}'$ eta $\underline{Z}''$).



A = 11 zati ($K_A = 1$)

$W_1 = W_2 = 3.630$ zati ($K_W = 1$)

Ebazpena

1. K zabalik

K zabalik dagoenean, $\underline{Z}'$ karga orekatuaren potentziak kalkula ditzakegu wattmetro biek, Aron edo bi wattmetroen metodoa aplikatuz:

$$P' = W_1 + W_2 = 3.630 + 3.630 = 7.260 \text{ W}$$

$$Q' = \sqrt{3} (W_1 - W_2) = \sqrt{3} (3.630 - 3.630) = 0 \text{ var}$$

$$S' = P' = 7.260 \text{ VA}$$

Aurreko potentzien datuekin, kargaren izaera lortuko dugu:

$$\cos \varphi' = \frac{P'}{S'} = \frac{7.260}{7.260} = 1 \quad \underline{Z}', \text{ karga trifasiko orekatua, erresistibo hutsa da.}$$

$$S = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot I_L \Rightarrow 7.260 = \sqrt{3} \cdot U_K \cdot 11 \Rightarrow U_K = \frac{7.260}{\sqrt{3} \cdot 11} = 220\sqrt{3} \text{ V edo } 380 \text{ V}$$

Tentsio konposatua $U_K = 220\sqrt{3} \text{ V}$ bada, tentsio sinplea $U_S = 220 \text{ V}$ izango da.

2. Ariketarekin aurrera egiteko, $\underline{U}_{10}$ faseen jatorrian hartuko dugu:

$$\underline{U}_{10} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\text{Beraz, } R' = \frac{U_{10}}{I_1} = \frac{220}{11} = 20 \, \Omega \Rightarrow \underline{Z}' = (20 + j0) = 20 \angle 0^\circ \, \Omega$$

Eta karga horretan zeharreko korroneak:

$$I_1' = I_1 = 11 \angle 0^\circ \text{ A} \quad I_2' = 11 \angle -120^\circ \text{ A} \quad I_3' = 11 \angle 120^\circ \text{ A}$$

Beste modu batera ere egin daiteke:

$$\left. \begin{array}{l} W_{11} = 3630 = U_{13} \cdot I_1 \cdot \cos(30 - \varphi) \\ W_{21} = 3630 = U_{23} \cdot I_2 \cdot \cos(30 + \varphi) \\ I_1 = I_2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos(30 + \varphi) = \cos(30 - \varphi) \rightarrow \\ 30 + \varphi = 30 - \varphi \rightarrow \varphi = 0 \end{array} \right.$$

Karga erresistibo hutsa da. Ondorioz,

$$W_{11} = 3.630 = U_K \cdot 11 \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow U_K = \frac{3.630}{11 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 220\sqrt{3} \text{ V}$$

Beraz, tentsio sinplea eta konposatua: $U_S = 220 \text{ V}$ eta $U_K = 220\sqrt{3} = 380 \text{ V}$

K itxita

Gainerako korroneak kalkulatzeko, K etengailua itxita dagoen egoera aztertuko dugu. Orain ere: $W_{21} = W_{11} = 3.630$ eta $I_2 = 11 \text{ A}$

Orduan:

$$W_{21} = 3.630 = 220\sqrt{3} \cdot 11 \cdot \cos(\hat{U}_{23} \hat{I}_2) \rightarrow \cos(\hat{U}_{23} \hat{I}_2) = \frac{3.630}{220\sqrt{3} \cdot 11} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow (\hat{U}_{23} \hat{I}_2) = \pm 30^\circ$$

Era berean, kontuan hartu behar da W_{11} ez dela aldatu. Horrek esan nahi du I_2 korrontea $\pm 30^\circ$ desfasatuta dagoela U_{23} tentsioarekiko.

Azter ditzagun aukera biak:

$\varphi = -30^\circ$ izango balitz, $I_2 = 11_{\angle -120^\circ} \text{ A}$ izango litzateke, aurrerago lortu dugun korrontearen balio bera, hain zuzen ere. Korronte horrek zirkulatzea lortzeko, $\underline{Z}'$ kargaren balio infinitua behar zen (K zabalik). Beraz, ezin dugu onartu desfase horren balioa bigarren atal honetan.

$\varphi = 30^\circ$ denean, berriz:

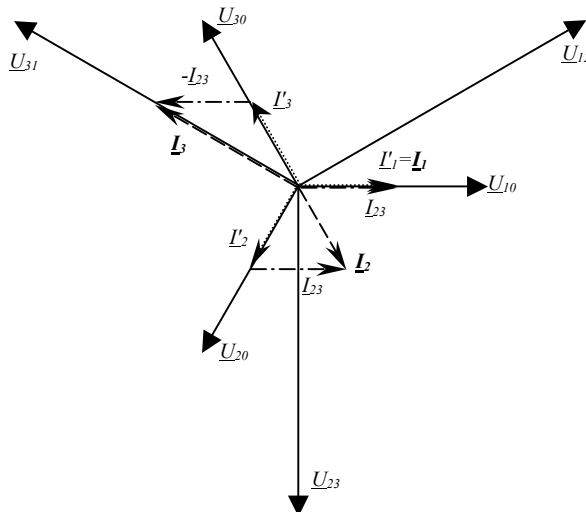
$$I_2 = 11_{\angle -60^\circ} \text{ A}$$

$I_1 = 11_{\angle 0^\circ} \text{ A}$ Lehenengo fasean ez da egoera aldatu K ixtean.

$$I_{23} = I_2 - I_1' = 11_{\angle -60^\circ} - 11_{\angle -120^\circ} = 11_{\angle 0^\circ} \text{ A}$$

Eta, azkenik, K1L aplikatuz: $I_3 = I_3' - I_{23} = 11_{\angle 120^\circ} - 11_{\angle 0^\circ} = 11\sqrt{3}_{\angle 150^\circ} \text{ A}$

3.



4. Azkenik:

$$\underline{Z}'' = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{I}_{23}} = \frac{220\sqrt{3} \angle -90^\circ}{11 \angle 0^\circ} = 20\sqrt{3} \angle -90^\circ \Omega$$

$$\underline{Z}'' = 0 - j20\sqrt{3} \Omega$$

$$\underline{Z}' = (20 + j0) \Omega$$

Ariketa-zenbakia: 6.15

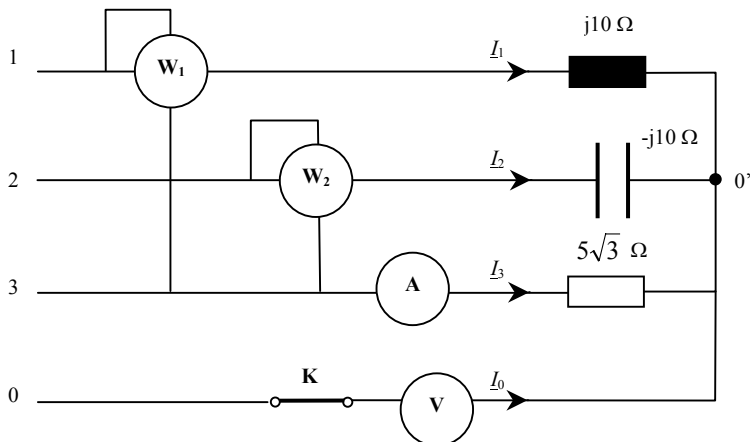
Irudiko zirkuituari sekuentzia zuzeneko tentsio-sistema trifasiko orekatua aplikatzen zaio; sistema horren lehenengo eta bigarren faseen arteko tentsioa $\underline{U}_{12} = 230\sqrt{3} \angle 0^\circ$ V da. Kalkulatu:

K etengailua itxita dagoenean:

1. $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ eta $\underline{I}_0$ korronteak.
2. Neurgailuen irakurketak.
3. Diagrama bektoriala
4. Zirkuitu osoko potentziak.

K etengailua zabalik dagoenean:

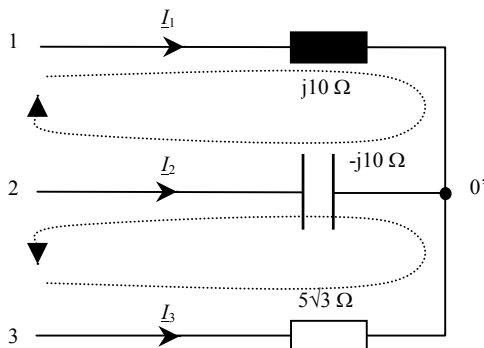
5. Zirkuituko korronte berriak.



Ebazpena

K etengailua zabalik zein itxita egonda, I_0 korrantea nulua izango da, voltmetroaren inpedantziak infiniturantz jotzen baitu. Bi kasuetan, beraz, hiru hariko sistemak ditugu.

1. a) Sareen metodoaren bidez ebatziz gero:



$$\begin{bmatrix} 0 & -j10 \\ -j10 & 5\sqrt{3} - j10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 230\sqrt{3} \angle 0^\circ \\ -230\sqrt{3} \angle -120^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 230\sqrt{3} \angle 0^\circ \\ 230\sqrt{3} \angle 60^\circ \end{bmatrix}$$

Lehenengo lerroa garatuz gero:

$$0 \cdot I_1 - j10 \cdot I_3 = 230\sqrt{3} \angle 0^\circ \rightarrow I_3 = \frac{230\sqrt{3} \angle 0^\circ}{10 \angle -90^\circ} = 23\sqrt{3} \angle 90^\circ = j23\sqrt{3} \text{ A}$$

Bigarren lerroaren garapenarekin:

$$-j10 \cdot I_1 + (5\sqrt{3} - j10) \cdot j23\sqrt{3} = 230\sqrt{3} \angle 60^\circ$$

$$-j10 \cdot I_1 + j345 + 230\sqrt{3} = 115\sqrt{3} + j345$$

$$I_1 = \frac{115\sqrt{3} - 230\sqrt{3}}{-j10} = \frac{-115\sqrt{3}}{-j10} = -j11,5\sqrt{3} \text{ A} = 11,5\sqrt{3} \angle -90^\circ \text{ A}$$

Eta beste bien konbinazioz lortuko dugu I_2 :

$$I_2 = -(I_1 + I_3) = -(j23\sqrt{3} - j11,5\sqrt{3}) = 11,5\sqrt{3} \angle -90^\circ \text{ A}$$

Azkenik, azaldu dugun bezala: $I_0 = 0 \text{ A}$

b) Neutroaren desplazamendua erabiliz:

$$\underline{U}_{0'0} = \frac{\underline{U}_{10} \cdot \underline{Y}_1 + \underline{U}_{20} \cdot \underline{Y}_2 + \underline{U}_{30} \cdot \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} =$$

$$= \frac{230_{\angle -30^\circ} \cdot \frac{1}{j10} + 230_{\angle -150^\circ} \cdot \frac{1}{-j10} + 230_{\angle 90^\circ} \cdot \frac{1}{5\sqrt{3}}}{\frac{1}{j10} + \frac{1}{-j10} + \frac{1}{5\sqrt{3}}}$$

$$\underline{U}_{0'0} = 5\sqrt{3} \left(23_{\angle -120^\circ} + 23_{\angle -60^\circ} + \frac{46}{\sqrt{3}}_{\angle 90^\circ} \right) =$$

$$= 5\sqrt{3} \cdot \left(-11,5 - j11,5\sqrt{3} + 11,5 - j11,5\sqrt{3} + j\frac{46}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\underline{U}_{0'0} = -j345 + j230 = 115_{\angle -90^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{10'} = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{00'} = 230_{\angle -30^\circ} - 115_{\angle -90^\circ} = 115\sqrt{3} - j115 + j115 =$$

$$= 115\sqrt{3}_{\angle 0^\circ} \text{ V}$$

$$\text{Eta } I_1 = \frac{115\sqrt{3}_{\angle 0^\circ}}{10_{\angle 90^\circ}} = 11,5\sqrt{3}_{\angle -90^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{U}_{20'} = \underline{U}_{20} - \underline{U}_{00'} = 230_{\angle -150^\circ} - 115_{\angle -90^\circ} = -115\sqrt{3} - j115 + j115 =$$

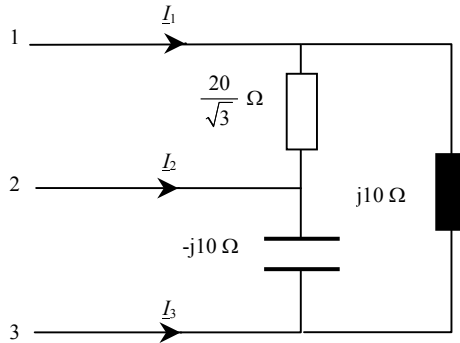
$$= 115\sqrt{3}_{\angle 180^\circ} \text{ V}$$

$$\text{Eta } I_2 = \frac{115\sqrt{3}_{\angle 180^\circ}}{10_{\angle -90^\circ}} = 11,5\sqrt{3}_{\angle -90^\circ} \text{ A}$$

$$\underline{U}_{30'} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{00'} = 230_{\angle 90^\circ} - 115_{\angle -90^\circ} = j230 + j115 = 345_{\angle 90^\circ} \text{ V}$$

$$\text{Eta } I_3 = \frac{345_{\angle 90^\circ}}{5\sqrt{3}_{\angle 0^\circ}} = 23\sqrt{3}_{\angle 90^\circ} \text{ A}$$

c) Ordezkapen metodoen bidezko ebazpena. Kenelly-ren teorema erabiliz:



$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1 =$$

$$j10 \cdot (-j10) + (-j10) \cdot 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} \cdot j10 = 100$$

$$\underline{Z}_{12} = \frac{100}{5\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} \Omega$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{100}{j10} = -j10 \Omega$$

$$\underline{Z}_{31} = \frac{100}{-j10} = j10 \Omega$$

$$I_{12} = \frac{230\sqrt{3} \angle 0^\circ}{\frac{20}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ} = 34,5 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$I_{23} = \frac{230\sqrt{3} \angle -120^\circ}{10 \angle -90^\circ} = 23\sqrt{3} \angle -30^\circ \text{ A}$$

$$I_{31} = \frac{230\sqrt{3} \angle 120^\circ}{10 \angle 90^\circ} = 23\sqrt{3} \angle 30^\circ \text{ A}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= 34,5 \angle 0^\circ - 23\sqrt{3} \angle 30^\circ = 34,5 - 34,5 - j11,5\sqrt{3} = -j11,5\sqrt{3} = \\ &= 11,5\sqrt{3} \angle -90^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= 23\sqrt{3} \angle -30^\circ - 34,5 \angle 0^\circ = 34,5 - j11,5\sqrt{3} - 34,5 = -j11,5\sqrt{3} = \\ &= 11,5\sqrt{3} \angle -90^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= 23\sqrt{3} \angle 30^\circ - 23\sqrt{3} \angle -30^\circ = 34,5 + j11,5\sqrt{3} - 34,5 + j11,5\sqrt{3} = j23\sqrt{3} = \\
 &= 23\sqrt{3} \angle 90^\circ \text{ A}
 \end{aligned}$$

2. Amperemetroaren irakurketa:

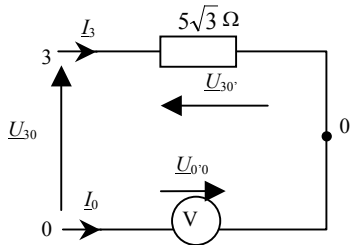
$$A_I = |I_3| = 23\sqrt{3} \text{ zati}$$

Voltmetroaren irakurketa:

$$\underline{U}_{0'0} + \underline{U}_{30'} - \underline{U}_{30} = 0$$

$$\underline{U}_{0'0} = \underline{U}_{30} - \underline{U}_{30'} = 230 \angle 90^\circ - 5\sqrt{3} \cdot 23\sqrt{3} \angle 90^\circ = 115 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$V_I = |\underline{U}_{0'0}| = 115 \text{ dibisio}$$



Wattmetroen irakurketak:

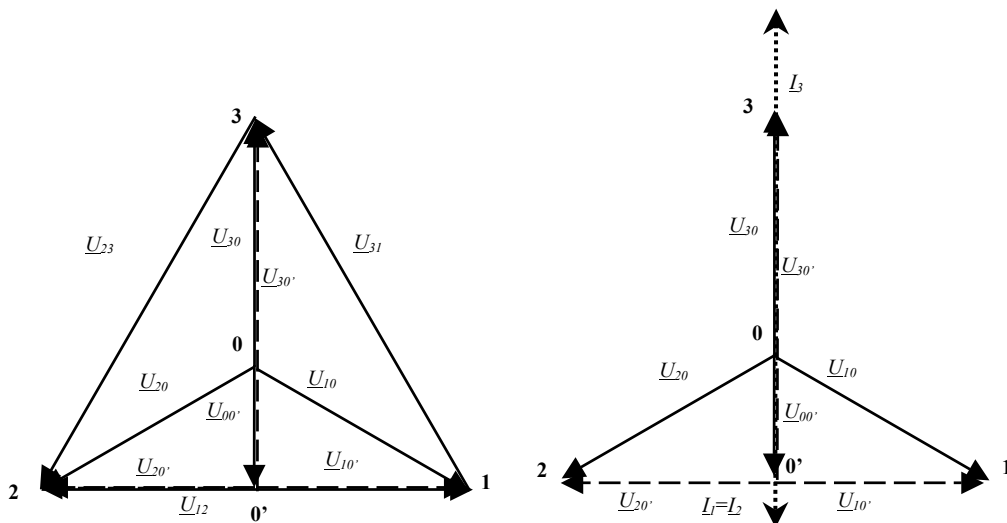
$$\begin{aligned}
 W_{11} &= \text{Re}[\underline{U}_{13} \cdot \underline{I}_1^*] = \text{Re}[230\sqrt{3} \angle -60^\circ \cdot 11,5\sqrt{3} \angle 90^\circ] = \text{Re}[7.935 \angle 30^\circ] = \\
 &= 3.967,5\sqrt{3} \text{ zati}
 \end{aligned}$$

$$W_{11} = U_{13} \cdot I_1 \cdot \cos\left(\overset{\wedge}{\underline{U}_{13} \underline{I}_1}\right) = 230\sqrt{3} \cdot 11,5\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 3.967,5\sqrt{3} \text{ zati}$$

$$\begin{aligned}
 W_{21} &= \text{Re}[\underline{U}_{23} \cdot \underline{I}_2^*] = \text{Re}[230\sqrt{3} \angle -120^\circ \cdot 11,5\sqrt{3} \angle 90^\circ] = \text{Re}[7.935 \angle -30^\circ] = \\
 &= 3.967,5\sqrt{3} \text{ zati}
 \end{aligned}$$

$$W_{21} = U_{23} \cdot I_2 \cdot \cos\left(\overset{\wedge}{\underline{U}_{23} \underline{I}_2}\right) = 230\sqrt{3} \cdot 11,5\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 3.967,5\sqrt{3} \text{ zati}$$

3. Diagrama bektoriala



4.

$$P_{\text{Totala}} = P_1 + P_2 + P_3 = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_3^2 =$$

$$= 0 \cdot (11,5\sqrt{3})^2 + 0 \cdot (11,5\sqrt{3})^2 + 5\sqrt{3} \cdot (23\sqrt{3})^2 = 7.935\sqrt{3} \text{ W}$$

$$Q_{\text{Totala}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = X_1 \cdot I_1^2 - X_2 \cdot I_2^2 + X_3 \cdot I_3^2 =$$

$$= 10 \cdot (11,5\sqrt{3})^2 - 10 \cdot (11,5\sqrt{3})^2 + 0 \cdot (23\sqrt{3})^2 = 0 \text{ var}$$

$$S_{\text{Totala}} = \sqrt{P^2 + Q^2} = 7.935\sqrt{3} \text{ VA}$$

5. Etengailua zabalik zein itxita egonda, zirkuituaren aldagaiak balio berekoak dira, voltmetroan zeharreko korrontea nulua dela onartzen baita.

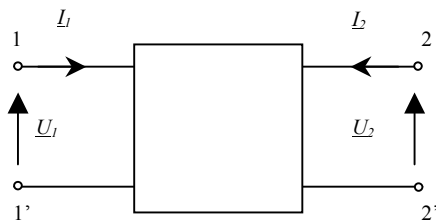
Hortaz, korrante berriak lehengo berberak izango dira.

7

Atebikoak

7.1 ATEBIKO BATEN EKUAZIOAK ETA PARAMETROAK

Bi terminal-bikote eskuragarri dituen edozein sare elektrikori atebikoa esaten zaio. Liburu honen ariketetan, honako irudi honetan adierazitako korrante nahiz tentsioentzako hitzarmena hartuko dugu. Gainera, atebiko linealak bakarrik erabiliko dira, hau da, bere baitan elementu linealak soilik dauzkatenak. Era berean, atebikoaren osagaiak elementu pasiboak edota menpeko sorgailuak izango dira.



Atebiko horren jokabidea sarrera eta irteerako korrante zein tentsioen funtzioan adierazten da, atebikoaren ekuazioak osatuz. Gainera, ekuazio horiek hainbat eratan agertu daitezke, erabilitako parametroen arabera.

Impedantzia-parametroak (Z parametroak):

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{cases}$$

Admitantzia-parametroak (Y parametroak):

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{U}_2 \end{cases}$$

Parametro hibridoak (h parametroak):

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{h}_{11} & \underline{h}_{12} \\ \underline{h}_{21} & \underline{h}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{h}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{h}_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{h}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{h}_{22} \cdot \underline{U}_2 \end{cases}$$

Alderantzizko parametro hibridoak (g parametroak):

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{g}_{11} & \underline{g}_{12} \\ \underline{g}_{21} & \underline{g}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{g}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{g}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{g}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{g}_{22} \cdot \underline{I}_2 \end{cases}$$

Transmisio-parametroak (T parametroak):

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A} \cdot \underline{U}_2 - \underline{B} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{C} \cdot \underline{U}_2 - \underline{D} \cdot \underline{I}_2 \end{cases}$$

Alderantzizko transmisio-parametroak (T' parametroak)

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}' & \underline{B}' \\ \underline{C}' & \underline{D}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{I}_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{A}' \cdot \underline{U}_1 - \underline{B}' \cdot \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 = \underline{C}' \cdot \underline{U}_1 - \underline{D}' \cdot \underline{I}_1 \end{cases}$$

7.2 PARAMETROEN ARTEKO ERLAZIOAK

Atebiko baten parametro multzo bat ezagututa gainerako parametroak lor daitezke, taula honetan agertzen diren erlazioak erabiliz. Horrela, egin beharreko kalkuluen arabera, gehien komeni zaizkigun parametro zein ekuazioak erabiliko ditugu.

	Z		Y		h		g		T	
Z	$\underline{\underline{Z}}_{11}$	$\underline{\underline{Z}}_{21}$	$\frac{Y_{22}}{\Delta Y}$	$\frac{-Y_{21}}{\Delta Y}$	$\frac{\Delta h}{h_{22}}$	$\frac{-h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{\underline{\underline{g}}_{11}}$	$\frac{\underline{\underline{g}}_{21}}{\underline{\underline{g}}_{11}}$	$\frac{\underline{\underline{A}}}{\underline{\underline{C}}}$	$\frac{1}{\underline{\underline{C}}}$
	$\underline{\underline{Z}}_{12}$	$\underline{\underline{Z}}_{22}$	$\frac{-Y_{12}}{\Delta Y}$	$\frac{Y_{11}}{\Delta Y}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{-\underline{\underline{g}}_{12}}{\underline{\underline{g}}_{11}}$	$\frac{\Delta g}{\underline{\underline{g}}_{11}}$	$\frac{\Delta T}{\underline{\underline{C}}}$	$\frac{\underline{\underline{D}}}{\underline{\underline{C}}}$
Y	$\frac{Z_{22}}{\Delta Z}$	$\frac{-Z_{21}}{\Delta Z}$	$\underline{\underline{Y}}_{11}$	$\underline{\underline{Y}}_{21}$	$\frac{1}{h_{11}}$	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta g}{\underline{\underline{g}}_{22}}$	$\frac{-\underline{\underline{g}}_{21}}{\underline{\underline{g}}_{22}}$	$\frac{\underline{\underline{D}}}{\underline{\underline{B}}}$	$\frac{-1}{\underline{\underline{B}}}$
	$\frac{-Z_{12}}{\Delta Z}$	$\frac{Z_{11}}{\Delta Z}$	$\underline{\underline{Y}}_{12}$	$\underline{\underline{Y}}_{22}$	$\frac{-h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{-\Delta h}{h_{11}}$	$\frac{\underline{\underline{g}}_{12}}{\underline{\underline{g}}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{\underline{g}}_{22}}$	$\frac{-\Delta T}{\underline{\underline{B}}}$	$\frac{\underline{\underline{A}}}{\underline{\underline{B}}}$
h	$\frac{\Delta Z}{\underline{\underline{Z}}_{22}}$	$\frac{-Z_{21}}{\underline{\underline{Z}}_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$	$\underline{\underline{h}}_{11}$	$\underline{\underline{h}}_{21}$	$\frac{\underline{\underline{g}}_{22}}{\Delta g}$	$\frac{\underline{\underline{g}}_{21}}{\Delta g}$	$\frac{\underline{\underline{B}}}{\underline{\underline{D}}}$	$\frac{-1}{\underline{\underline{D}}}$
	$\frac{Z_{12}}{\underline{\underline{Z}}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{\underline{Z}}_{22}}$	$\frac{-Y_{12}}{Y_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{Y_{11}}$	$\underline{\underline{h}}_{12}$	$\underline{\underline{h}}_{22}$	$\frac{\underline{\underline{g}}_{12}}{\Delta g}$	$\frac{1}{\Delta g}$	$\frac{\Delta T}{\underline{\underline{D}}}$	$\frac{\underline{\underline{C}}}{\underline{\underline{D}}}$
g	$\frac{1}{\underline{\underline{Z}}_{11}}$	$\frac{\underline{\underline{Z}}_{21}}{\underline{\underline{Z}}_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{Y_{22}}$	$\frac{-Y_{21}}{Y_{22}}$	$\frac{h_{22}}{\Delta h}$	$\frac{-h_{21}}{\Delta h}$	$\underline{\underline{g}}_{11}$	$\underline{\underline{g}}_{21}$	$\frac{\underline{\underline{C}}}{\underline{\underline{A}}}$	$\frac{1}{\underline{\underline{A}}}$
	$\frac{-Z_{12}}{\underline{\underline{Z}}_{11}}$	$\frac{\Delta Z}{\underline{\underline{Z}}_{11}}$	$\frac{Y_{12}}{Y_{22}}$	$\frac{1}{Y_{22}}$	$\frac{-h_{12}}{\Delta h}$	$\frac{h_{11}}{\Delta h}$	$\underline{\underline{g}}_{12}$	$\underline{\underline{g}}_{22}$	$\frac{-\Delta T}{\underline{\underline{A}}}$	$\frac{\underline{\underline{B}}}{\underline{\underline{A}}}$
T	$\frac{\underline{\underline{Z}}_{11}}{\underline{\underline{Z}}_{21}}$	$\frac{1}{\underline{\underline{Z}}_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$	$\frac{-\Delta Y}{Y_{21}}$	$\frac{-\Delta h}{h_{21}}$	$\frac{-h_{22}}{h_{21}}$	$\frac{1}{\underline{\underline{g}}_{21}}$	$\frac{\underline{\underline{g}}_{11}}{\underline{\underline{g}}_{21}}$	$\underline{\underline{A}}$	$\underline{\underline{C}}$
	$\frac{\Delta Z}{\underline{\underline{Z}}_{21}}$	$\frac{\underline{\underline{Z}}_{22}}{\underline{\underline{Z}}_{21}}$	$\frac{-1}{Y_{21}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	$\frac{-h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{-1}{h_{21}}$	$\frac{\underline{\underline{g}}_{22}}{\underline{\underline{g}}_{21}}$	$\frac{\Delta g}{\underline{\underline{g}}_{21}}$	$\underline{\underline{B}}$	$\underline{\underline{D}}$

Non:

$$\Delta Z = \begin{vmatrix} \underline{\underline{Z}}_{11} & \underline{\underline{Z}}_{12} \\ \underline{\underline{Z}}_{21} & \underline{\underline{Z}}_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta Y = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta h = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta g = \begin{vmatrix} \underline{\underline{g}}_{11} & \underline{\underline{g}}_{12} \\ \underline{\underline{g}}_{21} & \underline{\underline{g}}_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta T = \begin{vmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \end{vmatrix}$$

7.3 ATEBIKO ELKARREKIKOAK ETA ATEBIKO SIMETRIKOAK

Atebiko bat elkarrekikoa izango da baldin eta honako erlazio hauek betetzen badira:

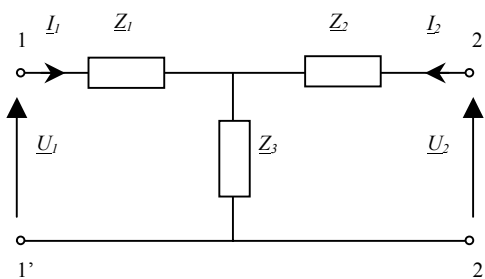
$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} ; \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} ; \underline{h}_{12} = -\underline{h}_{21} ; \underline{g}_{12} = -\underline{g}_{21} ; \Delta T = 1 ; \Delta T' = 1$$

Bestalde, elkarrekikoa izateaz gain simetrikoa bada, honako erlazio hauek ere beteko dira:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} ; \underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22} ; \Delta h = 1 ; \Delta g = 1 ; \underline{A} = \underline{D} ; \underline{A}' = \underline{D}'$$

7.4 T ETA II ZIRKUITU BALIOKIDAEK

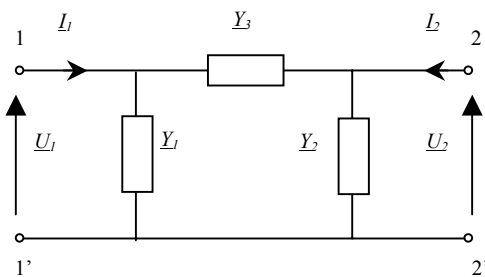
Atebikoa elkarrekikoa denean, T eta II zirkuitu baliokideez ordezkatu daitezke.



$$\begin{cases} \underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_2 = \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_3 = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 \\ \underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \\ \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_3 \end{cases}$$

Simetrikoa bada:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 \rightarrow \underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}$$



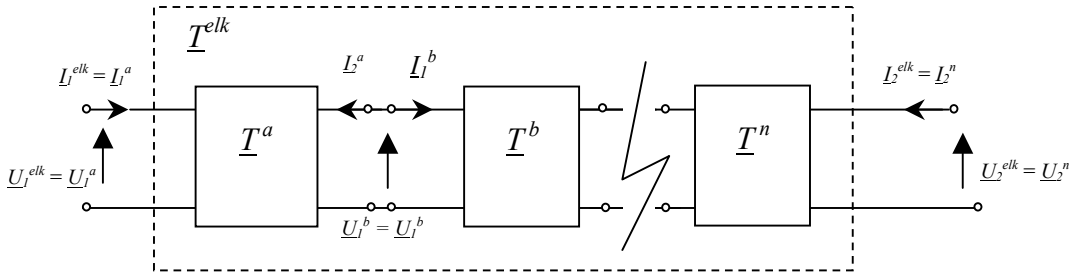
$$\begin{cases} \underline{Y}_1 = \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_2 = \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_3 = -\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 \\ \underline{Y}_{22} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 \\ \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_3 \end{cases}$$

Simetrikoa bada:

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 \rightarrow \underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$$

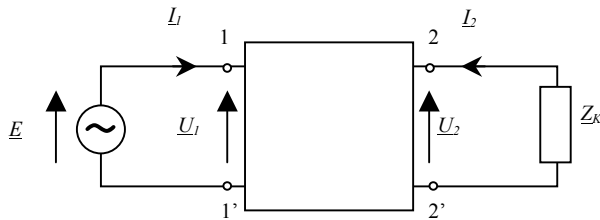
7.5 KATEAN KONEKTATURIKO ATEBIKOAK

Atebiko bi edo gehiago katean daude konektaturik, baldin eta bakoitzaren sarrera aurrekoaren iteerarekin konektatzen bada. Atebiko horiek osatzen duten elkarketa beste atebiko bat da. Azken horren transmisio-matrizea jatorrizko atebikoen transmisio-matrizeak euren artean biderkatuz kalkulatu dugu; horren bidez, elkarketaren baliokidea lortu dugu.



$$[T]^{elk} = [T]^a \cdot [T]^b \cdot \dots \cdot [T]^n$$

Ariketa-zenbakia: 7.1



$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+j & 10 \\ 0,1 & 1-j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Irudiko atebikoa bere transmisio-parametroek definitzen dute.

1. Egiaztatu atebikoa elkarrekikoa eta simetrikoa den.
2. Elkarrekikoa izanez gero, kalkulatu atebikoaren T eta Π zirkuitu baliokideak.
3. Kalkulatu atebikoaren Z eta Y parametroak.

Ebazpena

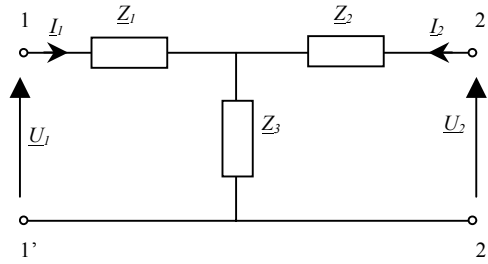
1. $\underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} = 1$?

$$(1+j) \cdot (1-j) - 10 \cdot 0,1 = 1 \rightarrow \text{Atebikoa elkarrekikoa da.}$$

$$\underline{A} = \underline{D}?$$

$$(1+j) \neq (1-j) \rightarrow \text{Ez da simetrikoa.}$$

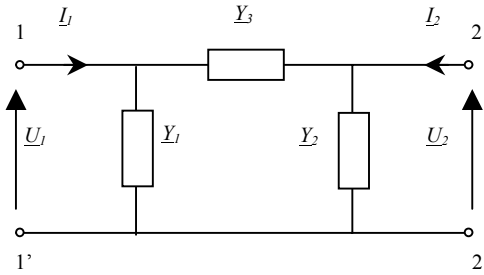
2.



$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} - \frac{1}{\underline{C}} = \frac{\underline{A}-1}{\underline{C}} = \frac{1+j-1}{0,1} = j10\Omega$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}} - \frac{1}{\underline{C}} = \frac{\underline{D}-1}{\underline{C}} = \frac{1-j-1}{0,1} = -j10\Omega$$

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \frac{1}{\underline{C}} = \frac{1}{0,1} = 10\Omega$$

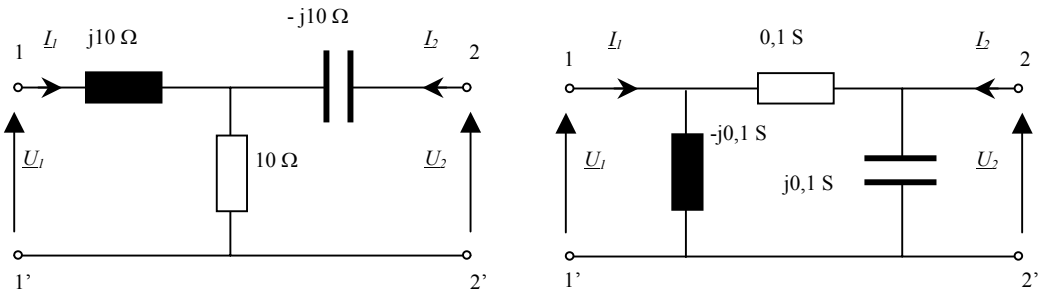


$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12} = \frac{\underline{D}}{\underline{B}} + \frac{-1}{\underline{B}} = \frac{\underline{D}-1}{\underline{B}} = \frac{1-j-1}{10} = -j0,1\text{ S}$$

$$\underline{Y}_2 = \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12} = \frac{\underline{A}}{\underline{B}} + \frac{-1}{\underline{B}} = \frac{\underline{A}-1}{\underline{B}} = \frac{1+j-1}{10} = j0,1\text{ S}$$

$$\underline{Y}_3 = -\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21} = -\left(\frac{-1}{\underline{B}}\right) = \frac{1}{\underline{B}} = \frac{1}{10} = 0,1\text{ S}$$

Beraz, atebiko hau eraiki daiteke fisikoki:

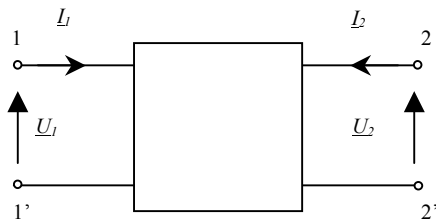


3. Parametroen arteko erlazioak erabiliz:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \frac{\underline{A}}{\underline{C}} = \frac{1+j}{0,1} = (10+j10) \, \Omega \\ \underline{Z}_{12} &= \underline{Z}_{21} = \frac{1}{\underline{C}} = \frac{1}{0,1} = 10 \, \Omega \\ \underline{Z}_{22} &= \frac{\underline{D}}{\underline{C}} = \frac{1-j}{0,1} = (10-j10) \, \Omega \end{aligned} \right\} \rightarrow [\underline{Z}] = \begin{bmatrix} 10+j10 & 10 \\ 10 & 10-j10 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= \frac{\underline{D}}{\underline{B}} = \frac{1-j}{10} = (0,1-j0,1) \, \text{S} \\ \underline{Y}_{12} &= \underline{Y}_{21} = -\frac{1}{\underline{B}} = -\frac{1}{10} = -0,1 \, \text{S} \\ \underline{Y}_{22} &= \frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{1+j}{10} = (0,1+j0,1) \, \text{S} \end{aligned} \right\} \rightarrow [\underline{Y}] = \begin{bmatrix} 0,1-j0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,1+j0,1 \end{bmatrix}$$

Ariketa-zenbakia: 7.2



$$[\underline{Y}] = \begin{bmatrix} 0,03-j0,09 & -0,02+j0,06 \\ -0,02+j0,06 & 0,08-j0,04 \end{bmatrix}$$

Irudiko atebikoaren admitantzia-parametroak jakinda:

1. Egiaztatu atebikoa elkarrekikoa eta simetrikoa den.

2. Elkarrekikoa izatekotan, kalkulatu atebikoaren II zirkuitu baliokidea.
3. Kalkulatu atebikoaren inpedantzia-parametroak.
4. Elkarrekikoa izanez gero, kalkulatu atebikoaren T zirkuitu baliokidea.
5. Kalkulatu atebikoaren transmisio-parametroak.

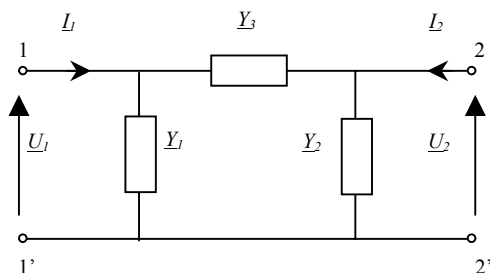
Ebazpena

1. $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -0,02 + j0,06 \rightarrow$ Atebikoa elkarrekikoa da.

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22} ?$$

$$(0,03 - j0,09) \neq (0,08 - j0,04) \rightarrow \text{Ez da simetrikoa.}$$

- 2.



$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12} = (0,03 - j0,09) + (-0,02 + j0,06)$$

$$\underline{Y}_1 = (0,01 - j0,03) \text{ S}$$

$$\underline{Y}_2 = \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12} = (0,08 - j0,04) + (-0,02 + j0,06)$$

$$\underline{Y}_2 = (0,06 + j0,02) \text{ S}$$

$$\underline{Y}_3 = -\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21} = (0,02 - j0,06) \text{ S}$$

3. Inpedantziaren matrizea admitantziarenaren alderantzizkoa izango da, eta matrize simetrikoa izango da (matrizea, ez atebikoa):

$$[\underline{Y}] = [\underline{Y}]'$$

$$\Delta Y = |\underline{Y}| = \begin{vmatrix} 0,03 - j0,09 & -0,02 + j0,06 \\ -0,02 + j0,06 & 0,08 - j0,04 \end{vmatrix} = (2 - j6) \cdot 10^{-3}$$

Beraz:

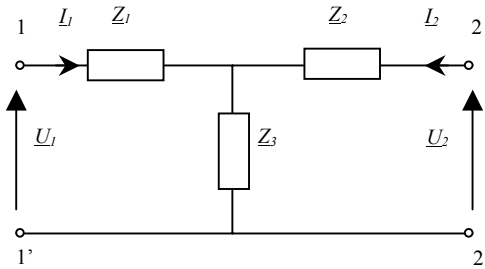
$$[\underline{Z}] = [\underline{Y}]^{-1} = \frac{[\underline{Y}]^{\text{t}}}{\Delta \underline{Y}} = \frac{[\underline{Y}]^{\text{a}}}{\Delta \underline{Y}} = \frac{1}{(2 - j6) \cdot 10^{-3}} \cdot \begin{bmatrix} 0,08 - j0,04 & 0,02 - j0,06 \\ 0,02 - j0,06 & 0,03 - j0,09 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 10 + j10 & 10 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

Edo, beste era batean, parametroen arteko erlazioak erabiliz:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \frac{\underline{Y}_{22}}{\Delta \underline{Y}} = \frac{0,08 - j0,04}{(2 - j6) \cdot 10^{-3}} = (10 + j10) \, \Omega \\ \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} &= \frac{-\underline{Y}_{12}}{\Delta \underline{Y}} = \frac{0,02 - j0,06}{(2 - j6) \cdot 10^{-3}} = 10 \, \Omega \\ \underline{Z}_{22} &= \frac{\underline{Y}_{11}}{\Delta \underline{Y}} = \frac{0,03 - j0,09}{(2 - j6) \cdot 10^{-3}} = 15 \, \Omega \end{aligned} \right\} \rightarrow [\underline{Z}] = \begin{bmatrix} 10 + j10 & 10 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

4.

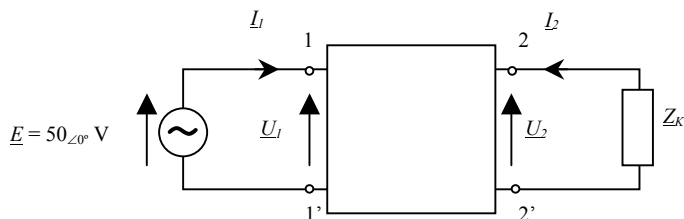


$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12} = (10 + j10) - 10 = j10 \, \Omega \\ \underline{Z}_2 &= \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} = 15 - 10 = 5 \, \Omega \\ \underline{Z}_3 &= \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = 10 \, \Omega \end{aligned}$$

5.

$$\left. \begin{aligned} \underline{A} &= \frac{-\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} = \frac{-(0,08 - j0,04)}{-0,02 + j0,06} = (1 + j) \\ \underline{B} &= \frac{-1}{\underline{Y}_{21}} = \frac{-1}{-0,02 + j0,06} = (5 + j15) \, \Omega \\ \underline{C} &= \frac{-\Delta \underline{Y}}{\underline{Y}_{21}} = \frac{-(2 - j6) \cdot 10^{-3}}{-0,02 + j0,06} = 0,1 \, \text{S} \\ \underline{D} &= \frac{-\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} = \frac{-(0,03 - j0,09)}{-0,02 + j0,06} = 1,5 \end{aligned} \right\} \rightarrow [\underline{T}] = \begin{bmatrix} 1 + j & 5 + j15 \\ 0,1 & 1,5 \end{bmatrix}$$

Ariketa-zenbakia: 7.3



$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} 5 + j10 & j5 \\ j5 & 5 + j5 \end{bmatrix}$$

Irudiko atebikoaren inpedantzia-parametroak jakinda, kalkulatu:

1. Atebikoa elkarrekikoa eta simetrikoa den.
2. Elkarrekikoa izatekotan, atebikoaren T eta Π zirkuitu baliokideak.
3. Potentzia maximoa transmititzeko behar den karga ($\underline{Z}_K$ inpedantzia).
4. Tentsio-irabazia, aurreko atalean kalkulaturako karga elikatzen denean.

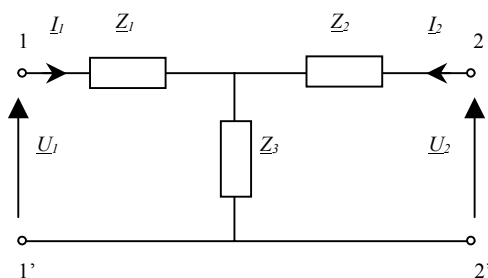
Ebazpena

1. $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = j5 \rightarrow$ Atebikoa elkarrekikoa da.

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} ?$$

$$(5 + j10) \neq (5 + j5) \rightarrow \text{Ez da simetrikoa.}$$

- 2.



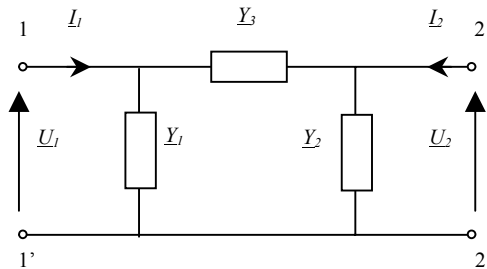
$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12} = (5 + j10) - j5 = (5 + j5)\Omega$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} = (5 + j5) - j5 = 5\Omega$$

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = j5\Omega$$

II zirkuitu baliokidea kalkulatzeko, admitantzia-parametroak erabiliko ditugu. Beraz:

$$\Delta Z = |\underline{Z}| = \begin{vmatrix} 5+j10 & j5 \\ j5 & 5-j5 \end{vmatrix} = j75 \rightarrow \begin{cases} \underline{Y}_{11} = \frac{\underline{Z}_{22}}{\Delta Z} = \frac{5+j5}{j75} = \left(\frac{1}{15} - j\frac{1}{15} \right) \text{ S} \\ \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = \frac{-\underline{Z}_{12}}{\Delta Z} = \frac{-j5}{j75} = \frac{-1}{15} \text{ S} \\ \underline{Y}_{22} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\Delta Z} = \frac{5+j10}{j75} = \left(\frac{2}{15} - j\frac{1}{15} \right) \text{ S} \end{cases}$$

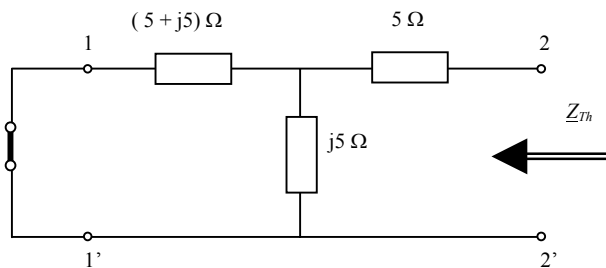


$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12} = \left(\frac{1}{15} - j\frac{1}{15} \right) + \left(\frac{-1}{15} \right) = -j\frac{1}{15} \text{ S}$$

$$\underline{Y}_2 = \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12} = \left(\frac{2}{15} - j\frac{1}{15} \right) + \left(\frac{-1}{15} \right) = \left(\frac{1}{15} - j\frac{1}{15} \right) \text{ S}$$

$$\underline{Y}_3 = -\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21} = \frac{1}{15} \text{ S}$$

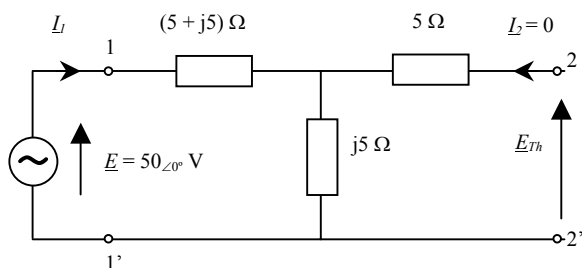
3. Potentzia maximoa transmititzeko, Theveninen zirkuitu baliokideko inpedantziaren konjokatua ipini beharko dugu.



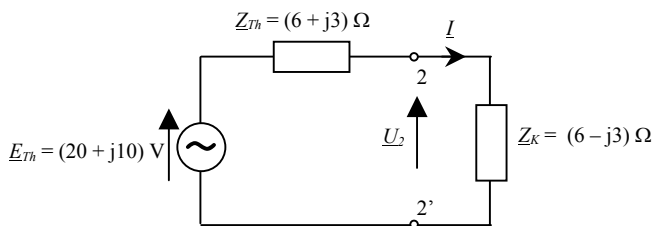
$$\underline{Z}_{Th} = 5 + \frac{(5+j5) \cdot j5}{5+j5+j5} = (6+j3) \Omega$$

$$\underline{Z}_K = \underline{Z}_{Th}^* = (6-j3) \Omega$$

4. Tentsio-irabazia atebikoaren sarrerako eta irteerako tentsioen arteko erlazioa da. Sarrerako tentsioa iturriarena da. Eta irteerakoa lortzeko, Theveninen zirkuitu baliokidea erabiliko dugu. Horregatik, Theveninen tentsioa ere kalkulatu beharko dugu.



$$\underline{E}_{Th} = j5 \cdot \frac{50 \angle 0^\circ}{5 + j5 + j5} = (20 + j10) \text{ V}$$



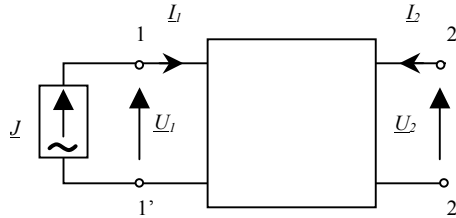
$$\underline{U}_2 = (6 - j3) \cdot \frac{20 + j10}{(6 + j3) + (6 - j3)}$$

$$\underline{U}_2 = 12,5 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Azkenik, tentsio-irabazia kalkulatu dugu:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{12,5 \angle 0^\circ}{50 \angle 0^\circ} = 0,25 \angle 0^\circ$$

Ariketa-zenbakia: 7.4



$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & 4,24 - j0,32 \\ \underline{C} & 1,12 - j0,16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

Irudiko atebikoa, elkarrekikoa eta simetrikoa, adierazitako ekuazio matritzialaren bidez definitzen da. Kalkulatu:

1. Atebikoaren T zirkuitu baliokidea.
2. Sarrerako atean $10 \angle 0^\circ$ A-ko korrante-iturri ideala konektatuz gero, zehaztu irteerako atean konektatu beharreko kargaren balioa, ahalik eta potentzia handiena transmiti dakion.
3. Aurreko ataleko kondizioetan transmititzen den potentzia.
4. Tentsio-irabazia, atebikoak hutsean lan egiten duenean.

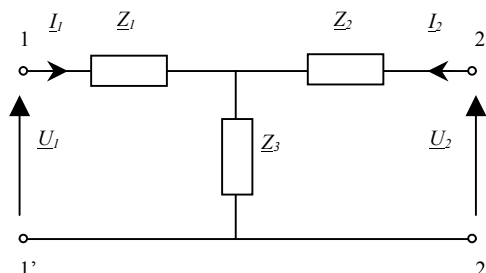
Ebazpena

1. Simetrikoa izateagatik: $\underline{A} = \underline{D} = 1,12 - j0,16$

Elkarrekikoa izateagatik:

$$\underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} = 1 \rightarrow \underline{C} = \frac{\underline{A} \cdot \underline{D} - 1}{\underline{B}} = \frac{(1,12 - j0,16) \cdot (1,12 - j0,16) - 1}{4,24 - j0,32} = (0,06 - j0,08) \text{ S}$$

Kasu honetan, atebiko simetrikoa izateagatik, $\underline{Z}_1$ eta $\underline{Z}_2$ berdinak izango dira.

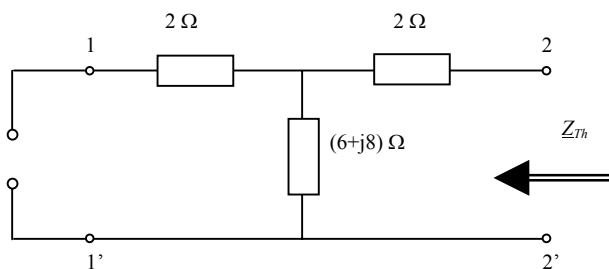


$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12} = \frac{A}{C} - \frac{1}{C} = \frac{A-1}{C}$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \frac{1,12 - j0,16 - 1}{0,06 - j0,08} = 2 \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \frac{1}{C} = \frac{1}{0,06 - j0,08} = (6 + j8) \Omega$$

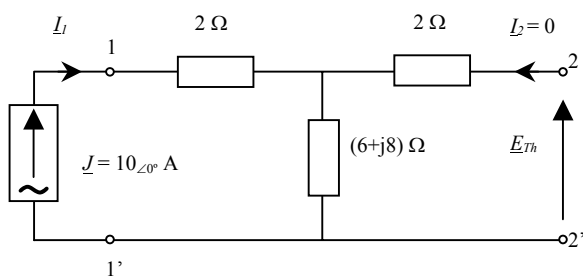
2. Potentzia maximoa transmititzeko ipini beharreko karga Theveninen zirkuitu baliokideko inpedantziaren konjokatua izango da. Balio hori kalkulatzeko, aurreko atalean lortutako T zirkuitu baliokideaz baliatuko gara.



$$\underline{Z}_{Th} = 2 + (6 + j8) = (8 + j8) \Omega$$

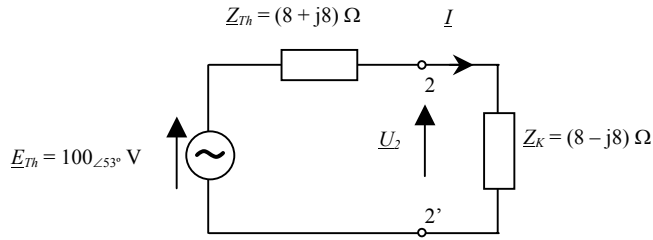
$$\underline{Z}_K = \underline{Z}_{Th}^* = (8 - j8) \Omega$$

3. Transmititzen den potentzia maximoa zirkuitua ebatziz lortuko dugu. Horretarako, Theveninen zirkuitu baliokidea erabiliko dugu.



$$\underline{E}_{Th} = 10 \angle 0^\circ \cdot (6 + j8)$$

$$\underline{E}_{Th} = (60 + j80) \text{ V} = 100 \angle 53^\circ \text{ V}$$



$$I = \frac{100 \angle 53^\circ}{(8 + j8) + (8 - j8)}$$

$$I = 6,25 \angle 53^\circ \text{ A}$$

$$P_{\max} = R_K \cdot I^2 = 8 \cdot (6,25)^2$$

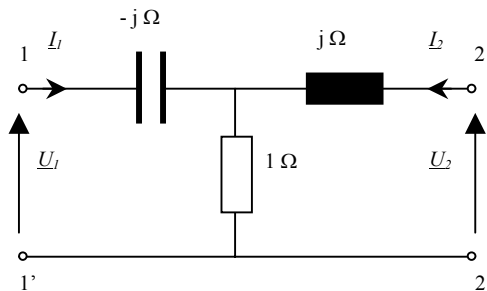
$$P_{\max} = 312,5 \text{ W}$$

4. Azkenik, atebikoak hutsean lan egiten dueneko tentsio-irabazia kalkulatu dugu:

$$\underline{U}_1 = \underline{A} \cdot \underline{U}_2 - \underline{B} \cdot \underline{I}_2 \xrightarrow{\underline{I}_2=0} \underline{U}_1 = \underline{A} \cdot \underline{U}_2$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{\underline{A}} = \frac{1}{1,12 - j0,16} = 0,875 + j0,125 = 0,88 \angle 8,13^\circ$$

Ariketa-zenbakia: 7.5



Irudikoa atebiko baten T zirkuitu baliokidea dugu. Eman:

1. Atebikoaren admitantzia-parametroak.
2. Atebiko horren Π zirkuitu baliokidea.

3. Atebikoaren transmisio-parametroak.
4. Tentsio-irabazia, 2-2' atea zabalik dagoenean.

Ebazpena

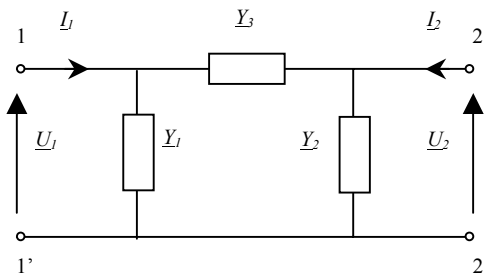
1. Lehenik eta behin, atebiko elkarrekiko honen inpedantzia-parametroak kalkulatu ditugu

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 = -j + 1 = (1-j)\Omega \\ \underline{Z}_{22} &= \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = j + 1 = (1+j)\Omega \\ \underline{Z}_{12} &= \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_3 = 1\Omega \end{aligned} \right\} \rightarrow [\underline{Z}] = \begin{bmatrix} 1-j & 1 \\ 1 & 1+j \end{bmatrix}$$

Admitantzia-parametroak kalkulatzeko, inpedantzia-parametroen matrizea alderantzikatuko dugu. Izan ere, horren simetria aprobetxatuz, eragiketa hau oso erraz egin daiteke.

$$\Delta Z = |\underline{Z}| = \begin{vmatrix} 1-j & 1 \\ 1 & 1+j \end{vmatrix} = 1 \rightarrow [\underline{Y}] = [\underline{Z}]^{-1} = \frac{[\underline{Z}]^a}{\Delta Z} = \frac{[\underline{Z}]^a}{1} = \begin{bmatrix} 1+j & -1 \\ -1 & 1-j \end{bmatrix}$$

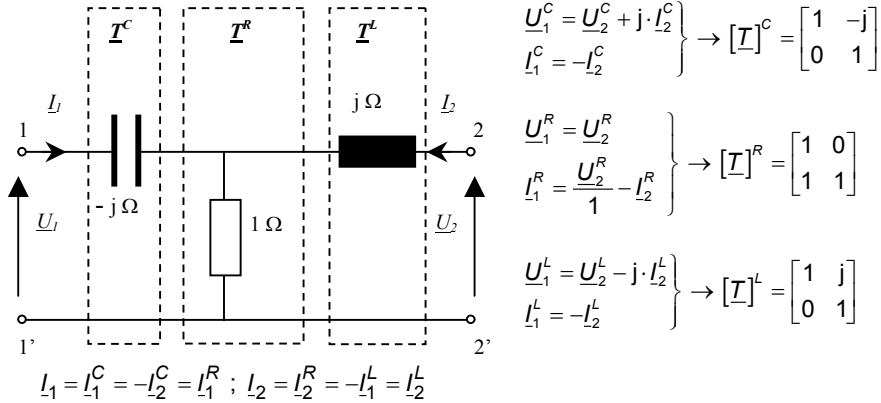
2.



$$\begin{aligned} \underline{Y}_1 &= \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12} = (1+j) - 1 = j \text{ S} \\ \underline{Y}_2 &= \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12} = (1-j) - 1 = -j \text{ S} \\ \underline{Y}_3 &= -\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21} = -(-1) = 1 \text{ S} \end{aligned}$$

3. Behin Z eta Y parametroak ezaguturik, gainerako parametroak euren arteko erlazioak erabiliz kalkula ditzakegu. Horrela, transmisio-parametroak Z edo Y parametroetatik abiatuta kalkula ditzakegu.

Baina, kasu honetan, jatorrizko zirkuitua katean konektaturiko hiru atebikotan zatituko dugu. Oinarrizko atebiko horiek jatorrizko zirkuituko elementu bana hartuko dute.



Orain, jatorrizko atebikoaren transmisio-parametroak kalkulatzeko:

$$[\underline{T}] = [\underline{T}]^C \cdot [\underline{T}]^R \cdot [\underline{T}]^L = \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-j & 1 \\ 1 & 1+j \end{bmatrix}$$

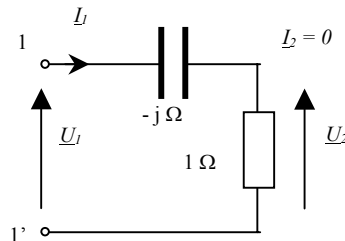
$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-j & 1 \\ 1 & 1+j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \underline{U}_1 = (1-j) \cdot \underline{U}_2 - \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{U}_2 - (1+j) \cdot \underline{I}_2 \end{cases}$$

4. Tentsio-irabazia bi eratan lor dezakegu. Lehenengoan, kalkulaturako parametroez baliatuko gara.

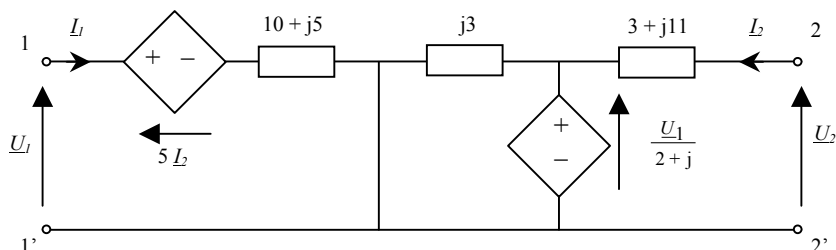
$$\left. \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{U}_2}{(1-j) \cdot \underline{U}_2 - \underline{I}_2} \bigg|_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{U}_2}{(1-j) \cdot \underline{U}_2} = \frac{1}{1-j} = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle 45^\circ$$

Bigarreanean, berriz, zirkuitua bera hartuko dugu kalkulu-oinarri. Horretarako, zirkuitua sinplifikatuko dugu, $\underline{I}_2$ korrontea nulua dela kontutan hartuz.

$$\left. \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{1 \cdot \underline{I}_1}{(1-j) \cdot \underline{I}_1} = \frac{1}{1-j} = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle 45^\circ$$



Ariketa-zenbakia: 7.6



Irudian agertzen dena bezalako bi atebiko dauzkagu. Zehaztu:

1. Atebikoen ekuazioak, inpedantzia-parametroen funtzioan.
2. Elkarrekikoak izanez gero, atebikoen T zirkuitu baliokidea.
3. Jatorrizko atebikoak katean konektatuz gero, elkarketaren transmisio-parametroak.
4. Sarrerako inpedantzia, korrante-irabazia eta tentsio-irabazia, aurreko ataleko elkarketaren irteeran $(5 - j20) \Omega$ -eko karga konektatzen bada.

Ebazpena

1.

$$\underline{Z}_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \left. \frac{5 \cdot I_2 + (10 + j5) \cdot I_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \left. \frac{0 + (10 + j5) \cdot I_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = (10 + j5) \Omega$$

$$\underline{Z}_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = \left. \frac{5 \cdot I_2 + (10 + j5) \cdot I_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = \left. \frac{5 \cdot I_2 + 0}{I_2} \right|_{I_1=0} = 5 \Omega$$

$$\underline{Z}_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \left. \frac{\frac{U_1}{2+j} + (3 + j11) \cdot I_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \left. \frac{\frac{5 \cdot I_2 + (10 + j5) \cdot I_1}{2+j} + (3 + j11) \cdot I_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = 5 \Omega$$

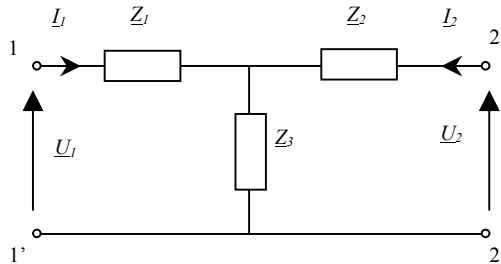
$$\underline{Z}_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = \left. \frac{\frac{5 \cdot I_2 + (10 + j5) \cdot I_1}{2+j} + (3 + j11) \cdot I_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = \left. \frac{5}{2+j} + (3 + j11) \right|_{I_1=0} = (5 + j10) \Omega$$

Beraz, ekuazio matritziala hau izango da inpedantzia-parametroen funtziopean:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + j5 & 5 \\ 5 & 5 + j10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

Atebiko elkarrekikoa da, baina ez simetrikoa.

2.

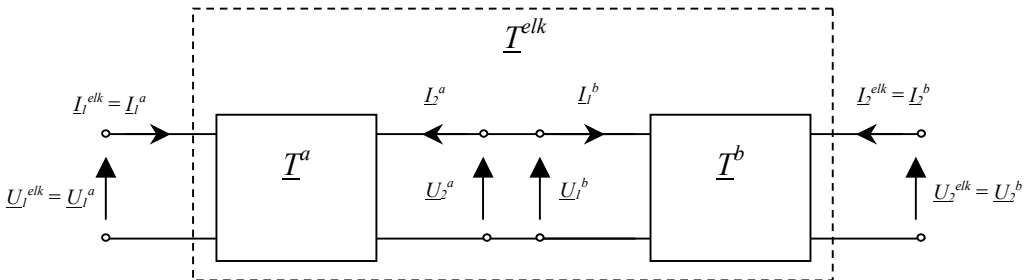


$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12} = (10 + j5) - 5 = (5 + j5) \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} = (5 + j10) - 5 = j10 \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = 5 \Omega$$

3. Orain, jatorrizko atebikoak katean konektaturik daude.



$$[\underline{T}]^{elk} = [\underline{T}]^a \cdot [\underline{T}]^b = [\underline{T}] \cdot [\underline{T}]$$

Elkarketaren parametroak kalkulatzeko, transmisio-parametroak erabili behar ditugu.

$$\Delta Z = |\underline{Z}| = \begin{vmatrix} 10 + j5 & 5 \\ 5 & 5 + j10 \end{vmatrix} = 25 \cdot (-1 + j5)$$

$$\left[\begin{array}{ll} \underline{A} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} = \frac{10 + j5}{5} = (2 + j) & \underline{B} = \frac{\Delta Z}{\underline{Z}_{21}} = \frac{25 \cdot (-1 + j5)}{5} = (-5 + j25) \Omega \\ \underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_{21}} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ S} & \underline{D} = \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} = \frac{5 + j10}{5} = (1 + j2) \end{array} \right]$$

Beraz:

$$[\underline{T}]^{elk} = \begin{bmatrix} 2 + j & -5 + j25 \\ 0,2 & 1 + j2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 + j & -5 + j25 \\ 0,2 & 1 + j2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + j9 & -90 + j60 \\ 0,6 + j0,6 & -4 + j9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1^{elk} \\ \underline{I}_1^{elk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + j9 & -90 + j60 \\ 0,6 + j0,6 & -4 + j9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2^{elk} \\ -\underline{I}_2^{elk} \end{bmatrix}$$

4. Eskatutako erlazioak kalkulatzeko, atebikoen elkarketaren ekuazioei irteerako ekuazioa gehituz lortzen den ekuazio-sistema erabiliko dugu.

$$\underline{U}_1^{elk} = (2 + j9) \cdot \underline{U}_2^{elk} - (-90 + j60) \cdot \underline{I}_2^{elk}$$

$$\underline{I}_1^{elk} = (0,6 + j0,6) \cdot \underline{U}_2^{elk} - (-4 + j9) \cdot \underline{I}_2^{elk}$$

$$\underline{U}_2^{elk} = -\underline{Z}_K \cdot \underline{I}_2^{elk} = -(5 - j20) \cdot \underline{I}_2^{elk} = (-5 + j20) \cdot \underline{I}_2^{elk}$$

Azken ekuazio horrek ematen duen tentsioaren adierazpena lehenengo bietan ordezkatzuz:

$$\underline{U}_1^{elk} = (2 + j9) \cdot (-5 + j20) \cdot \underline{I}_2^{elk} - (-90 + j60) \cdot \underline{I}_2^{elk} = (-100 - j65) \cdot \underline{I}_2^{elk}$$

$$\underline{I}_1^{elk} = (0,6 + j0,6) \cdot (-5 + j20) \cdot \underline{I}_2^{elk} - (-4 + j9) \cdot \underline{I}_2^{elk} = -11 \cdot \underline{I}_2^{elk}$$

Beraz, sarrerako inpedantzia:

$$\underline{Z}_{IN} = \frac{\underline{U}_1^{elk}}{\underline{I}_1^{elk}} = \frac{(-100 - j65) \cdot \underline{I}_2^{elk}}{-11 \cdot \underline{I}_2^{elk}} = \left(\frac{100}{11} + j \frac{65}{11} \right) \Omega = 10,843 \angle 33^\circ \Omega$$

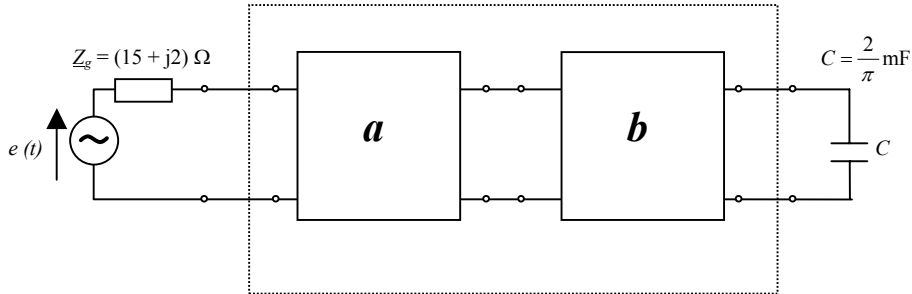
Korrente-irabazia:

$$\frac{\underline{I}_2^{elk}}{\underline{I}_1^{elk}} = \frac{\underline{I}_2^{elk}}{-11 \cdot \underline{I}_2^{elk}} = -\frac{1}{11}$$

Eta tentsio-irabazia:

$$\frac{\underline{U}_2^{elk}}{\underline{U}_1^{elk}} = \frac{-(5 - j20) \cdot \underline{I}_2^{elk}}{(-100 - j65) \cdot \underline{I}_2^{elk}} = -\left(\frac{32}{569} + j \frac{93}{569} \right)$$

Ariketa-zenbakia: 7.7



$$e(t) = 230\sqrt{2} \cdot \cos(100\pi t) \text{ V}$$

Non irudiko atebikoak honako parametro hauekin definitu baitira:

$$[\underline{Y}]^a = \begin{bmatrix} 5 & 1-j \\ j & 1 \end{bmatrix}; [\underline{g}]^b = \begin{bmatrix} 0 & -j2 \\ 5 & 10-j5 \end{bmatrix}$$

Aurreko atebikoak irudian adierazten den moduan konektaturik badaude, zehaztu:

1. Elkarketaren transmisio-parametroak.
2. Elkarketaren sarrerako inpedantzia, korrante-irabazia eta tentsio-irabazia.

Ebazpena

1. Elkarketaren parametroak kalkulatzeko, zirkuitua sinplifikatu beharko dugu. “a” eta “b” atebikoak katean loturik dauzkagu, lehenengoaren artea bigarrenaren sarrerarekin konektatuta baitago.

$$[\underline{T}] = [\underline{T}]^a \cdot [\underline{T}]^b$$

Orduan, “a” eta “b” atebikoen transmisio-parametroak kalkulatu beharko ditugu:

$$\Delta Y^a = |\underline{Y}|^a = \begin{vmatrix} 5 & 1-j \\ j & 1 \end{vmatrix} = 4 - j$$

$$\begin{bmatrix} \underline{A}^a = \frac{-Y_{22}^a}{Y_{21}^a} = \frac{-1}{j} = j & \underline{B}^a = \frac{-1}{Y_{21}^a} = \frac{-1}{j} = j\Omega \\ \underline{C}^a = \frac{-\Delta Y^a}{Y_{21}^a} = \frac{-(4-j)}{j} = (1+j4)\text{S} & \underline{D}^a = \frac{-Y_{11}^a}{Y_{21}^a} = \frac{-5}{j} = j5 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \underline{g}^b = |\underline{g}|^b = \begin{vmatrix} 0 & -j2 \\ 5 & 10 - j5 \end{vmatrix} = j10 \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{A}^b = \frac{1}{\underline{g}_{21}^b} = \frac{1}{5} & \underline{B}^b = \frac{\underline{g}_{22}^b}{\underline{g}_{21}^b} = \frac{10 - j5}{5} = (2 - j)\Omega \\ \underline{C}^b = \frac{\underline{g}_{11}^b}{\underline{g}_{21}^b} = 0 \text{ S} & \underline{D}^b = \frac{\Delta \underline{g}^b}{\underline{g}_{21}^b} = \frac{j10}{5} = j2 \end{bmatrix}$$

Eta elkarketaren transmisio-parametroak:

$$[\underline{T}]^{\text{elk}} = [\underline{T}]^a \cdot [\underline{T}]^b = \begin{bmatrix} j & j \\ 1 + j4 & j5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 2 - j \\ 0 & j2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\frac{1}{5} & -1 + j2 \\ \frac{1 + j4}{5} & -4 + j7 \end{bmatrix}$$

2. Elkarketatik sortutako atebikoaren ekuazioez gain, irteerakoa erabiliko dugu sarrerako inpedantzia, korrante-irabazia eta tentsio-irabazia kalkulatzeko.

$$\underline{Z}_K = -j \frac{1}{\omega \cdot C} = -j \frac{1}{100\pi \cdot (2/\pi) \cdot 10^{-3}} = -j5 \Omega$$

$$\underline{U}_2 = -\underline{Z}_K \cdot \underline{I}_2 = -(-j5) \cdot \underline{I}_2 = j5 \cdot \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_1 = j0,2 \cdot \underline{U}_2 - (-1 + j2) \cdot \underline{I}_2 = j0,2 \cdot (j5 \cdot \underline{I}_2) - (-1 + j2) \cdot \underline{I}_2 = -j2 \cdot \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = (0,2 + j0,8) \cdot \underline{U}_2 - (-4 + j7) \cdot \underline{I}_2 = (0,2 + j0,8) \cdot (j5 \cdot \underline{I}_2) + (4 - j7) \cdot \underline{I}_2 = -j6 \cdot \underline{I}_2$$

Beraz, sarrerako inpedantzia:

$$\underline{Z}_{IN} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{-j2 \cdot \underline{I}_2}{-j6 \cdot \underline{I}_2} = \frac{1}{3} \Omega$$

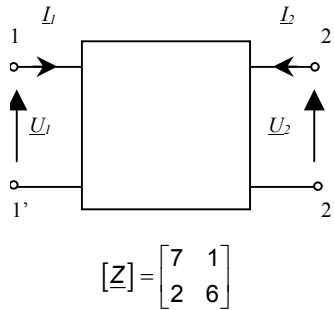
Korrante-irabazia:

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{I}_2}{-j6 \cdot \underline{I}_2} = j \frac{1}{6}$$

Eta tentsio-irabazia:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{j5 \cdot \underline{I}_2}{-j2 \cdot \underline{I}_2} = -2,5$$

Ariketa-zenbakia: 7.8



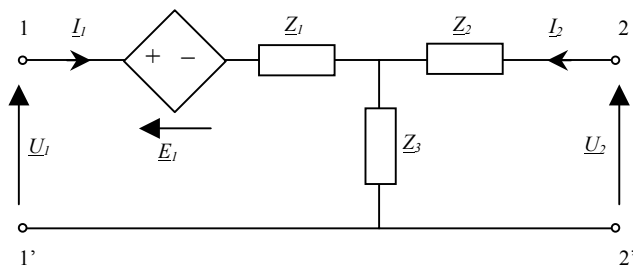
Irudiko atebikoaren Z parametroak jakinda, zehaztu:

1. Atebiko elkarrekikoa da? Atebiko simetrikoa da?
2. Atebikoaren T zirkuitu eroankor baliokide bat. Beharrezkoa izanez gero, erabili tentsio- edo korrante-sorgailu menpekoak.

Ebazpena

1. Atebikoa ez da elkarrekikoa ($\underline{Z}_{12} \neq \underline{Z}_{21}$), beraz, ezta simetrikoa ere.
2. Atebikoa elkarrekikoa ez denez, ezin dugu T zirkuitu baliokide simetrikorik eraiki haren portaera adierazteko. Izan ere, T-ren adar batean sorgailu menpekoak agertuko dira, eta simetria galduko da.

Horrela, tentsio-iturri menpekoe kokatuko dugu adar batean eta, atebikoren ekuazioek ematen diguten informazioa kontuan izanda, zirkuitu baliokide asimetriko horren parametroak definituko ditugu.



Zirkuitu horretan, erlazio hauek betetzen dira:

$$\underline{U}_1 = \underline{E}_1 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$$

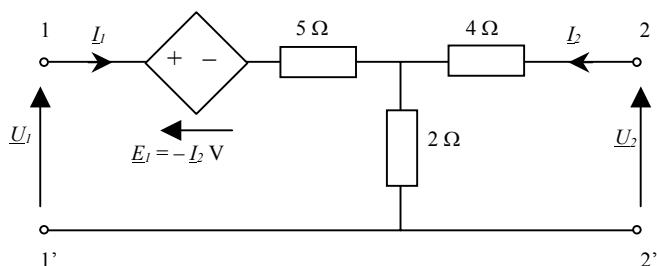
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$$

Orain, zirkuitu baliokidearen legeak atebikoaren ekuazioekin alderatuz:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \cdot \underline{I}_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \underline{Z}_3 = \underline{Z}_{21} = 2 \Omega \\ (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = \underline{Z}_{22} \rightarrow \underline{Z}_2 = \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_3 = 6 - 2 = 4 \Omega \end{cases}$$

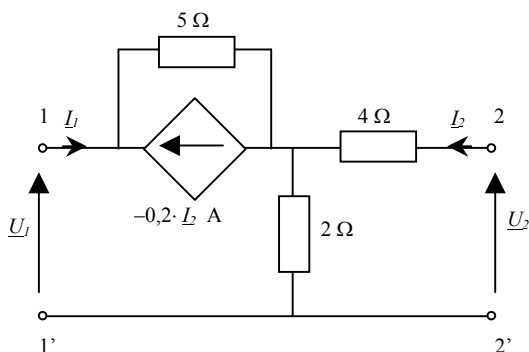
$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_1 &= (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_2 + \underline{E}_1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 = \underline{Z}_{11} \rightarrow \underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_3 = 7 - 2 = 5 \Omega \\ \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_2 + \underline{E}_1 = \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{E}_1 = (\underline{Z}_{12} - \underline{Z}_3) \cdot \underline{I}_2 = (1 - 2) \cdot \underline{I}_2 = -\underline{I}_2 \text{ V} \end{cases}$$

Orduan, honako hau izango da emandako atebikoarentzako T zirkuitu baliokidea.

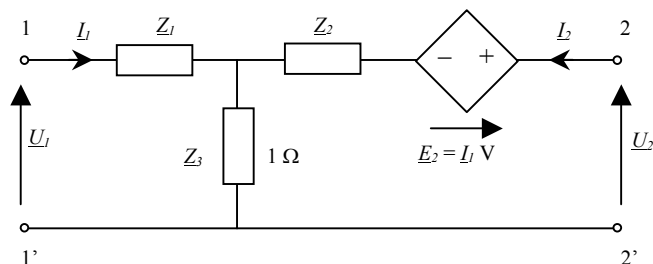


Zirkuitu horren tentsio-iturria korronte-iturri bihurtuz, beste zirkuitu baliokide bat lortuko dugu.

$$\underline{J}_1 = \frac{\underline{E}_1}{5} = \frac{-\underline{I}_2}{5} = -0,2 \cdot \underline{I}_2 \text{ A}$$



Prozedura bera jarraitzen badugu, tentsio-iturri menpekoa iteerako adarrean kokatuz, beste bi zirkuitu baliokide lor ditzakegu.



$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_{12} = 1\Omega$$

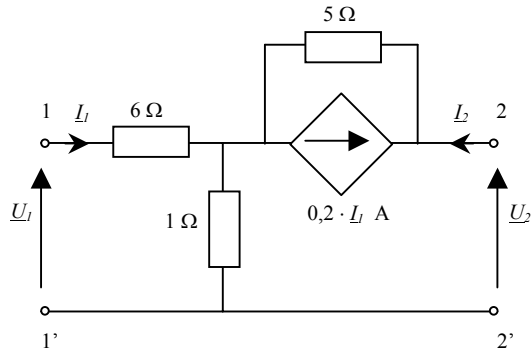
$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_3 = 7 - 1 = 6\Omega$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_3 = 6 - 1 = 5\Omega$$

$$\underline{E}_2 = (\underline{Z}_{21} - \underline{Z}_3) \cdot \underline{I}_1 = (2 - 1) \cdot \underline{I}_1$$

$$\underline{E}_2 = \underline{I}_1 \text{ V}$$

$$\underline{J}_2 = \frac{\underline{E}_2}{5} = \frac{\underline{I}_1}{5} = 0,2 \cdot \underline{I}_1 \text{ A}$$



Ariketa-zenbakia: 7.9

500 kVA, 15000/3000 V eta 50 Hz-eko transformadore monofasiko batekin zirkuitu irekiko eta zirkuitu laburreko saiakuntzak egitean, honako emaitza hauek neurtu dira:

- Zirkuitu irekiko saiakuntzan (tentsio altuko harilkaduran neurtuak): 15 kV; 1,67 A eta 4 kW
- Zirkuitu laburreko saiakuntzan (tentsio altuko harilkaduran neurtuak hauek ere): 750 V; 33,33 A eta 10 kW

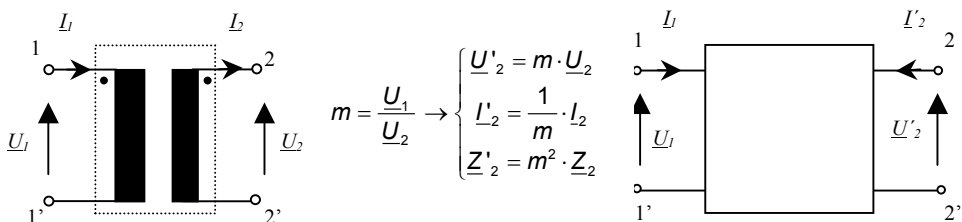
Zehaztu:

1. Transformadorearen portaera adierazten duen atebiko elkarrekiko eta simetrikoaren transmisio-parametroak.
2. Transformadorearen T zirkuitu baliokidea.
3. Tentsio altuko harilkadura tentsio izendatuaz elikatuz gero, zein korrante xurgatuko du transformadoreak, sekundarioan $(24 + j16) \Omega$ -eko karga konektatzen denean? Zein izango da sekundarioko tentsioa?

Ebazpena

1. Transformadore baten portaera atebiko elkarrekiko eta simetrikoko baten bidez adieraz daiteke. Hori egitean, transformadore barruan gertatzen diren fenomeno magnetikoak elementu elektrikoak soilik erabiliz adierazten dira.

Bestalde, transformadore bat bere atebiko edo zirkuitu elektriko baliokideaz ordezkatzean, kontuan izan beharko dugu azken horietan sekundarioko magnitudeak primarioarekiko emanda daudela. Hau da, eskalaz aldatuko ditugu zirkuitu baliokidean ipintzeko.



Zirkuitulabur eta hutseko inpedantziak saiakuntza bietan irakurritako neurketei esker lortuko ditugu, jarraian adierazten den moduan:

$$\underline{Z}_{10} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{15.000}{1,67} \angle \varphi_0 = 8.982 \angle 80,81^\circ = (1.434,5 + j8.866,7) \Omega$$

$$\varphi_0 = \arctg \frac{4.000}{15.000 \cdot 1,67} = +80,81^\circ$$

$$\underline{Z}_{1ZL} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = \frac{750}{33,33} \angle \varphi_{ZL} = 22,5 \angle 66,42^\circ = (9 + j20,62) \Omega$$

$$\varphi_{ZL} = \arctg \frac{10.000}{750 \cdot 33,33} = +66,42^\circ$$

Behin inpedantzia bi horiek jakinda, elkarrekikoa, lineala eta simetrikoa den atebiko baten transmisio-parametroak kalkula ditzakegu.

$$\left. \begin{array}{l} \underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} \\ \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{A} = \underline{D} \\ \Delta T = 1 \rightarrow \underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} = \underline{A}^2 - \underline{B} \cdot \underline{C} = 1 \end{array} \right.$$

Bestalde:

$$\underline{Z}_{10} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \left. \frac{A \cdot U_2 - B \cdot I_2}{C \cdot U_2 - D \cdot I_2} \right|_{I_2=0} = \frac{A \cdot U_2}{C \cdot U_2} = \frac{A}{C} \rightarrow \underline{C} = \frac{A}{\underline{Z}_{10}}$$

$$\underline{Z}_{1ZL} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = \left. \frac{A \cdot U_2 - B \cdot I_2}{C \cdot U_2 - D \cdot I_2} \right|_{U_2=0} = \frac{-B \cdot I_2}{-D \cdot I_2} = \frac{B}{D} = \frac{B}{A} \rightarrow \underline{B} = A \cdot \underline{Z}_{1ZL}$$

Beraz:

$$1 = \underline{A}^2 - \underline{B} \cdot \underline{C} = \underline{A}^2 - (A \cdot \underline{Z}_{1ZL}) \cdot \left(\frac{A}{\underline{Z}_{10}} \right) = \underline{A}^2 \cdot \left(1 - \frac{\underline{Z}_{1ZL}}{\underline{Z}_{10}} \right) \rightarrow \underline{A}^2 = \frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1ZL}}$$

$$\underline{A}^2 = \frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1ZL}} = \frac{1.434,5 + j8.866,7}{(1.434,5 + j8.866,7) + (9 + j20,62)} = 1,0024 \angle -0,036^\circ$$

Orduan, transmisio-parametroak:

$$\underline{A} = \underline{D} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\underline{A}| = \sqrt{1,0024} \\ \arg(\underline{A}) = \frac{-0,036^\circ}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \underline{A} = \underline{D} = 1,0012 \angle -0,018^\circ$$

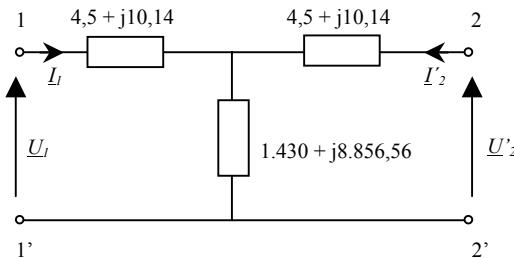
$$\underline{B} = A \cdot \underline{Z}_{1ZL} = (1,0012 \angle -0,018^\circ) \cdot (22,5 \angle 66,42^\circ) = 22,527 \angle 66,384^\circ \Omega$$

$$\underline{C} = \frac{A}{\underline{Z}_{10}} = \frac{1,0012 \angle -0,018^\circ}{8.982 \angle 80,81^\circ} = \frac{1}{8.971} \angle -80,828^\circ \text{ S}$$

2. Impedantzia-parametroak:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} = \frac{A}{C} = \underline{Z}_{10} = 8.982 \angle 80,81^\circ = (1.434,5 + j8.866,7) \Omega$$

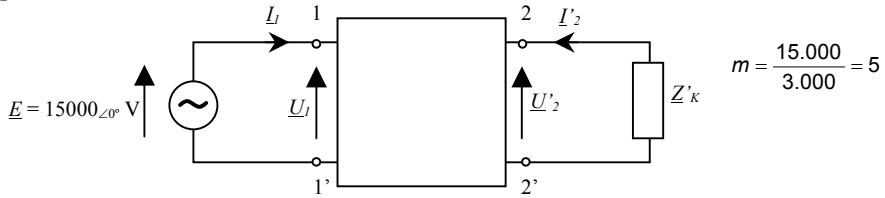
$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \frac{1}{C} = 8.971 \angle 80,828^\circ = (1.430 + j8.856,56) \Omega$$



$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12} = (4,5 + j10,14) \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = (1.430 + j8.856,56) \Omega$$

3.-



$$\underline{Z}'_K = m^2 \cdot \underline{Z}_K = 5^2 \cdot (24 + j16) = 600 + j400 = 721_{\angle 33,69^\circ} \Omega$$

Atebikoaren ekuazioak T parametroen funtzioan idazten baditugu:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A} \cdot \underline{U}'_2 - \underline{B} \cdot \underline{I}'_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{C} \cdot \underline{U}'_2 - \underline{D} \cdot \underline{I}'_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A} \cdot \underline{U}'_2 - \underline{B} \cdot \left(-\frac{\underline{U}'_2}{\underline{Z}'_K} \right) = \left(\underline{A} + \frac{\underline{B}}{\underline{Z}'_K} \right) \cdot \underline{U}'_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{C} \cdot \underline{U}'_2 - \underline{D} \cdot \left(-\frac{\underline{U}'_2}{\underline{Z}'_K} \right) = \left(\underline{C} + \frac{\underline{D}}{\underline{Z}'_K} \right) \cdot \underline{U}'_2 \end{cases}$$

Lehenengo ekuazioarekin, sekundarioko tentsioa kalkulatu dugu:

$$15.000_{\angle 0^\circ} = \left(1,0012_{\angle -0,018^\circ} + \frac{22,527_{\angle 66,384^\circ}}{600 + j400} \right) \cdot \underline{U}'_2 \rightarrow \underline{U}'_2 = 14.595_{\angle 2,05^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{m} \cdot \underline{U}'_2 = \frac{1}{5} \cdot 14.595_{\angle 2,05^\circ} = 2.919_{\angle 2,05^\circ} \text{ V}$$

Bigarrenarekin, berriz, transformadoreak primariotik xurgatzen duen korrontea lortu dugu:

$$\underline{I}_1 = \left(\frac{1}{8.971_{\angle -80,828^\circ}} + \frac{1,0012_{\angle -0,018^\circ}}{600 + j400} \right) \cdot 1.495_{\angle 2,05^\circ} = 21,46_{\angle 2,05^\circ} \text{ A}$$

8

Egoera iragankorra

8.1 LEHEN ORDENAKO ZIRKUITUAK EGOERA IRAGANKORREAN

Zirkuitu bateko magnitudeak, tentsio eta korronteak, balioz aldatzen direnean, zirkuitu hori erregimen edo egoera iragankorrean dagoela esaten da. Zirkuitu horretako elementu baten ezaugarriak aldatzean, egoera egonkorra galduko da eta, behar diren tentsio-korrante aldaketen ostean, beste erregimen batean lortuko da berriro oreka. Bi erregimen horien arteko tarteari egoera iragankorra esaten zaio.

Egoera iragankorrean gertatzen diren magnitude-aldaketak ekuazio diferentzial baten bidez adieraz daitezke. Elementu metatzaile bakarra dagoenean, lehen ordenakoa izango da ekuazio hori, eta lehen ordenako zirkuitua dela esango dugu:

$$\frac{df(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot f(t) = g(t)$$

- Non:
- $f(t)$ —→ Zirkuituko tentsioa, korrantea...
 - $g(t)$ —→ Zirkuituko kitzikapena.
 - τ —→ Zirkuituko denbora-konstantea.

Zirkuituko denbora-konstantea kalkulatzeko:

- RC zirkuituetan: $\tau = R \cdot C$ R : Elementu metatzailearen borneen artetik ikusten den erresistentzia baliokidea.
- RL zirkuituetan: $\tau = \frac{L}{R}$ C : Kondentsadorearen kapazitatea.
 L : Harilaren autoindukzio-koefizientea.

Zirkuituaren jokabidea definitzen duen ekuazio diferentziala ebaztean, bi osagaiko emaitza izango dugu: ekuazio homogeneorako emaitza ($f_h(t)$) eta emaitza partikularra ($f_p(t)$), hain zuzen ere. Lehenengoa erregimen iragankorrarekin lotuta dago, eta zirkuituaren ezaugarrien arabera izango da. Bigarrenak, berriz, kitzikapena hartuko du kontuan, eta egoera egonkorreko emaitza emango digu.

$$\frac{df(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot f(t) = g(t) \rightarrow f(t) = f_h(t) + f_p(t)$$

Ekuazio homogeneorako emaitza:

$$\frac{df(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot f(t) = 0 \rightarrow f(t) = k \cdot e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}$$

Bestalde, emaitza partikularra egoera egonkor berrirako emaitza izango da, eta zirkuituen teoriako legeak eta teoremak aplikatuz kalkulatuko dugu:

$$f_p(t) = f_{\infty}(t)$$

Beraz:

$$f(t) = f_h(t) + f_p(t) = k \cdot e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} + f_{\infty}(t)$$

Eta k konstantea definitzeko, hasierako kondizioez baliatuko gara:

$$t = t_0 \rightarrow f(t_0) = f_h(t_0) + f_p(t_0) = k \cdot e^{-\frac{1}{\tau} \cdot 0} + f_{\infty}(t_0) = k + f_{\infty}(t_0)$$

$$k = f(t_0) - f_{\infty}(t_0)$$

Horrela:

$$f(t) = (f(t_0) - f_{\infty}(t_0)) \cdot e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} + f_{\infty}(t)$$

Edo normalean erabiliko dugun moduan:

$$f(t) = f_{\infty}(t) - (f_{\infty}(t_0) - f(t_0)) \cdot e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}$$

Hortaz, lehen ordenako zirkuiturako emaitzak bi atal ditu:

- Atal egonkor edo iraunkorra: zirkuituen teorian jorratzen dena. Egoera iragankorreko aldakuntza pasatu ostean geratzen dena.
- Atal iragankorra: berretzaile negatiboko esponentziala (beherantz doan esponentziala) denez, denbora aurrera joan ahala, gero eta txikiagoa izango dugu. Nulua edo baztergarria denean, egoera iragankorra amaitutzat hartuta, zirkuitua erregimen egonkorrera helduko da.

Zirkuituko aldagai guztiak esponentzial bera jarraituz aldatuko dira egoera iragankorrean. Eta horren ondorioz, denek denbora berean lortuko dute egonkortasuna. Emaitza iraunkorra eta hasierako balioa, berriz, ezberdinak izango dira aldagai bakoitzeko.

Egoera iragankorra betetzeko behar den denbora zirkuituko parametroen funtzioa da, eta bere iraupena 5τ dela onartzen da. Beraz, zenbat eta denbora-konstante txikiagoa, orduan eta laburragoa izango da zirkuituko egoera iragankorra.

Horrela, lehen ordenako zirkuituetarako emaitza iragankorra lortzeko:

- Hasierako balioa kalkulatu dugu: $f(t_0)$.
- Egoera egonkorra ebatziko dugu, bertako emaitza kalkulatzeko: $f_{\infty}(t)$.
- Egoera egonkorreko emaitza tartearen hasierako unerako zehaztuko da. $f_{\infty}(t_0)$
- Zirkuituko denbora konstantea definituko da: τ .

Tentsio edo korronteen hasierako balioak kalkulatzekoan, kondentsadore eta harilen izaera kontuan hartu behar dugu:

- Kondentsadore batean borneen arteko tentsioa ezin da bat-batean aldatu. Beraz: $u_c(t_0^+) = u_c(t_0^-)$
- Haril batean zehar zirkulatzen duen korrontea ezin da bat-batean aldatu. Beraz: $i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-)$

Bestalde, zirkuitu linealetan, elikatze-iturria korrante alternokoa edo korrante zuzenokoa ez denean, emaitza lortzeko, ondoko hau hartu beharko da kontuan:

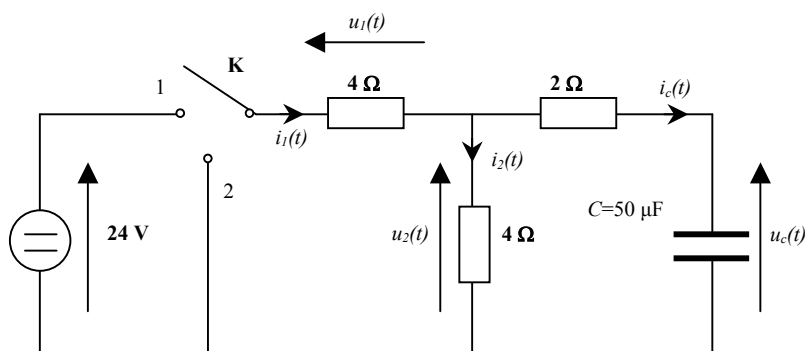
- Ekuazio diferentzial linealetan, emaitza iraunkorra elikadurarekiko eta haren deribatuekiko proportzionalak diren terminoez osatuta dago.

$$f_p(t) = f_{\infty}(t) = k_0 \cdot g(t) + k_1 \cdot \frac{dg(t)}{dt} + k_2 \cdot \frac{d^2g(t)}{dt^2} + \dots$$

- Aurreko adierazpenean agertzen diren proportzionaltasun-konstanteak definitzeko, zirkuituaren ekuazio diferentziala erabiliko dugu. Azken finean, emaitza iraunkorrak ere edozein egoeratan zirkuituaren jokabidea adierazten duen ekuazio hori bete behar du.

Azkenik, zirkuitu baten jokabidea egoera iragankorrean kalkulatzeko, zirkuituen metodo eta lege orokorrak aplikatu ahal izango ditugu, hau da, erregimen egonkorreko berezitasunak kontuan izanda definitu ez direnak. Esate baterako, Ohm-en eta Kirchoff-en legeak, sare eta korapiloen metodoak, kondentsadore eta harilen oinarritzko adierazpenak eta abar.

Ariketa-zenbakia: 8.1



Irudiko zirkuituan, kalkulatu $u_c(t)$, $i_c(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$, $i_1(t)$ eta $i_2(t)$ magnitudeen adierazpen analitikoak, baita lehenengo bien adierazpen grafikoak ere, $t > 0$ s denean eta etengailuaren kontrolak ondoko sekuentzia hau jarraitzen duenean:

$t < 0$ s	K etengailua zabalik.
$t = 0$ s	K etengailua 1 posizioa eramaten da.
$t = 1$ ms	K etengailua 2 posizioa eramaten da.

Ebazpena

Zirkuituan elementu metatzaile bakarra dugu: kondentsadorea. Beraz, lehen ordenako zirkuitua da.

Gainera, kondentsadore bat dagoenez, haren borneen artean jausten den tentsioa hartuko dugu kalkulu-oinarri, kondentsadore baten tentsioa ezin da bortizki aldatu eta. Horrela:

$$u_c(t) = u_{c\infty}(t) - [u_{c\infty}(t_0) - u_c(t_0)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}$$

$t < 0$ s

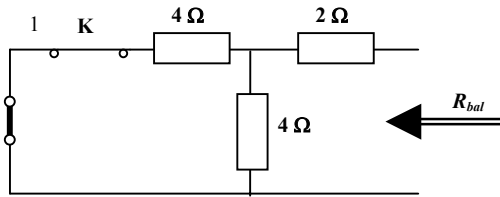
Etengailua aspalditik zabalik egon dela suposatuz, kondentsadorea kargarik gabe egongo da, eta zirkuituko tentsioak zein korronteak nuluak izango dira.

$$u_1(t) = u_2(t) = u_c(t) = 0 \text{ V} \quad ; \quad i_1(t) = i_2(t) = i_c(t) = 0 \text{ A}$$

$0 \text{ s} < t < 1 \text{ ms}$

Tarte honetan, tentsio-iturriak kondentsadorea kargatuko du. Baina lehenengo unean, zirkuituko topologia aldatu arren, kondentsadoreak aurreko tartean zeukan tentsioarekin jarraituko du.

$$u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0 \text{ V}$$



Zirkuitu horren denbora konstantea:

$$\tau = R_{bal} \cdot C = \left(2 + \frac{4 \cdot 4}{4 + 4} \right) \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 0,2 \text{ ms}$$

$$\frac{1}{\tau} = 5.000 \text{ s}^{-1} \quad ; \quad 5\tau = 1 \text{ ms}$$

Hortaz, zirkuituak doi-doi lortuko du egoera egonkorra tarte horren barruan.

Bestalde, egoera egonkorra lortu ondoren, kondentsadoreak zirkuitu irekia izango balitz bezala lan egingo du:

$$i_{c\infty}(t) = 0 \text{ A} \rightarrow \begin{cases} u_{c\infty}(t) = u_{2\infty}(t) \\ i_{1\infty}(t) = i_{2\infty}(t) \end{cases} \rightarrow u_{c\infty}(t) = 4 \cdot i_{2\infty}(t) = 4 \cdot \frac{24}{4 + 4} = 12 \text{ V} = u_c(0)$$

Orduan, tarte honetan:

$$u_c(t) = u_{c\infty}(t) - [u_{c\infty}(0) - u_c(0)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-0)} = 12 - 12 e^{-5.000t} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_c(0 \text{ s}) = 0 \text{ V} \\ u_c(1 \text{ ms}) = 12 \text{ V} \end{cases}$$

t > 1 ms

Kasu honetan, zirkuituko sorgailua deskonektatzean, kondentsadorea deskargatuko da. Hau da, aurreko tartean metatutako karga galduko du.

$$u_c(10^{-3+}) = u_c(10^{-3-}) = 12 \text{ V}$$

$$u_{c\infty}(t) = 0 \text{ V} = u_{c\infty}(10^{-3})$$

Gainera, lehengo zirkuitu bera dugu, baina sorgailurik gabe. Hortaz, tarte honetako denbora-konstantea aurreko tarteko bera izango da, eta beste milisegundo bat pasatu ondoren egoera egonkor berria lortuko da.

Horrela, kondentsadoreko tentsioak adierazpide hau beteko du:

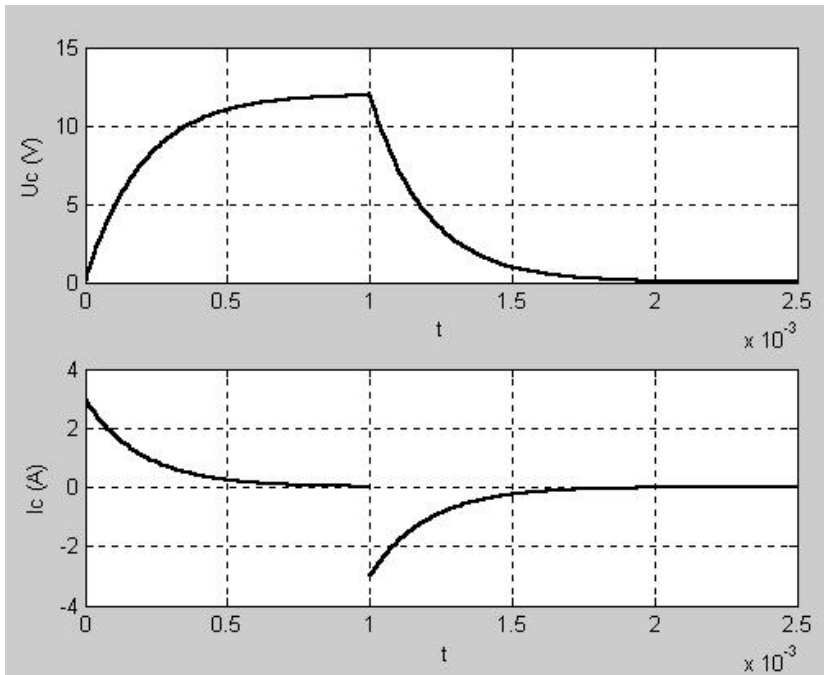
$$u_c(t) = u_{c\infty}(t) - [u_{c\infty}(10^{-3}) - u_c(10^{-3})] e^{-\frac{1}{\tau}(t-0,001)}$$

$$u_c(t) = 12 e^{-5.000(t-0,001)} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_c(1 \text{ ms}) = 12 \text{ V} \\ u_c(t \geq 2 \text{ ms}) = 0 \text{ V} \end{cases}$$

Orain, tarte guztietan kondentsadorearen tentsioa jakinda, zirkuituko legeak aplikatuko ditugu gainerako magnitudeak kalkulatzeko. Hala, 8.1 taulan tentsio eta korrante guztien adierazpen analitikoak bildu dira; erabilitako adierazpenak ere adierazten dira. Era berean, 8.1 irudian kondentsadorearen tentsioa eta korrantea irudikatu dira.

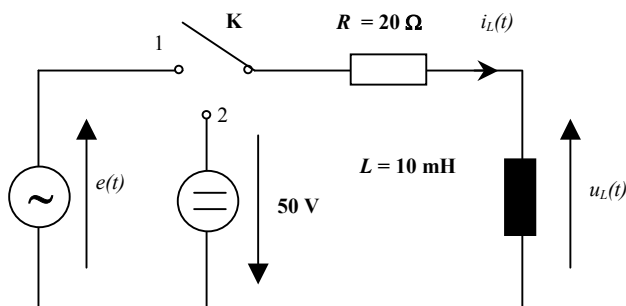
8.1 taula. Adierazpen analitikoak.

	$0 \text{ s} < t < 1 \text{ ms}$	$t > 1 \text{ ms}$
$u_c(t)$	$12 - 12 e^{-5.000 t} \text{ V}$	$12 e^{-5.000 (t-0,001)} \text{ V}$
$i_c(t) = 50 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$	$3 e^{-5.000 t} \text{ A}$	$-3 e^{-5.000 (t-0,001)} \text{ A}$
$u_2(t) = u_c(t) + 2 \cdot i_c(t)$	$12 - 6 e^{-5.000 t} \text{ V}$	$6 e^{-5.000 (t-0,001)} \text{ V}$
$i_2(t) = \frac{u_2(t)}{4}$	$3 - 1,5 e^{-5.000 t} \text{ A}$	$1,5 e^{-5.000 (t-0,001)} \text{ A}$
$i_1(t) = i_2(t) + i_c(t)$	$3 + 1,5 e^{-5.000 t} \text{ A}$	$-1,5 e^{-5.000 (t-0,001)} \text{ A}$
$u_1(t) = 4 \cdot i_1(t)$	$12 + 6 e^{-5.000 t} \text{ V}$	$-6 e^{-5.000 (t-0,001)} \text{ V}$



8.1 irudia. Kondentsadorearen tentsio eta korrontearen adierazpen grafikoak.

Ariketa-zenbakia: 8.2



Non:

$$e(t) = 100 \cdot \cos(2000t) \text{ V}$$

Etengailuaren sekuentzia:

$t < 0 \text{ s}$	Zabalik.
$t = 0 \text{ s}$	1 posiziora eramaten da.
$t = 3 \text{ ms}$	2 posiziora eramaten da.

Irudiko zirkuituan, kalkulatu harilaren tentsio eta korrontearen adierazpen analitikoak zein grafikoak, $t > 0 \text{ s}$ denean.

Ebazpena

Kasu honetan, harila da lehen ordenako zirkuitu honen elementu metatzailea. Beraz, bertatik zirkulatzen duen intentsitatea bat-batean aldatu ezin denez, harilaren korrontea hartuko dugu kalkulu-oinarri. Gero, zirkuituko legeez baliatuz, gainerako magnitudeak kalkulatu ditugu.

$0 \text{ s} < t < 3 \text{ ms}$

Tarte honetan, korrante alternoko tentsio batez elikatuko dugu harila.

Hasierako egoeran, zirkulatzen duen korrontea nulua izango da, aurreko tartean etengailua zabalik zegoelako.

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$

Eta RL zirkuitu honen denbora-konstantea:

$$\tau = \frac{L}{R_{bal}} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{20} = 0,5 \text{ ms} ; \quad 1/\tau = 2.000 \text{ s}^{-1} ; \quad 5\tau = 2,5 \text{ ms}$$

Tartearen iraupena 5τ baino luzeagoa izanda, egoera egonkorra helduko da.

Azkenik, tarte honen egoera egonkorreko korronea kalkulatzeko, zirkuituak analizatzeko oinarritzko metodoak erabiliko ditugu. Gainera, korrone alernoarekin gabiltzanez, ez dugu aldiuneko baliorik erabiliko, baizik eta magnitudeen fasoreak (balio eraginkorraren eta fasearen bidez adierazitakoak).

$$\left. \begin{aligned} \underline{E} &= \frac{100}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = 50\sqrt{2} \angle 0^\circ \text{ V} \\ X_L &= \omega \cdot L = 2.000 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 20 \Omega \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{I}_L = \frac{\underline{E}}{R + jX_L} = \frac{50\sqrt{2} \angle 0^\circ}{20 + j20} = 2,5 \angle -45^\circ \text{ A}$$

Orduan, amaiarako egoera egonkorrean korronearen aldiuneko balioa hau izango da:

$$i_{L\infty}(t) = 2,5\sqrt{2} \cdot \cos(2.000t - 45^\circ) \text{ A}$$

Eta:

$$i_{L\infty}(t_0) = i_{L\infty}(0) = 2,5\sqrt{2} \cdot \cos(-45^\circ) = 2,5 \text{ A}$$

Beraz, tarte honetako magnitudeak kalkulatzeko behar ditugun balio guztiak ezagunak dira dagoeneko.

$$i_L(t) = i_{L\infty}(t) - [i_{L\infty}(0) - i_L(0)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-0)} = 2,5 \sqrt{2} \cdot \cos(2.000t - 45^\circ) - (2,5 - 0) e^{-2.000t} \text{ A}$$

$$i_L(t) = 2,5 \sqrt{2} \cdot \cos(2.000t - 45^\circ) - 2,5 e^{-2.000t} \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_L(0 \text{ s}) = 0 \text{ A} \\ i_L(3 \text{ ms}) = 1,7 \text{ A} \end{cases}$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = 10^{-2} \cdot [-2,5 \sqrt{2} \cdot 2.000 \cdot \sin(2.000t - 45^\circ) + 2,5 \cdot 2.000 e^{-2.000t}]$$

$$u_L(t) = 50 \sqrt{2} \cdot \cos(2000t + 45^\circ) + 50 e^{-2000t} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_L(0 \text{ s}) = 100 \text{ V} \\ u_L(3 \text{ ms}) = 62,1 \text{ V} \end{cases}$$

$t > 3 \text{ ms}$

Tarte honetan, korrone zuzeneko iturriarekin elikatzen dugu aurreko RL zirkuitu bera. Beraz, denbora-konstante bera agertuko zaigu, eta beste 2,5 ms pasatu ondoren lortuko da egoera egonkor berria.

Tarte honen hasieran, harilaren korrontea aurreko tartearen bukaeran zeukana izango da.

$$i_L\left(3 \cdot 10^{-3}^+\right)=i_L\left(3 \cdot 10^{-3}^-\right)=1,7 \text{ A}$$

Bestalde, badakigu egoera egonkorra lortu denean harilak zirkuitulaburra balitz bezala lan egingo duela. Harilaren korrontek iturri berriak ezartzen duen noranzkoa hartuko du.

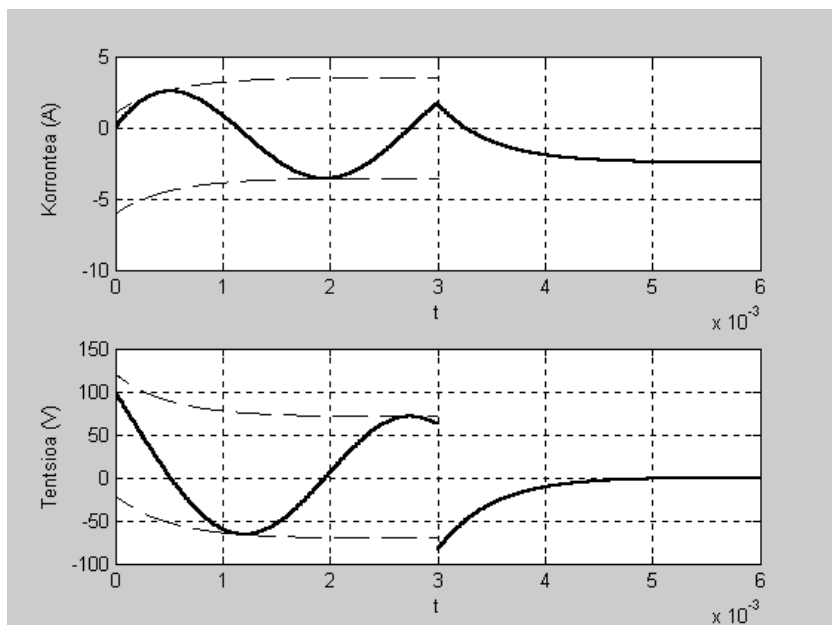
$$i_{L \infty}(t)=-\frac{50}{20}=-2,5 \text{ A}=i_{L \infty}\left(3 \cdot 10^{-3}\right)$$

Hortaz:

$$i_L(t)=i_{L \infty}(t)-\left[i_{L \infty}\left(3 \cdot 10^{-3}\right)-i_L\left(3 \cdot 10^{-3}\right)\right] e^{-\frac{1}{\tau}(t-0,003)}=-2,5-\left[-2,5-1,7\right] e^{-2.000(t-0,003)}$$

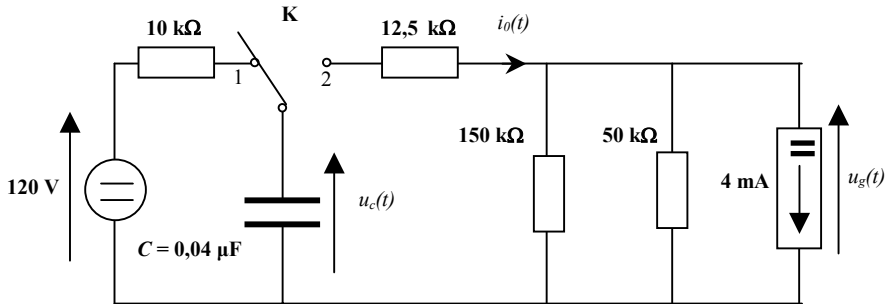
$$i_L(t)=-2,5+4,2 e^{-2.000(t-0,003)} \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_L(3 \text{ ms})=1,7 \text{ A} \\ i_L(t > 5,5 \text{ ms})=-2,5 \text{ A} \end{cases}$$

$$u_L(t)=L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}=-84 e^{-2.000(t-0,003)} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_L(3 \text{ ms})=-84 \text{ V} \\ u_L(t > 5,5 \text{ ms})=0 \text{ V} \end{cases}$$



8.2 irudia. Harilaren tentsio eta korrontearen adierazpen grafikoak.

Ariketa-zenbakia: 8.3



Irudiko zirkuituan, K etengailua 1 posiziotik 2 posiziara eramaten da $t = 0$ s denean. Kalkulatu $u_c(t)$, $u_g(t)$ eta $i_0(t)$ magnitudeen adierazpen analitikoak eta grafikoak, $t > 0$ s denean.

Ebazpena

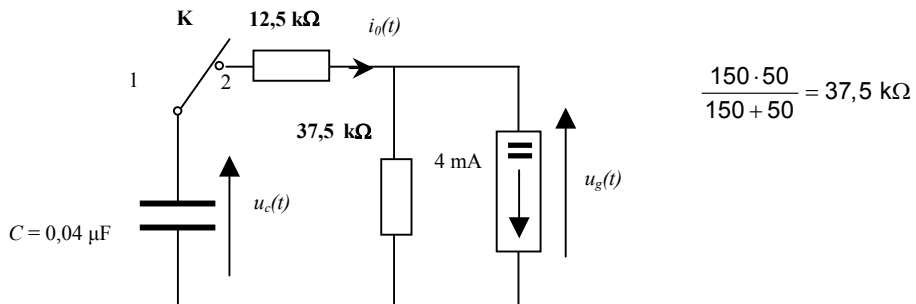
$t < 0$ s

Etengailua posizio horretan aspalditik egon dela suposatuz, kondentsadorea kargatuta egongo da eta iturriaren tentsio osoa jasango du.

$$u_c(t) = 120 \text{ V}$$

$t > 0$ s

Tarte honen zirkuitua ebatzi baino lehen, paraleloan dauden adar erresistibo biak adar baliokide bakar batean batuko ditugu.



Denbora-konstantea:

$$\tau = R_{bal} \cdot C = (12,5 + 37,5) \cdot 10^3 \cdot 0,04 \cdot 10^{-6}$$

$$\tau = 2 \text{ ms} ; 5\tau = 10 \text{ ms}$$

$$\frac{1}{\tau} = 500 \text{ s}^{-1}$$

Zirkuituak 10 ms emango ditu egoera egonkorra lortzeko. Hau da, 10 ms behar dira kondentsadoreak karga berria hartzeko. Hortik aurrera, kondentsadoretik igarotzen den intentsitatea nulua izango da, eta sorgailuaren korrante osoak 37,5 kΩ-eko erresistentziatik zirkulatuko du.

$$i_{0\infty}(t) = 0 \text{ A} \rightarrow u_{c\infty}(t) = u_{g\infty}(t) = 37,5 \cdot 10^3 \cdot (-4 \cdot 10^{-3}) = -150 \text{ V} = u_{c\infty}(0)$$

Beraz, hasierako kondizioak kontuan izanda:

$$u_c(0^+) = u_c(0^-) = 120 \text{ V}$$

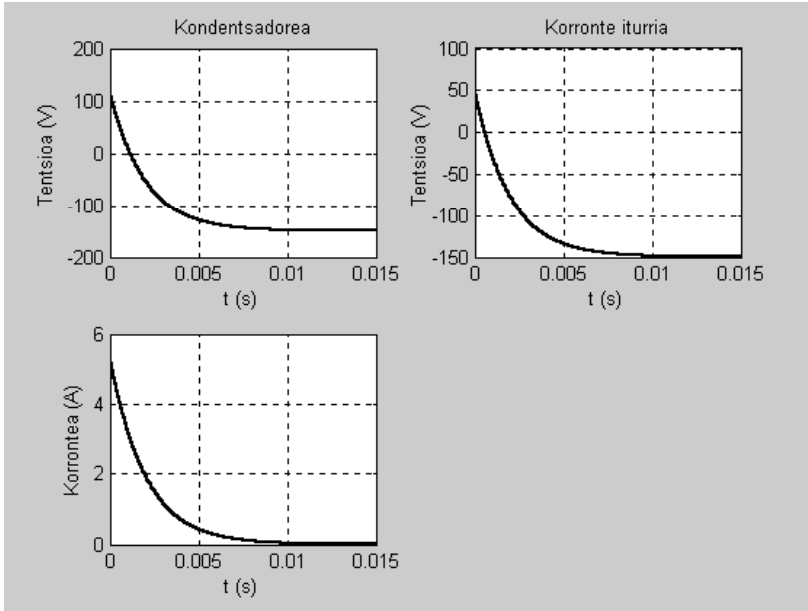
$$u_c(t) = u_{c\infty}(t) - [u_{c\infty}(0) - u_c(0)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-0)} = -150 - [-150 - 120] e^{-500t} \text{ V}$$

$$u_c(t) = -150 + 270 e^{-500t} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_c(0 \text{ s}) = 120 \text{ V} \\ u_c(t \geq 10 \text{ ms}) = -150 \text{ V} \end{cases}$$

Azkenik, kondentsadorearen tentsioa ezagututa, gainerako tentsio zein korranteak kalkula ditzakegu zirkuituko lege orokorren bidez. 8.2 taulan, eskatutako magnitudeen adierazpen analitikoak adierazten dira.

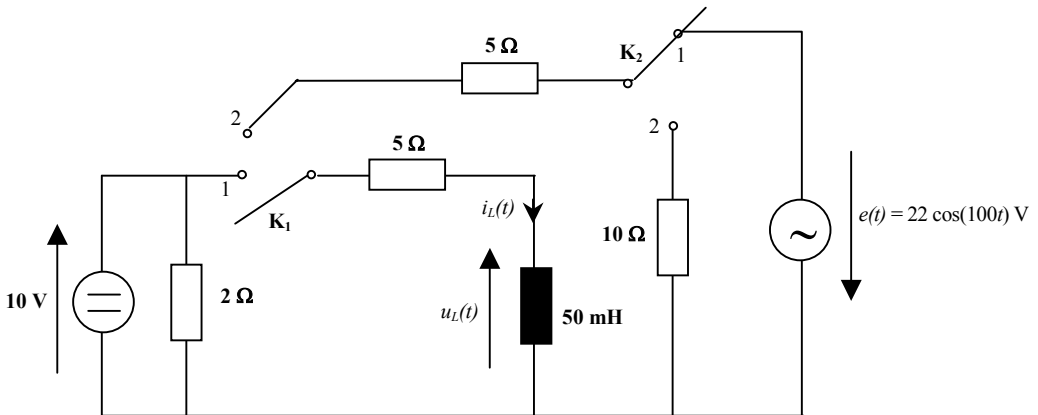
8.2 taula. Adierazpen analitikoak.

	$t < 0 \text{ s}$	$t > 0 \text{ s}$
$u_c(t)$	120 V	$-150 + 270 e^{-500t} \text{ V}$
$i_0(t) = -0,04 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$	0 A	$5,4 e^{-500t} \text{ mA}$
$u_g(t) = 37,5 \cdot 10^3 \cdot (i_0(t) - 4 \cdot 10^{-3})$	- 150 V	$-150 + 202,5 e^{-500t} \text{ V}$



8.3 irudia. Adierazpen grafikoak.

Ariketa-zenbakia: 8.4



Irudian agertzen diren posizioetan aspalditik egon ondoren, kontrol-sekuentzia hau jarraitzen dute K_1 eta K_2 etengailuek:

- K₁: 1 posizioa eramaten da $t = 0$ s denean. Segundo-erdi ematen du posizio horretan eta 2 posizioa eramaten da.
- K₂: 2 posizioa eramaten da, $t = 1$ s denean.

Kalkulatu harilaren tentsio zein korrontearen adierazpen analitikoak, $t > 0$ s denean.

Ebazpena

$t < 0$ s

Harilaren adarra ez dago elikatuta. Beraz, bertatik zirkulatzen duen korrontea nulua izango da, baita harilaren tentsioa ere.

$0 \text{ s} < t < 0,5 \text{ s}$

Tarte honetan, harila korronte zuzeneko sorgailuarekin elikatzen dugu. Gainera, tentsio-iturria paraleloan dago harilaren adarrarekiko. Horren ondorioz, 2Ω -eko erresistentziaren adarra baztergarria izango da, harilaren korrontean zein tentsioan eraginik ez du eta.

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$

$$u_{L\infty}(t) = 0 \text{ V} \rightarrow i_{L\infty}(t) = \frac{10}{5} = 2 \text{ A} = i_{L\infty}(0)$$

Denbora-konstantea:

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{bal}}} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{5} = 10 \text{ ms} ; \quad \frac{1}{\tau} = 100 \text{ s}^{-1} ; \quad 5\tau = 50 \text{ ms}$$

Egoera iragankorrak 50 ms iraungo ditu. Beraz, zirkuituak egoera egonkorra lortuko du.

Orduan, tarte honen adierazpenak:

$$i_L(t) = i_{L\infty}(t) - [i_{L\infty}(0) - i_L(0)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-0)} = 2 - 2 e^{-100t} \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_L(0 \text{ s}) = 0 \text{ A} \\ i_L(t > 50 \text{ ms}) = 2 \text{ A} \end{cases}$$

$$u_L(t) = 50 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = 10 e^{-100t} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_L(0 \text{ s}) = 10 \text{ V} \\ u_L(t > 50 \text{ ms}) = 0 \text{ V} \end{cases}$$

0,5 s < t < 1 s

Bigarren tarte honetan, harilaren adarra korrante alternoko sorgailuarekin elikatuta dago. Baina orain, aurrekoan ez bezala, harilak kargatuta hasten du tarte. Hau da, elementu metatzaileak ez du hasierako kondizio nulurik.

$$i_L(0,5^+) = i_L(0,5^-) = 2 \text{ A}$$

Denbora-konstantea:

$$\tau = \frac{L}{R_{bal}} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{5+5} = 5 \text{ ms} ; \quad \frac{1}{\tau} = 200 \text{ s}^{-1} ; \quad 5\tau = 25 \text{ ms}$$

Beraz, amaierako egoera egonkorra lortuko da. Eta zirkuituko egoera egonkor hori ebazteko, korrante alternoko metodo arruntak aplikatuko ditugu.

$$\left. \begin{aligned} \underline{E} &= \frac{22}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ = 11\sqrt{2} \angle 0^\circ \text{ V} \\ X_L &= \omega \cdot L = 100 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 5 \Omega \end{aligned} \right\} \rightarrow I_L = \frac{-\underline{E}}{5+5+jX_L} = \frac{-11\sqrt{2} \angle 0^\circ}{10+j5} = -\sqrt{2} \angle -26,5^\circ \text{ A}$$

Orduan:

$$i_{L\infty}(t) = -2 \cdot \cos(100t - 26,5^\circ) \text{ A}$$

$$i_{L\infty}(t_0) = i_{L\infty}(0,5) = -2 \cdot \cos(100 \cdot 0,5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} - 26,5^\circ) = -1,493 \text{ A}$$

Hurrengo pausoa tarte honetako tentsioa eta korrantea kalkulatzeko izango da.

$$i_L(t) = i_{L\infty}(t) - [i_{L\infty}(0,5) - i_L(0,5)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-0,5)} = -2 \cdot \cos(100t - 26,5^\circ) - (-1,493 - 2) e^{-200(t-0,5)} \text{ A}$$

$$i_L(t) = -2 \cdot \cos(100t - 26,5^\circ) + 3,493 e^{-200(t-0,5)} \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_L(0,5 \text{ s}) = 2 \text{ A} \\ i_L(1 \text{ s}) = -1,09 \text{ A} \end{cases}$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = 50 \cdot 10^{-3} \cdot [2 \cdot 100 \cdot \sin(100t - 26,5^\circ) - 3,493 \cdot 200 e^{-200(t-0,5)}]$$

$$u_L(t) = 10 \cdot \cos(100t - 116,5^\circ) - 34,93 e^{-200(t-0,5)} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_L(0,5 \text{ s}) = -41,58 \text{ V} \\ u_L(1 \text{ s}) = -8,38 \text{ V} \end{cases}$$

$t > 1 \text{ s}$

Azkenik, tarte honetan harilaren deskarga dugu.

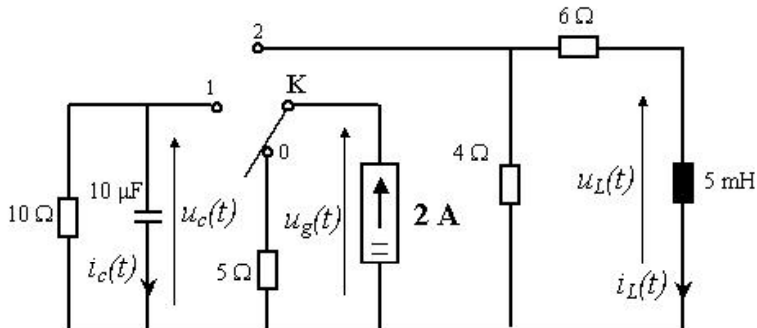
$$\tau = \frac{L}{R_{bal}} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{5 + 5 + 10} = 2,5 \text{ ms} ; \frac{1}{\tau} = 400 \text{ s}^{-1} ; 5\tau = 12,5 \text{ ms}$$

$$i_L(1^+) = i_L(1^-) = -1,09 \text{ A} ; i_{L\infty}(t) = 0 \text{ A} = i_{L\infty}(1)$$

$$i_L(t) = i_{L\infty}(t) - [i_{L\infty}(1) - i_L(1)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-1)} = -1,09 e^{-400(t-1)} \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_L(1 \text{ s}) = -1,09 \text{ A} \\ i_L(t > 1,0125 \text{ s}) = 0 \text{ A} \end{cases}$$

$$u_L(t) = 50 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = 21,8 e^{-400(t-1)} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_L(1 \text{ s}) = 21,8 \text{ V} \\ u_L(t > 1,0125 \text{ s}) = 0 \text{ V} \end{cases}$$

Ariketa-zenbakia: 8.5



Irudiko zirkuituan, kalkulatu $u_g(t)$, $u_c(t)$, $i_c(t)$, $u_L(t)$ eta $i_L(t)$ magnitudeen adierazpen analitikoak, $t > 0 \text{ s}$ denean. Etengailuaren kontrolak honako sekuentzia hau jarraitzen badu:

- | | |
|--------------------|--|
| $t < 0 \text{ s}$ | K etengailua 0 posizioan. |
| $t = 0 \text{ s}$ | K etengailua 1 posiziora eramaten da. |
| $t = 1 \text{ ms}$ | K etengailua 2 posiziora eramaten da. |
| $t = 2 \text{ ms}$ | K etengailua 0 posiziora itzultzen da. |

Ebazpena

Zirkuitu honetan, bi elementu metatzaile dauzkagu: kondentsadorea eta harila. Baina ez da inoiz izango elementu horien arteko konexio elektrikorik. Hau da, biak aktiboak izan arren, ez dute inoiz lan egingo azpizirkuitu berean. Beraz, lehen ordenako bi azpizirkuitu dauzkagu.

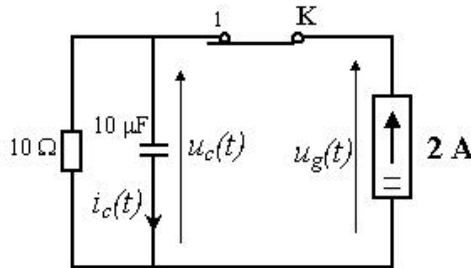
$t < 0$ s

Etengailua posizio honetan aspalditik egon dela suposatuz, elementu metatzaileak kargarik gabe egongo dira. Tarte honetan dugun zirkuitua irudikoa izango da. Beraz:

$$u_c(t) = u_L(t) = 0 \text{ V} \quad ; \quad i_c(t) = i_L(t) = 0 \text{ A} \quad ; \quad u_g(t) = 2 \cdot 5 = 10 \text{ V}$$

$0 \text{ s} < t < 1 \text{ ms}$

Tarte honetan, korrante-iturriak kondentsadorea elikatzen du.



Azpizirkuituaren denbora-konstantea:

$$\tau = R_{\text{bal}} \cdot C = 10 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 10^{-4} \text{ s} = 0,1 \text{ ms}$$

$$\frac{1}{\tau} = 10^4 \text{ s}^{-1} \quad ; \quad 5\tau = 0,5 \text{ ms} < 1 \text{ ms}$$

Hortaz, zirkuituak egoera egonkorra lortuko du.

Tarte honen egoera egonkorrean, kondentsadoreak zirkuitu irekia izango balitz bezala lan egingo du, eta paraleloan duen erresistentziaren tentsioa hartuko du.

Bestalde, badakigu kondentsadorearen tentsioa ezin dela bat-batean aldatu.

$$u_{c \infty}(t) = 10 \cdot 2 = 20 \text{ V} = u_c \infty(0) \quad ; \quad u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0 \text{ V}$$

Orduan, tarte honetan:

$$u_g(t) = u_c(t) = u_{c\infty}(t) - [u_{c\infty}(0) - u_c(0)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-0)} = 20 - 20 e^{-10^4 t} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_c(0 \text{ s}) = 0 \text{ V} \\ u_c(1 \text{ ms}) = 20 \text{ V} \end{cases}$$

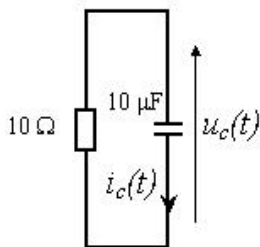
$$i_c(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} = 10 \cdot 10^{-6} \cdot [20 \cdot 10^4 e^{-10^4 t}] = 2 e^{-10^4 t} \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_c(0 \text{ s}) = 2 \text{ A} \\ i_c(1 \text{ ms}) = 0 \text{ A} \end{cases}$$

$$u_L(t) = 0 \text{ V}$$

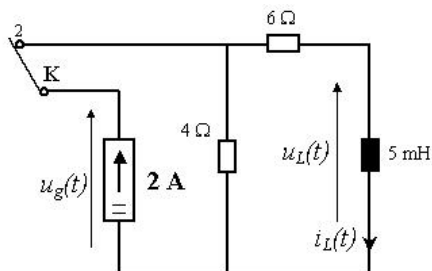
$$i_L(t) = 0 \text{ A}$$

1 ms < t < 2 ms

Orain K etengailua 2 posizioan dago, eta bi azpizirkuitu geratzen dira aktibo: kondentsadorearena (metatutako energia itzultzen) eta harilena (energia metatzen).



Kondentsadorearen azpizirkuituaren denbora-konstantea lehen tartekoarena izango da. Beraz, orain ere, egoera egonkorrera ailegatuko da.



Kasu honetan:

$$\tau = \frac{L}{R_{bal}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{4 + 6} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0,5 \text{ ms}$$

$$\frac{1}{\tau} = 2000 \text{ s}^{-1}; \quad 5\tau = 2,5 \text{ ms} > 1 \text{ ms}$$

Hortaz, zirkuituaren atal hau ez da egonkortuko.

Tarte honen hasierako unean:

$$u_c(10^{-3}^+) = u_c(10^{-3}^-) = 20 \text{ V} \quad ; \quad i_L(10^{-3}^+) = i_L(10^{-3}^-) = 0 \text{ A}$$

Korrante zuzeneko egoera egonkorrean kondentsadoreak (zirkuitu irekia eta, kasu honetan, elikadurarik gabekoa) eta harilak (zirkuitulaburra) dauzkaten portaerak kontuan izanda, azpizirkuitu biak ebartziko dira:

$$i_{c\infty}(t) = 0 \text{ A} \rightarrow u_{c\infty}(t) = 0 \text{ V} = u_{c\infty}(10^{-3})$$

$$u_{L\infty}(t) = 0 \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_{g\infty}(t) = 2 \cdot \frac{4 \cdot 6}{4 + 6} = 4,8 \text{ V} = u_{g\infty}(10^{-3}) \\ i_{L\infty}(t) = \frac{u_{g\infty}(t)}{6} = \frac{4,8}{6} = 0,8 \text{ A} = i_{L\infty}(10^{-3}) \end{cases}$$

Beraz, bigarren tarte honetan:

$$u_c(t) = u_{c\infty}(t) - [u_{c\infty}(10^{-3}) - u_c(10^{-3})] e^{-\frac{1}{\tau}(t-10^{-3})} = 20 e^{-10^4(t-10^{-3})} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_c(1 \text{ ms}) = 20 \text{ V} \\ u_c(2 \text{ ms}) = 0 \text{ V} \end{cases}$$

$$i_c(t) = 10 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{du_c(t)}{dt} = -2 e^{-10^4(t-10^{-3})} \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_c(1 \text{ ms}) = -2 \text{ A} \\ i_c(2 \text{ ms}) = 0 \text{ A} \end{cases}$$

$$i_L(t) = i_{L\infty}(t) - [i_{L\infty}(10^{-3}) - i_L(10^{-3})] e^{-\frac{1}{\tau}(t-10^{-3})} = 0,8 - 0,8 e^{-2.000(t-10^{-3})} \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_L(1 \text{ ms}) = 0 \text{ A} \\ i_L(2 \text{ ms}) = 0,69 \text{ A} \end{cases}$$

$$u_L(t) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = 8 e^{-2.000(t-10^{-3})} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_L(1 \text{ ms}) = 8 \text{ V} \\ u_L(2 \text{ ms}) = 1,08 \text{ V} \end{cases}$$

$$u_g(t) = u_L(t) + 6 \cdot i_L(t) = 4,8 + 3,2 e^{-2.000(t-10^{-3})} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_g(1 \text{ ms}) = 8 \text{ V} \\ u_g(2 \text{ ms}) = 5,23 \text{ V} \end{cases}$$

$t > 2 \text{ ms}$

Azken tarte honetan, zirkuituak bere hasierako topologia berreskuratuko du. Hor, harilaren deskarga gertatzen da. Kondentsadorea, berriz, deskargaturik dago jadanik, aurreko tartean kargarik gabe geratu da eta.

$$i_L(2 \cdot 10^{-3}) = i_L(2 \cdot 10^{-3}) = 0,69 \text{ A} \quad ; \quad i_{L\infty}(t) = 0 \text{ A} = i_{L\infty}(2 \cdot 10^{-3})$$

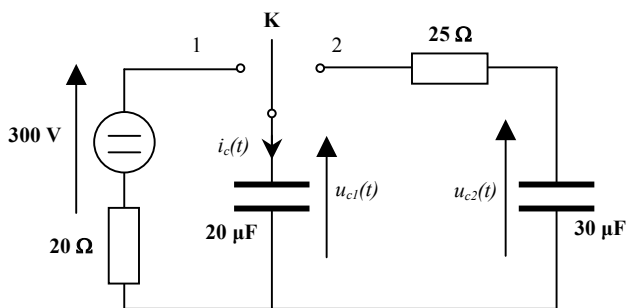
Gainera, harilaren azpizirkuituan iturri-sorgailua kendu baino ez dugu egin. Horren ondorioz, azpizirkuitu horrek aurreko tarteko denbora-konstante bera izango du. Hau da, 2,5 milisegundo emango ditu amaierako egoera egonkorra lortzeko.

$$u_c(t) = 0 \text{ V} ; i_c(t) = 0 \text{ A} ; u_g(t) = 2 \cdot 5 = 10 \text{ V}$$

$$i_L(t) = i_L(2 \cdot 10^{-3}) e^{-\frac{1}{\tau}(t-2 \cdot 10^{-3})} = 0,69 e^{-2.000(t-2 \cdot 10^{-3})} \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_L(2 \text{ ms}) = 0,69 \text{ A} \\ i_L(t > 4,5 \text{ ms}) = 0 \text{ A} \end{cases}$$

$$u_L(t) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = -6,9 e^{-2.000(t-2 \cdot 10^{-3})} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_L(2 \text{ ms}) = -6,9 \text{ V} \\ u_L(t > 4,5 \text{ ms}) = 0 \text{ V} \end{cases}$$

Ariketa-zenbakia: 8.6



K etengailuaren kontrol-sekuentzia:

$t < 0 \text{ s}$	Zabalik.
$t = 0 \text{ s}$	1 posizioa eramaten da.
$t = 1 \text{ ms}$	2 posizioa eramaten da.

Irudiko zirkuituan agertzen diren kondentsadoreak hasierako unean deskargaturik daudela jakinda, kalkulatu:

1. $u_{c1}(t)$, $u_{c2}(t)$ eta $i_c(t)$ magnitudeen adierazpen analitikoak.
2. Aurreko magnitudeen adierazpen grafikoak.
3. Kondentsadore bakoitzak metatzen duen energia.
4. 10Ω -eko erresistentzian galtzen den energia

Ebazpena

1. Elementu metatzaile bi izan arren, lehen ordenako zirkuitua dugu kasu honetan ere. Etengailua 2 posizioan dagoen bitartean, kondentsadore biak aktibo eta elektrikoki konektaturik izango badira ere, zirkuituak kondentsadore bakar bat egongo balitz bezala lan egingo du. Horren zergatia kondentsadoreen arteko konexioan datza. Biak seriean daudenez, serie-elkarteko kondentsadore baliokideaz ordezkia ditzakegu, eta lortutako zirkuitu berriak jatorrizko portaera bera izango du. Agerian dago azken zirkuitu baliokide hori lehen ordenakoa dela, elementu metatzaile bakarra duelako.

$$t < 0 \text{ s}$$

Hasierako unean, deskonektaturik eta kargarik gabe dauzkagu kondentsadore biak.

$$u_{c1}(t) = u_{c2}(t) = 0 \text{ V} \quad ; \quad i_c(t) = 0 \text{ A}$$

$$0 \text{ s} < t < 1 \text{ ms}$$

Tarte honetan, ezkerreko kondentsadorearen karga-prozesua dugu.

$$\tau = R_{bal} \cdot C = 20 \cdot 20 \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0,4 \text{ ms}$$

$$\frac{1}{\tau} = 2.500 \text{ s}^{-1} \quad ; \quad 5\tau = 2 \text{ ms} > 1 \text{ ms}$$

Zirkuituak ez du egoera egonkorra lortuko.

$$u_{c1}(0^+) = u_{c1}(0^-) = 0 \text{ V} \quad ; \quad u_{c1\infty}(t) = 300 \text{ V} = u_{c1\infty}(0)$$

$$u_{c1}(t) = u_{c1\infty}(t) - [u_{c1\infty}(0) - u_{c1}(0)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-0)} = 300 - 300 e^{-2.500 t} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_{c1}(0 \text{ s}) = 0 \text{ V} \\ u_{c1}(1 \text{ ms}) = 275,37 \text{ V} \end{cases}$$

$$i_c(t) = 20 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{du_{c1}(t)}{dt} = 15 e^{-2.500 t} \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_c(0 \text{ s}) = 15 \text{ A} \\ i_c(1 \text{ ms}) = 1,23 \text{ A} \end{cases}$$

$$u_{c2}(t) = 0 \text{ V}$$

$$t > 1 \text{ ms}$$

Tarte honetan, kondentsadore biak dauzkagu aktibo, zirkuitu berean. Ezkerrekoak kargaturik eta eskuinekoak kargarik gabe hasiko dute tarte eta, sorgailurik ez dagoenez, zirkuituan metatutako karga konstante mantendu beharko da denbora guztian. Hau da, hasieran kondentsadore batek duen energia bien artean banatuko da egoera egonkorra lortu arte. Une horretan,

kondentsadore biek tentsio bera jasango dute eta zirkuitutik ez da korronteirik igaroko.

$$\tau = R_{bal} \cdot C_{bal} = 25 \cdot \frac{20 \cdot 10^{-6} \cdot 30 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6} + 30 \cdot 10^{-6}} = 0,3 \text{ ms}$$

$$\frac{1}{\tau} = 3.333 \text{ s}^{-1} ; 5\tau = 1,2 \text{ ms}$$

Zirkuituak 1,2 ms beharko ditu kargen banaketa berria eragiteko. Bestela esanda, $t = 2,2 \text{ ms}$ denean egonkortuko da berriro.

Amaierako egoera egonkorra kalkulatzeko, hainbat eratan joka dezakegu. Ariketa hau bi eratan ebatziko dugu.

a) Kondentsadoreen kapazitateen arteko erlazioaz baliatuz:

$$u_{c1}(10^{-3+}) = u_{c1}(10^{-3-}) = 275,37 \text{ V} ; u_{c2}(10^{-3+}) = u_{c2}(10^{-3-}) = 0 \text{ V}$$

$$\begin{aligned} q_T(10^{-3}) &= q_{c1}(10^{-3}) + q_{c2}(10^{-3}) = C_1 \cdot u_{c1}(10^{-3}) + C_2 \cdot u_{c2}(10^{-3}) = \\ &= 20 \cdot 10^{-6} \cdot 275,37 + 0 = 5,5 \text{ mF} \end{aligned}$$

Amaierako egoera egonkorrean, berriz:

$$i_{c\infty}(t) = 0 \text{ A} \rightarrow u_{c1\infty}(t) = u_{c2\infty}(t) ; q_T(t) = q_T(10^{-3}) = q_{T\infty}(t) = 5,5 \text{ mF}$$

$$q_{T\infty}(t) = C_1 \cdot u_{c1\infty}(t) + C_2 \cdot u_{c2\infty}(t) = (C_1 + C_2) \cdot u_{c1\infty}(t)$$

$$\begin{aligned} u_{c1\infty}(t) = u_{c2\infty}(t) &= \frac{q_{T\infty}(t)}{(C_1 + C_2)} = \frac{5,5 \cdot 10^{-3}}{(20 + 30) \cdot 10^{-6}} = 110 \text{ V} = \\ &= u_{c1\infty}(10^{-3}) = u_{c2\infty}(10^{-3}) \end{aligned}$$

Orduan:

$$u_{c1}(t) = u_{c1\infty}(t) - [u_{c1\infty}(10^{-3}) - u_{c1}(10^{-3})] e^{-\frac{1}{\tau}(t-10^{-3})} = 110 - [110 - 275,37] e^{-3.333(t-10^{-3})}$$

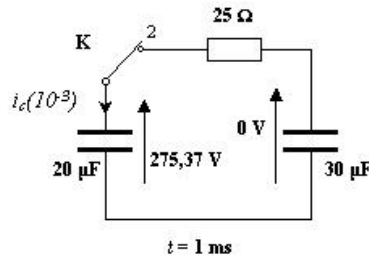
$$u_{c1}(t) = 110 + 165,37 e^{-3.333(t-10^{-3})} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_{c1}(1 \text{ ms}) = 275,37 \text{ V} \\ u_{c1}(t \geq 2,2 \text{ ms}) = 110 \text{ V} \end{cases}$$

$$u_{c2}(t) = u_{c2\infty}(t) - [u_{c2\infty}(10^{-3}) - u_{c2}(10^{-3})] e^{-\frac{1}{\tau}(t-10^{-3})} = 110 - [110 - 0] e^{-3.333(t-10^{-3})}$$

$$u_{c2}(t) = 110 - 110 e^{-3.333(t-10^{-3})} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_{c2}(1 \text{ ms}) = 0 \text{ V} \\ u_{c2}(t \geq 2,2 \text{ ms}) = 110 \text{ V} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} i_c(t) &= C_1 \cdot \frac{du_{c1}(t)}{dt} = -C_2 \cdot \frac{du_{c2}(t)}{dt} = \frac{u_{c2}(t) - u_{c1}(t)}{25} = \\ &= -11 e^{-3.333(t-10^{-3})} \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_c(1 \text{ ms}) = -11 \text{ A} \\ i_c(t \geq 2,2 \text{ ms}) = 0 \text{ A} \end{cases} \end{aligned}$$

- b) Hasierako korronea kalkulatu: kondentsadore bakoitzak hasierako unean jasaten duen tentsioa jakinda, une horretan zirkulatzen duen korronea kalkula dezakegu.



$$i_c(10^{-3}) = \frac{0 - 275,37}{25} = -11 \text{ A}$$

$$i_{c\infty}(t) = 0 \text{ A} = i_{c\infty}(10^{-3})$$

$$i_c(t) = i_{c\infty}(t) - [i_{c\infty}(10^{-3}) - i_c(10^{-3})] e^{-\frac{1}{\tau}(t-10^{-3})}$$

$$i_c(t) = -11 e^{-3.333(t-10^{-3})} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} i_c(1 \text{ ms}) = -11 \text{ A} \\ i_c(t \geq 2,2 \text{ ms}) = 0 \text{ A} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_{c1}(t) &= u_{c1}(10^{-3}) + \frac{1}{C_1} \cdot \int_{10^{-3}}^t i_c(t) \cdot dt = \\ &= 275,37 + \frac{1}{20 \cdot 10^{-6}} \cdot \int_{10^{-3}}^t [-11 e^{-3.333(t-10^{-3})}] \cdot dt \end{aligned}$$

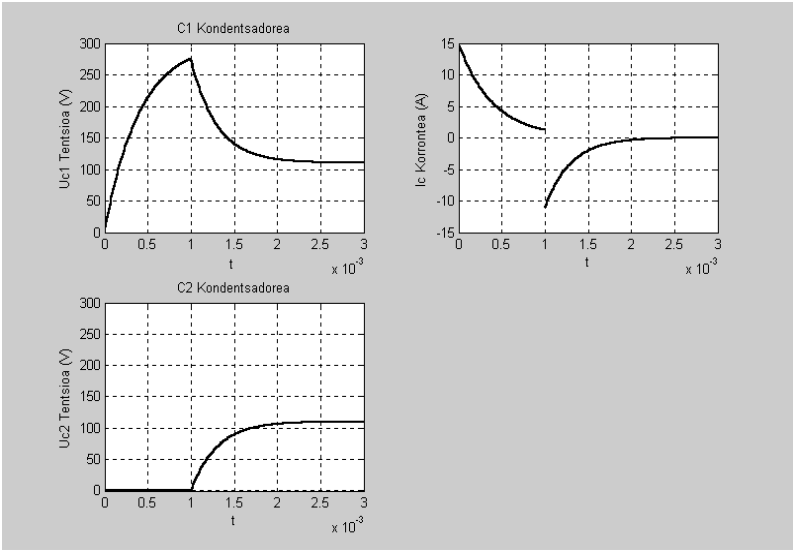
$$u_{c1}(t) = 110 + 165,37 e^{-3.333(t-10^{-3})} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_{c1}(1 \text{ ms}) = 275,37 \text{ V} \\ u_{c1}(t \geq 2,2 \text{ ms}) = 110 \text{ V} \end{cases}$$

$$u_{c2}(t) = u_{c2}(10^{-3}) + \frac{1}{C_2} \cdot \int_{10^{-3}}^t [-i_c(t)] \cdot dt = 0 + \frac{1}{30 \cdot 10^{-6}} \cdot \int_{10^{-3}}^t [11 \cdot e^{-3.333(t-10^{-3})}] \cdot dt$$
$$u_{c2}(t) = 110 - 110 \cdot e^{-3.333(t-10^{-3})} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_{c2}(1 \text{ ms}) = 0 \text{ V} \\ u_{c2}(t \geq 2,2 \text{ ms}) = 110 \text{ V} \end{cases}$$

8.3 taula. Adierazpen analitikoak.

Tartea (ms)	$u_{c1}(t)$ (V)	$i_c(t)$ (A)	$u_{c2}(t)$ (V)
$0 < t < 1$	$300 - 300 \cdot e^{-2.500t}$	$15 \cdot e^{-2.500t}$	0
$t > 1$	$110 + 165,37 \cdot e^{-3.333(t-0,001)}$	$-2 \cdot e^{-2.000(t-0,01)}$	$110 - 110 \cdot e^{-3.333(t-0,001)}$

2.



8.4 irudia. Adierazpen grafikoak.

3. Kondentsadoreetan metatutako energia amaierako egoera egonkorrean bakoitzak jasango duen tentsioaren funtzioa da.

$$W_{c1} = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot [u_{c1 \infty}(t)]^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot [110]^2 = 0,121 \text{ J}$$

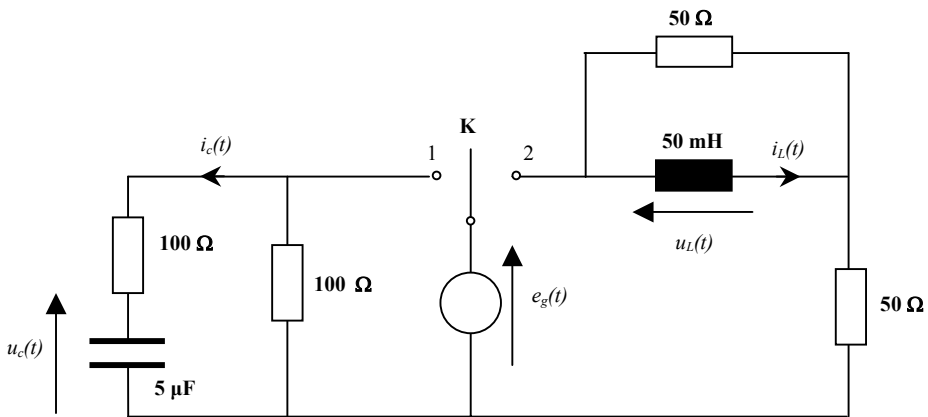
$$W_{c2} = \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot [u_{c2\infty}(t)]^2 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 10^{-6} \cdot [110]^2 = 0,1815 \text{ J}$$

4. Erresistentzia galtzen den energia, berriz:

$$W_R = \int_{10^{-3}}^{\infty} R \cdot [i_c(t)]^2 \cdot dt = \int_{10^{-3}}^{\infty} 25 \cdot [-11 e^{-3.333(t-10^{-3})}]^2 \cdot dt = \int_{10^{-3}}^{\infty} 25 \cdot 121 e^{-6.666(t-10^{-3})} \cdot dt$$

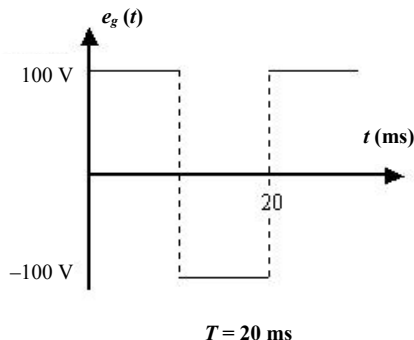
$$W_R = \left[\frac{25 \cdot 121}{-6666} e^{-6.666(t-10^{-3})} \right]_{10^{-3}}^{\infty} = 0,4538 \text{ J}$$

Ariketa-zenbakia: 8.7



Etengailuaren kontrol-sekuentzia ezagututa, kalkulatu $u_c(t)$, $i_c(t)$, $u_L(t)$ eta $i_L(t)$ magnitudeen adierazpen analitikoak, baldin eta zirkuituan agertzen den iturri idealak irudiko uhin karratua ematen badu.

- | | |
|---------------------|-------------------------------------|
| $t < 0 \text{ s}$ | Etengailua zabalik dago. |
| $t = 0 \text{ s}$ | Etengailua 1 posiziora eramaten da. |
| $t = 15 \text{ ms}$ | Etengailua 2 posiziora eramaten da. |



Ebazpena

Kasu honetan ere lehen ordenako bi azpizirkuitu agertzen dira, kondentsadorearen zirkuitua erabat independentea baita harilarenarekiko.

Bestalde, sorgailuak ematen duen tentsioa karratua eta periodikoa da. Beraz, zirkuituko egoera egonkorra kalkulatzeko ezin ditugu korrante alternoko metodoak zuzenean aplikatu, ezta korrante zuzenekoak ere. Sorgailuak ziklo-erdi bakoitzean tentsio konstantea sortzen du. Honen ondorioz, periodo-erdiko tarteak hartuz gero, korrante zuzenekoak izango balitz bezala joka dezakegu tarte horien barruan.

Gainera, uhin periodikoa izanda, etengailuak posizio berean jarraitzen duen bitartean, ziklo guztietan dauzkagu aldakuntza-prozesu berberak. Are gehiago, ziklo-erdi batean gertatzen dena hurrengo ziklo-erdian ere agertuko zaigu kontrako zeinuarekin. Izan ere, ziklo-erdi batean iturriaren tentsioa 100 V-etik -100 V-era aldatzen bada, hurrengoan kontrako bidea hartuko du.

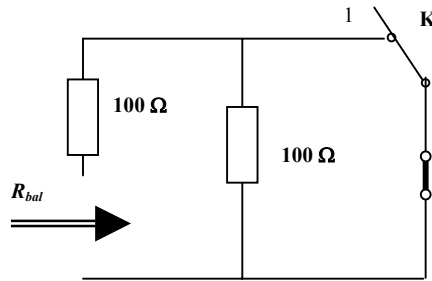
$t < 0 \text{ s}$

Hasieran, kondentsadorea zein harila deskargaturik agertuko dira.

$$u_c(t) = u_L(t) = 0 \text{ V} \quad ; \quad i_c(t) = i_L(t) = 0 \text{ A}$$

$0 \text{ s} < t < 10 \text{ ms}$

Tarte honek elikatze-tentsioaren lehenengo periodo-erdia hartzen du, eta bertan kondentsadorearen karga dugu. Harilak, berriz, deskonektaturik jarraitzen du.



Azpizirkuituaren denbora-konstantea:

$$\tau = R_{bal} \cdot C = 100 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0,5 \text{ ms}$$

$$\frac{1}{\tau} = 2.000 \text{ s}^{-1} ; 5\tau = 2,5 \text{ ms} < 10 \text{ ms}$$

Zirkuitua egoera egonkorra helduko da.

Egoera egonkorrean, kondentsadorearen adarrean ez da korrante-zirkulaziorik egongo. Horregatik, adar horrekin paraleloan dagoen iturriaren tentsio osoa kondentsadoreak berak jasango du.

$$u_{C\infty}(t) = 100 \text{ V} = u_{C\infty}(0) ; u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \text{ V}$$

Beraz,

$$u_C(t) = u_{C\infty}(t) - [u_{C\infty}(0) - u_C(0)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-0)} = 100 - 100 e^{-2.000t} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_C(0 \text{ s}) = 0 \text{ V} \\ u_C(10 \text{ ms}) = 100 \text{ V} \end{cases}$$

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot [100 \cdot 2.000 e^{-2.000t}] = 1 e^{-2.000t} \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_C(0 \text{ s}) = 1 \text{ A} \\ i_C(10 \text{ ms}) = 0 \text{ A} \end{cases}$$

$$u_L(t) = 0 \text{ V}$$

$$i_L(t) = 0 \text{ A}$$

10 ms < t < 15 ms

Etengailuak posizio berean jarraitzen du. Baina orain, elikatze-tentsioak balio negatiboa hartzen du.

Egonkortasunaren aldetik, tarte honek 5 ms irauten du. Hau da, zirkuitua orain ere egonkortuko da ($5\tau = 2,5 \text{ ms}$).

$$u_c(0,01^+) = u_c(0,01^-) = 100 \text{ V} \quad ; \quad u_{c\infty}(t) = -100 \text{ V} = u_{c\infty}(0,01)$$

Hortaz:

$$u_c(t) = u_{c\infty}(t) - [u_{c\infty}(0,01) - u_c(0,01)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-0,01)} = -100 - [-100 - 100] e^{-2.000(t-0,01)}$$

$$u_c(t) = -100 + 200 e^{-2.000(t-0,01)} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_c(10 \text{ ms}) = 100 \text{ V} \\ u_c(15 \text{ ms}) = -100 \text{ V} \end{cases}$$

$$i_c(t) = 5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{du_c(t)}{dt} = -2 e^{-2.000(t-0,01)} \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_c(10 \text{ ms}) = -2 \text{ A} \\ i_c(15 \text{ ms}) = 0 \text{ A} \end{cases}$$

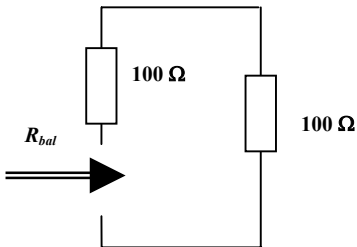
$$u_L(t) = 0 \text{ V}$$

$$i_L(t) = 0 \text{ A}$$

15 ms < t < 20 ms

Etengailua posizioz aldatzeak honako aldaketa hauek ekarriko ditu:

- Kondentsadorea elikadurarik gabe geratzen da, eta deskarga-prozesuari ekingo dio.
- Tentsio-iturria harilaren azpizirkuituari konektatzen zaio. Beraz, periodo-erdi honetan harilaren kargaren prozesua izango dugu.



Kondentsadorearen azpizirkuituaren denbora-konstantea:

$$\tau = R_{bal} \cdot C = (100 + 100) \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 10^{-3} \text{ s} = 1 \text{ ms}$$

$$\frac{1}{\tau} = 1.000 \text{ s}^{-1} ; 5\tau = 5 \text{ ms}$$

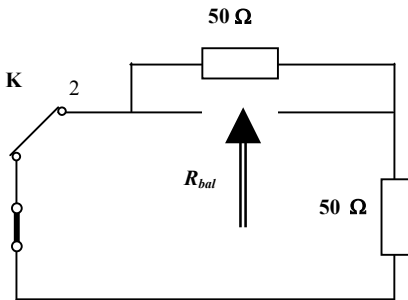
Kondentsadorearen azpizirkuituak tarte honen amaieran lortuko du egoera egonkorra.

$$u_c(0,015^+) = u_c(0,015^-) = -100 \text{ V} \quad ; \quad u_{c\infty}(t) = 0 \text{ V} = u_{c\infty}(0,015)$$

$$u_c(t) = u_{c\infty}(t) - [u_{c\infty}(0,015) - u_c(0,015)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-0,015)}$$

$$u_c(t) = -100 e^{-1.000(t-0,015)} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_c(15 \text{ ms}) = -100 \text{ V} \\ u_c(20 \text{ ms}) = 0 \text{ V} \end{cases}$$

$$i_c(t) = 5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{du_c(t)}{dt} = 0,5 e^{-1.000(t-0,015)} \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_c(15 \text{ ms}) = 0,5 \text{ A} \\ i_c(20 \text{ ms}) = 0 \text{ A} \end{cases}$$



Harilaren aldetik:

$$\tau = \frac{L}{R_{bal}} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{25} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 2 \text{ ms}$$

$$\frac{1}{\tau} = 5.005 \text{ s}^{-1}; 5\tau = 10 \text{ ms} > 5 \text{ ms}$$

Azpizirkuitu hau, berriz, ez da egonkortuko.

Amaierako egoera egonkorra kalkulatzean, kontuan izan behar dugu harilean jausten den tentsioa nulua dela. Horren ondorioz, paraleloan duen erresistentziatik ez da korronteirik igaroko, eta harilean zeharreko intentsitatea sorgailuarena izango da.

$$i_L(0,015^+) = i_L(0,015^-) = 0 \text{ A}$$

$$u_{L\infty}(t) = 0 \text{ V} \rightarrow i_{L\infty}(t) = \frac{e_g(t)}{50} = \frac{-100}{50} = -2 \text{ A} = i_{L\infty}(0,015)$$

$$i_L(t) = i_{L\infty}(t) - [i_{L\infty}(0,015) - i_L(0,015)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-0,015)}$$

$$i_L(t) = -2 + 2 e^{-500(t-0,015)} \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_L(15 \text{ ms}) = 0 \text{ A} \\ i_L(20 \text{ ms}) = -1,83 \text{ A} \end{cases}$$

$$u_L(t) = 50 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = -50 e^{-500(t-0,015)} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_L(15 \text{ ms}) = -50 \text{ V} \\ u_L(20 \text{ ms}) = -4,1 \text{ V} \end{cases}$$

t > 20 ms

Hemendik aurrera, harila kargaz aldatzen ibiliko da tartez tartez. Harileko azpizirkuituaren denbora-konstantea kontuan izanda, egoera egonkorrera doi-doi helduko da periodo-erdi guztien amaieran.

Gainera, elikatze-iturriak sortzen duen tentsio-uhinaren simetria dela eta, tarte guztietarako baliagarriak izango diren tentsio eta korronteentzako adierazpen

orokorrak lortzeari ekingo diogu. Gero, zirkuituaren erantzuna kasuz kasu zehaztuko dugu.

$$i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-)$$

$$u_{L\infty}(t) = 0 \text{ V} \rightarrow i_{L\infty}(t) = \frac{e_g(t)}{50} = i_{L\infty}(t_0)$$

$$i_L(t) = i_{L\infty}(t) - [i_{L\infty}(t_0) - i_L(t_0)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}$$

$$i_L(t) = \frac{e_g(t)}{50} - \left[\frac{e_g(t)}{50} - i_L(t_0) \right] e^{-500(t-t_0)} \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_L(t_0) \\ i_L(t_0 + \frac{T}{2}) = \frac{e_g(t)}{50} \text{ A} \end{cases}$$

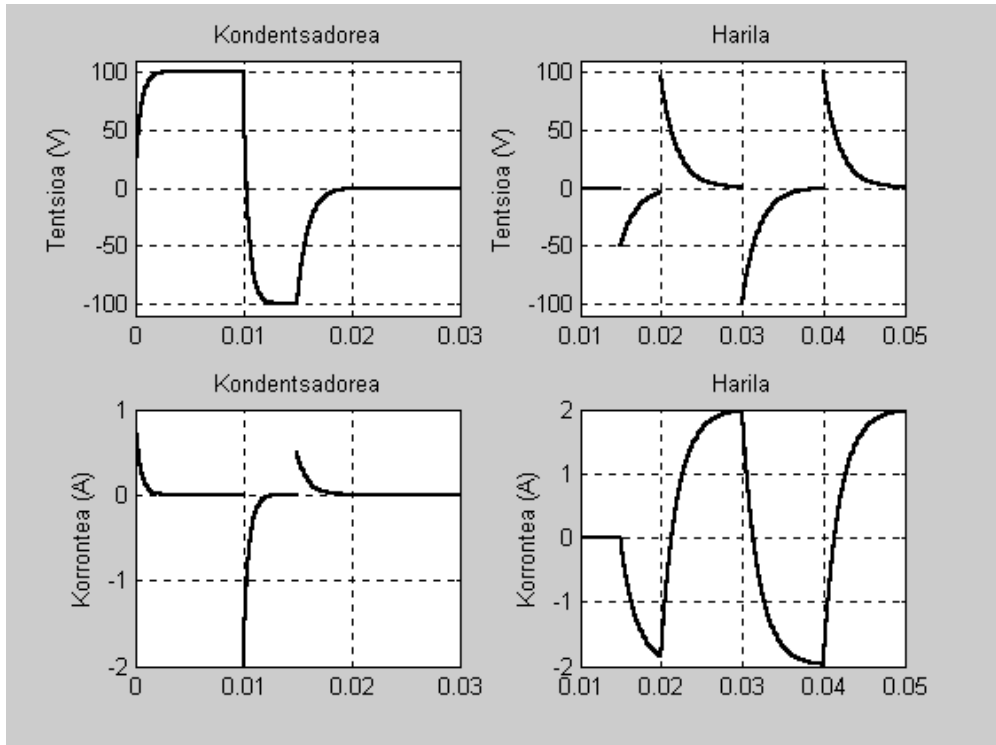
$$u_L(t) = 50 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = 25 \cdot \left[\frac{e_g(t)}{50} - i_L(t_0) \right] e^{-500(t-t_0)} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_L(t_0) = 25 \cdot \left[\frac{e_g(t)}{50} - i_L(t_0) \right] \text{ V} \\ u_L(t_0 + \frac{T}{2}) = 0 \text{ V} \end{cases}$$

Bere aldetik, kondentsadorea aurreko tartean deskargatu da.

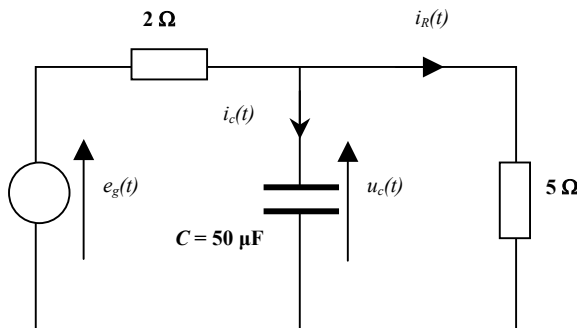
Laburpen moduan, orain arte lortutako emaitza guztiak 8.4 taulan bildu dira. Era berean, dagozkien adierazpen grafikoak 8.5 irudian aurkezten dira.

8.4 taula. Adierazpen analitikoak.

Tartea (ms)	$u_c(t)$ (V)	$i_c(t)$ (A)	$u_L(t)$ (V)	$i_L(t)$ (A)
$t < 0$	0	0	0	0
$0 < t < 10$	$100 - 100 e^{-2.000t}$	$1 e^{-2.000t}$	0	0
$10 < t < 15$	$-100 + 200 e^{-2.000(t-0,01)}$	$2 e^{-2.000(t-0,01)}$	0	0
$15 < t < 20$	$-100 e^{-1.000(t-0,015)}$	$0,5 e^{-1.000(t-0,015)}$	$-50 e^{-500(t-0,015)}$	$-2 + 2 e^{-500(t-0,015)}$
$20 < t < 30$	0	0	$95,75 e^{-500(t-0,02)}$	$2 - 3,83 e^{-500(t-0,02)}$
$t \geq 30$ $t_0 = (2n+1) \cdot (T/2)$ $t_0 < t < (t_0 + T/2)$	0	0	$-100 e^{-500(t-t_0)}$	$-2 + 4 e^{-500(t-t_0)}$
$t \geq 30$ $t_0 = 2n \cdot (T/2)$ $t_0 < t < (t_0 + T/2)$	0	0	$100 e^{-500(t-t_0)}$	$2 - 4 e^{-500(t-t_0)}$

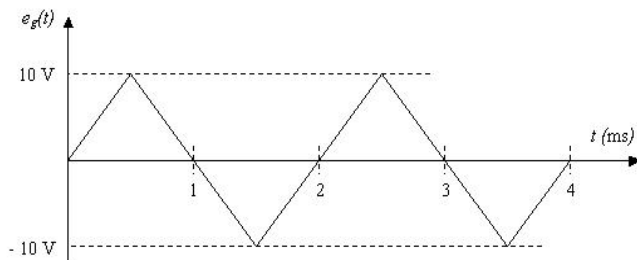


8.5 irudia. Adierazpen grafikoak.

Ariketa-zenbakia: 8.8

Zirkuituko tentsio-iturriak 10 V-eko anplitudea eta 500 Hz-eko maiztasuna dauzkan uhin triangeluarra sortzen du.

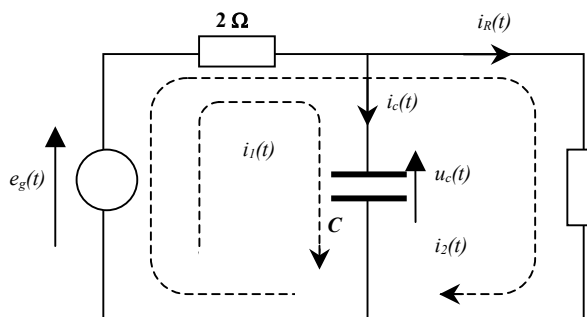
Kalkulatu $u_c(t)$, $i_c(t)$ eta $i_R(t)$ magnitudeen adierazpen analitikoak.



Ebazpena

Sorgailuak ematen duen tentsio-uhina periodikoa da, baina ez sinusoidala. Beraz, zirkuituko egoera egonkorra kalkulatzeko, ezin dugu korrante alternorako prozedura aplikatu.

Horregatik, zirkuituaren portaera adierazten duten ekuazio diferentzialak lortu beharko ditugu. Eta gero, egoera egonkorreko erantzuna kalkulatu dugu, bete beharreko ekuazio horietan oinarrituz.



Adibidez, oinarritzko eratzunen metodoa erabiliko dugu, kalkulatu behar ditugun korranteak zuzenean atera ditzakegu eta.

$$\begin{aligned} i_1(t) &= i_c(t) \\ i_2(t) &= i_R(t) \\ u_c(t) &= 5 \cdot i_R(t) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{C \cdot D} & 2 \\ 2 & 2 + 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_c(t) \\ i_R(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_g(t) \\ e_g(t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} i_c(t) = \frac{5 \cdot C \cdot D e_g(t)}{10 \cdot C \cdot D + 7} \\ i_R(t) = \frac{e_g(t)}{10 \cdot C \cdot D + 7} \end{cases}$$

Edo, ekuazio diferentzial arrunt moduan idatzita:

$$5 \cdot C \cdot \frac{de_g(t)}{dt} = 7 \cdot i_c(t) + 10 \cdot C \cdot \frac{di_c(t)}{dt} \quad ; \quad e_g(t) = 7 \cdot i_R(t) + 10 \cdot C \cdot \frac{di_R(t)}{dt}$$

$$i_R(t) = \frac{u_c(t)}{5} \rightarrow e_g(t) = \frac{7}{5} \cdot u_c(t) + 2 \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

Ekuazio diferentzial lineal baten erantzuna bi atalez osatzen da: homogeneous eta partikularra. Lehenengoa zirkuituaren kitzikapenarekin lotuta dago. Bigarrena, berriz, egoera egonkorari dagokio. Gainera, partikularra zirkuituko kitzikapen eta haren deribatuekiko proportzionalak diren batugaiek osatzen dute.

$$u_{c\infty}(t) = K_0 \cdot e_g(t) + K_1 \cdot \frac{de_g(t)}{dt} + K_2 \cdot \frac{d^2e_g(t)}{dt^2} + K_3 \cdot \frac{d^3e_g(t)}{dt^3} + \dots$$

$t < 0$ s

Hasieran, kondentsadorea kargarik gabe egongo da.

$$u_c(t) = 0 \text{ V} \quad ; \quad i_c(t) = 0 \text{ A}$$

$0 \text{ s} < t < 0,5 \text{ ms}$

Tarte honek elikatze-tentsioaren uhinaren lehenengo igoera hartzen du.

$$e_g(t) = 20 \cdot 10^3 t \text{ V}$$

Zirkuituaren denbora-konstantea, egoera iragankorraren iraupena eta hasierako tentsioa:

$$\tau = R_{bal} \cdot C = \frac{2 \cdot 5}{2 + 5} \cdot 50 \cdot 10^{-6} = \frac{5}{7} \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0,07 \text{ ms} \quad ; \quad 5\tau = 0,35 \text{ ms} < 0,5 \text{ ms}$$

$$\frac{1}{\tau} = 14.000 \text{ s}^{-1} \quad ; \quad u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0 \text{ V}$$

Orduan, egoera egonkorreko erantzuna:

$$u_{c\infty}(t) = K_0 \cdot e_g(t) + K_1 \cdot \frac{de_g(t)}{dt} = K_0 \cdot (20 \cdot 10^3 t) + K_1 \cdot (20 \cdot 10^3) = At + B$$

Eta erantzun horrek zirkuituaren ekuazio diferentziala bete behar duenez:

$$e_g(t) = \frac{7}{5} \cdot u_c(t) + 2 \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

$$20 \cdot 10^3 t = \frac{7}{5} \cdot (At + B) + 2 \cdot 50 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{d(At + B)}{dt} \rightarrow 20 \cdot 10^3 t = \frac{7}{5} \cdot (At + B) + 10^{-4} \cdot A$$

$$\left. \begin{array}{l} 20 \cdot 10^3 = \frac{7}{5} \cdot A \\ 0 = \frac{7}{5} \cdot B + 10^{-4} \cdot A \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{10^5}{7} \\ B = -\frac{50}{49} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_{c\infty}(t) = \left(\frac{10^5}{7} t - \frac{50}{49} \right) \text{ V} \\ u_{c\infty}(0) = -\frac{50}{49} \text{ V} \end{array} \right.$$

Beraz:

$$u_c(t) = u_{c\infty}(t) - [u_{c\infty}(0) - u_c(0)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-0)} = \left(\frac{10^5}{7}t - \frac{50}{49} \right) - \left[-\frac{50}{49} - 0 \right] e^{-14.000t}$$

$$u_c(t) = \left(\frac{10^5}{7}t - \frac{50}{49} \right) + \frac{50}{49} e^{-14.000t} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_c(0 \text{ s}) = 0 \text{ V} \\ u_c(0,5 \text{ ms}) = 300/49 \text{ V} \end{cases}$$

$$i_c(t) = 50 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{5}{7} - \frac{5}{7} e^{-14.000t} \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_c(0 \text{ s}) = 0 \text{ A} \\ i_c(0,5 \text{ ms}) = 5/7 \text{ A} \end{cases}$$

$$i_R(t) = \frac{u_c(t)}{5} = \left(\frac{20 \cdot 10^3}{7}t - \frac{10}{49} \right) + \frac{10}{49} e^{-14.000t} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} i_R(0 \text{ s}) = 0 \text{ A} \\ i_R(0,5 \text{ ms}) = 60/49 \text{ A} \end{cases}$$

$t > 0,5 \text{ ms}$

Hemendik aurrera, elikatze-iturriak milisegundo bateko arrapalak sortuko ditu. Bata bestearen atzean, jaitsiera-igoerako zikloak osatuko dira. Kasu guztietan malda berdineko arrapalak ditugu, positiboa edo negatiboa arrapalaren noranzkoaren arabera. Simetria hori dela eta, zirkuituaren erantzun orokorra aztertuko dugu, aurreko tartean jarraitutako prozedura errepikatuz.

Horrela, milisegundo baten iraupeneko tartearak hartuz, espresio bakar batekin adieraz dezakegu elikatze-tentsioaren balioa:

$$n = 0, 1, 2, 3... \quad ; \quad \Delta t = 1 \text{ ms} \quad ; \quad t_0 = (n \cdot \Delta t + 0,5 \cdot 10^{-3}) \text{ s}$$

$$e_g(t) = (-1)^{n+1} \cdot \left[20 \cdot 10^3 \cdot (t - t_0) - 10 \right] \text{ V} \rightarrow \begin{cases} n = 0 \rightarrow e_g(t) = -20 \cdot 10^3 t + 20 \text{ V} \\ n = 1 \rightarrow e_g(t) = 20 \cdot 10^3 t - 40 \text{ V} \\ n = 2 \rightarrow e_g(t) = -20 \cdot 10^3 t + 60 \text{ V} \\ \dots \end{cases}$$

Non: n : Tarte-zenbakia.

Δt : Tartearen iraupena (milisegundo bat)

t_0 : Tartearen hasiera-denbora.

Tarte bakoitzaren hasieran, kondentsadorearen tentsioak aurrekoaren amaieran zeukan balioa hartuko du. Gainera, elikatze-tentsioa periodikoa izanda, tarte guztiak balio absolutu berberarekin hasiko dira:

$$u_c(t_0) = (-1)^n \cdot \frac{300}{49} \text{ V}$$

Egoera egonkorreko erantzuna:

$$e_g(t) = \frac{7}{5} \cdot u_c(t) + 2 \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

$$(-1)^{n+1} \cdot [20 \cdot 10^3 \cdot (t - t_0) - 10] = \frac{7}{5} \cdot (At + B) + 10^{-4} \cdot A$$

$$\left. \begin{aligned} (-1)^{n+1} \cdot 20 \cdot 10^3 t &= \frac{7}{5} \cdot A \\ (-1)^{n+1} \cdot [-20 \cdot 10^3 t_0 - 10] &= \frac{7}{5} \cdot B + 10^{-4} \cdot A \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} A &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{10^5}{7} \\ B &= (-1)^n \cdot \frac{5}{7} \cdot \left(20 \cdot 10^3 t_0 + \frac{80}{7} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$u_{c\infty}(t) = (-1)^{n+1} \cdot \left[\frac{10^5}{7} \cdot (t - t_0) - \frac{400}{49} \right] \text{ V} \rightarrow u_{c\infty}(t_0) = (-1)^n \cdot \frac{400}{49} \text{ V}$$

Orduan:

$$u_c(t) = u_{c\infty}(t) - [u_{c\infty}(t_0) - u_c(t_0)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} = u_{c\infty}(t) - \left[(-1)^n \cdot \frac{400}{49} - (-1)^n \cdot \frac{300}{49} \right] e^{-14.000(t-t_0)}$$

$$u_c(t) = (-1)^{n+1} \cdot \left[\frac{10^5}{7} \cdot (t - t_0) - \frac{400}{49} \right] + (-1)^{n+1} \cdot \frac{100}{49} e^{-14.000(t-t_0)} \text{ V}$$

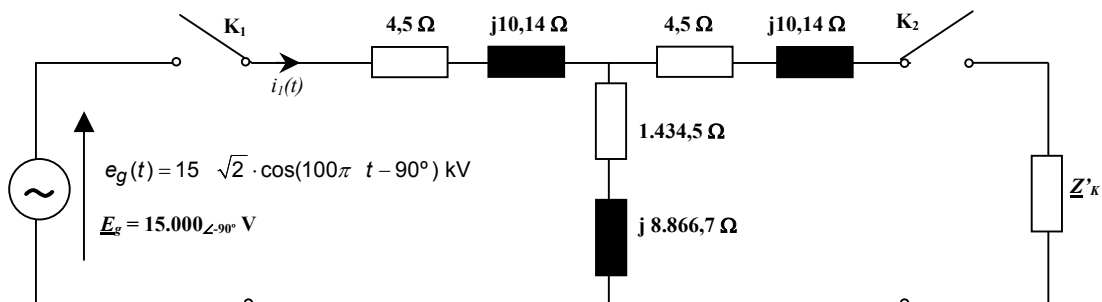
$$u_c(t) = (-1)^{n+1} \cdot \left\{ \left[\frac{10^5}{7} \cdot (t - t_0) - \frac{400}{49} \right] + \frac{100}{49} e^{-14.000(t-t_0)} \right\} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} u_c(t_0) = (-1)^n \cdot \frac{300}{49} \text{ V} \\ u_c(t_0 + \Delta t) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{300}{49} \text{ V} \end{cases}$$

$$i_c(t) = 50 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{du_c(t)}{dt} = (-1)^{n+1} \cdot \left[\frac{5}{7} - \frac{10}{7} e^{-14.000(t-t_0)} \right] \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_c(t_0) = (-1)^n \cdot \frac{5}{7} \text{ A} \\ i_c(t_0 + \Delta t) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{5}{7} \text{ A} \end{cases}$$

$$i_R(t) = \frac{u_c(t)}{5}$$

$$i_R(t) = (-1)^{n+1} \cdot \left\{ \left[\frac{2 \cdot 10^4}{7} \cdot (t - t_0) - \frac{80}{49} \right] + \frac{20}{49} e^{-14.000(t-t_0)} \right\} \text{ V} \rightarrow \begin{cases} i_R(t_0) = (-1)^n \cdot \frac{60}{49} \text{ A} \\ i_R(t_0 + \Delta t) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{60}{49} \text{ A} \end{cases}$$

Ariketa-zenbakia: 8.9

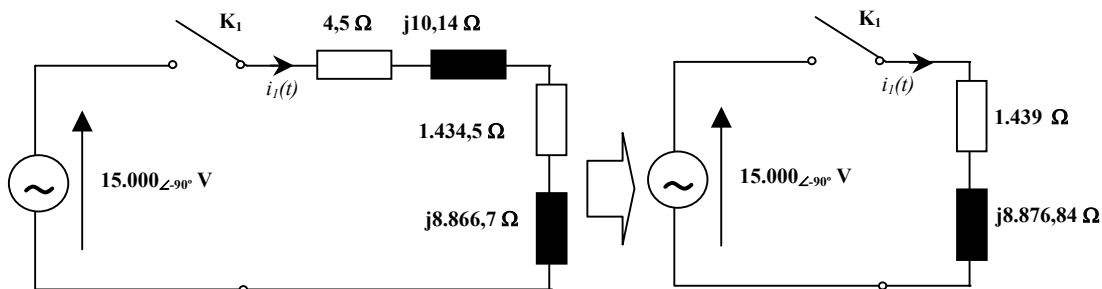


Aurreko irudian, 500 kVA, 15.000/3.000 V eta 50 Hz-eko transformadore monofasiko baten zirkuitu baliokide sinplifikatua agertzen da. Zirkuitu hori erabiltzeak dakartzan hurbilketak ontzat hartuz, kalkulatu transformadore horren konexio-korrontea ondorengo kasu bietan:

1. Transformadorea hutsean dagoenean (K_2 zabalik).
2. Transformadorea kargan dagoenean (K_2 itxita), bere sekundarioak $(14 + j10) \Omega$ -eko karga elikatzen badu. Bigarren kasu honetan, ez hartu kontuan transformadorearen zirkuitu baliokideko adar paraleloak duen eragina.

Ebazpena

1. Lehenengo kasu honetan, transformadorea hutsean dago. Hau da, haren sekundarioan zehar ez dabil korronteirik. Hots, ebatzi behar dugun zirkuitua sinplifika dezakegu.



Lehen ordenako zirkuitu honen denbora-konstantea:

$$L = \frac{8.876,84}{2\pi f} = \frac{8.876,84}{100\pi} = 28,26 \text{ H}$$

$$\tau = \frac{L}{R_{bal}} = \frac{28,26}{1.439} = 19,6 \text{ ms} ; \quad \frac{1}{\tau} = 50,93 \text{ s}^{-1} ; \quad 5\tau = 98 \text{ ms}$$

$t > 0 \text{ s}$

Konektatzen den unean xurgatzen duen korronea nulua izango da:

$$i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0 \text{ A}$$

Amaierako egoera egonkorrean, berriz, hutseko korronea xurgatuko du:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{15.000 \angle -90^\circ}{1.439 + j8.876,84} = \\ &= 1,67 \angle -170,7^\circ \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_{1\infty}(t) = 1,67 \sqrt{2} \cdot \cos(100\pi t - 170,7^\circ) \text{ A} \\ i_{1\infty}(0) = 1,67 \sqrt{2} \cdot \cos(-170,7^\circ) = -2,33 \text{ A} \end{cases} \end{aligned}$$

Beraz, konexio-korronearen adierazpen analitikoa hau izango dugu:

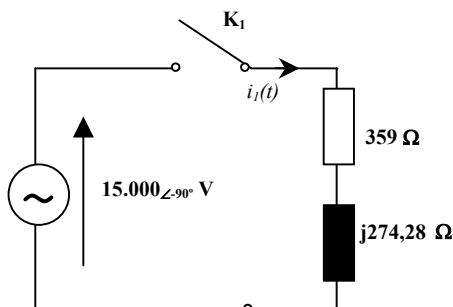
$$\begin{aligned} i_1(t) &= i_{1\infty}(t) - [i_{1\infty}(0) - i_1(0)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-0)} = \\ &= 1,67\sqrt{2} \cdot \cos(100\pi t - 170,7^\circ) - (-2,33 - 0) e^{-50,93t} \text{ A} \\ i_L(t) &= 1,67\sqrt{2} \cdot \cos(100\pi t - 170,7^\circ) + 2,33 e^{-50,93t} \text{ A} \end{aligned}$$

2. Kasu honetan, ez dugu kontuan izango transformadorearen zirkuitu baliokideko adar paraleloa. Gainera, kargaren eragina ere agertuko da zirkuituan.

$$\underline{Z}'_K = m^2 \cdot \underline{Z}_K = \left(\frac{15.000}{3.000} \right)^2 \cdot (14 + j10) = 350 + j250 \Omega$$



Edo sinplifikatuta:



$$L = \frac{274,28}{2\pi f} = \frac{274,28}{100\pi} = 0,873 \text{ H}$$

$$\tau = \frac{L}{R_{bal}} = \frac{0,873}{359} = 2,43 \text{ ms}$$

$$\frac{1}{\tau} = 411,2 \text{ s}^{-1}$$

$$5\tau = 12,15 \text{ ms}$$

$t > 0 \text{ s}$

Hasierako egoeran:

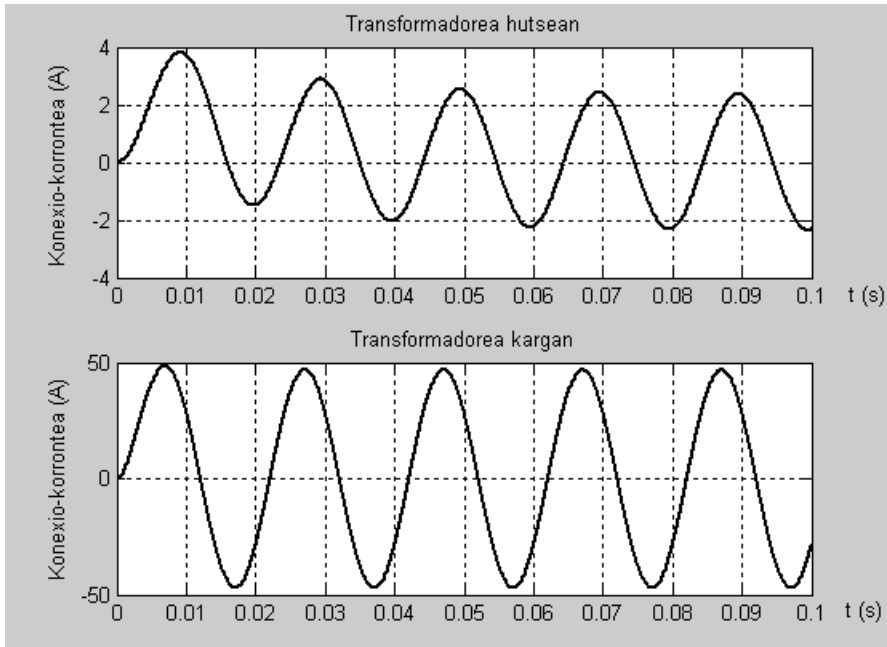
$$i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0 \text{ A}$$

Amaierako egoera egonkorrean:

$$\underline{I}_1 = \frac{15.000 \angle -90^\circ}{359 + j274,28} = 33,2 \angle -127,38^\circ \text{ A} \rightarrow \begin{cases} i_{1\infty}(t) = 33,2\sqrt{2} \cdot \cos(100\pi t - 127,38^\circ) \text{ A} \\ i_{1\infty}(0) = 33,2\sqrt{2} \cdot \cos(-127,38^\circ) = -28,5 \text{ A} \end{cases}$$

Orduan, transformadoreak kargan xurgatzen duen korronea:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= i_{1\infty}(t) - [i_{1\infty}(0) - i_1(0)] e^{-\frac{1}{\tau}(t-0)} = \\ &= 33,2\sqrt{2} \cdot \cos(100\pi t - 127,38^\circ) - (-28,5 - 0) e^{-411,2t} \text{ A} \\ i_L(t) &= 33,2\sqrt{2} \cdot \cos(100\pi t - 127,38^\circ) + 28,5 e^{-411,2t} \text{ A} \end{aligned}$$



8.6 irudia. Konexio-korronteen adierazpen grafikoak.



ELHUYAR Edizioak

Unibertsitateko gaiak

- Enpresa-zientziak
- Giza zientziak
- Ingeniaritza
- Kimika
- Matematika
- Osasuna
- Teknologia elektrikoa
- Teknologia mekanikoa



ELHUYAR
edizioak