KALKULUA

ARRASATEKO ESKOLA POLITEKNIKOA

K A L K U L U A

ARRASATEKO ESKOLA POLITEKNIKOA

Hezkuntza, Unibertsitate eta Ikerketa Sailak onetsia: 1990–V–28
Bigarren argitarapen emendatua (1992)

ISBN: 84–87114–64–4

Inprimatzailea: Lizarra inprimategia. Tafallarako bidea. 1. km. Lizarra (Nafarroa)

A U R K I B I D E A

1. ZENBAIT KONTZEPTU MATEMATIKO

1.1. POLINOMIOAK

1.2. INDUKZIO OSATUAREN PRINTZIPIOA

1.3. NEWTON–EN BINOMIOA

1.4. GOI–MAILAKO PROGRESIO ARITMETIKOAK

1.1.– POLINOMIOAK

a) Definizioa

$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$ f funtzioari, n zenbaki arrunta delarik, n–garren mailako polinomio deitzen zaio.

b) Polinomioen arteko eragiketak

1. Batuketa: maila bereko gaien batuketa egiten da.

Adib.

$$
\begin{array}{rr}
 & 4x^3 + 3x^2 - 6x + 2 \\
+ & 2x^2 + 3x - 8 \\
\hline
 & 4x^3 + 5x^2 - 3x - 6
\end{array}
$$

2. Kenketa: maila bereko gaien kenketa egiten da.

Adib.

$$
\begin{array}{rr}
 & 4x^3 + 3x^2 - 6x + 2 \\
- & 3x^2 - 2x - 8 \\
\hline
 & 4x^3 \qquad - 4x + 10
\end{array}
$$

3. Biderkaketa: biderkatzailearen gai bakoitza biderkagai osoaz biderkatzen da eta lortu ditugun polinomioak batu.

Adib. biderkagaia: $3x^3 - 2x^2 + x + 7$
biderkatzailea: $2x^2 - x + 5$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 3x^3 & - 2x^2 & + x & + 7 \\
 & & & 2x^2 & - x & + 5 \\
\hline
 & & 15x^3 & - 10x^2 & + 5x & + 35 \\
 & -3x^4 & + 2x^3 & - x^2 & - 7x & \\
6x^5 & - 4x^4 & + 2x^3 & + 14x^2 & & \\
\hline
6x^5 & - 7x^4 & + 19x^3 & + 3x^2 & - 2x & + 35
\end{array}
$$

4. Zatiketa:

Adib. Zatigaia: $4x^5 - 7x^3 + x - 7$
Zatitzailea: $2x^2 - x + 7$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
4x^5 & & -\ 7x^3 & & +\ x & -\ 7 & 2x^2 - x + 7 \\
\cline{7-7}
-4x^5 & +\ 2x^4 & -\ 14x^3 & & & & 2x^3 + x^2 - 10x - 8{,}5 \\
\cline{1-6}
 & 2x^4 & -\ 21x^3 & & +\ x & -\ 7 & \\
 & -\ 2x^4 & +\ x^3 & -\ 7x^2 & & & \\
\cline{2-6}
 & & -\ 20x^3 & -\ 7x^2 & +\ x & -\ 7 & \\
 & & 20x^3 & -\ 10x^2 & +\ 70x & & \\
\cline{3-6}
 & & & -\ 17x^2 & +\ 71x & -\ 7 & \\
 & & & 17x^2 & -\ 8{,}5x & +\ 59{,}5 & \\
\end{array}
$$

$2x^3 + x^2 - 10x - 8{,}5$–i zatidura deitzen zaio.

$62{,}5x + 52{,}5$–i hondar deitzen zaio.

Zatitzailea (x–a) erakoa denean, Ruffini–ren erregela erabili daiteke.

Ruffini–ren erregela

$P(x) = C_0x^n + \ldots + C_n$ polinomioak koefiziente razionalak baditu, (x–a) gaiaz zatituta ondokoa lortuko dugu:

$P(x) = (x-a)\,Q(x) + R$ R zenbakia

$x = a$ egiten badugu, $P(a) = (a-a)\,Q(a) + R$. Beraz $P(a) = R$

Erregela, adibide batez ikusiko dugu:

Adib. $P(x) = 7x^5 + 5x^3 + 8x^2 - 13x - 29$ zati $x + 2$

	7	0	5	8	–13	–29
–2		–14	28	–66	116	–206
	7	–14	33	–58	103	–235

Zatidura: $C(x) = 7x^4 - 14x^3 + 33x^2 - 58x + 103$

Hondarra: $R = -235$

c) Polinomio baten erroak

Definizioz "a" P (x)–en erro bat dela esango dugu, P (a) = 0 bada.

Teorema: "a" erro bat bada, P (x)   (x–a) gaiaz zatigarria da.

Frogapena. Ikusi dugunez, P (x) = (x–a) Q (x) + R

P (a) = (a–a) Q (a) + R. Beraz R = P (a). a erroa bada, P (a) = 0 = R

Teorema: Polinomio batek, bere mailak adierazten duen adina erro ditu.

Teorema: Polinomio baten erroak, errealak edo irudikariak izan daitezke. Irudikariak badira, bikote bezala azaltzen dira, bata bestearen konjokatua izanik.

Teorema: Erroa sinplea edo anikoitza izan daiteke.

d) Polinomio baten deskonposaketa faktoriala

Edozein polinomio, lehen eta bigarren mailako polinomiotan deskonposa daiteke:

$$P(x) = (x-a)(x-b) \ldots (Ax^2+bx+c)(A'x^2+b'x+c')$$

Erroak irudikariak baldin badira, bigarren mailako eta koefiziente errealeko polinomio bihurtzen dira.

$$[x-(\alpha+\beta i)].[x-(\alpha-\beta i)] = [(x-\alpha)-\beta i].[(x-\alpha)+\beta i] =$$

$$= (x-\alpha)^2 - (\beta i)^2 = (x-\alpha)^2 + \beta^2$$

Adib. $15x^4 + 47x^3 + 30x^2 - 8x = x\,(15x^3 + 47x^2 + 30x - 8) =$

$$= 15\,(x+2)\,(x-1/5)\,(x+4/3)\,x$$

e) Frakzio razionalak frakzio sinpletan deskonposatzea

Har dezagun ondoko bi polinomioen zatiketa: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Zatigaiaren maila zatitzailearena baino handiagoa bada, jarraian bezala ipin daiteke: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} =$

$H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ R (x) hondarraren maila Q (x) zatitzailearen maila baino txikiagoa delarik.

Q (x)–en erroak sinpleak baldin badira, ondoko $\frac{R(x)}{Q(x)}$ zatiduran bezala:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-c)} + \dots + \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{M'x+N'}{(x-\alpha')^2+\beta'^2}$$

$$Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\dots[(x-\alpha)^2+\beta^2][(x-\alpha')^2+\beta^2]\dots$$

Erroak anizkoitzak badira:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^3} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)} + \dots + \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2} + \frac{M'x+N'}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]}$$

$Q(x) = (x-a)^3 \dots [(x-\alpha)^2+\beta^2]^2$ izanik.

Ikus dezagun, adibide baten bidez, A, B, C,… koefizienteak nola lortzen diren:

$$\frac{2x^2-1}{15x^4+47x^3+30x^2-8x}$$

Lehenengo pausoa, polinomio zatitzailearen erroak aurkitzea izango da:

$$X(15X^3+47X^2+30X-8)$$

$$15X(X+2)(X-1/5)(X+4/3) = X(X+2)(5X-1)(3X+4)$$

$$\frac{2X^2-1}{15X^4+47X^3+30X^2-8X} = \frac{2X^2-1}{X(X+2)(5X-1)(3X+4)} =$$

$$= \frac{A}{X} + \frac{B}{3x+4} + \frac{C}{5x-1} + \frac{D}{x+2}$$

Hemendik ondokoa ateratzen da:

$$2x^2-1 = (3x+4)\,(5x-1)\,(x+2)\,A + x\,(5x-1)\,(x+2)\,B +$$

$$+\, x\,(3x+4)\,(x+2)\,C + x\,(3x+4)\,(5x-1)\,D$$

$x = 0$	egiten	badugu	$A = 1/8$
$x = -4/3$	"	"	$B = 3/8$
$x = 1/5$	"	"	$C = -5/11$
$X = -2$	"	"	$D = -7/44$

Beraz,

$$\frac{2x^2-1}{15x^4+47x^3+30x^2-8x} = \frac{1}{8x} + \frac{3}{8\,(3x+4)} - \frac{5}{11\,(5x-1)} - \frac{7}{44\,(x+2)}$$

Koefizienteak aurkitzeko, beste prozedura bat argitzen da jarraian:

$$2x^2 - 1 \neq (15A+5B+3C+15D)\;x^3 + (47A+9B+10C+17D)\;x^2 +$$

$$+\,(30A-2B+8C-4D) - 8A$$

Bi polinomio horien koefizienteak berdinduz, ondokoa lortzen da:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 15A + 5B + 3C + 15D \\ 2 = 47A + 9B + 10C + 17D \\ 0 = 30A - 2B + 8C - 4D \\ -1 = -8A \end{array}\right|\quad \begin{array}{l} A = 1/8 \\ B = 3/8 \\ C = -5/11 \\ D = -7/44 \end{array}$$

f) Ariketak

1. $$\frac{8x^2-6x+6}{x^3-3x^2+7x-5} = \frac{2}{x-1} + \frac{6x+4}{(x-1)^2+4}$$

2. $$\frac{-2x^3+3x-5}{x^3+3x^2-3x-1} = -2 - \frac{2}{3\,(x-1)} + \frac{20-7\sqrt{3}}{6\,(x+2-\sqrt{3})} + \frac{20+7\sqrt{3}}{6\,(x+2+\sqrt{3})}$$

3. $$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-2}$$

1.2.– INDUKZIO OSATUAREN PRINTZIPIOA

Zenbait zenbaki arrunten artean dagoen erlazioa (beraien artean n zenbaki determinatu bat dagoelarik) n–ren balio guztientzat ziurra dela frogatzeko, hurrengo bi puntuak frogatzea nahikoa da:

1. Erlazioa ziurra dela n=1 egiten dugunean

2. n = h balioarentzat erlazioa ziurra dela suposatuz, n = h + 1 balioarentzat ere ziurra da.

a) Adibideak

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n$–ren batuketa $S = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$

Bi puntuak frogatu behar ditugu:

1. Erlazioa ziurra da n = 1 denean

$$S = \frac{1\,(1+1)}{2} = 1$$

2. n = h–rentzat $S = \dfrac{h\,(h+1)}{2}$ ziurra bada, hau da, $1 + 2 + 3 + \ldots + h = S$

bi aldeetan h + 1 gehituz $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + h + (h+1) = \dfrac{h\,(h+1)}{2}$ + + (h+1)

$S_{h+1} = \dfrac{h\,(h+1) + 2\,(h+1)}{2} = \dfrac{(h+1)\,(h+2)}{2}$ eta baliagarria da h+1–entzat.

b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1)^2 = 1/3\ (n+1)\ (2n+1)\ (2n+3)$

1. n=1 2n+1=3 $1^2+3^2=10$

$$S = \frac{(1+1)\,(2+1)\,(2+3)}{3} = 10$$

2. n=h $1^2 + 3^2 + \ldots + (2h+1)^2 = 1/3\ (h+1)\ (2h+1)\ (2h+3)$

n=h+1

$1^2 + \ldots + (2h+1)^2 + (2h+3)^2 = 1/3\ [(h+1)\ (2h+1)\ (2h+3)] + (2h+3)^2 =$

$$= \frac{(h+1)\ (2h+1)\ (2h+3) + 3\ (2h+3)^2}{3} =$$

$$= \frac{(2h+3)\ [(h+1)\ (2h+1) + 3\ (2h+3)]}{3} =$$

$$= \frac{(2h+3)\ (2h^2+3h+1+6h+9)}{3} = \frac{(2h+3)\ (2h^2+9h+10)}{3} .$$

$2h^2 + 9h + 10$–en deskonposaketa faktoriala eginez:

$$\frac{(2h+3)\ (h+2)\ (2h+5)}{3} =$$

$$= \frac{[2\ (h+1) + 1]\ [(h+1) + 1]\ [2\ (h+1) + 3]}{3}$$

b) Proposatutako ariketak

1. $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \qquad q \neq 1$

2. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

3. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n\ (n+1) = 1/3.n.(n+1).(n+2)$

4. $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2\ (2^n-1)$

5. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2\ (2n^2-1)$

1.3.– NEWTON–EN BINOMIOA

Batuketa baten edozein potentzia lortzeko, Newtonek formula bat asmatu zuen:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

non $\binom{n}{h} = \dfrac{n\,(n-1)\,\ldots\,[n-(h-1)]}{h!} = \dfrac{n!}{h!\,(n-h)!}$

Zenbaki hauei zenbaki konbinatorio deitzen zaie eta propietate hauek dituzte:

a) $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} \quad ; \quad \binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!\,(m-(m-n))!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} \ .$$

Beraz berdinak dira.

b) $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$

$$\binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{(n-1)!\,(m-n)!}$$

$$\binom{m-1}{n} = \frac{(m-1)!}{n!\,(m-1-n)!}$$

$$\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \frac{(m-1)!\,n + (m-1)!\,(m-n)}{n\,(n-1)!\,(m-n)\,(m-n-1)!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

1.4.– GOI–MAILAKO PROGRESIO ARITMETIKOAK

Progresioa lege baten bidez ordenatutako zenbaki–segida bat da.

$$f\,(0),\ f\,(1),\ f\,(2)\ ,\ \ldots\ f\,(n)$$

Progresioa definitzen duen funtzioa polinomio bat denean, kasu berezi baten aurrean gaude:

$P\,(x) = 3x + 8 \quad P\,(0) = 8 \quad P\,(1) = 11 \quad P\,(2) = 14\ \ldots$

$P\,(x) = x^2 - 2x + 5 \quad P\,(0) = 5 \quad P\,(1) = 4 \quad P\,(2) = 5\ \ldots$

$P\,(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \ldots + \alpha_0$ k mailako polinomio bat.

Beraz a_n segida P (1), P (2), … polinomioaren bidez ordenatuta dago.

Segida hau oinarri bezala hartuz, beste segida bat lor dezakegu: b_n P (2) – P (1), P (3) – P (2), … Ikusten denez, gai bakoitza $b_n = a_{n+1} - a_n$ eginez lortzen da.

Segida berria ere progresio aritmetikoa dela ikus dezagun:

$b_n = [\alpha_k\ (n+1)^k + \ldots + \alpha_0] - [\alpha_k n^k + \ldots + \alpha_0]$. Beraz:

$b_n = An^{k-1} + Bn^{n-2} + \ldots$ Ikusi dugunez, segida berria unitate bat gutxiagoko maila duen polinomio baten bidez ordenatuta dago.

Adibidea:

$p(x) = x^3 - x + 7$	....	7	13	31	67	127	217 ....
$a(x) = p(x+1) - p(x)$	....	6	18	36	60	90	
$b(x) = a(x+1) - a(x)$	....	12	18	24	30		
$c(x) = b(x+1) - b(x)$	....	6	6	6			
$d(x) = c(x+1) - c(x)$	....	0	0				

Taularen osagai batzuk emanez, errepikapen–lege bat dagoela ikus dezagun:

$a_1 \quad a_2$

$\Delta a_1 \qquad a_2 = a_1 + \Delta a_1$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_3 = a_2 + a_2 = a_1 + \Delta a_1 + \Delta a_2 = a_1 + \Delta a_1 + \Delta a_1 + \Delta^2 a_1 =$

$\Delta a_1 \quad \Delta a_2 \qquad = a_1 + 2\Delta a_1 + \Delta^2 a_1$

$\Delta^2 a_1$

Berdin eginez, $a_4 = a_1 + 3\Delta a_1 + 3\Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1$, hau da,

$$a_4 = \binom{3}{0} a_1 + \binom{3}{1} \Delta a_1 + \binom{3}{2} \Delta^2 a_1 + \binom{3}{3} \Delta^3 a_1. \text{ Hedatuz:}$$

$$a_k = \binom{k-1}{0} a_1 + \binom{k-1}{1} \Delta a_1 + \ldots + \binom{k-1}{k-1} \Delta^{k-1} a_1$$

Hau frogatzeko indukzio osatuaren printzipioa erabiliko dugu:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1 & & a_2 & \cdots\cdots & a_k & & a_{k+1} \\
& \Delta a_1 & & \cdots\cdots & & \Delta a_1 & \\
& & \Delta_1^{k-1}a & & \Delta_2^{k-1}a & & \\
& & & \Delta_1^{k}a & & &
\end{array}$$

$a_{k+1} = a_k + \Delta a_k$

$$a_k = \binom{k-1}{0} a_1 + \binom{k-1}{1} \Delta a_1 + \ldots + \binom{k-1}{k-1} \Delta^{k-1} a_1$$

$$\Delta a_k = \binom{k-1}{0} \Delta a_1 + \ldots + \binom{k-1}{k-1} \Delta^{k} a_1$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} \text{ kontutan hartuz:}$$

$$a_{k+1} = \binom{k}{0} a_1 + \binom{k}{1} \Delta a_1 + \ldots + \binom{k}{k} \Delta^{k} a_1$$

Adibidea:

$$\begin{array}{ccccccccc}
7 & & a_2 & & a_3 & & a_5 & & a_6 \\
& -1 & & & & & & & \\
& & 5 & & & & & & \\
& & & 2 & & & & & \\
& & & & 6 & & 6 & & 6
\end{array}$$

$a_1 = 7 \qquad a_2 = 7 + (-1) = 6 \qquad a_3 = \binom{2}{0}.7 + \binom{2}{1}.(-1) + \binom{2}{2}.2 = 10$

a) Goi–mailako progresio aritmetiko baten gaien batura

Izan bedi, adibidez, hirugarren mailako progresio aritmetiko bat:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
a_n: & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & \ldots\ldots \\
& & \Delta a_1 & & \Delta a_2 & & \Delta a_3 & & \Delta a_4 & \ldots\ldots & \\
& & & \Delta^2 a_1 & & \Delta^2 a_2 & & \Delta^2 a_3 & \ldots\ldots & & \\
& & & & \Delta^3 a_1 & & \Delta^3 a_2 & \ldots\ldots & & & \\
& & & & & 0 & \ldots\ldots & & & &
\end{array}$$

Lortu behar duguna hau da: $\sum_{i}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$a_1, a_2, \ldots$ gai bakoitza $a_1, \Delta a_1, \Delta^2 a_1, \Delta^3 a_1, \ldots$–ren funtzioan jarri daitekeenez, batura ere gai horien funtziotan jar daiteke, baina guk ez dugu hori egingo. Beste era bat, beste progresio geometriko bat bilatuz egitea da, non $a_1, a_2, \ldots$ progresio honen hondarrak bait dira.

$$
\begin{array}{lccccccccc}
b_n: & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & \ldots\ldots\ldots \\
 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & \\
 & & & \cdot & & \cdot & & & \\
 & & & & \cdot \quad \cdot & & & & \\
 & & & & \cdot & & & &
\end{array}
$$

$b_1 = 0 \quad b_2 = a_1 \quad b_3 = a_1 + a_2 + \ldots + b_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

b_{n+1} gai orokorraren formula erabiliz:

$$b_{n+1} = \binom{n+1-1}{0} b_1 + \binom{n+1-1}{1} \Delta b_1 + \ldots + \binom{n+1-1}{n+1-1} \Delta^{n+1-1} b_1.$$

Beraz:

$$S_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \Delta a_1 + \ldots + \binom{n}{n} \Delta^{n-1} a_1$$

$b_1 = 0 \quad \Delta b_1 = a_1 \quad \Delta^2 b_1 = \Delta a_1 \ldots \Delta^n b_1 = \Delta^{n-1} a_1$ delako.

b) Ariketen ebazpenak

1. Progresio batzuetan, progresioa definitzen duen funtzioa aurkitzea oso zaila da, baina kasu askotan ez da beharrezkoa.

   Adib.

   a) $1, -2, 1, -2, 1, -2, \ldots$
   nahikoa da gai bakoitiak 1 eta bikoitiak –2 direla esatea.

   b) $3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, \ldots$
   definitzen duen funtzioa $f_n = 3{,}5 + 0{,}5\,(-1)^n$ da, baina gai bakoitiak 3 direla eta bikoitiak 2 esatea, nahikoa izango litzateke.

2. Kasu batzuetan, progresio bat definitzen duen funtzioa aurkitzea oso zaila edo aurkiezina baldin bada ere, progresioaren gai batzuen batura aurki dezakegu.

   Adib. $1^3, 2^3, -3^3, 4^3, 5^3, -6^3, \ldots, 997^3, 998^3, -999^3, 1000^3$

   Guk aurkitu behar duguna hauen batura da, baina hirutan deskonposa dezakegu:

$$\underbrace{(1^3+4^3+7^3+\ldots+997^3+1000^3)}_{A} + \underbrace{(2^3+5^3+\ldots+998^3)}_{B} + \underbrace{(-3^3+-6^3+\ldots+-999^3)}_{C}$$

   A–ren formazio–legea ikusiko dugu:

   1, 4, 7, … progresio aritmetikoa denez, $a_n = [1+(n-1).3]^3$

   $a_n = (3n-2)^3$

1		64		343		1000	....
	63		279		657	....	
		216		378	....		
			162		162	....	
				0	....		

   A progresioak 334 gai ditu eta denen batura hau izango da:

$$\sum_{1}^{334} a_n = \binom{334}{1} 1 + \binom{334}{2} 63 + \binom{334}{3} 216 + \binom{334}{4} 162$$

   B–ren formazio–legea ikusiko dugu:

   2, 5, 8, … progresio aritmetikoa da eta $b_n = [2+(n-1)3]^2$

   $b_n = (3n-1)^3$

8		125		512		1331		2744	....
	117		387		819		1413	....	
		270		432		594	....		
			162		162	....			
				0	…….				

   B progresioak 333 gai ditu, eta batura hau izango da:

$$\sum_{1}^{333} b_n = \binom{333}{1} 8 + \binom{333}{2} 117 + \binom{333}{3} 270 + \binom{333}{4} 162$$

C–ren formazio–legea ikusiko dugu:

3, 6, 9, … progresio aritmetikoa da eta $c_n = [3+(n-1)3]^3$

$$\begin{array}{lccccccccccc}
b_n = (3n)^3 & 27 & & 216 & & 729 & & 1728 & & 3375 & \ldots\ldots. & \\
 & & 189 & & 513 & & 999 & & 1647 \ldots\ldots. & & & \\
 & & & 324 & & 486 & & 648 \ \ldots\ldots. & & & & \\
 & & & & 162 & & 162 \ \ldots\ldots. & & & & & \\
 & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

C progresioak 333 gai ditu eta bere batura hau izango da:

$$\sum_{1}^{333} c_n = \binom{333}{1} 27 + \binom{333}{2} 189 + \binom{333}{3} 324 + \binom{333}{4} 162$$

Beraz batura totala:

$$S_n = \sum_{1}^{334} a_n + \sum_{1}^{333} b_n - \sum_{1}^{333} c_n$$

$$S_n = \binom{334}{1} + \binom{334}{2} 63 + \binom{334}{3} 216 + \binom{334}{4} 162 -$$

$$- \binom{333}{1} 19 - \binom{333}{2} 72 - \binom{333}{3} 54$$

3. Taula jakin gabe, progresio aritmetikoa definitzen duen polinomioa aurkitu behar dugu. $a_n = \alpha n^3 + \beta n^3 + \gamma n + \mu$ polinomioaren koefizienteak aurkitu behar ditugu edo bestela taulan agertu behar duten a_1, Δa_1, $\Delta^2 a_1$, $\Delta^3 a_1$ (multzo bat edo bestea aurkitzea ariketa–motaren araberakoa da).

   Adib. Har dezagun hirugarren mailako progresio aritmetiko bat, non:

   * bostgarren gaia $a_5 = 379$

   * $a_7 - a_3 = 956$

   * $a_8 - a_4 = 1382$

* $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 5815$

Progresioa definitzen duen polinomioa aurkitu.

1. baldintza $a_5 = 379$

$$\binom{4}{0} a_1 + \binom{4}{1} \Delta a_1 + \binom{4}{2} \Delta^2 a_1 + \binom{4}{3} \Delta^3 a_1 = 379$$

Terminologia errazteko $a = a_1$, $b = \Delta a_1$, $c = \Delta^2 a_1$, $d = \Delta^3 a_1$. Beraz:

$$a + 4b + 6c + 4d = 379$$

2. baldintza $a_7 - a_3 = 1382$

$$a + 6b + 15c + 20d - a - 2b - c = 956 \qquad 4b + 14c + 20d = 956$$

3. baldintza $a_8 - a_4 = 1382$

$$4b + 18c + 34d = 1382$$

4. baldintza $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 5815$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \binom{4}{1} a + \binom{4}{2} b + \binom{4}{3} c + \binom{4}{4} d =$$

$$= 4a + 6b + 4c + d$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_8 + a_9 = \binom{9}{1} a + \binom{9}{2} b + \binom{9}{3} c + \binom{9}{4} d =$$

$$= 9a + 36b + 84c + 126d$$

Beraz, $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = (a_1+a_2+a_3+\ldots+a_9) - (a_1+a_2+a_3+a_4) =$

$= (9a+36b+84c+126d) - (4a+6b+4c+d) = 5a+30b+80c+125d = 5815$

Lau baldintza hauek, lau ekuazio ematen dituzte:

2. ZENBAKIA. ALDAGAIA. FUNTZIOA

2.1.– ZENBAKIAK

a) Zenbaki errealak. Zenbakizko ardatzeko adierazpidea

Zenbaki osoek eta zatikizkoek (nahiz positiboek, nahiz negatiboek), eta zero zenbakiak ere osatzen duten multzoari *zenbaki razionalen* multzoa deitzen zaio.

Zenbaki razionala, p eta q zenbaki osoen arrazoi bezala adieraz daiteke (p/q). Partikularki, p zenbaki osoa bi zenbaki osoen arrazoi bezala jar daiteke (p/1).

Zatiki hamartar indefinitu periodiko ez diren zenbakiei *zenbaki irrazional* deitzen zaie ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, …).

Zenbaki razional eta irrazionalen bildurari *zenbaki errealen* multzo deitzen zaio.

Zenbaki errealak, zenbakizko ardatzean puntuen bidez adieraz daitezke. Ondoko arau hauek determinaturik dituen zuzen bukaezinari *zenbakizko ardatz* deitzen zaio:

– *Jatorri* deitzen den 0 puntu bat du.

– Gezi baten bidez adierazita, norabide positibo bat du.

– Luzerak neurtzeko eskala bat du.

x_1 zenbakia positiboa bada, puntu baten bidez adierazten da eskuin aldetik, eta negatiboa bada, ezker aldetik.

Zenbaki erreal bakoitza, zenbakizko ardatzean puntu batez adierazita dago. Hau da, zenbakizko ardatzeko puntu bakoitzak zenbaki erreal bakar bat (razionala edo irrazionala) adierazten du.

Bi zenbaki errealen artean, beti zenbakiak (bai razionalak, bai irrazionalak) aurki ditzakegu.

Teorema: Edozein α zenbaki irrazional, nahi den zehaztasunaz zenbaki irrazionalen bidez adieraz daiteke.

α, N eta N+1 bi zenbaki osoren tartean dago. N eta N+1–ren artean dagoen segmentua n zatitan zatituko dugu. Beraz, α N + (m/n) eta N + [(m+1)/n] zenbaki razionalen tartean egongo da. Zenbaki hauen arteko diferentzia 1/n denez, bi horietako bakoitzak, aurrez determinaturiko zehaztasun–maila batekin α adierazten du.

Adib. $\sqrt{2}$ zenbakia 1,4 eta 1,5–en tartean dago (1/10) baino handiagoa ez den errore batekin.

b) Zenbaki errealen balio absolutua

Definizioa: Hurrengo arau hauek betetzen dituen eta negatibo ez den zenbaki erreala da:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Edozein zenbakik betetzen du: $x \leq |x|$

Propietateak:

1) $|x+y| \leq |x| + |y|$

Frogapena:

Izan bedi $x + y \geq 0$

$|x+y| = x + y \leq |x| + |y|$ ($x \leq |x|$ eta $y \leq |y|$ direlako)

Izan bedi $x + y < 0$

$|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$

2) $|x-y| \geq |x| - |y|$

Frogapena:

Pentsa dezagun $x - y = z$. Beraz $x = y + z$

$|x| = |y+z| \leq |y| + |z| = |y| + |x-y|$

$|x| - |y| \leq |x-y|$

3) $|x.y.z| = |x| . |y| . |z|$

4) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

2.2.– ALDAGAIA

a) Magnitude aldakorrak eta konstanteak

Magnitude aldakorra edo *aldagaia*, zenbakizko balio ezberdinak har ditzakeena da. Zenbakizko balioa aldatzen ez zaion magnitudeari *konstante* deitzen zaio.

Aldagaiak x, y, z, … letren bidez adierazten dira.

Konstanteak a, b, c, … letren bidez.

Baldintza fisikoetan, magnitude berbera fenomeno batean konstante eta beste batean aldakor izan daiteke.

Adib.

– higidura uniformean abiadura konstantea da.

– higidura uniformeki azeleratuan abiadura aldagaia da.

Edozein fenomenotan zenbakizko balioa aldatzen ez zaien magnitudeei, konstante absolutu deitzen zaie.

Definizioa: Magnitude aldakor baten zenbakizko balio guztiek osatzen duten multzoari *aldakuntz eremu* deitzen zaio.

b) Aldagai ordenatua

x aldagaia *ordenatua* dela esaten da, hurrengo bi baldintzak betetzen baditu:

* x–en aldakuntz eremua ezaguna izatea.

* x aldagaiaren balio–bikote bakoitzarentzat aurrekoa zein den eta atzekoa zein den jakin ahal izatea.

Definizioa: Aldagaiari *gorakor* deitzen zaio, atzeko balio bakoitza aurrekoa baino handiago denean. Alderantziz, atzeko balio bakoitza aurrekoa baino txikiagoa denean, aldagaiari *beherakor* deitzen zaio.
Aldagai gorakorrei eta beherakorrei *monotono* deitzen zaie.

Definizioa: M > 0 zenbaki konstante bat aurkitzen badugu, aldagaiaren balio batetik aurrera balio guztientzat $| x | \leq M$ betetzen delarik, x aldagaia *bornatua* dela esaten da.

2.3.– FUNTZIOA

Naturaren zenbait fenomeno eta arazo tekniko aztertzean, magnitude baten aldakuntza beste aldakuntza baten menpe aztertzeko beharra sortzen da.

Adib.

* higiduran, ibilitako bidea denboraren funtzio bezala

* zirkuluaren azalera erradioaren funtzio bezala.

x aldagaiaren balio bakoitzari, y aldagaiaren balio bakar bat badagokio, y x–en funtzio izango da:

$$y = f(x) \quad \text{edo} \quad y = h(x) \quad \text{edo} \quad y = y(x)$$

Definizioa: f (x) funtzioaren bidez y–ren balioak ematen dituzten x–en balioen multzoa, *funtzioaren definizio–eremua* da.

Adib. $y = \sin x$ $\quad - \infty < x < \infty$

Definizioa: y = f (x) funtzioa *gorakorra* da,

$x < x_0$ bada. Beraz $f(x) < f(x_0)$

y = f (x) funtzioa *beherakorra* da,

$x < x_0$ bada. Beraz $f(x) > f(x_0)$

Batzuetan, funtzio kontzeptua definitzean, eremu bateko x–en balio bakoitzari y–ren balio bat baino gehiago dagokiola onartzen da. Funtzio hauei *multiforme* deitzen zaie. Balio bakarra hartzen dutenak *uniformeak* dira.

Definizioa: Funtzio *bikoitiak* f (x) = f (–x) betetzen dutenak dira. Funtzio hauek 0Y–rekiko simetrikoak dira.

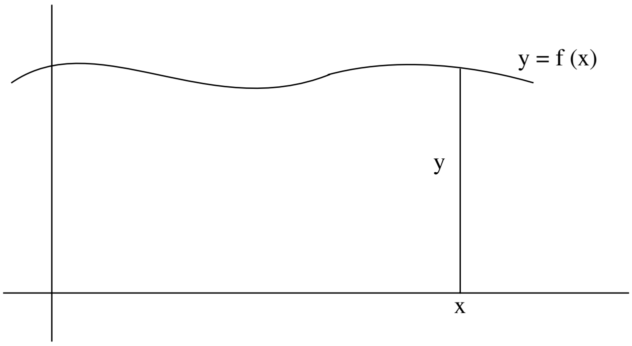
Definizioa: Funtzio *bakoitiak* f (–x) = –f (x) betetzen dutenak dira. Funtzio hauek jatorri–puntuarekiko simetria dute.

a) Funtzioak adierazteko erak

1. Era tabulatua

x	x_1	. . . .	x_n
y	y_1	. . . .	y_n

2. Era grafikoa



Har dezagun koordenatu errektangeluar edo cartesiarren sistemaren planoan, M (x,y) puntuen multzoa. 0Y ardatzarekiko paralelo den edozein zuzenetan puntu horietako bikote bat ez baldin badago, puntu–multzo horrek y = f (x) funtzio uniforme bat determinatzen du. Puntu horien abzisek aldagaiaren balioak ematen dituzte, eta ordenatuek funtzioarenak.

3. Era analitikoa

Lehenbizi "adierazpen analitiko" delako kontzeptua azalduko dugu. Magnitude konstante eta aldakorrak adierazten dituzten zenbaki eta letra batez, segida determinatu batean egiten diren eragiketa matematikoen multzoaren adierazpenari "adierazpen analitiko" deitzen zaio.

Adib. $x^4 - 2, \quad \dfrac{\log x - \sin x}{5x^2 + 1}, \quad 2^x - \sqrt{5+3x}$

y = f (x)–en f–k adierazpen analitiko bat errepresentatzen badu, x–en y funtzioa analitikoki adierazita dagoela esaten da.

Adib. $y = x^4 - 2$, $y = \dfrac{\log x - \sin x}{5x^2 + 1}$, $y = \sin x$, $Q = \pi R^2$

Funtzioaren definizio–eremu naturala: adierazpen analitikoari balio determinatu bat hartzera eragiten dioten x–en balioen multzoa da.

Adib.: $y = x^4 - 2$ ———— $-\infty < x < \infty$

$y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ ———— $R - \{1\}$

$y = \sqrt{1 - x^2}$ ———— $-1 \leq x \leq 1$

Batzuetan ez da beharrezkoa funtzioaren definizio–eremu natural osoa aztertzea, bere zati bat baizik.

b) Funtzio elementalak

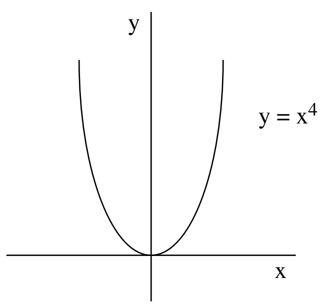
Oinarrizko funtzio elementalak, analitikoki adierazita, hauek dira:

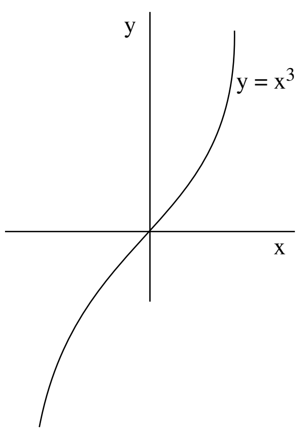
1. Berreketa–funtzioa edo funtzio potentziala

$y = x^\alpha$, α zenbaki erreala delarik.

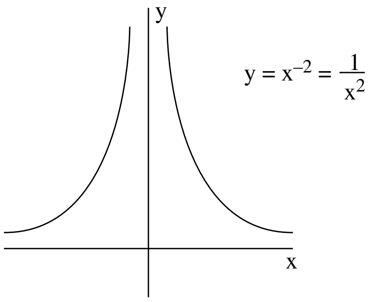
a) α zenbaki osoa eta positiboa denean:

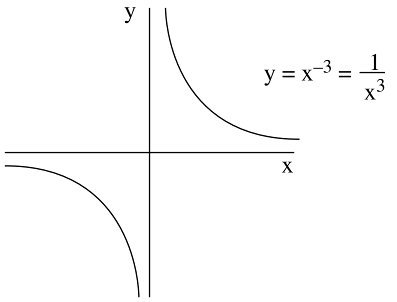
definizio–eremua $-\infty < x < \infty$



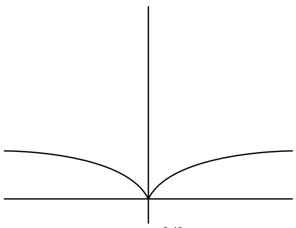


b) α zenbaki osoa eta negatiboa denean definzio–eremua   R – {0}

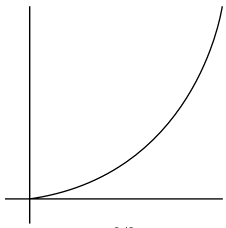




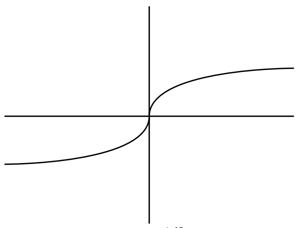
c) a zenbaki razional zatikiarra denean:



$y = x^{2/3}$



$y = x^{3/2}$

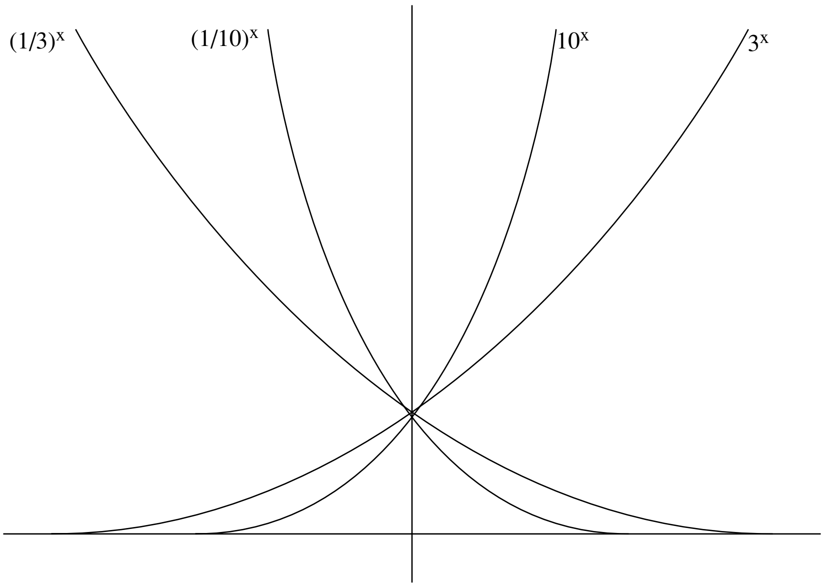


$y = x^{1/3}$

2. Funtzio esponentziala

$y = a^x \quad a > 0 \quad a = 1$

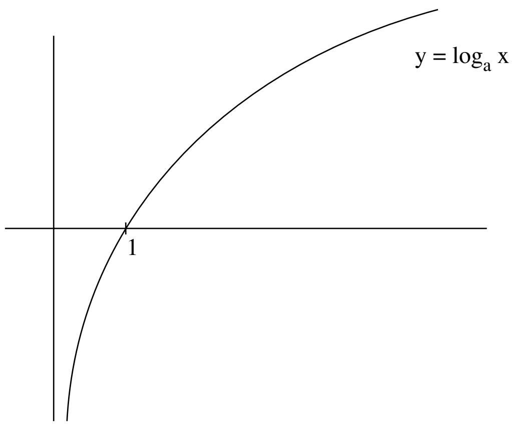
definizio–eremua $-\infty < x < \infty$



3) Funtzio logaritmikoa

$y = \log_a x \quad a > 0 \quad a = 1$

definizio–eremua $0 < x < \infty$



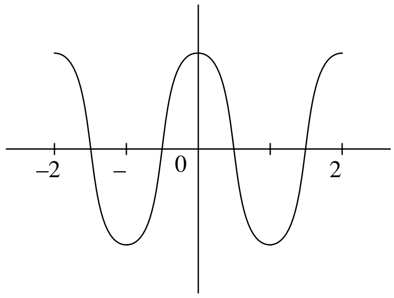
4. Funtzio trigonometrikoak

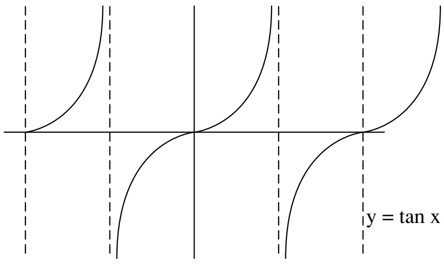
x aldagai askea radianetan jartzen da. Hemen azaltzen diren funtzio trigonometriko guztiak periodikoak dira.

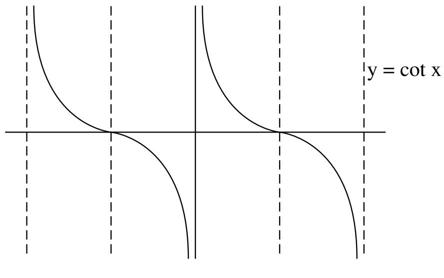
Definizioa: x aldagaiari batzean funtzioaren balioa aldatzen ez duen zenbaki konstante bat existitzen bada, f (x+c) = f (x), funtzioa periodikoa dela esaten da.

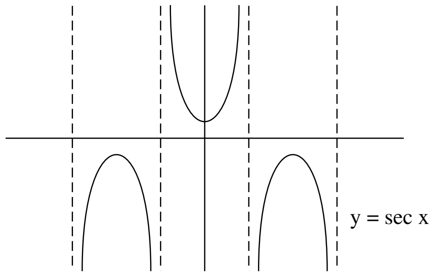
Zenbaki konstante honen balio txikienari *periodo* deitzen zaio.

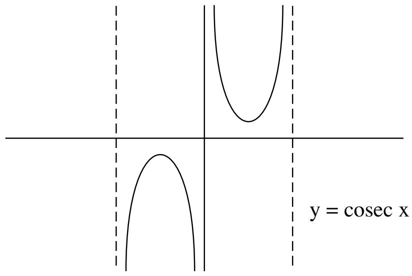
y = sin x	periodoa = 2π	D.E. $-\infty < x < \infty$
y = cos x	periodoa = 2π	D.E. $-\infty < x < \infty$
y = tan x	periodoa = π	D.E. R – {(2k+1) (π/2)} k = 0, 1, 2,…
y = cot x	periodoa = π	D.E. R – {kπ} k = 0, 1, 2, …
y = sec x	periodoa = 2π	D.E. R – {(2k+1) (π/2)} k = 0, 1, 2, …
y = cosec x	periodoa = 2π	D.E. R – {kπ} k = 0, 1, 2, …











c) Funtzio trigonometrikoen propietateak

1. $\sin^2 + \cos^2 = 1$ $\qquad \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

   $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

2. $\sin 0 = 0$ $\qquad \sin(-x) = -\sin x$

   $\cos 0 = 1$ $\qquad \cos(-x) = \cos x$

   $\tan 0 = 0$ $\qquad \tan(-x) = -\tan x$

3. $\sin(\pi+x) = -\sin x$ $\qquad \sin(\pi-x) = \sin x$

   $\cos(\pi+x) = -\cos x$ $\qquad \cos(\pi-x) = -\cos x$

   $\tan(\pi+x) = \tan x$ $\qquad \tan(\pi-x) = -\tan x$

4. $\sin(\pi/2-x) = \cos x$ $\qquad \sin(\pi/2+x) = \cos x$

   $\cos(\pi/2-x) = \sin x$ $\qquad \cos(\pi/2+x) = -\sin x$

   $\tan(\pi/2-x) = \cot x$ $\qquad \tan(\pi/2+x) = -\cot x$

5. $\sin(x+y) = \sin x \,.\, \cos y + \cos x \,.\, \sin y$

   $\sin(x-y) = \sin x \,.\, \cos y - \cos x \,.\, \sin y$

   $\cos(x+y) = \cos x \,.\, \cos y - \sin x \,.\, \sin y$

   $\cos(x-y) = \cos x \,.\, \cos y + \sin x \,.\, \sin y$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \,.\, \tan y}$ $\qquad$ $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \,.\, \tan y}$

$\tan(\pi/4+x) = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$ $\qquad$ $\tan(\pi/4-x) = \dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$

6. $\sin 2x = 2 \sin x \,.\, \cos x$ $\qquad$ $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

   $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\qquad$ $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

   $\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ $\qquad$ $\tan 3x = \dfrac{3 \tan x - \tan^2 x}{1 - 3 \tan^2 x}$

7. $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

   $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

   $\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

8. $\sin x = \dfrac{2 \tan x/2}{1 + \tan^2 x/2}$

   $\cos x = \dfrac{1 - \tan^2 x/2}{1 + \tan^2 x/2}$

   $\tan x = \dfrac{2 \tan x/2}{1 - \tan^2 x/2}$

9. $\sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

   $\sin x - \sin y = 2 \sin \dfrac{x-y}{2} \cos \dfrac{x+y}{2}$

   $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

   $\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$

$$\tan x + \tan y = \frac{\sin (x+y)}{\cos x \cos y} \qquad \tan x - \tan y = \frac{\sin (x-y)}{\cos x \, . \cos y}$$

10. $\sin x \, . \sin y = -\frac{1}{2} \, [\cos (x+y) - \cos (x-y)]$

$$\cos x \, . \cos y = \frac{1}{2} \, [\cos (x+y) + \cos (x-y)]$$

$$\sin x \, . \cos y = \frac{1}{2} \, [\sin (x+y) - \sin (x-y)]$$

d) Alderantzizko funtzio trigonometrikoak

$y = \text{arc} \sin x$	$x = \sin y$–rena
$y = \text{arc} \cos x$	$x = \cos y$–rena
$y = \text{arc} \tan x$	$x = \tan y$–rena
$y = \text{arc} \cot x$	$x = \cot y$–rena

Alderantzizko funtzio trigonometrikoak multiformeak dira eta beraien balio nagusiak bornaturik daude:

$$-\frac{\pi}{2} < \text{arc} \sin x < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \text{arc} \cos x < \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} < \text{arc} \tan x < \frac{\pi}{2}$$

Alderantzizko funtzio batzuk beste batzuen menpean adierazita:

$$\text{arc} \sin x = \text{arc} \tan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{arc} \cos x = \text{arc} \tan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\text{arc} \tan x = \text{arc} \cot \frac{1}{x} = \text{arc} \sin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \text{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{arc cot } x = \text{arc sin } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \text{arc cos } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \text{arc tan } \frac{1}{x}$$

e) Funtzio hiperbolikoak

$$\sin hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tan hx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cot hx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad \sec hx = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{cosec } hx = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Propietateak:

1. $\cos h^2 x - \sin h^2 x = 1$

   $\sec h^2 x + \tan h^2 x = 1$

   $\cot h^2 x - \text{cosec } h^2 x = 1$

2. $\sin hx = \sqrt{\cos h^2 x - 1} = \dfrac{\tan hx}{\sqrt{1 - \tan h^2 x}}$

   $\cos hx = \sqrt{\sin h^2 x + 1} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \tan h^2 x}}$

   $\tan hx = \dfrac{\sin hx}{\sqrt{\sin h^2 x + 1}} = \dfrac{\sqrt{\cos h^2 x - 1}}{\cos hx}$

3. $\sin h\,(x+y) = \sin hx.\cos hy + \cos hx.\sin hy$

   $\sin h\,(x-y) = \sin hx.\cos hy - \cos hx.\sin hy$ $\quad\Big|\quad \sin h2x = 2 \sin hx.\cos hx$

   $\cos h\,(x+y) = \cos hx.\cos hy + \sin hx.\sin hy$

   $\cos h\,(x-y)\ \cos hx.\cos hy - \sin hx.\sin hy$ $\quad\Big|\quad \cos h2x = \cos h^2 x + \sin h^2 x$

   $\tan h\,(x+y) = \dfrac{\tan hx + \tan hy}{1 + \tan hx.\tan hy}$

   $\tan h\,(x-y) = \dfrac{\tan hx - \tan hy}{1 - \tan hx.\tan hy}$ $\quad\Big|\quad \tan 2x = \dfrac{2 \tan hx}{1 + \tan h^2 x}$

$$\sin hx + \sin hy = 2 \sin h \frac{x+y}{2} \cos h \frac{x-y}{2}$$

$$\sin hx - \sin hy = 2 \sin h \frac{x-y}{2} \cos h \frac{x+y}{2}$$

$$\cos hx + \cos hy = 2 \cos h \frac{x+y}{2} \cos h \frac{x-y}{2}$$

$$\cos hx - \cos hy = 2 \sin h \frac{x+y}{2} \sin h \frac{x-y}{2}$$

$$\tan hx + \tan hy = \frac{\sin h (x+y)}{\cos hx . \cos hy}$$

$$\tan hx - \tan hy = \frac{\sin h (x-y)}{\cos hx . \cos hy}$$

f) Funtzio konposatua edo funtzio baten funtzioa

y u–ren menpeko bada eta gainera u x–en menpeko bada, y ere x–en menpeko da.

y = F (u) eta u = g (x); y = F [g (x)] funtzio honi funtzio konposatu deitzen zaio.

* Funtzio konposatuaren eremua lortzeko, u = g (x)–en eremua hartu eta F–ren eremuan ez dauden irudiak kendu egin behar dira.

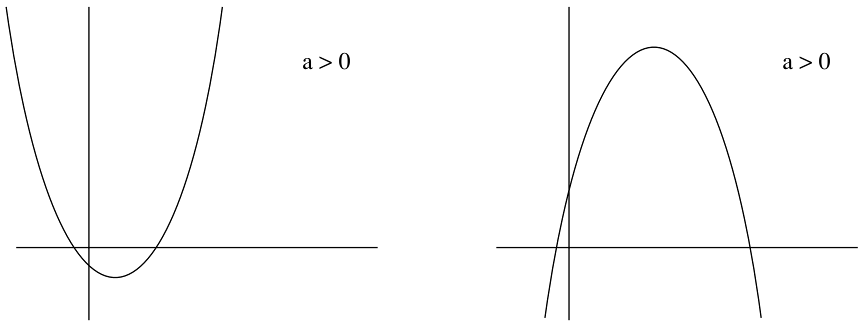
g) Funtzio algebraikoak

Hurrengo funtzio hauei algebraiko deitzen zaie:

1. Funtzio razional osoa edo polinomikoa.

$y = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$; $a_0, \dots a_n$ koefizienteak dira eta n polinomioaren maila da. Definizio–eremua, R guztia da.

Adib. $y = ax^2 + bx + c$

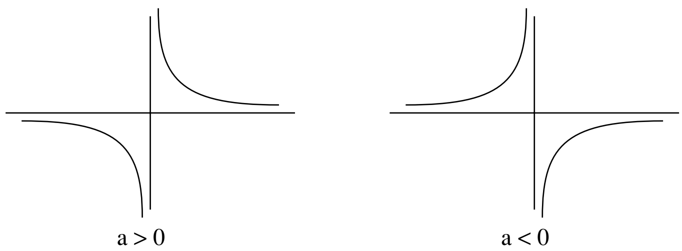


2. Funtzio razional zatikiarra

Bi polinomioren arteko zatiketa bezala adierazten da.

$y = \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0}$. Definizio–eremua, izendatzailea zero egiten ez duten guztiek osatzen dute.

Adib. $y = \dfrac{a}{x}$



3. Funtzio irrazionala

Erroketak agertzen direnean.

Adib. $y = \sqrt{x}$ $\qquad$ $y = \dfrac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + 5x^2}}$

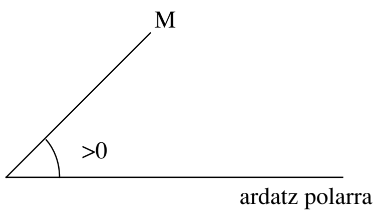
Algebraikoa ez den funtzioari *orozgaineko* deitzen zaio.

Adib. $y = \cos x$ $y = 10^x$ $y = e^x$ ....

h) Koordenatu polarreko sistema

Orain arte, plano batean puntu batek duen posizioa x eta y koordenatu kartesiarren bidez adierazi dugu, baina koordenatu polarreko sistemaren bidez ere egin daiteke.

Planoan, POLO izendatuko dugun 0 puntua aukeratuko dugu, eta baita 0 puntuan jatorria duen "zuzen" edo "ardatz polar" bat ere. Planoan M puntu batek duen posizioa ρ eta ω–ren bidez determinatuko dugu.

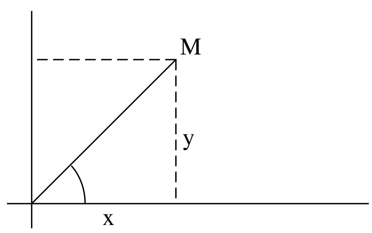


$\rho \rightarrow$ M puntutik 0 polora dagoen distantzia

$\omega \rightarrow$ 0M segmentuak ardatz polarrarekin betetzen duen angelua

ρ eta ω–ri koordenatu polar deitzen zaie. Poloan ρ–k 0 balio du eta ω–k edozein balio izan dezake.

Koordenatu polar eta cartesiarren arteko erlazioa aztertuko dugu orain.



Hemen ikusten denez:

$x = \rho \cos \omega$

$y = \rho \sin \omega$

Edo alderantziz jarrita:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan \omega = \frac{y}{x}$$

3. INEKUAZIOAK

3.1.– TARTEAK ZENBAKI ERREALEN EREMUAN

Gai honetan tartea aipatzen dugunean, zenbaki errealena dela kontsideratuko dugu.

Tarteekin eragiketak egiteko erabiltzen den ohizko terminologia ondoko hau da: Izan bitez "u" eta "v".

* [u,v] : $u \leq x \leq v$ betetzen duten zenbaki errealen multzoari tarte itxi deitzen zaio.

*]u,v[edo (u,v) : $u < x < v$ betetzen dutenean, tarte irekia da.

* [u,v[: tarte erdiirekia da.

*]u,v] : tarte erdiirekia da.

* [u,∞[: tarte itxia eta mugagabea eskuinetik.

*]–∞,v] : tarte itxia eta mugagabea exkerretik.

*]u,∞[: tarte irekia eta mugagabea eskuinetik.

*]–∞,v[: tarte irekia eta mugagabea ezkerretik.

*]–∞,∞[: tarte hau zenbaki erreal guztien multzoa da.

Era berean, multzo hutsa Ø baten bidez adierazten da.

Adibidez: [3,2] = Ø;]7,7] = Ø etab.

Ohizkoa da [a,a] {a} bezala jartzea.

Multzoen teorian, barnekotasun–erlazioa adierazteko $\in$ erabiltzen da eta $\notin$ ez–barnekotasuna adierazteko.

I tartea baldin badugu, $x \in I$–k, x zenbakia I tartearen barruan dagoela esan nahi du.

a) Ebakidura multzoa

Ebakidura multzoa adierazteko, " ikurra erabiltzen da.

A_1, A_2, …, A_k adierazpenak k multzo adierazten baditu, A_1" … " A_k honako hau adierazten du: x∈A_1 … x∈A_k betetzen duten x–en balioek osatzen duten multzoa.

Adibideak:

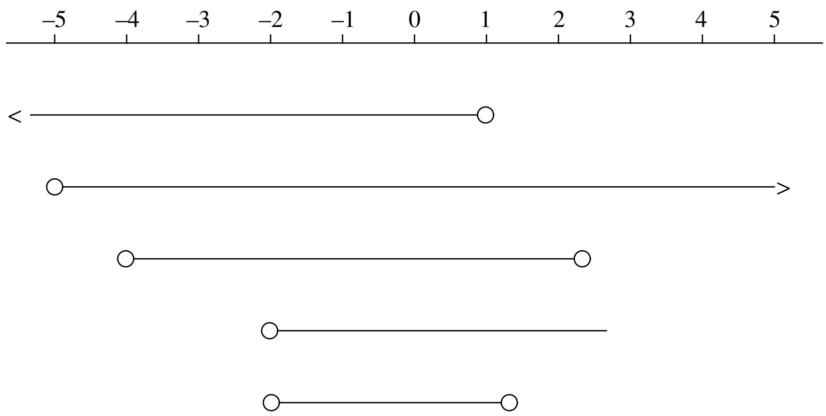
[2,5] " [4,7] = [4,5]]–∞,2] "]1,∞[=]1,2]

R " [a,b] = [a,b] Ø " [a,b] = Ø

Tarte bi edo gehiagoren ebakidura aurkitzeko, tarte horiek segmentuen bidez irudikatzeak asko laguntzen du.

I tarteko muturrak barnean baldin badaude, zirkulu txiki baten bidez marraztuko ditugu. Kanpoan baldin badaude, ez diegu ezer marraztuko.

Adib.]–,1] "]–5,–[" [–4,2] " [–2,3[= [–2,1]



Bi multzori eta partikularki bi tarteri, disjuntu deitzen zaie ebakidura multzoa hutsa denean. Adib.]–2,4] eta [6,–[

b) Bildura multzoa

Multzo–teorian $\cup$ ikurrak bildura multzoa adierazten du. A eta B edozein multzo badira, $A \cup B$ idazkerak $x \in A$ edo $x \in B$ betetzen duten x elementuek osatutako multzoa adierazten du.

Adibideak (tarteak erabiliz)

$[3,6[\cup \{6\} = [3,6]$

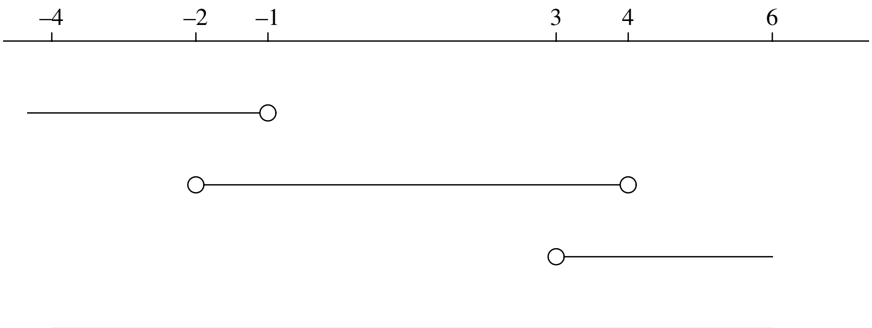
$]-1,2[\cup [0,3] =]-1,3]$

$]-\infty,1[\cup]-2,\infty[= R$

Edozein $A_1, A_2, \ldots, A_k$ multzo badiitugu, $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ idazkerak $x \in A_1$ edo $x \in A_2 \ldots$ edo $x \in A_k$ betetzen duten x elementuek osaturiko multzoa adierazten du.

Ebakidura multzoa adierazteko erabili dugun irudikapena erabiliko dugu orain bildura multzoa adierazteko:

Adib. $]-4,-1] \cup [-2,4] \cup [3,6[=]-4,6[$



$\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \ldots \cup \{x_n\}$ bildura $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ bidez eman daiteke era laburrean. $\subset$ $\supset$ $\not\subset$ $\not\supset$ ikurrek definitzen dituzten erlazioak hauek dira: A eta B edozein multzo badira, $A \subset B$ erlazioak A B–ren zati bat dela adierazten du. $B \supset A$ idazkerak, $A \subset B$ idazkerak adierazten duen gauza bera adierazten du.

$A \not\subset B$ ($B \not\supset A$) idazkerak, A B–ren zatia ez dela adierazten du.

Adib. (tarteak erabiliz)

*]–∞,–2] Æ]–∞,1]

* [2,3] Æº]2,4[

* R Æ R

* Ø Æ {0}

Adib. (edozein multzo erabiliz)

A Æ (A'B) ; (A"B) Æ B ; (A"B"C) Æ (A"C) ; (A'B) Æ (A'B'C)

3.2.– ALDAGAI ERREAL BATEKO INEKUAZIOAK

Inekuazio bat ondoko bi hauetariko motakoa bada, *aldagai erreal bateko inekuazio* deitzen zaio:

1. f (x) < g (X)

2. f (x) ≤ g (x), non x aldagai erreala bait da.

x_0 zenbaki erreal batek f (x) < g (x) inekuazioa betetzen baldin badu, x_0 inekuazio horren soluzioa dela esaten da. Inekuazio baten emaitza multzoa, R–ren azpimultzo bat da. Inekuazio batzuentzat emaitza multzoa aurkitzea erraza da, ikus ditzagun adibide batzuk:

inekuazioa	emaitza multzoa
$4x \geq 1$	[1/4,∞[
$2 < x^2$	]–∞,–√2[']√2,∞[
$\sin x < 3 + \cos x$	R
$-x^2 \geq 2^x$	Ø

3.3.– INEKUAZIOEN ARTEKO BALIOKIDETASUNA

Bi inekuazioren soluzio multzoak berdinak badira, *baliokideak* direla esaten da.

Bi inekuazio, beste hirugarren baten baliokide badira, beren artean ere baliokide dira.

Oinarrizko lau baliokidetasun–mota daude:

1. $f(x) < g(x)$ eta $0 < g(x) - f(x)$

   $f(x) \leq g(x)$ eta $0 \leq g(x) - f(x)$

2. $f(x) < g(x)$ eta $f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$

   $f(x) \leq g(x)$ eta $f(x) + h(x) \leq g(x) + h(x)$

3. $\left.\begin{array}{l} f(x) < g(x) \text{ eta } kf(x) < kg(x) \\ f(x) \leq g(x) \text{ eta } kf(x) \leq kg(x) \end{array}\right| \; k > 0$

4. $\left.\begin{array}{l} f(x) < g(x) \text{ eta } kf(x) > kg(x) \\ f(x) \leq g(x) \text{ eta } kf(x) \geq kg(x) \end{array}\right| \; k < 0$

Frogapena:

Lehengo baliokidetasuna berehalakoa da.

2. Lehenengo baliokidetasunean oinarrituz,

   $$f(x) + h(x) < g(x) + h(x) \text{ eta } 0 < [g(x) + h(x)] - [f(x) + h(x)]$$

   baliokide dira, baina

   $$[g(x) + h(x)] - [f(x) + h(x)] = g(x) - f(x)$$

   Beraz frogatuta dago.

3. $kf(x) < kg(x)$ x_0 soluzio bat bada, lehenengo baliokidetasuna aplikatuz $0 < kg(x_0) - kf(x_0) = k[g(x_0) - f(x_0)]$. Baina $k > 0$ denez gero, $0 < g(x_0) - f(x_0)$ izan behar du eta baliokide dira.

4. Lehen eta bigarren baliokidetasunetan oinarrituz frogatuko dugu:

   $$f(x) < g(x) \quad 0 < g(x) - f(x) \text{ eta } k < 0 \text{ denez}$$

$(-k).0 < (-k)\,[g(x) - f(x)] \quad 0 < kf(x) - kg(x) \quad kf(x) < kg(x)$

3.4.– INEKUAZIOEN TRANSFORMAZIOA

2. baliokidetasunak, batugaiak inekuazioko atal batetik bestera pasatzea baimentzen du.

Adib.

$3x-4 < 5x-7$ inekuazioa eta $-4+7 < 5x-3x$ inekuazioa baliokide dira, azken hau lehenengoari $h(x) = -3x+7$ batuz lortzen delako.

Beste bi baliokidetasunek, zero ez diren zenbakizko faktoreak inekuazio–atal batetik bestera pasatzea baimentzen dute, baina konstantea negatiboa denean ikurra aldatuz.

Adib.

* $3x < -7$ eta $x < -7/3$ baliokide dira, lehenengoari 1/3 faktore positiboa biderkatuz.

* $-5x < -12$ eta $x > 12/5$ baliokide dira, lehenengoari $-1/5$ faktoreaz biderkatuz.

Honela inekuazio bateko zatitzaile konstanteak ken ditzakegu, inekuazioaren bi atalak zatitzaileen m.k.t. faktoreaz biderkatuz.

Adib.

$\frac{2x+5}{3} + \frac{-x+5}{-4} < x - \frac{1}{2}$ inekuazioa -12 faktoreaz biderkatuz $-4\,(2x-5) + 3\,(-x+5) > -12x+6$ lortzen da.

k zenbaki erreala ipini beharrean K (x) positiboa (negatiboa) den funtzioa izan daiteke.

Adib. $f(x) < g(x)$

$$(x^2+8)\,f(x) < (x^2+8)\,g(x)$$

Hemendik aurrera "inekuazioa" aipatzean aldagai errealeko inekuazioa dela suposatuko dugu.

Inekuazio baten bi atalak polinomioak badira, gutxienez kenketa–maila berdina duen beste polinomio bat da.

Adib. $1 + 2x^3 - x < 2x^3 + 3x^2 - 6x + 5$ bigarren mailako polinomioa da $h(x) = f(x) - g(x) = 3x^2 - 5x + 4$ bigarren mailakoa delako.

3.5.– LEHEN MAILAKO INEKUAZIO POLINOMIKOAK

Lehen mailako inekuazio polinomiko bat sinplifikatuz gero, hurrengo mota batekoa izan behar du:

$0 < ax+b \quad 0 \leq ax+b \quad 0 > ac+b \quad 0 \geq ax+b$

$\mu = \frac{-b}{a}$ emaitza multzoak horietako bat izan behar du:

$$]-\infty,\mu[\ ,\ ]-\infty,\mu]\ ,\ ]\mu,\infty[\ ,\ [\mu,\infty[$$

Adib. * $2x^3 - x + 5 > 2x^3 + 4x - 3$ inekuazioa eta $-5x > -5-3$ baliokide dira eta $x < \frac{-8}{-5}$ ere bai. Beraz emaitza multzoa hau da: $]-\infty, \frac{8}{5}[$

0 mailako inekuazio polinomiko bat sinplifikatuz gero, honelako mota batekoa izan behar du:

$0 < 0x+b$ edo $0 < b$ $\qquad$ $0 \leq 0x+b$ edo $0 \leq b$

$0 > 0x+b$ edo $0 > b$ $\qquad$ $0 \geq 0x+b$ edo $0 \geq b$

Ekuazio hauen emaitza beti R edo Ø da.

Adib.

* $\frac{x}{5} - \frac{7x-1}{3} < -2x - \frac{2x-1}{15}$ inekuazio hau sinplifikatuz, honela geratzen da:

$3x-5(7x-1) < -30x-2x+1$.

4 < 0 eta emaitza multzoa Ø izango da.

* $\frac{x}{5} - \frac{7x-1}{3} \geq -2x - \frac{2x-1}{15}$ sinplifikatuz, aurrekoaren berdina da eta emaitza multzoa R guztia da.

3.6.– BIGARREN MAILAKO INEKUAZIO POLINOMIKOAK

Bigarren mailako edozein inekuazio polinomiko sinplifikatuz gero, honelako itxura eduki behar du:

$ax^2+bx+c < 0$	$ax^2+bx+c > 0$	$ax^2+bx+c \leq 0$	$ax^2+bx+c \geq 0$
I	I'	II	II'

$ax^2+bx+c < 0$ eta $-ax^2-bx-c > 0$ baliokideak dira. Beraz I eta I', mota bat bezala hartuko ditugu. Baita II eta II' inekuazioak ere. ax^2+bx+c polinomioaren erro errealen arabera, sailkapen bat egingo dugu:

1. $b^2 - 4ac = 0$ emaitza erreal bakarra dago $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

   Polinomioa honelakoa da: $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

$a > 0$, I	motakoa,	emaitza	multzoa	Ø
$a > 0$, I'	motakoa,	"	"	$]-\infty,x_0[\ '\ ]x_0,\infty[$
$a > 0$, II	motakoa,	"	"	$\{x_0\}$
$a > 0$, II'	motakoa,	"	"	R

   $a < 0$ denean berdin egiten da.

   Adib. $4x^2 + 12x + 9 < 0$ $\quad 4\,(x+3/2)^2 < 0$ emaitza multzoa Ø

   $ax^2 + 12x + 9 > 0$ $\quad 4\,(x+3/2)^2 > 0$ emaitza multzoa hau da:

   $$]-\infty,3/2[\ '\ ]3/2,\infty[$$

2. $b^2 - 4ac < 0$ kasu honetan:

   $ax^2 + bx + c = a\,[(x+b/2a)^2+(4ac-b^2)/(4a^2)]$ non $(4ac-b^2)/(4a^2) > 0$
   $a > 0$ denean emaitza multzoak ikusi eta beste kasuan berdin

I	emaitza	multzoa	Ø
I'	"	"	R

II	"	"	Ø
II'	"	"	R

Adib. $-2x^2+3x-4 > 0$ inekuazioa eta $2x^2 - 3x + 4 < 0$ baliokide dira. Azken hau ipin daiteke $2\,[(x-3/4)^2+23/16] < 0$ eta emaitza multzoa Ø da.

3. $b^2-4ac > 0$

Trinomioak bi erro erreal ditu (x_1,x_2) eta honela ipin daiteke:

$a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$; $x_1 < x_2$ eta $a > 0$ suposatuko dugu.

I	emaitza	multzoa	$]x_1,x_2[$
I'	"	"	$]-\infty,x_1[$ ' $]x_2,\infty[$
II	"	"	$[x_1,x_2]$
II'	"	"	$]-\infty,x_1]$ ' $[x_2,\infty[$

Adib. $-2x^2-3x+14>0$ $a<0$ dugu, baina beste erara jarriz $2x^2+3x-14<0$ $a>0$ da. Bere erroak $x_1 = -7/2$ $x_2 = 2$ dira. Beraz emaitza multzoa $]-7/2,2[$ da.

3.7.– N–GARREN MAILAKO INEKUAZIO POLINOMIKOAK

Izan bedi Ω, f funtzioaren erroen multzoa. Erro hauek garrantzi handia dute, eta aurrez determinatu behar dira.

$\Omega = \emptyset$ baldin bada, hau da, f funtzioak errorik ez badu, f funtzioak zeinu finkoa du eta soluzio multzoa definizio–eremu guztia edo Ø da.

$\Omega \neq \emptyset$ baldin bada, funtzioaren $r \in \Omega$ erroak txikienetik handienera ordena ditzakegu eta (adibidez) r_α, r_β elkarren ondoan dauden bi erro badira, $W r_\alpha =]r_\alpha,r_\beta[$ jarriko dugu. Honetaz gain erro txikienari $\underline{r}$ deituz, $W_a =]-\infty,\underline{r}[$ eta erro handienari r – deituz, $W_b =]$ r –$,\infty[$ jarriko dugu.

f jarraia denez, W_r bakoitzean zeinu bera edukiko du eta nahikoa da tarte barruko balio batek inekuazioa betetzen duen ala ez begiratzea.

Azalpenak:

1. f' deribatua jarraia bada, eta J D azpitarte batean zeinu finkoa badu, f funtzioak gehienez erro bat edukiko du J azpitartean.

2. x_1 eta x_2, f funtzioak definizio–eremuan dituen mutur erlatiboak badira eta beraien artean funtzioak beste mutur erlatiborik ez badu, f' ez da zeinuz aldatzen $[x_1,x_2]$ tartean eta f funtzioak gehienez erro bat edukiko du tarte horretan.

3. $[f'(r_\beta)] > 0$ bada, f negatiboa da Wr_α tartean eta positiboa Wr_β tartean.

   $f'(r_\beta) < 0$ bada, f positiboa da Wr_α tartean eta negatiboa Wr_β tartean.

   $f'(r_\beta) = 0 < f''(r_\beta)$ bada, f positiboa da $(Wr_\alpha\ '\ Wr_\beta)$ tartean.

   $f'(r_\beta) = 0 > f''(r_\beta)$ bada, f negatiboa da $(Wr_\alpha\ '\ Wr_\beta)$ tartean.

4. $f(x) = (x-r_\beta)^m\, g(x)$ bada, $g(r_\beta) = 0 < m \in N$ delarik. Beraz:

   * m bikoitia bada, f funtzioak zeinu bera du Wr_α, Wr_β tarteetan.

   * m bakoitia bada, f funtzioak zeinu desberdina du Wr_α, Wr_β tarteetan.

Ikus ditzagun adibide batzuk:

1. $4x^3 - 9x^2 - 9x + 4 > 0$

   $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 9x + 4 = 4(x+1)(x-0{,}34)(x-2{,}90)$; f–ren definizio–eremua R da, baina erroek lau zatitan banatzen dute:

   $]-\infty,-1[\ '\ ]-1,0'34[\ '\ ]0'34,2'90[\ '\ ]2'90,\infty[$ tarte bakoitzeko balio bat hartuta emaitza multzoa $]-1,0'34[\ '\ ]2'90,\infty[$ da.

2. $2x^2 < 3 + x\sqrt{2x^2+7}$ beste era batera adieraziko dugu:

   $0 < 3 - 2x^2 + x\sqrt{2x^2+7}$, f–ren erroak bilatzeko $2x^2 - 3 = x\sqrt{2x^2+7}$–ren berredura egingo dugu $(2x^2-3)^2 = (x\sqrt{2x^2+7})^2$. Honen erroak $\{-3,3,\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2\}$ dira, baina oinarrizko ekuazioaren erroak $\{3,-\sqrt{2}/2\}$ bakarrik. f–ren definizio–eremua hiru zatitan banatuta dago eta balioak emanda emaitza multzoa $]-\sqrt{2}/2,3[$ dela ikusten dugu.

3. $2x - |3x+1| < |x^2+x-6| - 2x^2 + 4x + 3$ beste era batera jarriz: $0 < -2x^2 + 2x + 3 + |3x+1| + |x^2+x-6|$. Erroak aurkitzeko kontutan hartu behar da:

$$* \quad |3x+1| = \begin{cases} 3x + 1 & x \in [-1/3,\infty[\\ -(3x+1) & x \in]-\infty,-1/3] \end{cases}$$

$$* \quad |x^2+x-6| = \begin{cases} x^2 + x - 6 & x \in]-\infty,-3] \cup [2,\infty[\\ -(x^2+x-6) & x \in [-3,2] \end{cases}$$

Hori kontutan harturik R–ren lau zati egin ditzakegu:

L1 $[2,\infty[$ tartea eta hemen $f = -x^2 + 6x - 2$

L2 $[1/3,\infty[$ tartea eta hemen $f = -3x^2 + 4x + 10$

L3 $[-3,-1/3]$ tartea eta hemen $f = -3x^2 - 2x + 8$

L4 $[-\infty,-3]$ tartea eta hemen $f = -x^2 - 4$

* L1 tartean $-x^2 + 6x - 2 = 0$ ekuazio honek bi erro ditu: $x_1 = 3 + \sqrt{7}$ eta $x_2 = 3 - \sqrt{7}$; x_1 L1 tartean dago, baina x_2 ez. Beraz f–ren erro bakarra tarte honetan x_1 da.

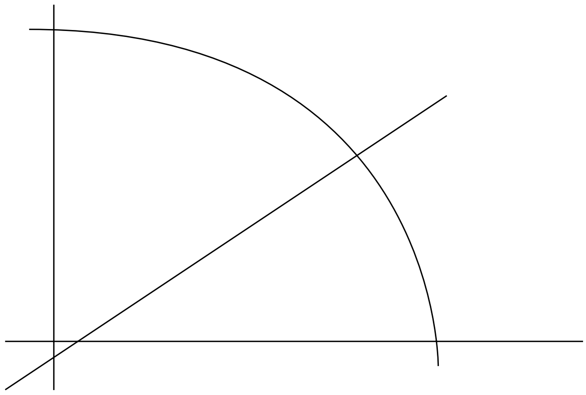
* L2 tartean $-3x^2 + 4x + 10 = 0$ ekuazioak bi erro ditu, baina biak L2–tik kanpora. Beraz f–ek ez du errorik tarte honetan.

* L3 tartean $-3x^2 - 2x + 8 = 0$ ekuazioak bi erro ditu $x_1 = -2$ eta $x_2 = 4/3$ eta x_1 bakarrik dago L3–ren barruan. Beraz f–ek erro bakarra du tarte honetan, x_1 da.

* L4 tartean $-x^2 - 4 = 0$ ekuazioak erro bakarra du, baina L4–etik kanpora dago eta f–ek ez du errorik.

Guztira f–ren erro bakarrak -2 eta $3 + \sqrt{7}$ dira, horren arabera emaitza multzoa $]-2,3+\sqrt{7}[$ da.

4. $2x - 1 > L(5-x)$, beste era batera ipiniz $0 < 2x - 1 - L(5-x)$ f–ren erroak bilatzeko haztamuz egin behar da, baina f'–ren bidez kopurua jakin dezakegu. Adibide sinpletan grafikoki ere bila daitezke erroak.



Irudian ikusten denez]0,4[tartean erro bat dago eta bakarra da. Haztamuz $x_0 = 1{,}17\ldots$

Deribatua erabiliz gero $f'(x) = -2 - \frac{1}{5-x} = \frac{2x-11}{5-x}$; f' ez da zero tarte horretan; beti negatiboa da. $f'(0) > 0 > f'(4)$ funtzioak]0,4[tartean erro bat edukiko du. Erro horren arabera emaitza multzoa]1'17,5[.

3.8.– PROPOSATURIKO ARIKETAK

Kalkulatu emaitza multzoa ondoko kasuetan:

1. $2x^3 + 2x^2 + 3x + 3 < 0$

2. $-6x^3 - 5x^2 + 5x + 6 \leq 0$

3. $\dfrac{(x+3)^2\,(x-4)}{(x-7)^4} \geq 0$

4. $\dfrac{(x+1)^3}{(x^2+9)^5} \geq 0$

5. $-7\,(x+6)\,(x+4)^6\,(x-1)^3\,(x-3)^2\,(x-5)^4\,(2x^2+x+1) > 0$

6. $2x^4 - x^2 + 3 \leq 0$

7. $5x^4 + 13x^2 - 6 \le 0$

8. $6\sqrt{2x-1} \le 5\sqrt{9-x} + 2\sqrt{3x+1}$

9. $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} > \dfrac{2}{x+2}$

10. $\sqrt{1+3\sqrt{x}} + \sqrt{2-\sqrt{x}} < \sqrt{10\sqrt{x-1}}$

11. $| 3x-4+ | 2+x | (2x+9) | \le -4x-2$

12. $e^x \le 5 - x^2 - 6x$

13. $10 \sin x < 2 + 5 \cos x$

14. $\arcsin 4x \ge \arctan 5x$

15. $\arccos x/2 < \arctan x/3$

16. $\dfrac{7x-1}{(x-2)(x+3)} + 1 < \dfrac{x+1}{2(x+3)} + \dfrac{7}{2-x}$

17. $\sqrt{x^2-11x+24} + \sqrt{x^2+12x+20} < 9$

18. $\sqrt{3x^2-x-10} \ge -3+\sqrt{3x^2-16x-19}$

19. $\dfrac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} < 1$

20. $0 < (2\sqrt{4x-3} - \sqrt{x+1} - 4)(3\sqrt{-x^2+5x+36} - 2x - 8)$

21. $\arcsin \dfrac{x-2}{6} . (3\sqrt{x^2-9} - 2x - 2) \ge 0$

22. $\dfrac{2\sqrt{3x+1} - 3\sqrt{19-2x}}{x-6} \ge \dfrac{1}{6-x}$

23. $\dfrac{2x-1}{-x - \sqrt{x^2+x+6}} \le 3$

24. $2 > \dfrac{5 - x}{x - \sqrt{x^2 - x - 2}}$

25. $x\sqrt{3 - 4/x} < \sqrt{5x^2 - 16}$

26. $\dfrac{4x\sqrt{2x+1} - 3x^2}{4\sqrt{-x^2+4x+12} + x - 18} > 0$

27. $\dfrac{1}{1 + x\sqrt{3x^{-1}+10}} \geq -\dfrac{1}{8}$

28. $\dfrac{2}{x + \sqrt{2-x^2}} + \dfrac{2}{x - \sqrt{2-x^2}} > x$

29. $| x+1| < 0{,}01$

30. $| x-2 | \geq 10$

31. $| x | \geq | x+1|$

32. $| 2x-1| < | x-1|$

33. $| x+2 | + | x-2 | \leq 12$

34. $| x+2 | - | x | > 1$

35. $|| x+1| - | x-1|| < 1$

36. $| x(1-x) | < 0{,}05$

4. LIMITEAK. FUNTZIOAREN JARRAITASUNA

4.1.– MAGNITUDE ALDAKORRAREN LIMITEA

$\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0$ / $\forall x>x_0$ $|x-a| < \varepsilon$ betetzen bada, "a" x aldagaiaren limitea dela esango dugu, eta $x \to a$ edo $\lim x = a$ adierazten da.

Adib.:

* x aldagaiak ondoko balioak hartzen baditu:

$x_1 = 1+1 \quad x_2 = 1+1/2 \quad x_3 = 1+1/3 \ldots x_n = 1+1/n$, froga dezagun limitea bat dela:

$$|x_n-1| = |(1+1/n) -1| = 1/n < \varepsilon$$

$n > 1/\varepsilon$ duten x–en balio guztiak $|x_n-1| < \varepsilon$

* x aldagaiak ondoko balioak hartzen baditu:

$x_1 = 1-1/2 \quad x_2 = 1+1/2^2 \ldots x_n = 1+(-1)^n \frac{1}{2^n}$ froga dezagun aldagai honen limitea 1 dela.

$$|x_n-1| = [1+(-1)^n\ 1/2^n] - 1| = 1/2^n < \varepsilon$$

$2n > 1/\varepsilon \Rightarrow n \log 2 > \log 1/\varepsilon \Rightarrow n > \dfrac{\log 1/\varepsilon}{\log 2}$; n–ren balio hau baino handiagoa duten x guztiak: $|x_n-1| < \varepsilon$

Oharra:

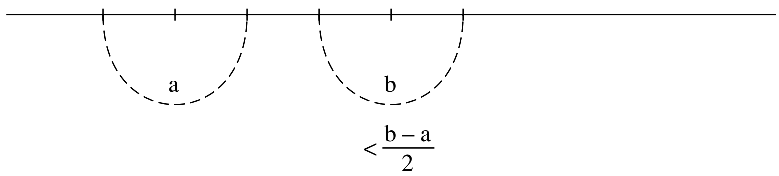
1. Magnitude konstantea, beti balio berdinak hartzen dituen magnitude aldakor bezala hartzen da (x=c) eta limitea bera da.

2. Magnitude aldakor batek ezin ditu bi limite desberdin eduki.

Frogapena:

$\lim x = a$ eta $\lim x = b$ $(a<b)$ betetzen badira, x–ek ondoko inekuazio biak bete behar ditu:

$$|x-a| < \varepsilon \text{ eta } |x-b| < \varepsilon \text{ edozein } \varepsilon\text{–rentzat } (\varepsilon < \frac{b-a}{2} \text{ ez da betetzen})$$



Definizioa: Aldagai bat infiniturantz doala esaten da, baldin

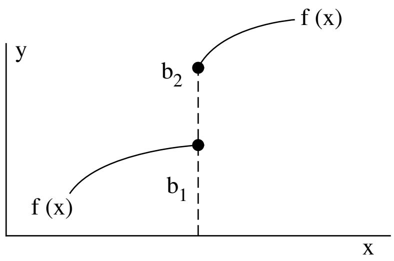
$$\forall M > 0\ \exists x_0 \ /\ \forall x > x_0\ |x| > M$$

Funtzioen limitea

Definizioa: f funtzioak L limitea duela esaten da, baldin

$\forall \varepsilon > 0 \quad \delta > 0 \ /\ |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-L| < \varepsilon$
eta honela idazten da: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

x–ek a balio txikiagoak bakarrik hartzen baditu EZKER–LIMITE deitzen zaio. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b1$ eta bakarrik handiagoak direnean ESKUIN–
–LIMITEA $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b2$



Ezker– eta eskuin–limiteek berdinak izan behar dute funtzioak limitea izan dezan.

Oharra: x–ek "a"rantz jotzen duenean f–k limitea eduki dezake, nahiz eta funtzioa "a"n definituta ez egon.

Adibidea: Froga dezagun $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ dela.

$\dfrac{x^2-4}{x-2}$ funtzioa x = 2 puntuan ez dago definituta:

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x-2)\,(x+2)}{x-2}-4\right| = |(x+2)-4| < \varepsilon$$

$|x-2| < \varepsilon \quad \delta = \varepsilon$ egiten badugu, hau beteko da:

$|x-2| < \delta$–rentzat $|f(x) - 4| < \varepsilon$

Definizioa: $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \,/\, |x| > N \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$ betetzen bada, f (x) funtzioak b limiterantz jotzen du x–ek infiniturantz jotzen duenean.

Adibidea:

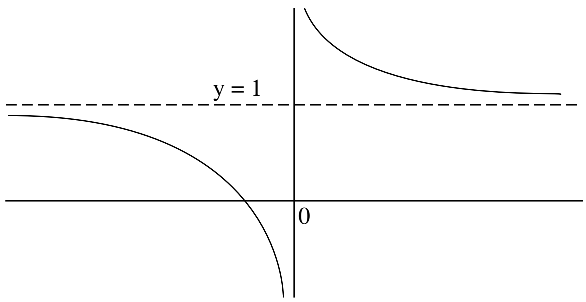
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1\ ,\ \text{edo}\ \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$$

Frogapena:

Izan bedi ε hautazko zenbaki bat

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right| < \varepsilon \quad \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \quad |x| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$N = \dfrac{1}{\varepsilon}$ egiten badugu, frogatuta gelditzen da.



$X \to +\infty$ eta $X \to -\infty$ adierazpenak ezagutuz, erraza da hurrengo adierazpen hauen esanahia ulertzea.

"X + ∞–rantz doanean f (x) funtzioak b limiterantz jotzen du"

"X – ∞–rantz doanean f (x) funtzioak b limiterantz jotzen du"

Adierazpen hauek honela idazten dira:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

4.2.– INFINITURANTZ JOTZEN DUEN FUNTZIOA. FUNTZIO BORNATUAK

$X \to a$ edo $X \to +\infty$ direnean, f (x) funtzioak "b" limiterantz jotzen duen kasuak aztertu ditugu.

Orain aldagaiaren aldakuntza–era determinatu batentzat, f (x) funtzioak infiniturantz jotzen duen kasuak aztertuko ditugu.

Definizioa: Handia den edozein M zenbaki positiborentzat, x–en balioentzat $|x-a| < \delta$ eta $x \neq a$ betetzen duen beste $\delta > 0$ zenbaki bat aurkitzen badugu, non $|f(x)| > M$ den, f (x) funtzioak infiniturantz jotzen du x–ek "a" punturantz jotzen duenean.

Idazkera: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

x aldagaiak "a" punturantz jotzen duenean f (x)–ek infiniturantz (balio positiboak edo negatiboak bakarrik hartuz) jotzen duela adierazteko:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Adibideak:

* Frogatu $\lim \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$ dela

$$\frac{1}{(1-x)^2} > M \qquad (1-x)^2 < \frac{1}{M} \qquad |1-x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{M}} = \delta$ egiten badugu, frogatuta dago.

* Frogatu $\lim_{x \to 0} (-1/x) = \infty$ dela

$$\left| -\frac{1}{x} \right| > M \;\Rightarrow\; |x| = |x - 0| < \frac{1}{M} = \delta$$

x aldagaiak infiniturantz jotzen duenean ($x \to \infty$), f (x) funtzioak infiniturantz jotzen duela adierazteko:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Kasu partikular bezala gerta daitezke:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Adibidez:

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Oharra: Ez da beharrezko $x \to a$ edo $x \to \infty$ denean f (x) funtzioak limite finitu baterantz edo infinitu baterantz jotzea.

Adibidea: $y = \sin x$

$-\infty < x < \infty$ tartean definituta dago, baina x–ek ∞–rantz jotzen duenean, sin x funtzioak ez du limiterik (ez finiturik ez infiniturik).

Adibidea: $y = \sin 1/x$

$x \neq 0$ diren x–en balio guztientzat definituta dago. x–ek 0–rantz jotzen duenean, sin 1/x funtzioak ez du limiterik (ez finiturik ez infiniturik).

Definizioa: $y = f(x)$ funtzioa, x aldagaiaren aldaketa–tarte batean BORNATUA dela esaten da, tarte horretako x–en balio guztientzat $|f(x)| < M$ betetzen deneko M zenbaki positibo bat aurki badezakegu. Hori betetzen duen M zenbakia aurkitu ezin badugu, f (x) funtzioa ez dago BORNATUA emandako tartean.

Adibidea:

$y = \sin x$ funtzioa, $-\infty < x < \infty$ tarte infinituan definitua, funtzio bornatua da, x–en balio guztientzat hurrengo inekuazioa betetzen delako: $|\sin x| < 1$.

Beraz, M zenbaki positibo bat aurki dezakegu: $M = 1$.

Definizioa: $y = f(x)$ funtzioa, "BORNATUA x a punturantz doanean" deitzen da. "a" puntuaren inguruan tarte bat dago f (x) bornatua dagoelarik.

Definizioa: $y = f(x)$ funtzioari, "BORNATUA X INFINITURANTZ DOANEAN" deitzen zaio, f (x) bornatua dagoelarik $|x| > N$ betetzen duten x–en balio guztientzat $N > 0$ zenbaki bat aurki badezakegu.

Teorema: b zenbaki finitu bat delarik, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ bada, f (x) funtzioa BORNATUA dago x "a" punturantz doanean.

Frogapena: $\lim f(x) = b$ bada, edozein $\varepsilon > 0$–rentzat, δ bat aurki dezakegu, $|x-a| < \delta$ betetzen duten x–en balioentzat $|f(x) - b| < \varepsilon$ betetzen delarik.

$$|f(x) - b| < \varepsilon \qquad |f(x)| - |b| \leq |f(x) - b| < \varepsilon \qquad |f(x)| < |b| + \varepsilon$$

Oharra: Funtzio bornatuaren definiziotik, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ edo $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ bada, funtzioa BORNATUGABEA da.

4.3.– FUNTZIOEN LIMITEEN PROPIETATEAK. INDETERMINAZIOAK

Teorema: f (x) funtzioak puntu batean limitea badu, hau bakarra da.

Frogapena:

Pentsa dezagun l_1 eta l_2 f (x)–en limiteak direla:

$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \,/\, |x-x_0| < \delta_1 \quad |f(x)-l_1| < \varepsilon$

$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \,/\, |x-x_0| < \delta_2 \quad |f(x)-l_2| < \varepsilon$

Izan bitez $\varepsilon = \dfrac{|l_1-l_2|}{2}$

$|x-a| < \delta_1$ eta $|x-a| < \delta_2$ betetzen dituen ε–en balio batentzat, ezin dira bete $|f(x) - l_1| < \dfrac{|l_1-l_2|}{\varepsilon}$ eta $|f(x) - l_2| < \dfrac{|l_1-l_2|}{\varepsilon}$ biak batera.

Beraz, ε–en balio guztientzat ez dira betetzen biak batera.

Teorema: Bitez f (x), g (x) eta h (x) hiru funtzio non $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = 1$ eta $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Beraz $\lim_{x\to a} g(x) = 1$

Frogapena: $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta_1 > 0 \,/\, |x-a| < \delta_1 \quad |f(x)-l| < \varepsilon$

$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta_2 > 0 \,/\, |x-a| < \delta_2 \quad |h(x)-l| < \varepsilon$

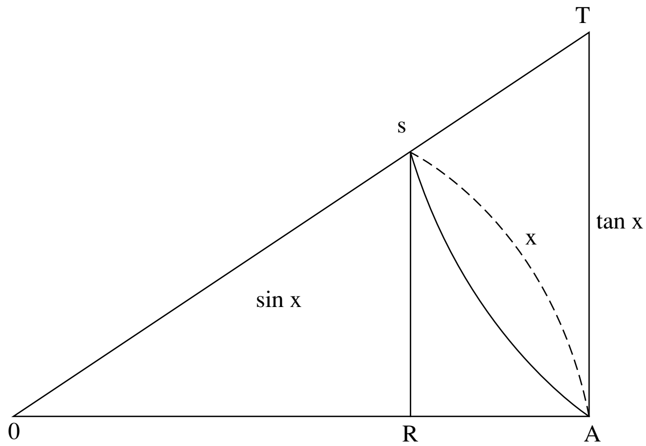
$\delta = \text{minimoa}(\delta_1,\delta_2)$ egiten badugu:

$|x-a| < \delta$ bada $\quad |x-a| < \delta \le \delta^1 \quad |f(x)-l| < \varepsilon \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

$\quad |x-a| < \delta \le \delta_2 \quad |h(x)-l| < \varepsilon \quad l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$

nola $f(x) \le g(x) \le h(x) \quad l - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) \le l + \varepsilon \quad |g(x)-l| < \varepsilon$

Adibidea: $\lim \frac{\sin x}{x}$



non $|OA| = 1\ |OS|$

$$\text{arkua} = \text{angelua} \ . \ \text{erradioa}$$

$$x = x \ . \ 1$$

$$\sin x = \frac{|RS|}{|OS|} = |RS|$$

$$\cos x = \frac{|OR|}{|OS|} = |OR|$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{|RS|}{|OR|} = \frac{|AT|}{|OA|} = |AT|$$

Bestalde

$$\widehat{OAS} < \overset{\frown}{OAS} < \widehat{OAT}$$

Sektorearen azalera $\overset{\frown}{OAS} = \frac{\text{arkua} \ . \ \text{erradioa}}{2}$ da

$$\frac{1 \ . \ \sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1 \ . \ \tan x}{2}$$

Eta alderantzizkoei $\frac{2}{\sin x} > \frac{2}{x} > \frac{2}{\tan x}$

$\frac{\sin x}{2} > 0$ biderkatuz, honakoa geratzen da: $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

x zerorantz doanean limiteak hartuz:

$$1 = \lim_{x \to 0} 1 > \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

Eta aurreko teoremagatik: $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$ lortu da.

a) Limite finituen arteko eragiketak

Propietateak:

Demagun f (x) eta g (x) funtzioek existentzi eremu berdina dutela:

1. $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ eta $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$ badira:

   a) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$

   b) $\lim_{x \to a} [f(x) \,.\, g(x)] = l_1 \,.\, l_2$

   c) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \qquad l_2 \neq 0$

   d) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \qquad l_1 \neq 0 \qquad l_2 = 0$

2. f (x) funtzio bornatua bada eta $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

   $\lim_{x \to a} f(x) \,.\, g(x) = 0$

Frogapena:

1. a) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta_1 > 0 \,/\, 0 < |x - a| < \delta_1 \qquad |f(x) - l_1| < \varepsilon/2$

   $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta_2 > 0 \,/\, 0 < |x - a| < \delta_2 \qquad |g(x) - l_2| < \varepsilon/2$

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ bada:

$0 < |x-a| < \delta \quad |f(x)-l_1| < \varepsilon/2$ eta $|g(x)-l_2| < \varepsilon/2$

$|f(x)+g(x)-(l_1+l_2)| = |(f(x)-l_1)| + (g(x)-l_2)| \leq |f(x)-l_1| +$

$+ |g(x)-l_2| < \varepsilon$

b) $f(x) \cdot g(x) - l_1 \cdot l_2 = f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot l_2 + f(x)\, l_2 - l_1 \cdot l_2 =$

$= f(x)\,[g(x)-l_2] + [f(x)-l_1]\, l_2$

a puntuan, f (x) funtzioak limitea duenez, a–ren ingurune laburtu batean bornatuta dago: $|f(x)| \leq k$

Izan bedi $M = \max(k, |l_2|)$

Bestalde, ingurune laburtu batean: $\left|\begin{array}{l} f(x) - l_1\ | < \varepsilon/2M \\ g(x) - l_2\ | < \varepsilon/2M \end{array}\right.$

Beraz: $|f(x)\, g(x)-l_1 l_2| \leq |f(x)|\, |g(x)-l_2| + |f(x)-l_1|\, |l_2| <$

$< M \cdot \dfrac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \dfrac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$

c) Alde batetik: $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{l_2}\right| = \left|\dfrac{l_2-g(x)}{g(x).l_2}\right| = \dfrac{|g(x)-l_2|}{|g(x)|\, |l_2|}$

$l_2 \neq 0$ bada, $K > 0$ existitzen da, non $|g(x)| > k$ bait da, a–ren ingurune laburturen batean. $|g(x)-l_2| < \varepsilon \quad l_2-\varepsilon < g(x) < l_2+\varepsilon$

Bestalde: $|g(x)-l_2| < \varepsilon.K.|l_2|$ a–ren ingurune laburturen batean.

Azkenik: $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{l_2}\right| < \dfrac{\varepsilon.K.|l_2|}{k.|l_2|} = \varepsilon$

Beraz: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{l_2}$

Eta: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)} = l_1 \cdot \dfrac{1}{l_2}$

d) $l_1 \neq 0$ bada, K positiboa existitzen da, non $|f(x)| > K$ a–ren ingurune laburtu batean $l_2 = 0$ bada:

$\forall M > 0 \qquad |g(x) - l_2| = |g(x)| < \dfrac{K}{M}$ a–ren ingurune laburtu batean

beraz: $\dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} > \dfrac{K}{K/M} = M$

Hau da, $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$

2. f (x) funtzioa bornatua bada:

$$0 \leq |f(x)| \leq M \qquad \forall x$$

Beraz $0 = 0.|g(x)| \leq |f(x).g(x)| \leq M.|g(x)|$
nola $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0 \qquad 0 \leq |f(x).g(x)| \leq 0 \qquad \lim\limits_{x \to a} |f(x).g(x)| = 0$

Propietatea: f (x) positiboa bada eta $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l > 0$ bada, ondokoa dugu:

$$\lim_{x \to a} \log_\beta f(x) = \log_\beta \lim_{x \to a} f(x) = \log_\beta l$$

Frogapena:

Pentsa dezagun $\beta > 1$ dela:

$$\lim f(x) = l\,; \qquad \lim \frac{f(x)}{l} = 1\,; \qquad \beta^{-\varepsilon} < \frac{f(x)}{l} < \beta^{\varepsilon}$$

Logaritmoak hartuz: $-\varepsilon < \log_\beta f(x) - \log_\beta l < \varepsilon$
Beraz: $\lim\limits_{x \to a} [\log_\beta f(x) - \log_\beta l] = 0$

$\beta < 1$ bada, a–ren ingurune batean: $\beta^{\varepsilon} < \dfrac{f(x)}{l} < \beta^{-\varepsilon}$ izango genuke, eta lehen bezala amaitzen da.

Propietatea: $\beta > 0$ eta $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ badira,

$$\lim_{x \to a} \beta^{f(x)} = \beta^{l}$$

Frogapena:

$$\log_\beta \beta^{f(x)} = f(x) \qquad \lim_{x\to a} \log_\beta \beta^{f(x)} = \lim f(x) = l$$

$$\log_\beta \lim_{x\to a} \beta^{f(x)} = l \qquad \text{eta} \qquad \beta^l = \lim_{x\to a} \beta^{f(x)}$$

Propietatea: $f(X) > 0$ eta $\lim_{x\to a} f(x) = l > 0$ badira:

$$\mathbf{\lim_{x\to a} [f(x)]^r = l^r}$$

Frogapena:

Logaritmoak hartuz, aurreko frogapenetan bezala.

Propietatea: f (x) > 0 lim f (x) = *l* eta lim g (x) = m badugu:

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = l^m$$

Frogapena:

Logaritmoak hartuz, aurreko frogapenetan bezala.

Adibideak:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x/h}\right)^{(x/h).h} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y\right]^h = e^h$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n-1}}{\sqrt{n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-1}{n+2}\right)^{1/2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4-1/n}{1+2/n}\right)^{1/2} = 4^{1/2} = 2$

b) Limite infinituak

BATUKETA

Izan bedi a finitua edo infinitua

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	l	$+\infty$
$-\infty$	l	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indeterminazioa

Indeterminazioak, kasu bakoitzean azterketa berezia egin behar dela suposatzen du.
Adibidea:

$$* \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} + \frac{-1}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{x} + \frac{-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

BIDERKAKETA

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\longrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} [f(x).g(x)]$
∞	l	∞
∞	∞	∞
∞	0	indeterminazioa

a finitua edo infinitua izan daitekeelarik eta zeinuen erregelak mantentzen direlarik.

Adibidea:

* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} . x = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$

* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} . x^2 = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$

* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} . x = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

ZATIKETA

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	$\longrightarrow$ $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$
l	∞	0
∞	l	∞
0	∞	0
∞	0	∞
∞	∞	indeterminazioa
0	0	indeterminazioa

a finitua edo infinitua eta zeinuen erregelak mantenduz.

ESPONENTZIALA

	$\lim_{x\to 0} f(x)$	$\lim_{x\to a} \beta^{f(x)}$
$\beta > 1$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ 0
$\beta < 1$	$-\infty$ $+\infty$	$+\infty$ 0

LOGARITMOA

	$\lim_{x \to a} f(x)$	$\lim_{x \to a} \log_\beta f(x)$
$\beta > 1$	0 $+\infty$	$-\infty$ $+\infty$
$\beta < 1$	0 $+\infty$	$+\infty$ $-\infty$

a finitua edo infinitua delarik.

Potentzial esponentziala

Azter dezagun ondorengo limitea: $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$

$$f(x)^{g(x)} = \beta^{g(x) \log_\beta f(x)}$$

Adierazpen honetan logaritmoa, biderkaketa eta esponentziala ditugu. Logaritmo eta esponentzialen limiteak kalkulatzeak, ez du indeterminaziorik. Beraz, indeterminazioak biderkaketak sortuko ditu.

Hau da: $\infty.0$

a) $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ eta $\lim_{x \to a} \log_\beta f(x) = \pm\infty$

b) $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ eta $\lim_{x \to a} \log_\beta f(x) = 0$

Indeterminazioak: ∞^0 0^0 $1^{\pm\infty}$

INDETERMINAZIO GUZTIAK

$\infty - \infty$ $0.\infty$ ∞/∞ $0/0$ ∞^0 0^0 1^∞

c) Indeterminazioak gainditzeko metodoak

a) $\infty - \infty$: Konjokatuaz biderkatu eta zatitu

b) ∞/∞ : Indeterminazio hau polinomioen zatidura batean agertzen denean, honako azterketa egin dezakegu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax^p+\dots}{bx^q+\dots} = \begin{matrix} \infty & p>q \\ 0 & p<q \\ a/b & p=q \end{matrix}$$

c) $0.\infty$: Biderkaketa, zatidura bihurtuz, ∞/∞ kasua izango da.

$$f(x)\,g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}$$

d) 0/0 : – Polinomioan zatiduraren limitea denean, Ruffini–ren erregela erabiliz polinomioak sinplifikatu.

– Errodurak azaltzen badira, aldagai–aldaketa eginez, aurreko kasua lor daiteke.

Adibidea:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^3-1}{y^2-1} \qquad 1+x=y^6 \text{ eginez.}$$

– Trigonometrikoak: aldagai–aldaketa.

– Infinitesimo baliokideak.

e) 1^∞ : e zenbakiaren bidez.

f) ∞^0, 0^0 : logaritmoa aplikatuz, aurreko kasuren bat bihurtuko da.

$$\log \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \log f(x) = l \qquad \text{eta} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = e^l$$

d) Infinitesimoak eta infinituak

Definizioa: f (x) funtzioa x = a puntuan INFINITESIMOA dela esaten da, baldin $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ bada.

Definizioa: f (x) funtzioa x = a puntuan INFINITUA dela esaten da, baldin $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ bada.

Definizioa: f (x) infinitesimoaren ordena, g (x) infinitesimoarena baino handiagoa, berdina edo txikiagoa dela esaten da, baldin hurrenez hurren f (x)/g (x) zatikiaren limitea ZERO, zenbaki finitua edo infinitua bada.

f (x)/g (x) zatikiak limiterik ez badu, f (x) eta g (x) infinitesimoak konparagarriak direla esaten da.

Adibidea:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ sin x eta x ordena berdina dute.

Adibidea:

$x \, . \sin \dfrac{1}{x}$ eta x ez dira konparagarriak; x = 0 puntuan

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x . \sin 1/x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ limitea ez bait da existitzen.

Definizioa: Bi infinitesimo BALIOKIDEAK DIRA, bere zatikiaren limitea 1 bada.

Adibidea:

sin x eta x infinitesimo baliokideak dira x = 0 puntuan $\sin x \underset{x \to 0}{ª} x$

Propietatea: Limite batean, biderkagai bat edo zatitzaile bat infinitesimo baliokide batez aldatzen badugu, limitea berdina da.

Frogapena: $\lim\limits_{x \to a} f(x).g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x).g(x) \quad h(x) \underset{x \to a}{\&} f(x)$

$$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{f(x)} \lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a} h(x).g(x)$$

Adibidea:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x/2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(x/2)^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$$

e) Infinitesimo baliokideak $x \to 0$

* $\sin x \sim x$ * $1-\cos x \sim x^2/2$ * $\ln(1+x) \sim x$ * $\arcsin x \sim x$

* $\arctan x \sim x$ * $a^x-1 \sim x\,ln a$ * $e^x-1 \sim x$ * $P(x) \sim a_p x^p$

(p txikiena duena)

Definizioa: a puntuan, f (x) infinitesimoaren ordena n dela esaten da, baldin $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = K \neq 0$ bada, k konstantea izanik.

Definizioa: Izan bitez f (x) eta g (x) infinituak:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

$l \neq 0$ bada, infinituek ordena berdina dute
1 bada, baliokideak dira
∞ bada, f (x)–en ordena handiagoa da
0 bada, g (x)–en ordena handiagoa da.

Propietatea: Limite batean biderkagai edo zatitzaile bat infinitu baliokide batez aldatzen bada, limitea berdina da.

Stirling–en formula $n! \underset{x\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$

f) Infinitu baliokideak $x \to \infty$

* $P(x) \sim a_n x^n$ * $\ln(a_n x^n + \ldots + a_0) \sim \ln a_n x^n$

Oharra: Batuketa edo kenketaren gaiak ezin dira ordezkatu infinitesimo edo infinitu baliokideen bidez.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3}$$

4.4.– LOGARITMO ARRUNTAK

Aurreko gaian, **$y = \log_a X$** definitu dugu. Jakina denez "a" zenbakia logaritmoaren oinarria da. a = 10 bada, funtzio horri x zenbakiaren LOGARITMO HAMARTAR deitzen zaio eta **y = log x** bezala adierazten da (y = log x bada, $10^y = x$). **a = e = 2,71828…** bada, funtzioari x zenbakiaren LOGARITMO ARRUNT edo NEPERTAR deitzen zaio eta **y = ln x** adierazten da (y = ln x bada, $e^y = x$).

Ikus dezagun orain, logaritmo arrunt eta hamartarren artean dagoen erlazioa:

Pentsa dezagun y = log x dela, hau da, $x = 10^y$

Ekuazio honen bi ataletan logaritmo nepertarrak hartzen baditugu:

$\ln x = \ln 10^y = y \ln 10 \Rightarrow y = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ y–ren balio hau ordezkatuz:

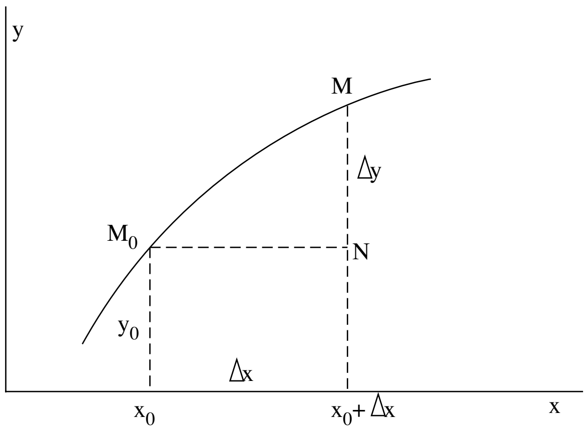
$$y = \log x \;\Rightarrow\; \log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \;\Rightarrow\; \log x = 0{,}434941 \ln x \text{ eta}$$

$$\ln x = \ln 10 \,.\, \log x = 2{,}302585 \log x$$

4.5.– FUNTZIOEN JARRAITASUNA

Pentsa dezagun $y = f(x)$ funtzioa, x_0 balio batentzat eta y_0 zentrua duen tarte batentzat definituta dagoela. Izan bedi $y_0 = f(x_0)$. x aldagaiak Δx (positibo edo negatibo) gehikuntza bat jasaten badu, eta $x = x_0+\Delta x$ bada, "y" funtzioak ere Δy gehikuntza bat jasango du (positiboa edo negatiboa).

Beraz, $y_0 + \Delta y = f(x_0+\Delta x) \Rightarrow \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$



Definizioa: $y = f(x)$ funtzioa, x_0 puntuaren ondoan tarte infinitesimal definitua badago, (x_0 puntua barnean dagoelarik) eta $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ betetzen bada, $y = f(x)$ funtzioa $x = x_0$ balioarentzat (edo x_0 puntuan) JARRAIA dela esaten da.

Beste era batera: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0) \overset{\Delta x \to 0}{\Rightarrow} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Hau da, funtzio bat puntu batean jarraia izan dadin, hiru baldintza bete behar ditu:

a) Puntu horretan definituta egotea ($f(x_0)$ existitzea).

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existitzea.

c) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ izatea.

Adibideak:

* Froga dezagun $y = x^2$ funtzioa hautazko edozein X_0 puntutan jarraia dela.

$$y_0 = f(x_0) = x_0^2 \Rightarrow y_0 + \Delta y = (x_0+\Delta x)^2 \Rightarrow \Delta y = 2x_0\, \Delta x + \Delta^2 x$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0\, \Delta x + \Delta^2 x) = 0$$

Edozein x_0 punturentzat, funtzioa jarraia da.

* Froga dezagun $y = \sin x$ funtzioa hautazko edozein x_0 puntutan jarraia dela.

$$y_0 = \sin x_0 \Rightarrow y_0 + \Delta y = f(x_0+\Delta x) = \sin(x_0+\Delta x) \Rightarrow$$

$$\Delta y = \sin(x_0+\Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos x_0 + \frac{\Delta x}{2}$$

Lehen ikusi dugu $\sin \frac{\Delta x}{2}$ infinitesimoa dela. Beraz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = 0$$

Bestalde, $\cos x + \frac{\Delta x}{2}$ funtzioa bornatua da.

Infinitesimo baten eta funtzio bornatu baten arteko biderkaketa, infinitesimoa da, eta beraz: $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

Teorema: Limiteen propietateetan oinarrituz, f1 (x) eta f2 (x) puntu batean funtzio jarraiak badira:

a) f1 (x) + f2 (x) funtzioa JARRAIA da puntu horretan.

b) f1 (x) . f2 (x) funtzioa JARRAIA da puntu horretan.

c) $\frac{f1(x)}{f2(x)}$ funtzioa JARRAIA da puntu horretan, f2 (x) puntu horretan zero egiten ez den bitartean.

d) $\mu = \sigma(x)$ x_0 puntuan jarraia bada eta $f(x)$ $\mu(x_0)$ puntuan jarraia bada, $f[\mu(x)]$ jarraia da $x = x_0$ puntuan.

Teorema: Funtzio elemental bat, definitua dagoen edozein puntutan jarraia da.

Azalpena:

$x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$ denez, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ beste era batera jarriko dugu:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$. Hau da, x x_0–rantz doanean funtzio jarrai baten limitea aurkitzeko, nahikoa da funtzioan x–en ordez x_0 jartzea.

Adibideak:

* $y = x^2$ jarraia da edozein x_0 puntutan. Beraz:

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2 \Rightarrow \lim_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9$$

* $y = \sin x$ jarraia da edozein x_0 puntutan. Beraz:

$$\lim_{x \to \pi/4} \sin x = \sin \pi/4 = \sqrt{2}/2$$

* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \ln(1+x) = \lim\limits_{x \to 0} [\ln(1+x)1/x] =$

$= \ln\left[\lim\limits_{x \to 0}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{1/x}\right]$. Orain, $\lim\limits_{x \to 0}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{1/x} = e$ da, eta ln Z funtzioa jarraia da $z > 0$ balioentzat (eta beraz $Z = e$ balioarentzat)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln e = 1$

Definizioa: $y = f(x)$ funtzioa, $a < b$ duen (a,b) tartean jarraia da, tarteko puntu bakoitzean jarraia bada.

$y = f(x)$ funtzioa, $x = a$ puntuan definiturik badago, $f(x) = f(a)$ delarik, $x = a$ puntuan funtzioa ESKUINETIK JARRAIA dela esaten da.

$y = f(x)$ funtzioa, $x = a$ puntuan definiturik badago, $f(x) = f(a)$ delarik, $x = a$ puntuan funtzioa EZKERRETIK JARRAIA dela esaten da.

$y = f(x)$ funtzioa (a,b) tarteko puntu bakoitzean jarraia bada, eta tarte honen a eta b muturretan ere bai eskuinetik eta ezkerretik hurrenez hurren), $y = f(x)$ $[a,b]$ tarte itxian jarraia dela esaten da.

a) Funtzio etena

x_0 puntuan funtzioa definiturik ez badago edo $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existitzen ez denean edo lim f (x) = f (x_0) denean, funtzioa etena dela esaten da.

f (x), x_0 puntuan etena bada, x_0–ri ETENGUNE deitzen zaio.

Adibideak:

* $y = \frac{1}{x}$ etena da x = 0 puntuan.

* $y = 2^{1/x}$ x = 0 puntuan.

* $y = \frac{x}{|x|}$ $\qquad$ $x < 0$ bada $\frac{x}{|x|} = -1$; $\quad x > 0$ bada $\frac{x}{|x|} = 1$

x = 0 puntuan funtzioa definitu gabe dago.

Definizioa: Pentsa dezagun f (x) funtzioak ezker– eta eskuin–limiteak finituak dituela eta biak desberdinak direla edo bestela, f (x) funtzioaren balioa definitu gabe dagoela $x = x_0$ puntuan. Kasu hauetan $x = x_0$ puntuari LEHEN JENEROKO ETENGUNE deitzen zaio.

b) Funtzio jarraien propietate batzuk

Teorema: y = f (x) funtzioa, [a,b] tartean jarraia bada, beti aurki dezakegu gutxienez tarte horretan $f(x_1) \geq f(x)$ betetzen duen puntu bat, x [a,b] tarteko beste edozein puntu delarik. f (X_1) balioa, [a,b] tartean y = f (x)–ek duen MAXIMOA dela esaten da.

Bestetik, $f(x_2) < f(x)$ betetzen duen X_2 puntu bat gutxienez aurkitu dezakegu. f (x_2) balioa, [a,b] tartean y = f (x)–ek duen MINIMOA dela esaten da.

Hau betetzen ez duen adibide bat

(a,b) tartean y = x funtzioa. Adibidez, y = x funtzioa 0 < x < 1 tartean aztertzen badugu, bere balioen artean ez ditugu aurkituko ez maximoa eta ez minimoa. Hau horrela da, tarte horretan ezkerreko muturrik eta eskuinekorik ez dugulako. x* puntu bat hartzen badugu, beti aurki dezakegu ezkerrerago dagoen beste puntu bat (adibidez x*/2).

Teorema: $y = f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean jarraikorra bada, eta $f(a)$ eta $f(b)$ balio aurkako seinua badute, a eta b puntuen artean $x = c$ balio bat aurki dezakegu, non $f(c) = 0$ da.

Teorema: Izan bedi $y = f(x)$ $[a,b]$ tartean definituta dagoen eta jarraia den funtzio bat.

$f(a) = A$ eta $f(b) = B$ badira (A eta B zenbaki desberdinak direlarik), beti aurki dezakegu $x = c$ $(a < c < b)$ balio bat $f(c) = \mu$ delarik. ($A < \mu < B$ betetzen duen edozein balio izan daiteke).

4.6.– MAGNITUDE INFINITESIMALEN ARTEKO KONPARAZIOA

Pentsa dezagun $\alpha, \beta, \ldots$ infinitesimoak x aldagai beraren funtzio direla eta zerorantz jotzen dutela x "a"rantz edo ∞–rantz doazenean.

Suposa dezagun bestetik, zatitzaile bezala dugun infinitesimoa ez dela zero egiten puntuaren inguruan.

Definizioa: β/α zatiketak, finitu eta zero ez den limitea badu, hau da, $\lim \beta/\alpha = A \neq 0$ (eta beraz $\lim \alpha/\beta = 1/A \neq 0$), α eta β infinitesimoak ORDENA berekoak direla esango dugu.

Adibidea: $x \to 0$ denean x, sin 3x, tan 2x, 7 ln (1+x) ordena berekoak dira.

Definizioa: β/α zatidurak zerorantz jotzen badu, hau da, $\lim \beta/\alpha = 0$ bada, infinitesimoa da, baina GOI–ORDENAKO INFINITESIMO deitzen zaio. α infinitesimoa β infinitesimoarekin konparatuz ORDENA TXIKIAGOKO infinitesimoa da.

Definizioa: β infinitesimoa α–rekiko K ORDENAKO INFINITESIMOA da, α^k eta β ORDENA berekoak badira.

Definizioa: β/α zatidurak unitaterantz jotzen badu, hau da, $\lim \beta/\alpha = 1$ bada, β eta α infinitesimoak BALIOKIDEAK direla esaten da eta $\alpha \& \beta$ adierazten da.

Adibideak:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad x \to 0 \quad \sin x \;\&\; x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad x \to 0 \quad \ln(1+x) \;\&\; x$$

Teorema: α eta β infinitesimo baliokideak badira, $\alpha - \beta$ infinitesimoa α eta β baino ORDENA HANDIAGOKO infinitesimoa da.

Frogapena: $\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha} = \lim 1 - \frac{\beta}{\alpha} = 1 - \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0$

Teorema: α eta β infinitesimoen kenketa $(\alpha-\beta)$ α eta β baino ordena handiagoko infinitesimoa bada, α eta β infinitesimo baliokideak dira.

Frogapena: aurrekoaren berdina.

a) Baliokidetasun erraz batzuk

1. $\lim\limits_{x\to 2} x^2 - 7x + 10 = \lim\limits_{x\to 2} (x-2)(x-5) = \lim\limits_{x\to 2} -3(x-2) = \lim\limits_{x\to 2} 3(2-x)$

   $x^2 - 7x + 10 \;\&\; 3(2-x) \quad x \to 2$ denean.

2. $\lim x^a - x^b = \lim x^b (x^{a-b} - 1) = \lim -x^b \qquad a > b > 0$

   $x^a - x^b \;\&\; -x^b \quad x \to 0$

3. $a^x - b^x \;\&\; x \ln \frac{a}{b} \quad a > 0 < b \quad x \to 0$

4. $a^x - 1 \;\&\; x \ln a \quad a > 0 \quad x \to 0$

5. $\ln x - \ln a \;\&\; \frac{x-a}{x} \quad x \to a$

6. $\ln x - 1 \;\&\; \frac{x-e}{e} \quad x \to e$

7. $\ln x \;\&\; x-1 \quad x \to 1$

8. $\sqrt[n]{n} - 1 = e^{(1/n)\ln n} - 1 \;\&\; \frac{\ln n}{n} \quad \ln n \quad n-1$

9. $\ln n - \sqrt{n} \quad -\sqrt{n} \quad n \to +\infty$

10. $1 - \cos ax = 2 \sin^2 \frac{ax}{2}$ & $\frac{a^2 x^2}{2} \quad x \to 0$

11. $(1-\cos^a x)$ & $-a \ln \cos x$ & $ax^2/2 \quad x \to 0$

12. $\tan ax - \sin ax$ & $a^3 x^3/2 \quad x \to 0$

13. $\sin x - \sin a$ & $(x-a) \cos a \quad x \to a$

14. $\cos x \cos 2x$ & $3x^2/2 \quad x \to 0$

15. $x - \sin x$ & $x^3/6 \quad x \to 0$

16. $x - \arcsin x$ & $-x^3/6 \quad x \to 0$

5. DERIBATUA ETA DIFERENTZIALA

5.1.– HIGIDURAREN ABIADURA

Gorputz solido baten higidura zuzena aztertuko dugu. Adibidez, goruntz bertikalki jaurtitako harri baten higidura zuzena.

Gorputzaren forma eta neurriak ez ditugu kontutan hartuko eta M puntu higikor bat izango balitz bezala hartuko dugu.

M puntutik M_0 hasiera–puntu batera dagoen s distantzia, denboraren funtzio izango da:

$$s = f(t)$$

Pentsa dezagun, t aldiune batetan M puntua M_0 hasierako puntutik s distantziara dagoela. Geroago, $t + \Delta t$ aldiunean, M_0 puntutik $s + \Delta s$ distantziara dagoen M_1 puntuan egongo da.

$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ arrazoia kontutan hartuko dugu. Honek, Δt denboraren puntuak daraman *batezbesteko abiadura* adierazten du.

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Hala ere, batezbesteko abiadurak ezin du kasu guztietan behar den zehaztasunaz t aldiunean M puntuaren higiduraren abiadura zehatz–mehatz adierazi. Adibidez, gorputza Δt tartean hasieran arin higitzen bada eta tartearen bukaeran astiro higitzen bada, batezbesteko abiadurak ezingo du t aldiunean gorputzak daraman egiazko abiadura adierazi.

Batezbesteko abiadura erabiliz zehaztasun gehiago lortzeko, Δt txikiak hartu behar dira. t aldiunean, puntuaren abiaduraren karakterizazio osoena $\Delta t \to 0$ eginez lortuko dugu.

HIGIDURAREN ABIADURA ALDIUNE BATEAN $\quad \mathbf{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}}$

Berdintasun hori bilakatuz:

$$\left.\begin{aligned} s &= f(t) \\ s + \Delta s &= f(t+\Delta t) \end{aligned}\right| \quad \Delta s = f(t+\Delta t) - f(t)$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f\,(t+\Delta t) - f\,(t)}{\Delta t}$$

Adibidea:

Ibilitako tartea denboraren funtzio bezala $s = 1/2\ gt^2$ formularen bidez adierazten bada, edozein t aldiunetan higidura uniformeki azeleratuaren abiadura aurkitu.

Ebazpidea:

$$t \text{ aldiunean } s = 1/2\ gt^2$$

$$t + \Delta t \text{ aldiunean } s + \Delta s = 1/2\ g\,(t+\Delta t)^2 = 1/2\ g\,(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2)$$

$$\Delta s = gt\Delta t\ 1/2\ g\Delta t^2$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{gt\Delta t + 1/2\ g\Delta t^2}{\Delta t} = gt + 1/2\ g\Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt$$

$$t = 2 \text{ denean: } v = g.2 = 9{,}8.2 = 19{,}6 \text{ m/s}$$

5.2.– DERIBATUAREN DEFINIZIOA

Izan bedi $y = f\,(x)$, tarte batean definituta dagoen funtzio bat. Tarte horretako x–en balio bakoitzak, $y = f\,(x)$ funtzioaren balio determinatu bat du.

x aldagaiak Δx gehikuntza bat jasaten badu (Δx positiboa edo negatiboa izan daiteke), y funtzioak ere Δy gehikuntza jasango du.

Aldagaiaren x balioari $y = f\,(x)$ balioa dagokio, eta aldagaiaren $x + \Delta x$ balioari $y + \Delta y = f\,(x+\Delta x)$ balioa dagokio. Kalkula dezagun funtzioaren Δy gehikuntza:

$$\Delta y = f\,(x+\Delta x) - y = f\,(x+\Delta x) - f\,(x)$$

Δy eta Δx gehikuntzen arteko erlazioa:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\,(x+\Delta x) - f\,(x)}{\Delta x}$$

$\Delta x \rightarrow 0$ denean, $\Delta y/\Delta x$–en limitea kalkulatuko dugu:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Limite honi, existitzen bada, f (x) funtzioaren DERIBATU deitzen zaio, eta f' (x) bezala adierazten da:

$$\mathbf{f\,'\,(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x+\Delta x) - f\,(x)}{\Delta x}}$$

Kontutan hartu behar dugu, x–ek zerorantz hautaz jotzen duela.

Oro har, x aldagaiaren balio bakoitzari f ' (x) deribatuaren balio bat dagokio, hau da, deribatua ere x–en funtzio da.

f ' (x) idazkeraz gain, beste idazkera batzuk ere badaude:

$$y'_x, \quad y', \quad dy/dx$$

x = a puntuan deribatuak hartzen duen balio konkretua f ' (a) edo $y'|_{x=a}$ bezala adierazten da.

Adibideak:

1. $y = x^2$ funtzioaren y' deribatua kalkulatu:

   a) Edozein puntutan
   b) x = 3 balioarentzat

Ebazpidea:

a) x balioarentzat $y = x^2$

   $x + \Delta x$ balioarentzat $y + \Delta y = (x+\Delta x)^2$

   $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - (x)^2 = 2.x.\Delta x + (\Delta x)^2$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2.x.\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2.x+\Delta x$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} (2.x + \Delta x) = 2.x$$

b) x = 3 balioarentzat $y'|^{x=3} = 2.3 = 6$

2. y = 1/x; y' kalkulatu.

Ebazpidea:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}$$

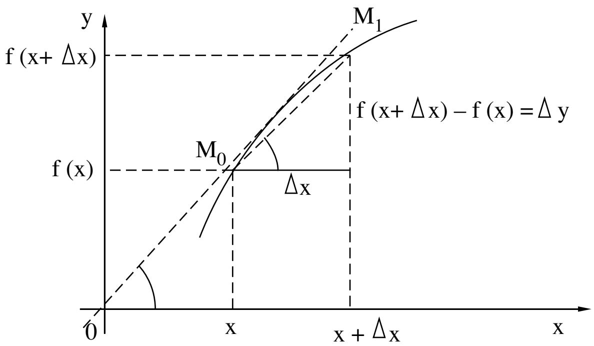
$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{} = \frac{x - x - \Delta x}{x\,(x + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x\,(x + \Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x\,(x + \Delta x)} \Rightarrow y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x^2}$$

5.3.– DERIBATUAREN INTERPRETAZIO GEOMETRIKOA

Gorputz (edo puntu) baten higiduraren abiadura aztertuz, deribatu kontzeptua ikusi dugu lehen (hau da, arrazonaketa mekaniko hutsari jarraituz). Orain, deribatuaren interpretazio geometrikoa ikusiko dugu.

Azter dezagun f (x) funtzioa eta berari dagokion y = f (x) kurba (ikus irudia).



Aldagaiaren x balioari, funtzioaren f (x) balioa dagokio. Balio bi hauekin M_0 (x,y) puntua lortzen dugu.

Orain, aldagaiari Δx gehikuntza bat emango diogu. Aldagaiaren $x + \Delta x$ balio berriari, funtzioaren $y + \Delta y = f(x+\Delta x)$ balioa dagokio. Balio bi hauekin M_1 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ puntua lortzen dugu.

M_0M_1 zuzen ebakitzailea marraztuko dugu. Ebakitzaileak eta ox ardatzaren norantza positiboak osatutako angeluari α deituko diogu. Irudian ikusten denez:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$$

Δx gehikuntzak zerorantz jotzen duenean, M_1 puntua kurbari jarraituz higituko da. M_0 punturantz, eta α angelua aldatuz joango da (Δx aldatzen delako).

$\Delta x \to 0$–rentzat α angeluak β limiterantz jotzen badu, M_0 puntutik pasatzen den eta ox ardatzaren norantza positiboarekin β angelua osatzen duen zuzena, M_0 puntuan kurbak duen ukitzailea izango da. Gainera:

$$\tan \beta = \lim_{\Delta x \to 0} \tan \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Beraz, $f'(x) = \tan \beta$. Hau da, aldagaiaren x balio bati dagokion $f'(x)$ deribatuaren balioa, ox ardatzaren norantza positiboak eta M_0 (x,y) puntuan kurbak duen ukitzaileak osatzen duten angeluaren tangentea da.

Adibidea:

$y = x^2$ kurbak, M_1 $(1/2,1/3)$ eta M_2 $(-1,1)$ puntuetan dituen ukitzaileen inklinazio–angeluen tangenteak aurkitu.

$$y' = 2x$$

Beraz:

$$\tan \beta_1 = y'|_{x=1/2} = 1$$

$$\tan \beta_2 = y'|_{x=-1} = -2$$

5.4.– FUNTZIOEN DERIBAZIOA

$y = f(x)$ funtzioak $x = x_0$ puntuan baldin badu, hau da, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ baldin badago, $x = x_0$ balioarentzat $y = f(x)$ funtzioa *deribagarria* dela esaten da. (a,b) edo [a,b] tarteko puntu bakoitzean funtzioa deribagarria bada, funtzioa (a,b) edo [a,b] tartean deribagarria dela esaten da.

Teorema:

y = f (x) funtzioa, $x = x_0$ puntuan deribagarria bada, jarraia da puntu horretan.

Frogapena:

$x = x_0$ puntuan deribagarria bada;

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \mu$$

(μ magnitudeak zerorantz jotzen du. $\Delta x \to 0$ denean).

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \mu\Delta x$$

Beraz, $\Delta x \to 0$ denean $\Delta y \to 0$ da, eta honek f (x) funtzioa x_0 puntuan jarraia dela esan nahi du (Jarraitasunaren definizioz: $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ edo $\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x_0)$)

Horrela, *etengunetan* funtzioak ez du *deribaturik*.

Alderantzia ez da egiazkoa, hau da, nahiz eta funtzioa $x = x_0$ puntuan jarraia izan, puntu horretan deribagarria ez izatea gerta daiteke.

Adibideak:

f (x) funtzioa [0,2] tartean honela definituta dago:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 2x-1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Funtzio hau jarraia da x = 1 puntuan, baina ez da deribagarria puntu horretan.

Jarraitasuna aztertuko dugu orain:

$\Delta x < 0$ denean $\Delta y = \Delta x$

$\Delta x > 0$ denean $\Delta y = 2\Delta x$. Kasu bietan, $\Delta y \to 0 \quad \Delta x \to 0$ doanean.

Deribagarritasuna aztertuko dugu orain:

$\Delta x > 0$ denean:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(1+\Delta x)-1] - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

$\Delta x < 0$ denean:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim \frac{[1+\Delta x] - 1}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Deribatuaren definizioz, bai zerorantz jotzen duenean Δx positiboa delarik eta bai zerorantz jotzen duenean Δx negatiboa delarik, $\Delta y/\Delta x$ zatiduraren limiteak berdina izan behar du.

Adibidea:

$y = \sqrt[3]{x}$ funtzioa, x–en balio guztientzat definituta dago eta balio guztientzat jarraia da. Ikus dezagun x = 0 puntuan deribaturik duen ala ez:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f(0+\Delta x) - f(0) = \sqrt[3]{(0+\Delta x)} - 0 = \sqrt[3]{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty$$

Funtzio hau ez da deribagarria $x = 0$ puntuan. Kurbak puntu honetan duen ukitzaileak eta 0X ardatzaren norantza positiboak osatzen duten angelua $\pi/2$ da, hau da, 0Y ardatzarekin egokitzen da.

a) Funtzio elementalen deribatuak

1. $y = x^m$ funtzioaren deribatua n zenbaki oso eta positiboa delarik.

Teorema:

m zenbaki osoa eta positiboa duen $y = x^m$ funtzioaren deribatua mx^{m-1} da.

Frogapena:

Izan bedi $y = x^n$

x aldagaiari Δx gehikuntza ematen badiogu:

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^n$$

Newton–en binomioaren formulak dioenez:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = x^n + n\, x^{n-1}\, \Delta x + \ldots + (\Delta x)^n - x^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n\, x^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{1.2}\, x^{n-2}\, \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}$$

$\Delta x \rightarrow 0$, limitea aurkituko dugu:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\, [nx^{n-1} + \ldots + (\Delta x)^{n-1} = nx^{n-1}$$

Ohar gaitezen, formula n "negatibo" edo "zatikiarra" den kasurako dela.

Adibidea:

$$y = \sqrt{x} \;\rightarrow\; y = x^{1/2}$$

$$y' = 1/2\ x^{1/2-1} = 1/2\ x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) y = sin x eta y = cos x funtzioen deribatuak

Teorema:

y = sin x funtzioaren deribatua y' = cos x da.

Frogapena:

x aldagaiari Δx gehikuntza ematen diogu.

$$y + \Delta y = \sin (x+\Delta x)$$

$$\Delta y = \sin (x+\Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \Delta x/2 \cos (x+\Delta x/2)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} \cos (x+\Delta x/2) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} \lim_{\Delta x \to 0} \cos (x+\Delta x/2)$$

Nola $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} = 1$ den $\Rightarrow$ $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos (x+\Delta x) = \cos x$

Teorema:

y = cos x funtzioaren deribatua y' = –sin x da.

Frogapena:

x aldagaiari Δx kantitatea gehitzen badiogu:

$$y + \Delta y = \cos(x+\Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \sin \frac{x + \Delta x + x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} \sin(x+\Delta x/2)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} \sin(x+\Delta x/2) = -\lim \sin(x+\Delta x/2)$$

Beraz y' = –sin x

c) Magnitude konstante baten deribatua

Teorema:

Magnitude konstante baten deribatua *zero* da.

$$y = C = kte \quad \text{bada} \quad y' = 0$$

Frogapena:

y = C funtzioa, x–en balio guztientzat balio berdina hartzen duen funtzioa da.

$$y = f(x) = C$$

x aldagaiari Δx gehikuntza ezarriko diogu:

$$y + \Delta y = f(x+\Delta x) = C$$

$$\Delta y = C - C = 0$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

d) Magnitude konstante eta funtzio baten biderkaketaren deribatua

Teorema:

Faktore konstantea, deribatuaren zeinutik kanpora atera daiteke.

$y = C\ u\ (x)$ bada, C kte delarik, $y' = C\ u'\ (x)$

e) Funtzioen arteko batuketa, biderkaketa eta zatiketaren deribatuak

Teorema:

Funtzio deribagarrien (kopurua finitua denean) batuketaren deribatua, funtzio guztien deribatuen batuketa da.

$$y = u\ (x) + v\ (x) \;\Rightarrow\; y' = u'\ (x) + v'\ (x)$$

Kenketaren kasuan:

$$y = u\ (x) - v\ (x) \;\Rightarrow\; y = u\ (x) + (-1)\ v\ (x) \;\Rightarrow\; y' = u'\ (x) - v'\ (x)$$

Frogapena:

x aldagaiari Δx gehikuntza ezartzen badiogu, u (x) funtzioa Δu gehituko da, v (x) funtzioa Δv kantitate, eta w (x) funtzioa Δw kantitatea.

Beraz:

$$y + \Delta y = (u+\Delta u) + (v+\Delta v) + (w+\Delta w)$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w \;\Rightarrow\; \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} =$$

$$y' = u'\ (x) + v'\ (x) + w'\ (x)$$

Teorema:

Bi funtzio deribagarriren biderkaketaren deribatua, lehenengo funtzioaren deribatuaren eta bigarren funtzioaren biderkaketa eta bigarren funtzioaren deribatuaren eta lehenengo funtzioaren biderkaketaren, batuketa da.

$$y = v.u \Rightarrow y' = u'.v + u.v'$$

Frogapena:

$$y = u.v \Rightarrow y + \Delta y = (u+\Delta u).(v+\Delta v) = u.v + \Delta u.v + u.\Delta v + \Delta u.\Delta v \Rightarrow$$

$$\Delta y = \Delta u.v + u.\Delta v + \Delta u.\Delta v \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u.v}{\Delta x} + \frac{u.\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u.\Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

u (x) funtzioa deribagarria denez, jarraia izango da, eta beraz, $\lim \Delta u = 0$. Horretaz gain, $v' \neq \infty$.

Beraz:

$$y' = u'v + v'u$$

Teorema:

Bi funtzioren zatiketaren deribatua, beste zatiketa bat da, non:

a) Zatigaia: zatigaiaren deribatuaren eta zatitzailearen biderkaketa eta zatigaia eta zatitzailearen deribatuaren biderkaketaren kenketa den.

b) Zatitzailea: emandako funtzioaren zatitzailearen karratua den.

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Frogapena:

x aldagaiari Δx gehikuntza ematen badiogu, y, u eta v funtzioak Δy, Δu eta Δv gehituko dira.

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v\,(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{\Delta x\,[v\,(v+\Delta v)]} = \frac{v\,\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\,\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\,(v+\Delta v)}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta u}}{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} (v+\Delta v)} =$$

v (x) funtzioa deribagarria da, eta beraz, jarraia. Beraz, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$.

Hau da, $v \to 0 \quad x \to 0$ denean

$$y' = \frac{v.u' - u.v'}{v^2}$$

Azalpena:

y = u (x)/C erako funtzioa dugunean, C = kte delarik

$$y' = \left(\frac{1}{C}.u\right)' = \frac{1}{C}.u'$$

f) Funtzio logaritmikoaren deribatua

Teorema:

$\log_a x$ funtzioaren deribatua $\frac{1}{x} \log_a e$ da.

Frogapena:

Pentsa dezagun, x aldagaia Δx gehitzen dugunean, y funtzioa Δy gehitzen dela.

$$y + \Delta y = \log_a (x+\Delta x)$$

$$\Delta y = \log_a (x+\Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\,\frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$\text{nola } \log_a e = \frac{1}{\ln a} \qquad y' = \frac{1}{x.\ln a}$$

Kasu partikularra:

Funtzioan a = e bada, hau da, funtzioa y = ln x bada:

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}$$

g) Funtzio konposatuaren deribatua

Pentsa dezagun y = f (x) funtzio konposatua dela, hau da:

$$\left.\begin{array}{l} y = F(u) \\ u = g(x) \end{array}\right\} \text{ hau da, } \quad y = F[g(x)]$$

y = F (u) adierazpenean, u aldagaiari *bitarteko aldagai* deitzen zaio.

Teorema:

x puntu batentzat, u = f (x) funtzioak u' (x) = f ' (x) deribatua baldin badu, eta x puntu horri dagokion u–ren balioarentzat y = F (u) funtzioak y'u = F' (u) deribatua baldin badu, y = F [g(x)] funtzio konposatuak x puntuan deribatua edukiko du eta bere balioa ondoko hau izango da:

$$y'_x = F'_u(u) \,.\, g'(x)$$

Hemen u–ren ordez g (x) jarri beharko dugu.

Frogapena:

x–en balio jakin batentzat:

$$u = f(x) \quad ; \quad y = F(u)$$

x aldagaiari Δx gehikuntza ezartzen badiogu:

$$u + \Delta u = g(x+\Delta x)$$

$$y + \Delta y = F(u+\Delta u)$$

$\Delta x \to 0$ denean, $\Delta u \to 0$ da eta $\Delta y \to 0$ da.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$$

Limitearen definizioa aplikatuz, u = 0 balioarentzat:

$\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha$ non $\alpha \to 0$ $\Delta u \to 0$ jotzen duenean.

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \, \Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \text{Hipotesiagatik} \begin{cases} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha \, . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$y'_x = y'_u \, . \, u'_x$$

Adibideak:

1. Izan bedi $y = \sin(x^2)$ funtzioa. Kalkulatu y'_x

$$\left.\begin{array}{ll} y = \sin u & y'_u = \cos u \\ u = x^2 & u'_x = 2x \end{array}\right. \quad y'_x = y'_u \,.\, u'_x = 2x \cos u = 2x \cos x^2$$

2. $y = (\ln x)^3$

$$\left.\begin{array}{ll} y = u^3 & y'_u = 3u^2 \\ u = \ln x & u'_x = 1/x \end{array}\right. \quad y'_x = 3u^2.(1/x) = 3\,(\ln x)^2 \,.\, (1/x)$$

3. $y = \sin[(\ln x)^3]$

$$\begin{array}{lll} y = \sin u & y'_u = \cos u & \\ u = v^3 & u'_v = 3v^2 & y'_x = \cos u.3v^2.(1/x) = \\ & & \quad = \cos[(\ln x)^3].3\,(\ln x)^2.1/x \\ v = \ln x & v'_x = 1/x & \end{array}$$

Kontutan hartu behar dugu, $y = \sin[(\ln x)^3]$ funtzioa x–en balio positiboentzat bakarrik definitua dagoela.

h) y = tan x, y = cot x eta y = ln (x) funtzioen deribatuak

Teorema:

$y = \tan x$ funtzioaren deribatua $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ da.

Frogapena:

Izan bitez $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ funtzioa

Zatiketaren deribatuaren formula aplikatuz:

$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Teorema:

y = cot x funtzioaren deribatua $y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$ da.

Frogapena, tangentearena bezala egiten da.

Adibidea:

$y = \tan \sqrt{x}$ bada

$y = \tan u \qquad y'_u = 1/(\cos^2 u)$

$$y'_x = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$u = \sqrt{x} \qquad u'_x = 1/(2\sqrt{x})$

Adibidea:

y = ln (cot x) bada

$y = \ln u \qquad y'_u = 1/x$

$$y'_x = \frac{-1}{\cot x . \sin^2 x} = \frac{-1 . \sin x}{\cos x . \sin^2 x} = \frac{-1}{\sin x . \cos x}$$

$u = \cot x \qquad u'_x = -1/(\sin^2 x)$

i) Funtzio inplizitua eta bere deribatua

Bi aldagai erlazionatzen dituen funtzioa F (x,y) = 0 erakoa bada, funtzioa *era inplizituan* dagoela esaten da edo funtzioa *inplizitua* dela.

Badaude era inplizitutik esplizitura pasatzea errazak diren funtzio batzuk. $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ funtzioak, bi funtzio esplizitu adierazten ditu:

$$y = +\sqrt{a^2 - x^2} \; ; \; y = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

Beste batzuetan, aldiz, ezin daiteke funtzio esplizitu bezala jarri. Adibidez: $y^2 - y - x^2 - x = 0$.

Baina, hori bai, edozein funtzio esplizitu era inplizituan jar dezakegu $y - f(x) = 0$ eginez.

Ikus dezagun adibide batzuen bidez funtzio inplizitua era esplizitura pasatu gabe nola deribatu.

1. $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ funtzio konposatuaren erregela aplikatuz: $2x + 2yy' = 0$ $\Rightarrow$ $y' = -x/y$

2. $y^6 - y - x^2 = 0$ funtzioari ere funtzio konposatuaren erregela aplikatuz:

$$6y^5\, y' - y' - 2x = 0$$

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

Azalpena:

Funtzio inplizitu baten deribatuaren balioa x–en balio determinatu batentzat aurkitzea nahi badugu, lehenengo y funtzioak x–en balio horrentzat hartzen duen balioa jakin beharko dugu.

j) Funtzio potentziala, funtzio esponentziala eta funtzio esponentzial konposatuaren deribatuak

Teorema:

m edozein zenbaki erreal denean x^m funtzioaren deribatua mx^{n-1} da.

Frogapena:

Pentsa dezagun $x > 0$ dela

y x–en funtzio dela kontutan hartzen badugu, bi atalak deribatuz:

$$\frac{y'}{y} = n \cdot \frac{1}{x}$$

Baina $y' = x^n \rightarrow y' = x^n \cdot n \cdot \frac{1}{x} = n\, x^{n-1}$

Aurreko hau $x < 0$ balioentzat ere froga daiteke (noski, x^m balioak zentzurik badu).

Teorema:

$y = a^x$ funtzioaren deribatua ($a > 0$ delarik)

$y' = a^x \ln a$ da

Frogapena:

$$y = a^x \rightarrow \ln y = x \ln a$$

y x–en funtzio dela kontutan hartzen badugu, eta bi atalak deribatzen baditugu:

$$\frac{1}{x}\, y' = \ln a \rightarrow y' = y \ln a$$

nola $y = a^x$ den, $\Rightarrow$ $y' = a^x \ln a$

Kasu partikularra:

$a = e$ bada, $\ln e = 1$ dela kontutan hartuz:

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

Adibidea:

$y = e^{x^2}$ funtzio konposatu bezala hartzen badugu:

$$\left.\begin{array}{l} y = e^u \\ u = x^2 \end{array}\right\} y'_x = y'_u . u'_x = e^u.2x = 2xe^{x^2}$$

Funtzio batean bai oinarria eta bai esponentea x–en funtzio direnean, funtzioari *funtzio esponentzial konposatu* deitzen zaio. Adibidez:

$$(\sin x)^{x^2} \;;\; x^{\tan x} \;;\; x^x \;;\; (\ln x)^x$$

Teorema:

$y = u^v$ bada, $y' = vu^{v-1} + u^v\, v' \ln u$

Frogapena:

Logaritmoak aplikatzen baditugu $y = u^v$ funtzioan:

$$\ln y = v \ln u$$

x aldagaiarekiko deribatuz: $\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$

$$y' = y \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right)$$

$$y = u^v \text{ denez: } y' = vu' \frac{u^v}{u} + v' \ln u . u^v \quad \Rightarrow$$

$$y' = vu^{v-1}.u' + u^v.v' \ln u$$

Funtzio esponentzial konposatuaren deribatuak, bi osagai ditu:

* Lehenengo batugaia, deribatzean u x–en funtzio dela eta v konstante dela suposatuz lortzen da, hau da, u^v funtzioa funtzio potentziala dela suposatuz.

* Bigarren batugaia, deribatzean v x–en funtzio dela eta u konstante dela suposatuz lortzen da, hau da, u^v funtzio esponentziala dela suposatuz.

Adibideak:

* $y = x^x \Rightarrow y' = x^2\, x^{x-1}\, (x)' + x^x\, (x)' \ln x = x^x + x^x \ln x = x^x\, (1+\ln x)$

* $y = (\sin x)^{x^2} \Rightarrow y' = x^2\, (\sin x)^{x^2-1}\, (\sin x)' + (\sin x)^{x^2}\, (x^2)' \ln (\sin x) \Rightarrow$

  $y' = x^2\, (\sin x)^{x^2-1} \cos x + (\sin x)^{x^2}\, 2x.\ln x$

Orain, funtzioen deribatuak lortzeko beste metodo bat ikusiko dugu. Lehenengo funtzioaren logaritmoa hartzen da eta gero hau deribatu egiten da. Metodo hau askotan erabiltzen da, eta kasu batzuetan kalkuluak erraztu egiten ditu.

Adibidea:

$$y = \frac{(x+1)^2 \cdot \sqrt{x-1}}{(x+4)^3\, e^x}$$

Logaritmoa hartuz: $\ln y = 2 \ln (x+1) + 1/2 \ln (x-1) - 3 \ln (x+4) - x$

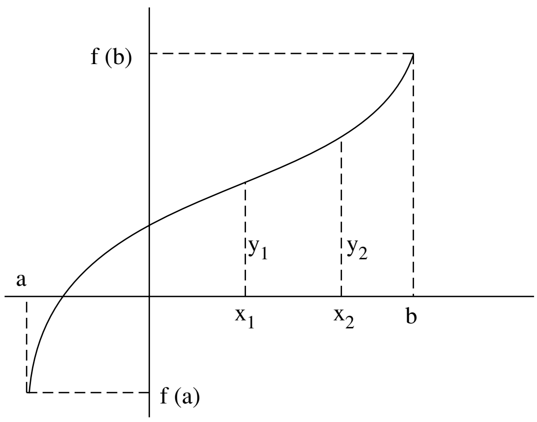
Hori deribatuz: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{2\,(x-1)} - \dfrac{3}{x+4} - 1$

Orain bi atalak y faktoreaz biderkatzen baditugu, eta gero y–ren balioa jartzen badugu:

$$y' = \frac{(x+1)^2 \cdot \sqrt{x-1}}{(x+4)^3\, e^x} \left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2\,(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right]$$

k) Alderantzizko funtzioa eta bere deribazioa

Pentsa dezagun $y = f(x)$ (a,b) (non $a < b$) tarte batean definitua dagoen funtzio gorakor edo beherakorra dela. Egin dezagun $f(a) = c$ eta $f(b) = d$. Hemendik aurrera, funtzio gorakorraren kasua bakarrik ikusiko dugu.



Azter ditzagun orain x_1 eta x_2 bi balio desberdin (a,b) tartean.

Funtzio gorakorraren definiziotik ondoko hau ateratzen dugu:

$$x_1 < x_2 \text{ bada } f(x_1) < f(x_2) \quad (Y_1 < Y_2)$$

Beraz, x_1 eta x_2 balioei, funtzioaren y_1 eta y_2 balio desberdin dagokie.

Batekoz bestera ere egia da. Hau da, $y_1 < y_2$ bada $x_1 < x_2$ da.

Horrela, x–en balioen artean eta y–ren balioen artean erlazio biunibokoa ezartzen da.

y–ren balioak aldagaiaren balio bezala interpretatzen baditugu eta x–en balioak funtzioaren balio bezala, x y–ren funtzio bezala lortuko dugu:

$$x = g\,(y)$$

Funtzio honi y = f (x) funtzioaren *alderantzizko funtzio* deitzen zaio.

Berdin joka dezakegu funtzio beherakorretan.

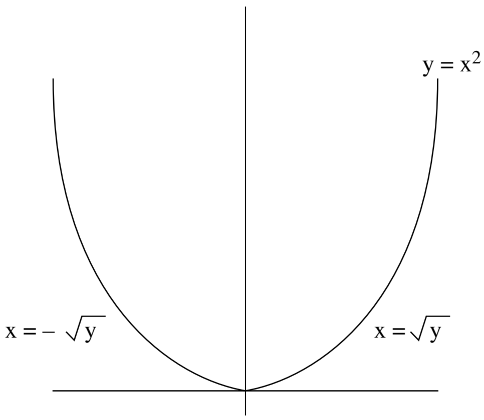
Azalpena:

y = f (x) funtzio gorakorra (beherakorra), [a,b] tartean jarraia bada eta f (a) = c f (b) = d badira, alderantzizko funtzioa definitua egongo da eta [c,d] tartean jarraia izango da.

Azalpena:

y = f (x) funtzioa gorakorra ez bada eta tarte batean beherakorra ere ez, alderantzizko zenbait funtzio eduki dezake.

Adibidea: $y = x^2$



Funtzioa tartean definituta dago. Ez da ez gorakorra eta ez beherakorra, eta ez du alderantzizko funtziorik ere.

$0 \le x < +\infty$ tartean, $y = x^2$ gorakorra da eta tarte horretan bere alderantzizko funtzioa $x = +\sqrt{y}$ da.

$-\infty < x < 0$ tartean, $y = x^2$ beherakorra da eta tarte horretan bere alderantzizko funtzioa $x = -\sqrt{y}$ da.

Teorema:

$y = f(x)$ funtzioak, $x = g(y)$ alderantzizko funtzioa baldin badu eta honek y puntu analizatu batena $f'(y) = 0$ deribatua badu, $y = f(x)$ funtzioak y horri dagokion x puntuan $f'(x) = 1/g'(x)$ deribatua edukiko du.

Frogapena:

y, Δy gehitzen badugu:

$$\Delta x = g(y+\Delta y) - g(y)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x/\Delta y}$$

$f(y)$ funtzioa jarraia denez gero, $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$ denean.

$\Delta y \to 0$ denean limitea kalkulatzen badugu:

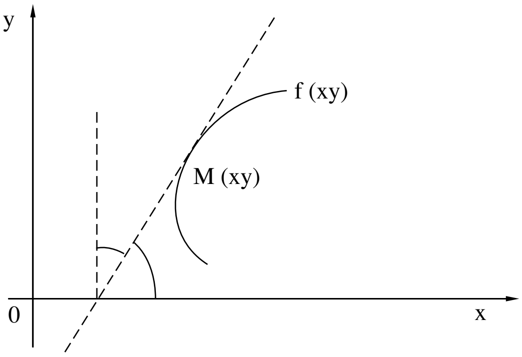
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

Azalpena:

$y = f(x)$ eta $x = g(y)$ batabestearekiko alderantzizkoak badira, beraien irudiak kurba berberaz adierazten dira.

Interpretazio geometrikoak

$y = f(x)$ (edo $x = g(y)$) funtzioaren grafikoa azter dezagun.



Kurbaren M (x,y) puntua hartuko dugu. Puntu horretatik pasatzen den kurbarekiko ukitzailea marraztuko dugu. Ukitzaile honek, ox eta oy ardatzen norantza positiboekin osatzen dituen angeluak α eta β dira.

Deribatuaren esanahi geometrikoa ikusi genuenean:

$f'(x) = \tan\alpha$; $g'(y) = \tan\beta$

* $\alpha < \frac{\pi}{2}$ bada $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

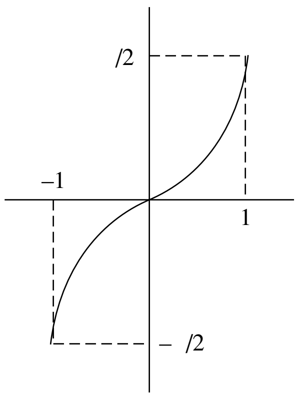
* $\alpha < \frac{\pi}{2}$ bada $\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$

nolanahi ere $\tan\beta = \cot\alpha$

l) Funtzio trigonometriko alderantzizkoak eta bere deribazioa

1. $y = \arcsin x$ funtzioa

   $y = \sin y$ funtzioa aztertuko dugu.



$-\infty < y < +\infty$ tartean definitua dago. $-\pi/2 \leq y \geq \pi/2$ tartean, $x = \sin y$ funtzioa gorakorra da eta bere balioak $-1 \leq x \leq 1$ tartean aurkitzen dira. Horregatik $x = \sin y$ funtzioak alderantzizko funtzioa du, eta hau, $y = \text{arc sin } x$ da.

Teorema:

$x = \text{arc sin } x$ funtzioaren deribatua $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ da.

Frogapena:

$y = \text{arc sin } x \rightarrow x = \sin y$

$x'_y = \cos y$

Beraz $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\cos y}$

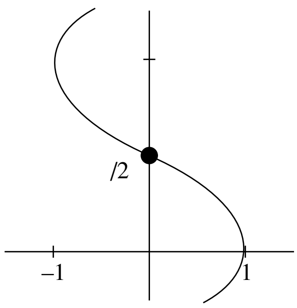
$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-x^2}$

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Erro karratuaren zeinua positiboa da, $y = \text{arc sin } x$ funtzioaren balioak $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ tartean aurkitzen direlako eta beraz $\cos y > 0$ delako.

2. $y = \text{arc cos } x$ funtzioa

   Lehen egin dugun bezala, orain $x = \cos y$ funtzioa aztertuko dugu.



Funtzio hau $-\infty < y < +\infty$ tarte infinituan definituta dago.

Tartean $x = \cos y$ funtzioa beherakorra da eta bere alderantzizko funtzioa $y = \text{arc cos } x$ da.

Funtzio hori $-1 \le x \le 1$ tartean definituta dago. Funtzioaren balioak $\pi \ge y \ge 0$ tartean aurkitzen dira.

Teorema:

$y = \text{arc cos } x$ funtzioaren deribatua $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ da.

Frogapena:

$y = \text{arc cos } x \rightarrow x = \cos y$

$x'_y = \cos y$

$$\text{Beraz } y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$$

$$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

$$y'_x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Erro karratuaren zeinua positiboa da, $y = \text{arc cos } x$ funtzioaren balioak $0 \le y \le \pi$ tartean aurkitzen direlako eta beraz $\sin y > 0$ delako.

3. $y = \text{arc tan } x$ funtzioa

$x = \tan y$ funtzioa aztertuko dugu.

Funtzio hau, $y = (2k+1)\,\pi/2$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$) balioentzat ezezik, y–ren balio guztientzat ere definituta dago.

$-\pi/2 < y < \pi/2$ tartean $x = \tan y$ funtzioa gorakorra da eta alderantzizko funtzioa: $y = \text{arc tan } x$. Funtzio hau tartean definituta dago eta bere balioek tartea betetzen dute.

Teorema:

$y = \text{arc tan } x$ funtzioaren deribatua $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ da.

Frogapena:

y = arc tan x $\rightarrow$ x = tan y ; behekoaren berdina.

4. y = arc cot x funtzioa

   x = cot y funtzioa aztertuko dugu.

   Funtzio hau, $y = k\pi$ ($k=0, \pm 1,\ldots$) balioentzat ezezik, y–ren balio guztientzat ere definituta dago. $0 < y < \pi$ tartean x = cot y funtzioa beherakorra da eta alderantzizko funtzioa du: y = arc cot x. Funtzio hau $-\infty < x < +\infty$ tartean definituta dago eta bere balioek $\pi > y > 0$ tartea betetzen dute.

   Teorema:

   y = arc cot x funtzioaren deribatua $y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$ da.

   Frogapena:

   y = arc cot x $\rightarrow$ x = cot y

   $$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}$$

   $$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\sin^2 y = \frac{-1}{\operatorname{cosec}^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y}$$

   tan y = x

   $$y'_x = \frac{-1}{1+x^2}$$

m) Funtzio hiperbolikoen deribatuak

Gogora dezagun:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x \ ; \ (\cosh x)' = -\sinh x$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{(\cosh x)^2} \ ; \ (\coth x)' = \frac{1}{(\sinh x)^2}$$

5.5.– DIFERENTZIALA

Pentsa dezagun y = f (x) funtzioa deribagarria dela [a,b] tartean, hau da, tarteko puntu bakoitzean. [a,b] tarteko x puntuan, deribatua ondoko hau izango da:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Beste era batera: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$ ($\alpha \to 0$ $\Delta x \to 0$ denean)

$$y = f'(x)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x$$

Kasu orokorrenean $f'(x) = 0$ eta x–en balio batentzat $f'(x)\,\Delta x$ biderkadura magnitude infinitesimala da (zerorantz jotzen du). $\alpha\,\Delta x$ biderkadurak ere zerorantz jotzen du, baina $f'(x)\,\Delta x$ baino askoz azkarrago.

Δy–k bi batugai ditu:

$f'(x)\,\Delta x$ funtzioaren *diferentzial* deitzen zaio eta dy edo df (x) bezala adierazten da.

$$dy = f'(x)\,\Delta x$$

y = x funtzioarentzat, y' = 1 eta $dy = dx = x.\Delta x$ aldagai independentearen diferentziala (dx) eta bere Δx gehikuntza berdinak dira.

Beraz $dy = f'(x)\,dx$ $\quad f'(x) = \frac{dy}{dx}$

f ' (x) deribatua aldagai independentearen diferentzialarekiko funtzioaren diferentzialak duen erlazio bezala har daiteke.

$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha.\Delta x$ beste era batera jartzen badugu:

$$\Delta y = dy + \alpha.\Delta x$$

Beraz, Δy eta dy–ren arteko desberdintasuna, x–ekiko maila handiagoko magnitude infinitesimala da. $f'(x) = 0$ bada, $\alpha.\Delta x$ maila handiagoko magnitude infinitesimala da dy–rekiko ere, eta beraz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim \frac{\alpha . \Delta x}{f'(x)\, \Delta x} = 1 + \lim \frac{\alpha}{f'(x)} = 1$$

Honek, batzuetan kalkulu aproximatuetan $\Delta y \approx dy$ egitea uzten digu, edo baita $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\, dx$ ere.

Adibidea:

$y = x^2$ funtzioaren dy diferentziala eta Δy gehikuntza kalkulatu:

a) x eta x–en hautazko balioentzat

b) x = 20, x = 0,1 balioentzat

Ebazpidea:

a) $y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\, \Delta x + \Delta x^2$

$dy = (x^2)'\, \Delta x = 2x\, \Delta x$

b) $y = 2.20.0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4{,}01$

$dy = 2.20.0{,}1 = 4{,}00$

Hurbilketa–kalkuluetan, $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\, \Delta x$ berdinketa hurbildua ere erabiltzen da.

Adibidea:

Pentsa dezagun f (x) = sin x dela. Beraz:

$$f'(x) = \cos x$$

Eta berdinketa hurbildu hori honela gelditukoda:

$$\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x\, \Delta x$$

Kalkula dezagun, sin 46°–ren balio hurbildua:

$$x = 45° = \frac{\pi}{4} \text{ eginez,} \quad x = 1° = \frac{\pi}{180}$$

$$46° = 45° + 1° = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}$$

$$\sin 46° = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\,\frac{\pi}{180}$$

$$\sin 46° = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}\,\frac{\pi}{180} = 0{,}7071 + 0{,}7071\ .\ 0{,}017 = 0{,}7194$$

Funtzio baten diferentziala kalkulatzeko, beraz, lehenengo funtzioaren deribatua kalkulatu behar dugu eta gero deribatu honen eta aldagaiaren diferentzialaren arteko biderkaketa egin beharko dugu.

Deribatuentzat ikusi genituen teorema gehienak, diferentzialentzat ere baliagarriak dira:

$$d\ (u+v) = du + dv$$

$$d\ (u.v) = udv + vdu$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

$y = f\ (u)$ eta $u = g\ (x)$ badira, $dy = f_u'\ (u)\ g'_x\ dx = f_u'\ (u)\ du$. Funtzio konposatu baten diferentziala, tarteko aldagaia aldagai independentea izango balitz bezala hartuta kalkula daiteke. Hau da, diferentzialaren forma berdina da, nahiz eta funtzioaren argumentua aldagai independentea izan edo beste aldagai baten funtzio izan. Honi *forma diferentzialaren inbariantza* deitzen zaio.

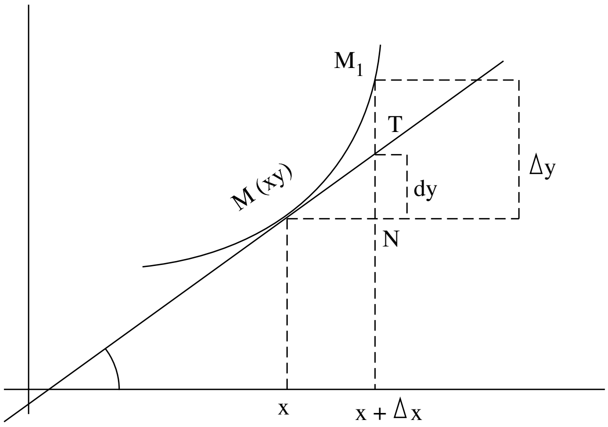
* $y = \sin\sqrt{x}$ bada, kalkulatu dy:

$y = \sin u$

$$dy = y'\ dx = \cos u\ .\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx = \cos u\ du$$

$u = \sqrt{x}$

5.6.– DIFERENTZIALAREN ESANAHI GEOMETRIKOA



Izan bedi kurba horren bidez adierazten den y = f (x) funtzioa. Kurba horren M (x,y) puntu bat aukeratuko dugu, eta puntu horretatik kurbarekiko ukitzaile den zuzena irudikatuko dugu.

x aldagaia Δx gehitzen badugu, funtzioa Δy gehituko da: $y = NM_1$

$\widehat{MNT}$ triangeluan ikusten den bezala: NT = MN tan x

tan x = f ' (x) denez eta MN = Δx : NT = f ' (x) Δx

Diferentzialaren definizioa kontutan hartzen badugu:

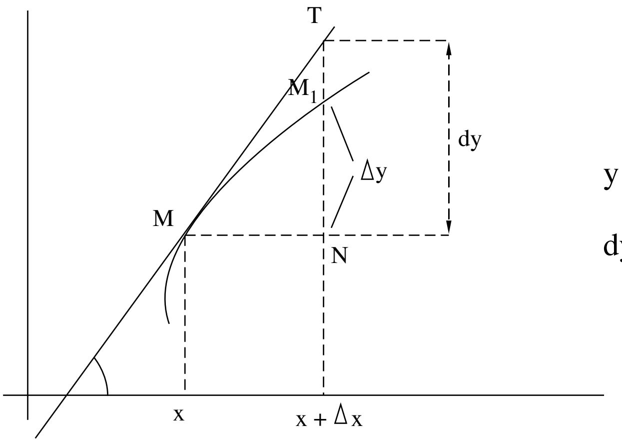
$$dy = f'(x)\,\Delta x \quad \Rightarrow \quad NT = dy$$

x eta Δx balioei dagokien f (x) funtzioaren diferentziala, x puntuan y = f (x) funtzioak duen ukitzailearen maldaren gehikuntza da.

Iruditik: $\Delta y = M_1T + dy \qquad M_1T = \Delta y - dy$

$$\Delta x \to 0 \quad \text{denean} \quad \frac{M_1T}{NT} \to 0$$

Beti ez da gertatzen Δy > dy izatea:



$y = M_1N$ $\quad$ $y < dy$

$dy = NT$

5.7.– n–GARREN ORDENAKO DERIBATUAK

Pentsa dezagun y = f (x) funtzioa [a,b] tartean deribagarria dela. f ' (x) deribatua ere x–en funtzio izango da. Deribatu hau berriro deribatzen badugu, y = f (x) funtzioaren *bigarren deribatua* edo *bigarren ordenako deribatua* lortuko dugu. Deribatu hau y'' edo f '' (x) idatzita adierazten da.

Bigarren deribatuaren deribatua, *hirugarren deribatua* edo *hirugarren ordenako deribatua* da, eta y''' edo f ''' (x) idatzita adierazten da.

Oro har, (n–1) ordenako deribatuaren deribatua, *n–garren ordenako deribatua* edo *n–garren deribatua* da. y^n edo f^n (x) idatzita adierazten da.

Laugarren, bostgarren, seigarren, … ordenako deribatuak adierazteko, zenbaki erromatarrak ere erabiltzen dira (y^{IV}, y^V, y^{VI}, …)

* Adibidea: $y = xe^x$

$y' = e^{x+xex} = e^x\,(x+1)$
$y'' = e^x\,(x+1) + e^x = e^x\,(x+2)$
$y''' = e^x\,(x+2) + e^x = e^x\,(x+3)$
. . . .
$y^n = e^x\,(x+n)$

* Adibidea: y = ln x

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = \frac{-1}{x^2} \qquad y^{IV} = \frac{6}{x^4} \qquad y^n = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$y^{V} = \frac{-24}{x^5}$$

$$y''' = \frac{-2}{x^3}$$

Lehen ordenako deribatuek betetzen dituzten bi teorema orokor daitezke beste ordenako deribatuetara:

$$(u+v)^{n)} = u^{n)} + v^{n)} \quad ; \quad (cu)^{n)} = cu^{n)}$$

Leibniz–en formula

Bi funtzioren biderkaduraren n–garren ordenako deribatua kalkulatzeko erabiltzen da.

$$(u+v)^n = \binom{n}{0} u^n v^0 + \binom{n}{1} u^{n-1} v + \binom{n}{2} u^{n-2} v^2 + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{n-1} u\, v^{n-1} + \binom{n}{n} v^n u^0$$

Lortutako serie horretan, u eta v–ren berretzaileen ordez deribatuen indizea jarriko dugu eta u^0 eta v^0–ren ordez funtzio berak jarriko ditugu.

$$y^n = (u.v)^n = u^n v + nu^{n-1} v^1 + \frac{n\,(n-1)}{2!}\; u^{n-2} v'' + \ldots + uv^n$$

* Adibidea: $y = e^x.x$

$u = e^x$; $u' = u'' = \ldots = u^n = e^x$

$v = x$; $v' = 1$; $v'' = v''' = \ldots = v^n = 0$

$$y^n = (e^x.x)^n = e^x\, x + ne^x\, 1 + \frac{n\,(n-1)}{2!}\; e^x\, 0 + 0 + \ldots + 0$$

$$y^n = e^x\, x + ne^x = e^x\, (x+n)$$

n–garren ordenako diferentzialak

Pentsa dezagun $y = f(x)$ funtzioa dugula, x aldagai independentea delarik.

$$dy = f'(x)\,dx$$

dy diferentziala x–en funtzio da, eta $f'(x)$ ere bai, baina dx ez da x–en funtzio (gehikuntza da).

dy diferentziala x–en funtzio denez, diferentziala kalkula daiteke.

Bigarren ordenako diferentziala $\rightarrow d^2y = d\,(dy)$

$$dy = f'(X)\,dx$$

$$d\,(dy) = (f'(x)\,dx)'\,dx = f'' = (x)\,(dx)^2 = f''(x)\,dx^2$$

Hirugarren ordenako diferentziala:

$$d\,(d^2y) = (d^2y)'\,dx = (f''(x)\,dx^2)' = f'''(x)\,dx^3$$

n–garren ordenako diferentziala:

$$d^n\,y = d\,(d^{n-1}\,y) = (f^{n-1}\,(x)\,dx^{n-1})' = f^n\,(x)\,dx^n$$

5.9.– FUNTZIO INPLIZITUEN n–GARREN ORDENAKO DERIBATUAK

1. Adibide baten bidez ikusiko dugu.

Pentsa dezagun funtzio inplizitua $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dela. x aldagaiarekiko deribatuz: $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \rightarrow y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$

Berriro deribatuz:

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{y-y'x}{y^2}$$

Eta $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$ denez

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{y + \frac{b^2x^2}{a^2y}}{y^2} =$$

$$= -\frac{b^2}{a^2}\frac{a^2y^2 + b^2x^2}{a^2y^3}$$

Baina $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{a^2b^2}{a^2y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

$y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}$ x–ekiko deribatuz y''' lortuko dugu, etab.

5.10.– BIGARREN DERIBATUAREN ESANAHI MEKANIKOA

Translazio–higidura duen gorputz batek ibilitako s tartea, denboraren funtzio bezala ondoko eran adierazten da:

$$s = f(t)$$

Jakina denez, gorputzak aldiune batean daraman abiadura, ibilitako tartearen denborarekiko lehenengo deribatuak ematen du:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Pentsa dezagun t aldiunean gorputzaren abiadura v dela. Higidura uniformea ez bada, t denbora–tartean abiadura aldatu egin da, eta aldakuntza horri V deituko diogu.

t denbora–tartean gorputzak duen *batezbesteko azelerazioa*

$$a_m = \frac{V}{t}$$

Aldiuneko azelerazioa $= \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$ definizioz.

Beste era batera, $a = \dfrac{dv}{dt}$

$$V = \frac{ds}{dt} \text{ denez gero, } a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Hau da, higidura zuzenaren azelerazioa, ibilitako tartean denborarekiko bigarren deribatua da.

Adibidea:

Grabitatearen ondorioz, libre erortzen den gorputz baten V abiadura eta a azelerazioa lortu.

Ibilitako tartea denboraren funtzio bezala:

$$s = \frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_0 t + s_0$$

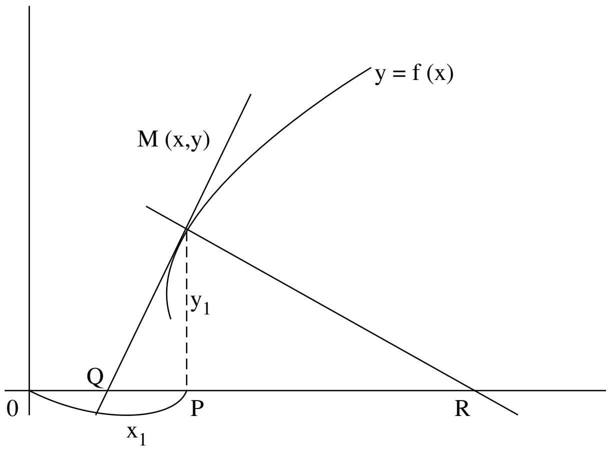
Deribatuz: $v = \dfrac{ds}{dt} = gt + V_0$

Berriro ere deribatuz: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2} = g$

5.11.– LERRO TANGENTE ETA LERRO NORMALAREN EKUAZIOAK. AZPITANGENTE ETA AZPINORMALAREN LUZERAK

Izan bedi y = f (x) ekuazioak adierazten duen kurba.

Kurba honetako M (x_1,y_1) puntua hartu eta hortik pasatzen den kurbarekiko tangentearen ekuazioa aterako dugu. (Tangente hau, ordenatuaren ardatzarekiko ez dela paraleloa suposatuko dugu).



K koefiziente angeluarra duen, eta M puntutik pasatzen den zuzenaren ekuazioa:

$$y-y_1 = K\,(x-x_1)$$

Tangentearen kasuan: $K = f'(x_1)$

Beraz, *tangentearen ekuazioa*: $y-y_1 = f'(x_1)\,(x-x_1)$ da.

Definizioa: Kurba batek puntu batean duen *normala*, puntu horretatik pasatzen den eta puntu horretan duen tangentearekiko elkartzuta den zuzena da.

Definiziotik honakoa ateratzen da: tangentearen koefiziente angeluarra k_t bada, normalarena $K_n = -1/k_t$ izango da.

Beraz, y = f (x) kurbak M (x_1,y_1) puntuan duen normalaren ekuazioa ondoko hau izango da:

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

Adibidea:

$y = x^3$ kurbak M (1,1) puntuan dituen tangentearen eta normalaren ekuazioak aurkitu.

Ebazpidea:

$$y = 3x^2 \rightarrow f'(x_1) = (y')_{x=1} = 3$$

Tangentearen ekuazioa: $y-1 = 3(x-1)$ edo $y = 3x-2$

Normalaren ekuazioa: $y-1 = -\frac{1}{3}(x-1)$ edo $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

Ukitze–puntua eta 0X ardatzaren artean dagoen QM (ikus irudian) tangentearen segmentuaren T luzerari, *tangentearen luzera* deitzen zaio. Segmentu honek 0X ardatzean duen proiekzioari (QP segmentua hain zuzen) *azpitangente* deitzen zaio, eta bere luzera S_T idatzita adierazten da.

MR segmentuaren N luzerari *normalaren luzera* deitzen zaio eta RM segmentuak 0X ardatzean duen RP proiekzioari *azpinormal* deitzen zaio, bere luzera S_N idatzita adierazten delarik.

Aurki ditzagun T, S_T, N eta S_N–ren balioak $y = f(x)$ kurbarentzat eta M (x_1, y_1) puntuarentzat.

Irudian ikus dezakegunez:

$$QP = Y_1 \cot\alpha = \frac{y_1}{\tan\alpha} = \frac{y_1}{y_1'}$$

Beraz $S_T = \left|\frac{y_1}{y_1'}\right|$

$$T = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^2}{y_1'^2}} \rightarrow T = \left|\frac{y_1}{y_1'}\sqrt{y_1'^2 + 1}\right|$$

Aldi berean:

$$PR = y_1 \tan \alpha = y_1 y_1' \rightarrow S_N = |y_1 y_1'|$$

$$N = \sqrt{y_1^2 + (y_1 y_1')^2} \rightarrow N = \left| y_1 \sqrt{1+y_1'^2} \right|$$

Formula hauek, $y_1 > 0$ $y_1' > 0$ diren kasurako lortu ditugu, baina baliagarriak dira edozein kasurentzat.

Adibidea: $y = x^3$ M (1,1) puntuan

$$y' = 3.x^2 \quad y'_1 = 3.1 = 3 \quad S_T = |1/3| = 1/3$$

$$T = (1/3).\sqrt{3^2+1} = \sqrt{10}/3$$

$$S_N = |1.3| = 3$$

$$N = \left|1.\sqrt{1+3^2}\right| = \sqrt{10}$$

5.12.– ARIKETAK

1.– Deribatu funtzio hauek:

* $y = 10^{x \tan x}$

* $y = \arcsin \frac{x}{a}$

* $y = \arctan \frac{a}{x} + \ln \frac{x-a}{x+a}$

* $y = \sqrt[x]{\sin x}$

2.– Bilatu dy/dx funtzio hauetan:

* $\sin x.y + \tan x/y = 0$

* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

* $y = \cos (x+y)$

* $\sin x.y = x$

3.– Bila ezazu ukitzailearen malda funtzio hauetan:

* $y = \sin x^2$ $x = 1$ puntuan

* $x^2 + y^2 = 2y$ $x = 1, y = 1$ puntuan

4.– kalkulatu n–garren deribatua:

* $y = \frac{1-x}{1+x}$

* $y = e^x.x$

* $y = \ln (1+x)$

5.– Kalkulatu funtzio hauen gehikuntza eta diferentziala

* $y = 2x^2-x$ $x = 1$ eta $\Delta x = 0{,}01$ denean.

* $y = \sin x$ $x = \pi/3$ eta $\Delta x = \pi/18$ denean.

6.– $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ funtzioaren ukitzailea, normala, ukitzailearen normalaren, azpitangentearen eta azpinormalaren luzeerak, M (3,2) puntuan, bila itzazu.

7.– Frogatu $y^2 = 4px$ parabolako edozein puntutan azpitangentea erdibitu egiten dela erpinaren bidez eta azpinormala kte eta berdin 2p dela.

8.– Zein angelu osatuz mozten dira $y = a^x$ eta $y = b^x$ kurbak?

9.– Bilatu $4x^2 - 9y^2 = 36$ hiperbolaren ukitzaile izanik $2y + 5x = 10$ zuzenarekiko elkartzut diren zuzenak.

10.– Frogatu $x.y = m$ hiperbolaren ukitzaileek koordenatu cartesiarrak moztean osatzen dituzten segmentuek ukitze–puntuan dutela erdia.

11.– Triangelu baten "a" aldea $a = \sqrt{b^2+c^2+2bc \cos A}$ formulaz lor daiteke. "b" eta "c" konstanteak direla jakinik, frogatu $da/dA = h^a$, non h^a "a" oinarriari dagokion altuera bait da.

12.– Diferentziala erabiliz, interpretatu $\sqrt{a^2+b} = a+(b/2a)$ hurbiltasuna, non "a"rekin konparatuz "b" oso txikia bait da.

13.– Pendulu baten periodoa $T = 2\pi \sqrt{(l/g)}$ baldin bada, zer eragin dauka T neurtzean:

a) l–k, neurtzean %1–eko errorea egin badugu

b) g–k, neurtzean %1–eko errorea egin badugu

14.– Pertsona bat 6 km/h–ko abiaduraz ibiltzen da, 60 m–ko altuera duen dorre batera hurbilduz. Zein abiaduraz hurbiltzen da dorrearen gailurrera, dorrearen oinarritik 80 m–ra dagoenean?

15.– Zenbat aldiz handiagoa da xaboi–anpulu baten bolumenaren hazkuntza erradioarenarekin konparatuz, erradioa 2m–koa denean?

16.– Triangelu aldekide baten aldea 5 cm/s–ko abiaduraz haunditzen ari da. Nola aldatzen da azalera erradioa 26 cm–koa denean?

17.– Globo bat A puntutik gorantz doa 15 m/s–ko abiaduraz. Bere gorakada beste B puntu batetik ikusten ari gara, eta "AB" distantzia 30 metrokoa da. Kalkulatu globoa eta B puntuaren arteko distantziaren aldakuntza, globoa 40 metro igo denean.

18.– Mutiko batek kometa bat botatzen du 150 m–ko altuerara. Airearen abiadura 20 m/s–koa eta horizontala dela jakinik, kalkulatu soka kometa mutikotik 250 m–ra dagoenean zein abiaduraz askatzen den.

19.– Faro bat hondartza zuzen eta horizontal batetik 1 km–ra dago. Faroak 1 r.p.m.ko abiadura baldin badu, zein abiaduraz aldatzen da argia hondartzan, izpiak eta hondartzak 45°–ko angelua osatzen dutenean?

20.– Pertsona bat 5 km/h–ko abiaduraz doa zubi baten gainean. Aldi berean uretatik txalupa bat pasatzen da 14 km/h–ko abiaduraz. Zubia uretatik 6 m–ra baldin badago, kalkulatu zein abiaduraz urruntzen diren pertsona eta txalupa minutu bat geroago.

21.– Bonbila bat lurretik 12 m–ra dago. Bere azpitik mutil bat pasatzen da, 49 m/s–ko abiaduraz. Nola aldatzen da itzalaren luzeera eta zein da itzalaren muturreko abiadura mutilak 1,50 m–ko altuera baldin badu?

22.– Hegazkin bat gorantz doa 24 km/h–ko abiaduraz. Zein abiaduraz txikiagotzen da ikus dezakeen lurraren azalera?

23.– 4 m–ko luzera duen eskailera bat koordenatu cartesiarretan ezarrita dago, eta oina urrunduz doa jatorri–puntuarekiko 20 cm/s–ko abiaduraz.

a) Zein abiaduraz jaisten da goi partea, oina jatorri–puntutik 3 m–ra dagoenean?

b) Zein momentutan mugitzen dira bi muturrak abiadura berdinez?

c) Nola aldatzen da eskailera eta jatorri–puntuaren arteko distantzia, oina jatorri puntutik 3 m–ra dagoenean?

d) Oina 3 m–ra dagoenean, nola aldatzen da malda?

24.– Argi bat, 80 m–ko dorre baten gailurrean dago eta altuera berdinetik 20 m–ra pilota bat erortzen uzten da $s = 16\ t^2$ legeaz. Zein abiaduraz mugituko da lurrean pilotaren itzala minutu bat pasatu ondoren?

25.– Gordailu koniko batek 8 m–ko diametroa eta 16 m–ko sakonera ditu. Urak 12 m–ko altuera lortzean hau 1/3 m/s–ko abiaduraz haunditzuz doala jakinik, kalkulatu zenbat ur galtzen duen segundoko.

6. FUNTZIO DERIBAGARRIEI BURUZKO TEOREMA BATZUK

6.1. DERIBATUEN ERROEI BURUZKO TEOREMA (ROLLE–REN TEOREMA)

6.2. GEHIKUNTZA FINITUEI BURUZKO TEOREMA (LAGRANGE–REN TEOREMA)

6.3. BI FUNTZIOREN GEHIKUNTZAREN ZATIDU–RARI BURUZKO TEOREMA (CAUCHY–REN TEOREMA)

6.4. BI MAGNITUDE INFINITESIMALEN ZATIDU–RAREN LIMITEA (% MOTAKO LIMITE INDE–TERMINATUAREN KALKULUA)

6.5. TEOREMA (L'HOPITAL–EN ERREGELA)

6.6. INFINITUKI HANDI DIREN BI MAGNITUDE–REN ZATIDURAREN LIMITE INDETERMINA–TUAREN KALKULUA

6.7. BESTE LIMITE INDETERMINATUEN KALKULUA

6.8. TAYLOR–EN FORMULA

6.9. e^x, sin x ETA cos x FUNTZIOEN GARAPENA TAYLOR–EN FORMULAREN BIDEZ

6.10. ARIKETAK

6.1.– DERIBATUEN ERROEI BURUZKO TEOREMA (ROLLE–REN TEOREMA)

a) Teorema

f (x) funtzioa [a,b] tartean jarraia bada, tarte horren barneko puntuetan deribagarria bada, eta bere balioa tarteko muturretan zero bada (hau da, f (a) = f (b) = 0), (a,b) tartearen barnean deribatuaren balioa zero deneko puntu bat aurki dezakegu, hau da, c (a<c<b) $\rightarrow$ f ' (c) = 0.

Frogapena:

f (x) funtzioa [a,b] tartean jarraia denez gero, tarte horren barnean hartu beharko ditu bere M balio maximoa eta m balio minimoa.

M = m bada, funtzioa konstantea da eta tarteko edozein puntutan f ' (x) = 0 da, teorema frogatua dugularik.

Har dezagun M $\neq$ m:

M $\neq$ m bada, bietako bat behintzat ez da zero izango. Pentsa dezagun M > 0 dela eta funtzioak bere balio maximoa c puntuan hartzen duela, hau da, f (c) = M. c puntua, a eta b puntuekiko desberdina da, f (a) = f (b) = 0 direlako.

f (c) = M funtzioaren balio maximoa bada:

$f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0 \qquad x > 0$ balioarentzat

$f(c+\Delta x) - f(c) \leq 0 \qquad x > 0$ balioarentzat

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \qquad x > 0 \text{ denean}$$

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \qquad x > 0 \text{ denean}$$

Funtzioa (a,b) tartean deribagarria denez, tarteko puntu guztietan deribatua edukiko du eta beraz x = c puntuan deribatua edukiko du.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leq 0 \qquad x > 0 \text{ denean}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geq 0 \qquad x > 0 \text{ denean}$$

$f'(c) \leq 0$ eta $f'(c) \geq 0$, $f'(c) = 0$ kasuan bakarrik gerta daitezke aldi berean. Beraz, (a,b) tarteko c puntu bat aurkituko dugu, non $f'(c) = 0$ den.

Interpretazio geometrikoa: puntu guztietan tangentea duen kurba bat baldin badugu, eta gainera, $x = a$ eta $x = b$ funtzioaren balioa zero bihurtzen bada, tangentea 0x ardatzarekiko paralelo duen puntu bat aurki dezakegu.

Azalpenak:

1.– Ez da beharrezkoa tarteko a eta b muturretan funtzioaren balioa zero izatea. Nahikoa da muturretan funtzioaren balioa berdina izatea ($f(a) = f(b)$).

2.– $f(x)$ funtzioak, (a,b) tarteko puntu guztietan deribaturik ez baldin badu, posible da teorema ez betetzea.

Adibidea: $y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$

[–1,1] tartean jarraia da eta $f(-1) = f(1) = 0$ dira. Deribatua $f'(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ez da zero (–1,1) tarteko puntu batean ere. Hori $x = 0$ puntuan deribaturik ez duelako gertatzen da.

6.2.– GEHIKUNTZA FINITUEI BURUZKO TEOREMA (LAGRANGE–REN TEOREMA)

a) Teorema

$f(x)$ funtzioa [a,b] tartean jarraia bada, eta tarte horren barneko puntu guztietan deribagarria bada, ondoko erlazioa betetzen duen c ($a<c<b$) puntu bat aurki dezakegu:

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$

Frogapena:

$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ kantitateari Q deituko diogu.

Azter dezagun $F(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\,Q$ funtzio laguntzailea.

Lehenengo F (x) funtzioaren esanahi geometrikoa aztertuko dugu. Horretarako AB zuzenaren ekuazioa idatziko dugu.

$$\text{Malda} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(a, f (a)) puntutik pasatzen denez:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x-a)$$

$$y = f(a) + Q\,(x-a)$$

Baina $F(x) = f(x) - (f(a) + (x-a)\,Q)$

Beraz, x–en balio batentzat, F (x), puntu horretan kurbaren balioaren eta zuzen horren balioaren arteko kendura da.

F (x) [a,b] tartean jarraia da, tarte horren barnean deribagarria, eta $F(a) = F(b) = 0$. Beraz F (x) funtzioari ROLLEren teorema aplikatzen badiogu, (a,b) tartean c puntu bat aurkitu dezakegu, non $F'(c) = 0$ den.

$$F'(x) = f'(x) - Q \;\rightarrow\; F'(c) = f'(c) - Q = 0$$

$$f'(c) = Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

6.3.– BI FUNTZIOREN GEHIKUNTZAREN ZATIDURARI BURUZKO TEOREMA (CAUCHY–REN TEOREMA)

a) Teorema

f (x) eta g (x) funtzioak, [a,b] tartean jarraiak eta tarte horren barnean deribagarriak badira, eta gainera tarte horren barneko puntu guztietan $g'(x) \neq 0$ bada, $x = c$ $(a<c<b)$ puntu bat aurki dezakegu, non

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{gertatzen bait da.}$$

Frogapena:

Q zenbakia definituko dugu:

$$Q = \frac{f\,(b) - f\,(a)}{g\,(b) - g\,(a)}$$

g (b) – g (a) = 0 da, bestela g (a) = g (b) izango litzatekeelako, eta Rolle–ren teoremak dioenez g' (x) = 0 egingo litzateke (a,b) tarteko puntu batean, eta horrek teoremaren hipotesia erabat kontraesaten du.

$F\,(x) = f\,(x) - f\,(a) - Q\,[g\,(x) - g\,(a)]$ egiten dugu.

Garbi dago F (a) = F (b) = 0 direla.

F (x) (a,b) tartean jarraia eta deribagarria da eta F (a) = F (b) = 0 dira. Rolle–ren teorema funtzio horri aplikatuz:

$x = c\ (a<c<b) \rightarrow F'\,(c) = 0$

$F'\,(x) = f'\,(x) - Q\,g'\,(x)$

$F'\,(c) = f'\,(c)\,Qg'\,(c) = 0 \rightarrow Q = \frac{f'\,(c)}{g'\,(c)}$

6.4.– BI MAGNITUDE INFINITESIMALEN ZATIDURAREN LIMITEA (0/0 MOTAKO LIMITE INDETERMINATUAREN KALKULUA)

Pentsa dezagun f (x) eta g (x) funtzioek, (a,b) tartean Cauchy–ren teoremaren baldintzak betetzen dituztela eta, horretaz gain, x = a puntuan zero direla (hau da, f (a) = 0 eta g (a) = 0).

$\frac{f\,(x)}{g\,(x)}$ zatidura ez da infinitu x = a puntuan, baina tarteko beste puntu guztietan ongi determinatutako esanahia du.

Beraz, x "a" punturantz doanean, bere limitea aurki dezakegu. Honelako arazoak, adibidez, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ kalkulatzean aurkitu ditugu. $\frac{\sin x}{x}$ adierazpenak ez du zentzurik x = 0 denean, baina ikusi dugu $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

6.5.– TEOREMA (L'HOPITAL–EN ERREGELA)

Pentsa dezagun f (x) eta g (x) funtzioek, [a,b] tartean Cauchy–ren teoremaren baldintzak betetzen dituztela eta, horretaz gain, x = a puntuan zero direla (f (a) = g (a) = 0).

Orduan, $x \to a$ doanean $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ zatiduraren limitea baldin badugu, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ere izango dugu eta gainera:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Frogapena:

(a,b) tartean, x = a den puntu bat hartuko dugu. Cauchy–ren formula aplikatuz:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

non $c \in (a,x)$.

Gure kasuan, f (a) = g (a) = 0. Beraz:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

x aldagaia a punturantz doanean, c ere a punturantz doa $c \in (a,b)$ delako. Aldi berean,

$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ bada, $\lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$ izango da.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Azalpena:

Ikusi dugun teorema, baliagarria da f (x) edo g (x) funtzioak x = a puntuan definitu gabe daudenean ere, baina $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ direnean.

Horretarako f (x) eta g (x) funtzioak x = a puntuan definitzea beharrezkoa da, funtzioak puntu horretan jarraiak izan daitezen:

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = 0\ ; \quad g(a) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

Azalpena:

f ' (a) = g' (a) = 0 badira eta f ' (x), g' (x) deribatuek lehen f (x), g (x) funtzioei jarritako baldintzak betetzen badituzte, L'Hopital–en erregela f ' (x)/ g' (x) zatidurari aplikatuz:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Azalpena:

g' (a) = 0 bada, baina f ' (x) ≠ 0 bada, teorema alderantzizko zatidurari aplikatzen zaio (g (x)/f (x)). Zatidura honek, zerorantz jotzen du x aldagaia a–rantz doanean. Beraz, f (x)/g (x) zatidurak infiniturantz joko du x aldagaia a–rantz doanean.

Adibideak:

* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin 5x)'}{(3x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{5 \cos 5x}{3} = \frac{5}{3}$

* $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1/(1+x)}{1} = \frac{1}{1} = 1$

* $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-ex} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} =$

$= \frac{2}{1} = 2$

Azalpena:

L'Hopital–en erregela aplika daiteke ondoko kasuan ere:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \quad \text{eta} \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

$x = \frac{1}{z}$ egiten badugu, $z \to 0$ doa $x \to \infty$–ra doanean eta beraz:

$$\lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0, \quad \lim_{z \to 0} g\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(1/z)}{g'(1/z)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Adibidea:

$$* \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{k \cos \frac{k}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} k \cos \frac{k}{x} = k$$

6.6.– INFINITUKI HANDI DIREN BI MAGNITUDEREN ZATIDURAREN LIMITEA (∞/∞ MOTAKO LIMITE INDETERMINATUAREN KALKULUA)

X aldagaia a punturantz (edo ∞–rantz) doanean, infiniturantz jotzen duten f (x) eta g (x) funtzioen arrazoiaren limitea kalkulatzen arituko gara.

a) Teorema

Pentsa dezagun, a puntuaren inguruan, x = a diren balio guztientzat f (x) eta g (x) jarraiak eta deribagarriak direla, eta horretaz gain, g' (x) deribatuak g' (x) = 0 betetzen duela puntu horietan. Pentsa dezagun hau ere:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty \quad \text{eta} \quad \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad \text{direla.}$$

Kasu horretan, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Frogapena:

a puntuaren aukeratutako inguruan bi puntu, α eta x, kontutan hartuko ditugu, ondoko baldintza betetzen dutelarik:

$$\alpha < x < a$$

Cauchy–ren teoremak dioenez:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{non} \quad \alpha < c < x$$

Berdintasun horren lehenengo atala aldatu egingo dugu:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \frac{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}$$

Beraz, $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \qquad \dfrac{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}$

Eta, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \dfrac{1 - \dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}$

Hipotesiak dioenez, $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Honek zera esan nahi du: $\varepsilon > 0$ hautazko balio txiki batentzat, a puntutik hurbil dagoen a balio bat aukeratu dezakegula, $x = c$ $(\alpha < c < a)$ balioentzat $\left| \dfrac{f'(c)}{g'(c)} - A \right| < \varepsilon$ betetzen delarik.

$$A - \varepsilon < \frac{f'(c)}{g'(c)} < A + \varepsilon \qquad (1)$$

α balioa aurreko erlazioa bete behar dela kontutan hartuz finkatuko dugu, eta x–en balioa a punturantz hurbilduko dugu. f (x) $\rightarrow \infty$ eta g (x) $\rightarrow \infty$ doazenez x a punturantz doanean:

$$\lim_{x \to a} \frac{1 - \dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} = 1$$

Beraz, $\varepsilon > 0$ aurrez finkatutako balioarentzat:

$$\left| \frac{1 - \dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} - 1 \right| < \varepsilon$$

Edo
$$1 - \varepsilon < \frac{1 - \dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} < 1 + \varepsilon \qquad (2)$$

(1) eta (2) erlazioak atalez atal biderkatzen baditugu:

$$(A-\varepsilon)\,(1-\varepsilon) < \frac{f'(c)}{g'(c)} \; \frac{1 - \dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} < (A+\varepsilon)\,(1+\varepsilon)$$

$$(A-\varepsilon)\,(1-\varepsilon) < \frac{f(x)}{g(x)} < (A+\varepsilon)\,(1+\varepsilon)$$

x aldagaia a puntutik nahikoa hurbil dagoenean, ε hautazko balio txikia duen zenbaki bat denez.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Edo
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Azalpena:

$A = \infty$ bada, hau da, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ bada, teorema baliagarria da.

Baldintza horretatik $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$ dela ikusten da.

Ikusi dugun teorema aplikatuz:

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$$

Eta hortik, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ ateratzen da.

Azalpena:

Teorema hori erraz jeneraliza daiteke, $x \to \infty$ kasurako.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$ badira eta $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ badugu:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Honen frogapena, $\dfrac{0}{0}$ kasuan egin genuen bezala, $x = \dfrac{1}{z}$ aldaketaren bidez egiten da.

Adibidea:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(e^x)'}{x'} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = \infty$$

Azalpena:

Kontutan eduki behar dugu,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{eta} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

bigarren atalaren limitea (finitu edo infinitua) dugunean bakarrik betetzen direla.

Gerta daiteke lehenengo atalak limitea edukitzea eta bigarrenak ez edukitzea. Adibidez, ondoko kasuan:

$$\lim_{x \to a} \frac{x + \sin x}{x}$$

Honek, limitea du eta bere balioa 1 da:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

Baina deribatuen zatidurak:

$$\frac{(x + \sin x)'}{x'} = \frac{1 + \cos x}{1} = 1 + \cos x$$

ez du limiterik x ∞–rantz doanean. 0 eta 2 balioen artean aldatuz doa.

Adibideak:

* $\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + b}{cx^2 - d} = \lim_{x \to \infty} \frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}$

* $\lim_{x \to \pi/2} \frac{\tan x}{\tan 3x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{1}{3} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} =$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{2.3 \cos 3x \sin 3x}{2 \cos x \sin x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos 3x}{\cos x} \cdot \lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin 3x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{3 \sin 3x}{\sin x} \frac{(-1)}{1} = 3 \frac{(-1)}{1} \frac{(-1)}{1} = 3$$

* $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Oro har, edozein n > 0 baliorentzat:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x \to \infty} \frac{n(n-1) \ldots 1}{e^x} = 0$$

6.7.– BESTE LIMITE INDETERMINATUEN KALKULUA

Hurrengo kasu hauek azal daitezke:

a) $0.\infty$; b) 0^0 ; c) ∞^0 ; d) 1^∞ ; e) $\infty - \infty$

Lehen ikusitako limiteetan oinarrituz kalkulatzen dira. Limite indeterminatu hauen esanahia ondoko hau da:

a) Pentsa dezagun $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ eta $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ direla.

$\lim\limits_{x \to a} [f(x)\, g(x)]$, $0.\infty$ motako indeterminazioa da.

Limite hori beste era batera jartzen badugu:

$$\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{1/g(x)}$$

$\frac{0}{0}$ motako indeterminazio bihurtzen da.

Adibidea:

$$\lim_{x \to 0} x^m \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^m}} = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{\frac{-m}{x^{m+1}}} = -\lim_{x \to 0} \frac{x^m}{m} = 0$$

b) Izan bitez $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ eta $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$, 0^0 motako indeterminazioa da

$y = [f(x)]^{g(x)}$ egingo dugu, eta logaritmoak aplikatuko ditugu bi ataletan:

$$\ln y = g(x)\,[\ln f(x)]$$

$\lim \ln y = \lim g(x)\,[\ln f(x)]$ Bigarren atalean duguna, $0.\infty$ motako indeterminazioa da.

Funtzio logaritmikoaren jarraitasuna dela eta:

$$\lim_{x \to a} \ln y = \ln \lim_{x \to a} y$$

$\lim_{x \to a} \ln y = b$ dela aurkitu badugu, $\ln \lim_{x \to a} y = b$ izango da, eta

$$\lim_{x \to a} y = \lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = e^b$$

Kasu partikularra:

* $b = +\infty$ bada, $\lim_{x \to a} y = +\infty$ izango da

* $b = -\infty$ bada, $\lim_{x \to a} y = 0$ izango da.

Adibidea:

$$\lim_{x \to 0} x^x$$

$y = x^x$ egiten badugu eta ln lim y = lim ln y = lim ln (x^x) = lim ln (x^x) = lim (x ln x) aurkitzen badugu:

$$\lim_{x \to 0} (x \ln x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x \to 0} x = 0$$

Beraz, $\ln(\lim y) = 0 \rightarrow \lim y = e^0 = 1$

Hau da, $\lim_{x \to 0} x^x = 1$

Beste kasuetan, antzera jokatzen da.

6.8.– TAYLOR–EN FORMULA

Pentsa dezagun y = f (x) funtzioak, x = a puntua barnean duen tarte batean, (n+1) mailako deribaturaino deribatu guztiak dituela. Aurki dezagun n baino maila handiagoa ez duen $y = P_n(x)$ polinomio bat, bere balioa x = a puntuan f (x) funtzioarena delarik, eta bere n mailarainoko deribatuen balioak x = a puntuan f (x) funtzioaren deribatuenak direlarik. $P_n(a) = f(a)$; $P_n'(a) = f'(a)$; $P_n''(a) = f''(a) \ldots P_n^n(a) = f^n(a)$. Polinomio hau lortzeko, koefiziente indeterminatuak dituzten (x–a)–ren potenziak erabiliko ditugu:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \ldots + C_n(x-a)^n$$

$C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ koefiziente indeterminatuen balioak lortzeko goian ikusi ditugun baldintzak aplikatuko ditugu: Hori egin baino lehen $P_n(x)$ polinomioaren deribatuak kalkulatuko ditugu:

$$P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \ldots + nC_n(x-a)^{n-1}$$

$$P_n''(x) = 2C_2 + 3.2C_3(x-a) + \ldots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}$$

....

$$P_n^n(x) = n(n-1)\ldots 2.1\,C_n$$

x–en ordez a balioa jartzen badugu eta baldintzak aplikatzen baditugu:

$$P_n(a) = f(a)\ ;\ P_n'(a) = f'(a)\ ;\ \ldots\ ;\ P_n^n(a) = f^n(a)$$

$$f(a) = C_0 \longrightarrow C_0 = f(a)$$

$$f'(a) = C_1 \longrightarrow C_1 = f'(a)$$

$$f''(a) = 2.1.C_2 \longrightarrow C_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

$$f'''(a) = 3.2.1.C_3 \longrightarrow C_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

....

$$f^n(a) = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1.C_n \longrightarrow C_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Beraz, bila gabiltzan polinomioa:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 +$$

$$+ \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

f (x) eta P_n (x)–en artean dagoen desberdintasuna R_n (x) bezala izendatuko dugu: $R_n(x) = f(x) - P_n(x) \rightarrow f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

(1) $$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

Rn (x)–i GAI OSAGARRI deitzen zaio. Rn (x) txiki egiten duten x–en balioentzat, Pn (x) polinomioak f (x) funtzioaren balio hurbildu bat ematen du.

Ikus dezagun gutxi gorabehera Rn (x)–en balioa x–en balio desberdinentzat zein izan daitekeen. Horretarako, gai osagarria ondoko eran idatziko dugu:

(2) $$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x)$$

Hemen aurkitu behar duguna Q (x) da.

a eta x–en artean dagoen t–ren funtzio laguntzaile bat aztertuko dugu:

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1} f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) - \ldots -$$

$$- \frac{(x-t)^n}{n!} f^n(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} Q$$

Q–ren balioa, (1) formulak ematen du a eta x balio determinatuak direnean.

F ' (t) deribatua kalkulatuko dugu:

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{x-t}{1} f''(t) + \frac{2(x-t)}{2!} f''(t) -$$

$$-\frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) + \dots - \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(t) + \frac{n(x-n)^{n-1}}{n!} f^n(t) -$$

$$-\frac{(x-t)^n}{n!} f(n+1)(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} Q$$

Guzti hau laburtuz:

$$(3) \qquad F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} Q$$

Beraz, F (t) funtzioak, a puntutik hurbil dauden t puntuetan deribatua du. (1) formula aplikatuz, honakoa ikus daiteke:

F (x) = 0 ;   F (a) = 0   direla

Horregatik, F (t) funtzioari Rolle–ren teorema aplika diezaiokegu, eta beraz, a eta x–en artean t = µ balio bat aurki dezakegu, non F ' (µ) = 0 den. (3) formula aplikatuz:

$$-\frac{(x-\mu)^n}{n!} f^{n+1}(\mu) + \frac{(x-\mu)}{n!} Q = 0$$

$$Q = f^{n+1}(\mu)$$

Emaitza hau (2) formulan sartzen badugu:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\mu)$$

Honi, GAI OSAGARRIAREN TAYLORen FORMULA deitzen zaio. µ balioa a eta x–en artean dagoenez, beste era batera adieraz daiteke:

$$\mu = a + \theta(x-a) \qquad\qquad 0 < \theta < 1$$

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}[a + \theta(x-a)]$$

Azkenik:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n +$$

$$+ \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}[a + \theta(x-a)]$$

f (x) FUNTZIOAREN TAYLORen FORMULA

Kasu partikular bezala a = 0 kasua aztertuko dugu:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!} x^n + \frac{f^{n+1}(0)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

f (x) FUNTZIOAREN MACLAURINen FORMULA

6.9.– e^x, sin x ETA cos x FUNTZIOEN GARAPENA TAYLOR–EN FORMULAREN BIDEZ

a) $f(x) = e^x$ funtzioen garapena

f (x) funtzioaren deribatuak kalkulatzen baditugu:

$f(x) = e^x \longrightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \longrightarrow f'(0) = 1$

....

$f^n(x) = e^x \longrightarrow f^n(0) = 1$

Balio hauek MACLAURINen formulan jartzen baditugu:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x \qquad (0 < \theta < 1)$$

$|x| < 1$ bada, n = 8 eginez gain osagarria balioztatzen dugu.

$$r_8 < 1/9!.3$$

x = 1 denean, e zenbakiaren balio hurbildua kalkulatzeko formula lortzen dugu:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!}$$

Bostgarren zenbaki hamartarra arte, frakzio horien operazioak egiten baditugu e = 2,71827 balioa lortuko dugu.

Hemen, lehenengo lau zenbaki hamartarrak hartzen dira, errorea 3/9! edo 0,00001 baino txikiagoa delako. Kontutan har dezagun edozein x–entzat gai osagarria ondoko hau izango dela:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \rightarrow 0 \qquad n \rightarrow \infty \quad \text{denean}$$

$\theta < 1$ bada eta x–ek balio finko bat badu, $e^{\theta x}$ magnitudea bornatua dago ($x > 0$ denean e^x baino txikiagoa da eta $x < 0$ denean 1 baino txikiagoa da).

Froga dezagun, x finko batentzat, ondoko hau betetzen dela:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \qquad n \rightarrow \infty \quad \text{denean}$$

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{n} \frac{x}{n+1} \right|$$

x zenbaki finko bat bada, $|x| < N$ betetzen duen N zenbaki bat aurki dezakegu.

$\frac{|x|}{N} = q$ egiten dugu. Orduan, $0 < q < 1$ dela kontutan hartuz $n = N+1, N+2, N+3$, etab… delarik, hau idatz dezakegu:

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{n} \frac{x}{n+1} \right| =$$

$$= \left| \frac{x}{1} \right| \left| \frac{x}{2} \right| \left| \frac{x}{3} \right| \cdots \left| \frac{x}{N-1} \right| \left| \frac{x}{N} \right| \cdots \left| \frac{x}{n} \right| \left| \frac{x}{n+1} \right| <$$

$$< \frac{x}{1}\ \frac{x}{2}\ \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{N-1}\ .\ q\ .\ q \cdots q = \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}\ q^{n-N+2}$$

$$\left| \frac{x}{N} \right| = q\ ; \quad \left| \frac{x}{N+1} \right| < q; \quad \ldots\ ; \left| \frac{x}{n+1} \right| < q \quad \text{direlako.}$$

Baina $\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ magnitudea konstantea da, hau da, m ez dago n–ren menpean eta q^{n-N+2} magnitudeak zerorantz jotzen du n infiniturantz doanean. Beraz:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

eta orduan,

$$R_n\,(x) = e^{\theta x}\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \ \to\ 0 \qquad n \to \infty \quad \text{denean}$$

Hemendik ondokoa atera daiteke: x–en balio guztientzat e^x kalkula dezakegu edozein hurbiltasun–mailarekin, nahikoa gaia hartzen badugu.

b) f (x) = sin x funtzioaren garapena

f (x) = sin x funtzioaren deribatuak kalkulatuko ditugu:

$f\,(x) = \sin x \longrightarrow f\,(0) = 0$

$f'\,(x) = \cos x = \sin\,(x+\pi/2) \longrightarrow f'\,(0) = 1$

$f''\,(x) = -\sin x = \sin\,(x+2.\pi/2) \longrightarrow f''\,(0) = 0$

$f'''\,(x) = -\cos x = \sin\,(x+3.\pi/2) \longrightarrow f'''\,(0) = -1$

$f^{IV}\,(x) = \sin x = \sin\,(x+4.\pi/2) \longrightarrow f^{IV}\,(0) = 0$

....

$f^n\,(x) = \sin\,(x+n.\pi/2) \longrightarrow f^n\,(0) = \sin n.\pi/2$

$f^{n+1}\,(x) = \sin\,[x+(n+1)].\pi/2 \longrightarrow f^{n+1}\,(\mu) = \sin\,[\mu+(n+1).\pi/2]$

Balio hauek Mac Laurin–en formulan jartzen baditugu, f (x) = sin x funtzioaren Taylor–en garapena lortuko dugu:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^n}{n!} \sin n.\pi/2 + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin [\mu+(n+1).\pi/2]$$

eta $|\sin [\mu+(n+1).\pi/2]| \leq 1$ denez, lim Rn (x) = 0 izango da x–en balio guztientzat.

Formula hori aplikatuko dugu sin 20°ren balio hurbildua lortzeko:

n = 3 egingo dugu, hau da, garapenaren lehenengo bi gaiak bakarrik hartuko ditugu:

$$\sin 20° = \sin \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 = 0{,}343$$

Gai osagarriak ematen duen errorea ebaluatuko dugu:

$$|R_3| = \left|\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!} \sin (\mu+2\pi) < \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \frac{1}{4!} = 0{,}0006 < 0{,}001$$

Beraz, errorea 0,001 baino txikiagoa da.

c) f (x) = cos x funtzioaren garapena

x = 0 balioarentzat f (x) = cos x funtzioaren deribatuak kalkulatuz, eta MacLaurin–en formulan jarriz, ondoko garapena lortzen dugu:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^n}{n!} \cos (n\pi/2) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos [\mu+(n+1)\ \pi/2]$$

Hemen re, $\lim_{n \to \infty} R_n (x) = 0$ eta x–en balio guztientzat.

6.10.– ARIKETAK

1.– Frogatu Rolle–ren teorema baliagarria dela hurrengo funtzioan: $y = x^3 - 3x + 2$ [1,2] tartean.

2.– $y = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ funtzioak 1, –1 erroak ditu. Bilatu bere deribatuaren erro bat.

3.– Frogatu Rolle–ren teorema baliagarria dela, $y = \cos^2 x$ [π/4,–π/4] tartean.

4.– $y = \ln x$ kurbaren zein puntutan da paralelo bere ukitzailea M_1 (1,0) eta M_2 (e,1) lotzen dituen kordarekiko?

5.– Frogatu hurrengo desberdintasunak:

a) $e^x \geq 1+x$

b) $b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$; $b > a$

6.– Aplikatu Cauchy–ren formula $y = x^2$ eta $y = x^3$ [1,2] funtzioei eta bilatu c.

7.– Kalkulatu hurrengo limiteak:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x^n-1}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{\sin x - x}$

c) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\ln \sin x}{(\pi-2x)^2}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln (x-1)-x}{\tan (\pi/2x)}$ f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}$

g) $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\sec x - \tan x)$ h) $\lim\limits_{x \to 1} (1-x) \tan \pi x/2$

i) $\lim\limits_{x \to 1} x^{1/(1-x)}$ j) $\lim\limits_{x \to 0} (1/x)^{\tan x}$

k) $\lim\limits_{x \to 0} (\cot x)^{1/\ln x}$ l) $\lim\limits_{x \to 1} (\tan \pi x/4)^{\tan \pi x/2}$

8.– x + 1–en berretzaileetan garatu $x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$.

9.– Garatu $y = \sqrt{1+x}$ funtzioa n = 3 denean, MacLaurinen bidez.

10.– Kalkulatu hurbilketa hauen errorea: $x = 0{,}2$

a) $\sqrt{1+x} \approx 1 + 1/2.x - 1/8.x^2$

b) $\ln \cos x \approx -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12}$

c) $\tan x \approx x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15}$

d) $\operatorname{arc\,tan} x \approx x - \dfrac{x^3}{3}$

e) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \approx 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$

11.– Kalkulatu limite hauek Taylor aplikatuz:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - x^2/2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln^2 (1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}$

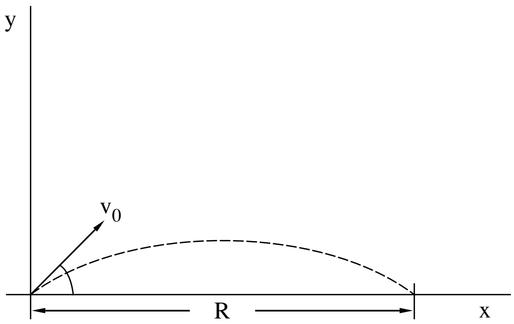
7. FUNTZIOEN ALDAKUNTZAREN ANALISIA

7.1.– IDEIA OROKORRAK

Naturako fenomenoen ikerketa kuantitatiboa egitean, bertan parte hartzen duten aldagaien arteko menpetasun funtzionalaren ezarrera eta analisia egiten dira. Menpetasun hau analitikoki (formulen bidez) jartzea lortzen badugu, analisi matematikoa menpetasun hori aztertzeko erabil dezakegu.

Adibidez, hutsean jaurtigai baten higiduraren fenomenoa aztertzean, R tiramena, α angeluaren eta v_0 hasierako abiaduraren funtzio bezala ematen duen formula lortuko dugu:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \text{(g grabitatearen azelerazioa da)}$$



$R = v_0 \cos \alpha.t$ — Lurrera heltzean

$y = v_0 \sin \alpha.t - 1/2\, gt^2$ — $y = 0$

$$v_0 \sin \alpha.t = 1/2\, gt^2$$

$$t = \frac{2\, v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$R = v_0 \cos a \,.\, \frac{2\, v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Formula hau aplikatuz, R maximoa edo minimoa ematen duen angelua kalkula dezakegu, etab…

Beste adibide bat ikusiko dugu. Balezta batean karga baten oszilazioak aztertuz, oreka–posizioarekiko y desbideraketaren formula denboraren funtzio bezala lortzen dugu:

$$y = e^{-kt} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

K, A, B, ω magnitudeek, sistema oszilakor jakin batean balio determinatu bat dute (ez daude denboraren menpe), eta horregatik, konstante bezala erabiltzen dira.

Honekin desbideraketa gehitzen duten t–ren balioak zeintzuk diren etab. ikus dezakegu.

7.2.– FUNTZIO BATEN GORAPENA ETA BEHERAPENA

Lehenago ikusi dugu funtzio gorakor eta beherakorraren definizioa. Orain, deribatuaren kontzeptua aplikatuko dugu funtzio baten gorapenaren eta beherapenaren analisia egiteko.

a) Teorema

1.– [a,b] tartean deribagarria den f (x) funtzio batek tarte horretan gorantz jotzen badu, bere deribatua tarte horretan ez da negatiboa, hau da, $f'(x) > 0$.

2.– f (x) funtzioa [a,b] tartean jarraia bada eta (a,b) tartean deribagarria bada, $a < x < b$ tartean $f'(x) > 0$ denean, funtzioa gorakorra da [a,b] tartean.

Frogapena:

1.– Pentsa dezagun f (x) funtzioak gorantz jotzen duela [a,b] tartean. x aldagaiari Δx gehikuntza emango diogu eta ondoko arrazoia kontutan hartuko dugu:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

f (x) funtzioa gorakorra denez:

$f(x+\Delta x) > f(x)$ $\quad\quad$ $\Delta x > 0$ denean

$f(x+\Delta x) < f(x)$ $\quad\quad$ $\Delta x < 0$ denean

Kasu bietan:

$$\frac{f\,(x+\Delta x) - f\,(x)}{\Delta x} > 0$$

Eta beraz:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f\,(x+\Delta x) - f\,(x)}{\Delta x} > 0, \text{ hau da, } f\,'\,(x) > 0$$

2.– Pentsa dezagun (a,b) tartean dauden x–en balioentzat f ' (x) > 0 dela. [a,b] tartean dauden x_1 eta x_2 balioak hartuko ditugu, $x_1 < x_2$ betetzen delarik.

Lagrange–ren teoremak dioenez:

$$f\,(x_2) - f\,(x_1) = f\,'\,(c)\,(x_2 - x_1) \quad \text{non} \quad x_1 < c < x_2$$

f ' (x) > 0 denez, $f\,(x_2) - f\,(x_1) > 0$ izango da. Honek, f (x) funtzio gorakorra dela esan nahi du.

Antzeko beste teorema bat ere badago funtzio beherakorrentzat (deribagarriak baldin badira).

b) Teorema:

1.– f (x) funtzioa [a,b] tartean beherakorra bada, f ' (x) < 0.

2.– (a,b) tartean f ' (x) < 0 bada, [a,b] tartean funtzioa beherakorra da.

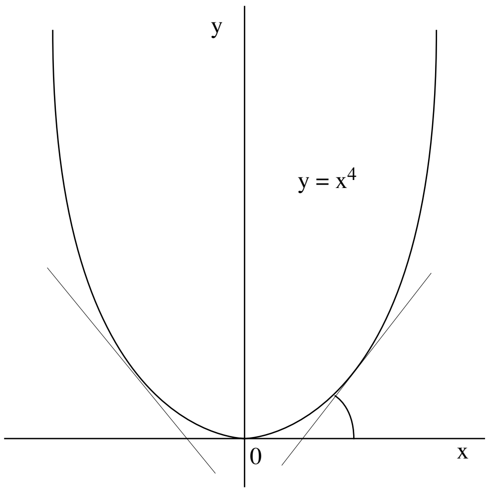
Frogapena:

Aurrekoan bezalaxe.

Azalpena:

Lehen frogatutako teoremak, ondoko interpretazio geometrikoa du. f (x) funtzioa [a,b] tartean gorakorra bada, y = f (x) kurbarekiko tangente den zuzenak (kurbaren puntu bakoitzean) angelu zorrotza osatzen du OX ardatzarekin, edo puntu batzuetan ardatzarekiko paralelo izan daiteke.

Angelu honen tangentea ez da negatiboa: $f\,'\,(x) = \tan \alpha > 0$



f (x) funtzioa [a,b] tartean beherakorra bada, zuzen tangentearen inklinazioak angelu kamutsa osatuko du (puntu batzuetan OX ardatzarekiko paraleloa izan daiteke).

Angeluaren tangentea ez da positiboa.

Era berean interpretatzen da teoremaren bigarren atala.

Adibidea:

$y = x^4$ funtzioaren gorapen– eta beherapen–tarteak determinatu.

Ebazpidea:

Deribatua $y' = 4x^3$ da.

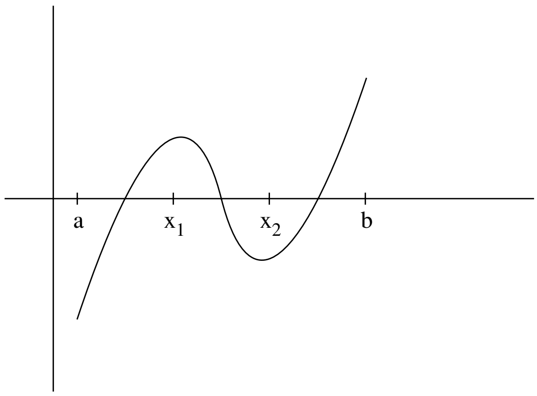
* $y' > 0$ $x > 0$ diren x–en balioentzat betetzen da. Balio honentzat gorakorra da.

* $y' < 0$ $x < 0$ diren x–en balioentzat betetzen da. Balio honentzat funtzio hori beherakorra da.

7.3.– FUNTZIOEN MAXIMOA ETA MINIMOA

a) Maximo kontzeptuaren definizioa

f (x) funtzioak x_1 puntuan MAXIMO bat duela esaten da, bere balioa puntu honetan, x_1 barnean duen tarte bateko beste x puntuetan hartzen duen balioa baino handiagoa bada. Hau da, nahikoa txikia den Δx (positibo edo negatibo) balioarentzat $f(x_1+\Delta x) < f(x_1)$ gertatzen bada.



b) Minimo kontzeptuaren definizioa

f (x) funtzioak $x = x_2$ balioarentzat MINIMO bat duela esaten da, $f(x_2+\Delta x) > f(x_2)$ nahikoa txikia den Δx (positibo edo negatibo) edozein baliorentzat betetzen bada.

KONTUZ!

1.– Tarte batean definitutako funtzio batek, tartearen barneko puntuetan bakarrik eduki dezake maximoa edo minimoa; behin ere ez tarte–muturretan.

2.– Funtzio batek tarte batean dituen maximoa eta minimoa funtzioaren balio handiena eta txikiena direla suposatzea, oker legoke. Funtzioak maximoan hartzen duen balioa, hurbil dauden puntuetan hartzen duena baino handiagoa da, baina hurbil dauden puntuentzat bakarrik da hori baliagarria. Funtzioak minimoan hartzen duen balioa, hurbil dauden puntuetan hartzen duena baino txikiagoa da.

Maximo eta minimo erlatiboei, funtzioaren MUTUR–BALIO deitzen zaie.

c) Teorema

(Funtzio batek bete behar duen BALDINTZA BEHARREZKOA baina EZ NAHIKOA, mutur–balioa eduki dezan): $y = f(x)$ funtzio deribagarriak $x = x_1$ puntuan maximo bat edo minimo bat baldin badu, puntu horretan bere deribatuaren balioa zero da, hau da, $f'(x_1) = 0$

Frogapena:

Pentsa dezagun, $x = x_1$ puntuan, funtzioak maximo bat duela. Nahikoa txiki diren Δx gehikuntzentzat (balio absolutuan), ondoko hau beteko da:

$$f(x_1+\Delta x) < f(x_1)$$

$$f(x_1+\Delta x) - f(x_1) < 0$$

$\dfrac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ zatiduraren zeinua, Δx–en zeinuak ematen du:

$\Delta x < 0$ denean $\qquad \dfrac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0$

$\Delta x > 0$ denean $\qquad \dfrac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0$

Deribatuaren definizioak dioenez:

$$f'(x_1) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Beraz, $f(x)$ funtzioak $x = x_1$ puntuan baliorik baldin badu, berdintasun horren bigarren atala ez da Δx–en aldakuntz eraren araberakoa.

Baina $\Delta x \to 0$, balio negatiboak hartuz badoa $f'(x_1) \geq 0$
$\Delta x \to 0$, balio positiboak hartuz badoa $f'(x_1) \leq 0$

$f'(x_1)$ ez da x–en aldakuntz eraren araberakoa, eta beraz,

$$f'(x_1) = 0$$

(Berdin frogatzen da minimo diren puntuentzat).

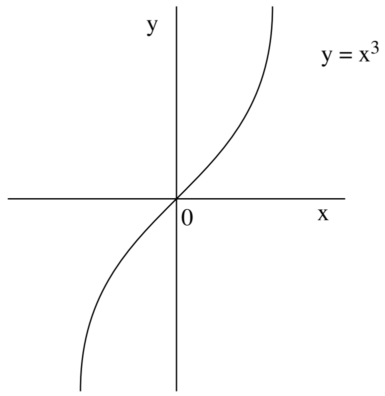
Esangura geometrikoa:

Maximo edo minimo diren puntuetan f (x) funtzioak deribatua badu, puntu horietan y = f (x) kurbaren tangentea OX ardatzarekiko paraleloa da: $f'(x_1) = \tan \alpha = 0$ bada (non α, tangenteak eta OX ardatzak osatzen duten angelua den) $\alpha = 0$ dugu.

x–en balio guztientzat, f (x) funtzioak deribatua baldin badu, funtzio honek, deribatua zero egiten den puntuetan bakarrik eduki dezake mutur–balioa. Alderantzizkoa ez da egia, hau da, gerta daiteke deribatua zero den puntuetan funtzio batek ez maximorik eta ez minimorik ez edukitzea.

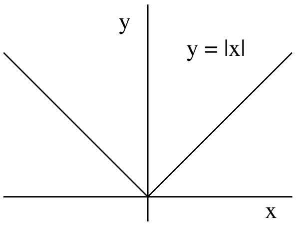
Adibide bat:

x = 0 puntuan deribatua zero da, baina puntu horretan funtzioak ez du ez maximorik ez minimorik.

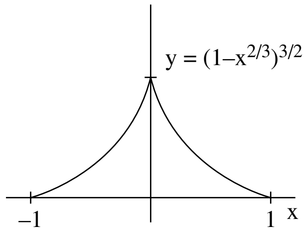


Zer gertatzen da deribaturik ez dagoen puntuetan?

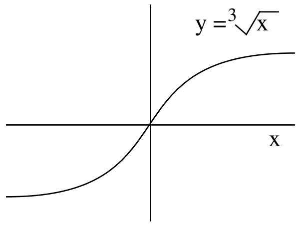
Gerta daiteke maximoa edo minimoa egotea, baina gerta daiteke ez bata ez bestea ez egotea ere.



x = 0 puntuan ez dugu deribaturik, baina minimo bat dugu.



x = 0 puntuan ez dugu deribaturik, baina maximo bat dugu.



x = 0 puntuan ez dugu deribaturik, eta ez dugu ez maximorik ez minimorik.

Beraz, funtzio batek mutur–balioak puntu hauetan edukiko ditu:

* Deribatua dagoen eta honek zero balio duen puntuetan.

* Deribaturik ez dagoen puntuetan.

d) Teorema:

(Mutur–balio bat existitzeko BALDINTZA NAHIKOA): Pentsa dezagun f (x) funtzioa, x_1 puntu kritikoa barnean duen tarte batean jarraia dela eta tarte horretako puntu guztietan deribagarria dela (posible da x_1 puntuan deribagarria ez izatea).

Puntu honetan ezkerretik eskuinerantz pasatzean deribatuaren zeinua POSITIBOTIK NEGATIBORA aldatzen bada, funtzioak MAXIMO bat onartzen du $x = x_1$ puntuan. x_1 puntuan ezkerretik eskuinerantz pasatzean deribatuaren zeinua NEGATIBOTIK POSITIBORA aldatzen bada, funtzioak MINIMO bat onartzen du $x = x_1$ puntuan.

Frogapena:

Azter dezagun POSITIBOTIK NEGATIBORA aldatzen den kasua. Hau da, x_1 puntutik nahikoa hurbil dauden x puntu guztientzat

$f'(x) > 0 \qquad x < x_1$ balioentzat

$f'(x) < 0 \qquad x < x_1$ balioentzat

$f(x) - f(x_1) = f'(c)(x - x_1)$; non c x eta x_1 puntuen artean dagoen puntua bait da.

a) Izan bedi $x < x_1 : c < x_1$

Beraz $f'(c) > 0 \rightarrow f'(c)(x - x_1) < 0 \rightarrow f(x) - f(x_1) < 0 \rightarrow$

$f(x) < f(x_1)$

b) Izan bedi $x > x_1 : c > x_1$

Beraz $f'(c) < 0 \rightarrow f'(c)(x - x_1) < 0 \rightarrow f(x) - f(x_1) < 0 \rightarrow$

$f(x) < f(x_1)$

x_1 puntutik nahikoa hurbil dauden x–en balio guztientzat, funtzioaren balioak, x_1 puntuan hartzen duen balioarena baino txikiagoak dira, eta horregatik, f (x) funtzioak MAXIMO bat du x_1 puntuan.

7.4.– FUNTZIO DERIBAGARRI BATEN MAXIMO ETA MINIMOAREN ANALISIA LEHENENGO DERIBATUAREN BIDEZ

$y = f(x)$ funtzio deribagarri baten maximo eta minimoen analisia egiteko eskema:

1.– Funtzioaren $f'(x)$ lehenengo deribatua kalkulatu.

2.– x aldagaiaren balio kritikoak aurkitu:

a) Lehenengo deribatua berdin zero egin eta lortzen den $f'(x) = 0$ ekuazioaren erro errealak aurkitu.

b) $f'(x)$ deribatua eteten duten x–en balioak determinatu.

3.– Puntu kritikoaren ezker aldean eta eskuin aldean deribatuaren zeinua aztertu.

4.– Aldagaiaren balio kritiko bakoitzarentzat f (x) funtzioaren balioa kalkulatu.

Adibidea:

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$$

1.– $y' = x^2 - 4x + 3$

2.– a) $x^2 - 4x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \left\langle \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 1 \end{matrix} \right.$

b) Deribatua jarraia da puntu guztietan.

3.– $x = 0$ puntuan $y'(0) = 3$

$x = 2$ puntuan $y'(2) = -1$

y' positibotik negatibora aldatzen da $\rightarrow x = 1$ puntuan

MAXIMO bat dago.

$x = 2$ puntuan $y'(0) = -1$

$x = 4$ puntuan $y'(0) = 3$

y' negatibotik positibora aldatzen da $\rightarrow x = 3$ puntuan.

MINIMO bat dago.

4.– $x = 1$ balioarentzat $y = \dfrac{1}{3} - 2 + 3 + 1 = \dfrac{1}{3} + 2 = \dfrac{7}{3}$

$x = 3$ balioarentzat $y = 9 - 18 + 9 + 1 = 1$

(1,7/3) puntuan MAXIMO bat dago.

(3,1) puntuan MINIMO bat dago.

Adibidea:

$$y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$$

1.– $y' = \sqrt[3]{x^2} + (x-1)\,\dfrac{2}{3}\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{3x+2x-2}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{5x-2}{\sqrt[3]{x}}$

2.– Aldagaiaren balio kritikoak:

a) y' = 0 egiten dutenak $\rightarrow$ $5x - 2 = 0$ $\rightarrow$ $x = \dfrac{2}{5}$

b) y' = ∞ egiten dutenak $\rightarrow$ x = 0 puntuan deribatua etena da (nahiz eta x = 0 puntuan funtzioa definitua egon eta jarraia izan).

3.– $x_1 = \dfrac{1}{5} \rightarrow y'\left(\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{-1}{\sqrt[3]{1/5}} < 0$

$x_2 = 1 \rightarrow y'(1) = 3 > 0$

x = 2/5 puntuan deribatua positibo izatetik negatibo izatera pasatzen da. Beraz, puntu horretan MINIMOA dago.

$x = -1 \rightarrow y'(-1) = \dfrac{-7}{\sqrt[3]{-1}} > 0$

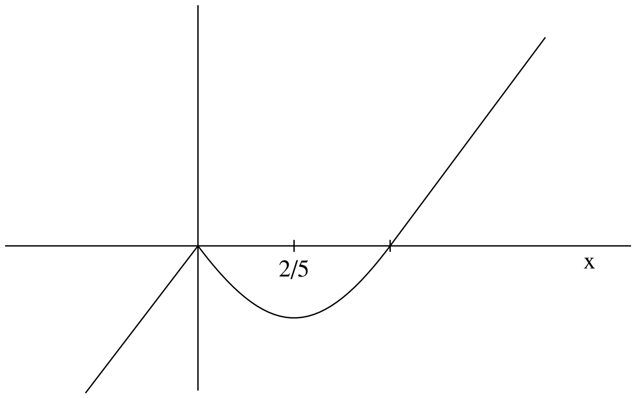
$x = \dfrac{1}{5} \rightarrow y'\left(\dfrac{1}{5}\right) < 0$

x = 0 puntuan, deribatua negatibo izatetik positibo izatera pasatzen da. Beraz, puntu horretan MAXIMOA dago.

4.– Ikus dezagun x = 0 eta $x = \dfrac{2}{5}$ puntuetan funtzioak zenbat balio duen:

* $x = 0 \rightarrow y = 0$

* $x = \dfrac{2}{5} \rightarrow y = -\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{4}{25}}$



7.5.– FUNTZIO DERIBAGARRI BATEN MAXIMO ETA MINIMOEN ANALISIA BIGARREN DERIBATUAREN BIDEZ

Pentsa dezagun $x = x_1$ puntuan funtzioaren deribatuaren balioa zero dela, hau da, $f'(x_1) = 0$. Onar dezagun gainera, $f''(x)$ bigarren deribatua existitzen dela eta x_1 puntuaren inguru batean jarraia dela. Kasu honetan, ondoko teorema baliozkoa da:

a) Teorema:

$f'(x_1) = 0$ baldin bada, $x = x_1$ puntuan funtzioak MAXIMO bat edukiko du $f''(x_1) < 0$ denean, eta MINIMO bat edukiko du $f''(x_1) > 0$ denean.

Frogapena:

Teoremaren lehenengo atala edukiko dugu kontutan:

Pentsa dezagun $f'(x_1) = 0$ eta $f''(x_1) < 0$ direla. Hipotesiak $x = x_1$ puntuaren inguruan $f''(x)$ jarraia dela dioenez, x_1 barnean duen tarte txiki bat aurki dezakegu bertako puntu guztietan $f''(x) < 0$ betetzen delarik.

$f''(x)$ bigarren deribatua, $f'(x)$ lehenengo deribatuaren deribatu den $f''(x) = (f'(x))'$, $(f'(x))' < 0$ baldintzak $f'(x)$ $x = x_1$ barnean duen tartean beherakorra dela esaten digu. Baina $f'(x_1) = 0$, eta horregatik, $x < x_1$ balioentzat $f'(x) > 0$ izango da eta $x > x_1$ balioentzat $f'(x) < 0$ izango da. Hau da, deribatuaren zeinua positibo izatetik negatibo izatera pasatzen da, eta honek x_1 puntuan f (x) funtzioak maximo bat duela esan nahi du. Horrela, teoremaren lehen atala frogatuta gelditzen da.

* Bigarren atala berdin frogatzen da: $f''(x_1) > 0$ bada, x_1 barnean duen tarteko puntu guztietan $f''(x) > 0$ betetzen da. Baina kasu honetan, tarte horretan $f''(x) = (f'(x))' > 0$ betetzen da eta beraz $f'(x)$ gorakorra da. x_1 puntutik pasatzean $f'(x_1) = 0$ betetzen denez, deribatuaren zeinua negatibo izatetik positibo izatera pasatzen da, hau da, funtzioak minimo bat du $x = x_1$ puntuan.

* Puntu kritikoan $f''(x_1) = 0$ betetzen bada, posible da puntu horretan maximo bat edo minimo bat edukitzea, baina posible da ez maximorik eta ez minimorik ez edukitzea. Kasu horretan, analisia egiteko, lehenengo ikusi dugun metodoa erabili behar da (lehenengo deribatua bakarrik erabiliz).

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Puntu kritikoaren izaera
0	–	Maximo–puntua
0	+	Minimo–puntua
0	0	Ezezaguna

Adibideak:

1.– $y = 2 \sin x + \cos 2x$ funtzioaren maximoa eta minimoa aurkitu.

Ebazpidea:

Funtzioa periodikoa denez, eta bere periodoa 2π denez, nahikoa da funtzioa $[0,2\pi]$ tartean aztertzea.

* Lehenengo dedribatua:

$$y' = 2 \cos x - 2 \sin 2x = 3 (\cos x - 2 \sin x \cos x) =$$

$$= 2 \cos x (1-2 \sin x)$$

* Aldagaiaren balio kritikoak:

$$2 \cos x\,(1-2 \sin x) = 0$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}\,; \quad x_2 = \frac{\pi}{2}\,; \quad x_3 = \frac{5\pi}{6}\,; \quad x_4 = \frac{3\pi}{2}$$

Ez dago $y' = \infty$ egiten duten x–en baliorik.

* Bigarren deribatua:

$$y'' = -2 \sin x - 4 \cos 2x$$

* Puntu kritiko bakoitzaren izaera:

– $(y'')_{x_1=\pi/6} = -2\ \frac{1}{2} - 4\ \frac{1}{2} = -3 < 0$

$(y)_x = \frac{\pi}{6} = 2\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$ puntuan MAXIMO bat dugu

– $(y'')_{x_2=\pi/2} = -2.1 + 4.1 = 2 > 0$

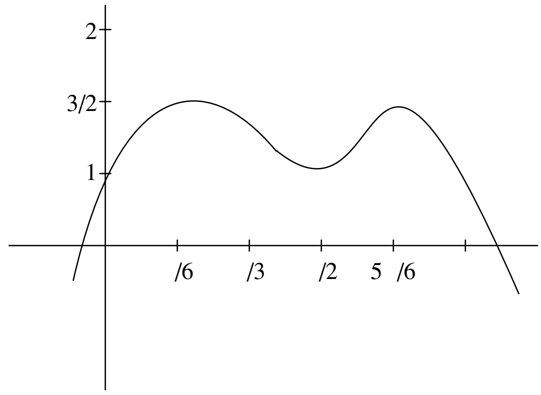
$(y)_{x=\pi/2} = 2.1 - 1 = 1$

$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ puntuan MINIMO bat dugu.

– $(y'')_x = \frac{5\pi}{6} = -2\,.\ \frac{1}{2} - 4\,.\ \frac{1}{2} = -3 < 0$

$(y)_x = \frac{5\pi}{6} = 2\,.\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$ puntuan MAXIMO bat dugu.



– $(y'')_{x_4=3\pi/2} = 2\ (-1) - 4\ (-1) = 60$

$(y'')_{x_4=3\pi/2} = 2\ (-1) - 1 = -3$

$\left(\frac{3\pi}{2}, -3\right)$ puntuan MINIMO bat dugu.

2.– $y = 1 - x^4$ funtzioaren maximoa eta minimoa aurkitu.

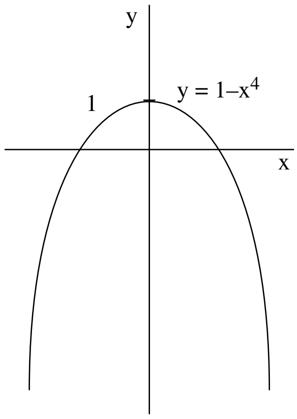
* Lehenengo deribatua: $y' = -4x^3$

* Aldagaiaren balio kritikoak: $-4x^3 = 0 \rightarrow x = 0$

* Bigarren deribatua: $y'' = -12\ x^2$

* Puntu kritikoaren izaera:

$$(y'')_{x=0} = 0$$



Kasu honetan bigarren deribatua erabiliz ezin dugu esan puntu kritikoaren izaera zein den. Beraz, lehenengo deribatuaren metodoa erabili beharko dugu:

$x < 0$ duten puntuentzat $(y')_{x<0} > 0$

$x > 0$ duten puntuentzat $(y')_{x>0} < 0$

Beraz $x = 0$ denean, MAXIMO bat edukiko dugu.

7.6.– FUNTZIO BATEN BALIO MAXIMO ETA MINIMOAK TARTE BATEAN

Izan bedi [a,b] tartean jarraia den $y = f(x)$ funtzioa. Tarte honetan funtzioak bere balio maximoa hartuko du (jarraitasuna ikustean azaldu zen). Pentsa dezagun, tarte horretan, $f(x)$ funtzioak puntu kritiko kopuru finitu bat duela. Balio handiena (a,b) tarte barnean hartzen badu, argi dago balio hau funtzioaren maximoetako bat izango dela (maximo bat baino gehiago badago), hau da, maximo handiena. Baina, gerta daiteke, funtzioak bere balio handiena tartearen mutur batean hartzea.

Beraz, (a,b) tartean, funtzioak bere balio handiena tartearen mutur batean edo barneko puntu batean (balio handienekoan) hartzen du.

Berdin esan dezakegu balio minimoaz.

Orain arte esan duguna kontutan hartuz, ondoko erregela atera daiteke: [a,b] tartean funtzio jarraiak hartzen duen balio handiena aurkitzeko, beharrezkoa da:

1.– Tartean funtzioak dituen maximo guztiak aurkitzea.

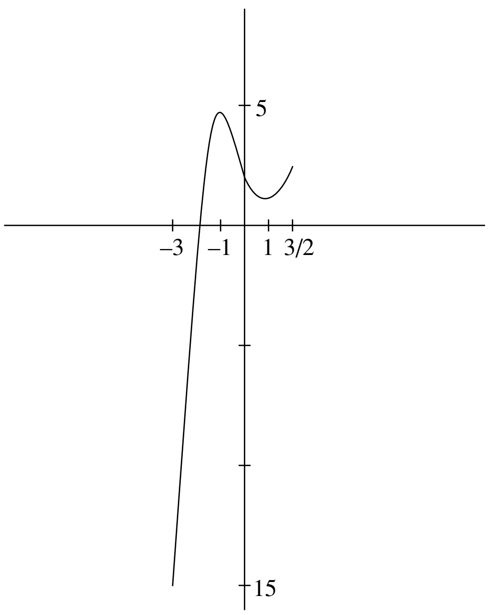
2.– Tartearen muturretan funtzioak hartzen dituen balioak kalkulatzea, hau da, f (a) eta f (b) kalkulatzea.

3.– Aurkitutako funtzioaren balioetan handiena aukeratzea.

Era berean, tartean funtzioaren balio txikiena aurkitzea.

Adibidea:

$\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ tartean $y = x^3 - 3x + 3$ funtzioak hartzen dituen balio handiena eta txikiena aurkitu.



1.– $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ tartean funtzioak dituen maximoak eta minimoak aurkituko ditugu:

$$y' = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0 \rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{matrix}$$

$$y'' = 6x \begin{cases} (y'')_{x=1} = 6 > 0 & (1,1) \text{ puntuan MINIMOA dago.} \\ (y'')_{x=1} = -6 < 0 & (-1,5) \text{ puntuan MAXIMOA dago.} \end{cases}$$

2.– Funtzioaren balioak muturretan:

$$(y)_{x=3/2} = \frac{15}{8}$$

$$(y)_{x=-3} = -15$$

3.– Funtzioaren balio handiena x = –1 puntuan lortzen da.

$$(y)_{x=-1} = 5$$

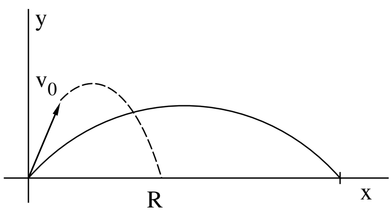
Funtzioaren balio handiena x = –1 puntuan lortzen da.

$$(y)_{x=-3} = -15$$

7.7.– FUNTZIOEN MAXIMO ETA MINIMOEN TEORIA PROBLEMA–EBAZPENARI APLIKATUTA

Maximo eta minimoen teoriak, geometriazko, mekanikazko eta beste arlo batzuetako problemak ebaztea errazten digu. Azter ditzagun horietako batzuk:

1.– Horizontalarekiko α inklinazio–angelua duen kanoi batetik, haserako v_0 abiaduraz jaurtitzen den proiektil batek betetzen duen R = OA distantzia (hutsean), ondoko formula aplikatuz lortzen da:



$$R = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g}$$

(g grabitatearen azelerazioa da)

v_0 ezaguna bada, R distantzia maximoa lortzeko angeluaren balioa determinatu.

Ebazpidea:

R magnitudea a angelu aldakorraren funtzio da. Funtzio honen maximoa $0 < \alpha < \pi/2$ tartean aztertuko dugu.

$$\frac{dR}{d\alpha} = \frac{2\, v_0^2 \cos 2\alpha}{g}$$

$$\frac{2\, v_0^2 \cos 2\alpha}{g} = 0\ ;\ \text{Balio kritikoa} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{d^2R}{d\alpha^2} = -\frac{4\, v_0^2 \sin \alpha}{g}\ ; \quad \left(\frac{d^2R}{d\alpha^2}\right)_{\alpha=\pi/4} = -\frac{4\, v_0^2}{g} < 0$$

Beraz, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ balioarentzat R funtzioa maximoa da:

$$(R)_{\alpha=\pi/4} = \frac{v_0^2}{g}$$

R funtzioak $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tartearen muturretan hartzen dituen balioak ondoko hauek dira:

$$(R)_{\alpha=0} = 0 \qquad ; \qquad (R)_{\alpha=\pi/2} = 0$$

Ikus dezakegunez, aurkitutako maximoa R–k har dezakeen baliorik handiena da.

2.– Zein dimentsio eduki behar ditu zilindro batek bere S azalera osoa minimoa izan dadin, V bolumena ezaguna bada?

Ebazpidea:

Zilindroaren oinarriaren erradioa eta zilindroaren altuera hurrenez hurren r eta h–ren bidez izendatzen baditugu, ondoko hau edukiko dugu:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Zilindroaren bolumena ezaguna bada, r eta h–ren artean dagoen erlazioa lor dezakegu:

$$V = \pi r^2 h \;\rightarrow\; h = \frac{V}{\pi r^2}$$

h–ren balio hori S–ren formulan ordezkatuz:

Hau da: $S = 2\left(\pi r + \frac{V}{r}\right)$

Hemen S, r aldagai bakarraren funtzio bezala agertzen da (V konstante ezaguna bait da). Aruki dezagun funtzio honek $0 < r < \infty$ tartean duen minimoaren balioa:

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right)$$

$$2\pi r - \frac{V}{r^2} = 0 \;\rightarrow\; r_1 = \frac{V}{2\pi}$$

$$\left(\frac{d^2S}{dr^2}\right)_{r=r_1} = 2\left(2\pi + \frac{2V}{r^3}\right)_{r=r_1} > 0$$

Beraz, S funtzioak minimo bat du $r = r_1$ puntuan. $\lim\limits_{r \to 0} S = \infty$ eta $\lim\limits_{r \to \infty} S = \infty$, hau da, r zerorantz edo infiniturantz doanean S azalera oso handia egiten denez, S funtzioak balio txikiena $r = r_1$ puntuan hartzen du.

Hori r–rentzat; Eta h–rentzat:

$$r = \frac{V}{2\pi} \quad ; \quad h = \frac{V}{\pi r^2} = 2\,\frac{V}{2\pi} = 2r$$

7.8.– FUNTZIO BATEN BALIO MAXIMO ETA MINIMOEN ANALISIA TAYLOR–EN FORMULAREN BIDEZ

Lehen ikusi dugunez, $x = a$ puntu batean $f'(a) = 0$ eta $f''(a) = 0$ betetzen badira, puntu horretan maximo bat edo minimo bat egon daiteke, edo ez bata eta ez bestea. Problema hori ebazteko, lehenengo deribatuaren zeinua aztertzea gomendatzen genuen.

Kasu honetan, ikerketa, Taylor–en formularen bidez ere egin daiteke. Problema orokorragoa izan dadin, $x = a$ puntuan $f(x)$–ek dituen deribatu guztiak, m ordeneraino, zero direla pentsatuko dugu.

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{n}(a) = 0 \qquad f^{n+1}(a) = 0 \tag{1}$$

$x = a$ puntuaren inguruan, $(n+1)$ ordeneraino $f(x)$ funtzioaren deribatuak jarraiak direla ere pentsatuko dugu. (1) berdintasunak kontutan harturik, $f(x)$ funtzioarentzat Taylor–en formula idatziko dugu:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{n+1}(c) \tag{2}$$

c, a eta x balioen artean dagoen balio bat delarik.

a puntuaren inguruan $f^{n+1}(x)$ jarraia denez eta $f^{n+1}(a) = 0$ denez, $x-a < h$ betetzeko adina txiki den h zenbaki positibo bat existitutko da, $f^{n+1}(x) = 0$ betetzen delarik. Gainera $f^{n+1}(a) > 0$ bada, $(a-h, a+h)$ tarteko puntu guztietan $f^{n+1}(x) > 0$ beteko da; $f^{n+1}(a) < 0$ bada, tarte horretako puntu guztietan $f^{n+1}(x) < 0$ beteko da.

(2) formula beste era batera jarrita:

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{n+1}(c) \tag{2'}$$

Orain, kasu partikular batzuk aztertuko ditugu:

1.– n zenbakia bakoitia da

a) Izan bedi f^{n+1} (a) < 0. Existituko da (a–h, a+h) tartea, non bere barneko puntu bakoitzean f^{n+1} (x) < 0 den. x puntua (a–h, a+h) tarte barnean dago, eta beraz, c puntua ere tarte horren barnean egongo da. Horregatik f^{n+1} (c) < 0 izango da. (n+1) zenbaki bikoitia denez gero, $(x–a)^{n+1} > 0$ izango da $x \neq a$ denean, eta horregatik, (2') formularen bigarren atala negatiboa izango da.

Beraz, $x \neq a$ denean, (a–h, a+h) tarteko puntu guztietan ondoko hau beteko da:

$$f(x) - f(a) < 0$$

Honek, x = a puntuan funtzioak maximo bat duela esan nahi du.

b) Izan bedi f^{n+1} (a) > 0. Nahikoa txikia den h balioarentzat, f^{n+1} (c) > 0 edukiko dugu (a–h, a+h) tarteko puntu guztientzat. Beraz, $x \neq a$ denean, (a–h, a+h) tarteko puntu guztietan ondoko hau dugu:

$$f(x) - f(a) > 0$$

Honek, funtzioak x = a puntuan minimo bat duela esan nahi du.

2.– n zenbakia bikoitia da

(n+1) zenbakia bakoitia izango da eta $(x–a)^{n+1}$ magnitudearen zeinua desberdina izango da x < a denean eta x > a denean. h–ren balio absolutua nahikoa txikia bada, (n+1) ordeneko deribatuaren zeinua (a–h, a+h) tartearen beste puntuetan eta a puntuan berdina izango da. Beraz, f (x) – f (a) kendurak zeinu desberdina edukiko du x < a denean eta x > a denean. Honek hau esan nahi du: x = a puntuan ez dagoela ez maximorik eta ez minimorik.

Ikus daitekeenez, n bikoitia eta f^{n+1} (a) > 0 badira, x < a balioentzat f (x) < f (a) da eta x > a balioentzat f (x) > f (a) da. Baina n bikoitia eta f^{n+1} (a) < 0 badira, x < a balioarentzat f (x) > f (a) da eta x > a balioentzat f (x) < f (a) da.

Lortu ditugun emaitzak, honela enuntzia daitezke: x = a denean $f'(a) = f''(a) \ldots = f^{n}(a) = 0$ eta f^{n+1} (a) zero egiten ez den deribatua badira, ordena bikoitia bada x = a puntuan funtzioak MAXIMO bat du f^{n+1} (a) < 0 bada; funtzioak MINIMO bat du f^{n+1} (a) > 0 bada.

Orain f^{n+1} (a) zero egiten ez den lehenengo deribatua ordena bakoitikoa bada, funtzioak x = a puntuan ez du ez maximorik ez minimorik. Gainera:

f (x) gorakorra da f^{n+1} (a) > 0 bada

f (x) beherakorra da f^{n+1} (a) < 0 bada

Adibidea:

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ funtzioaren maximoa eta minimoa aztertu.

Ebazpidea:

Funtzioaren balio kritikoak aurkituko ditugu:

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x^3-3x^2+3x-1)$

$4(x^3-3x^2+3x-1) = 0$ ekuaziotik x = 1 puntu kritikoa lortuko dugu.

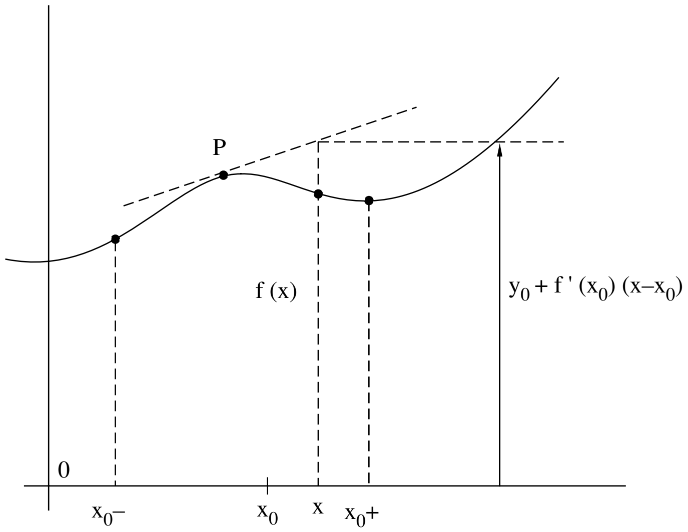
Orain, x = 1 puntu kritikoaren izaera aztertuko dugu:

Beraz, x = 1 denean f (x) funtzioak MINIMO bat du.

7.9.– KURBAREN AHURTASUNA ETA GANBILTASUNA. INFLEXIO–PUNTUAK

Izan bedi kurba bat, eta P kurbaren puntu bat, non S zuzen tangente bat definitua dugun.

S eta OY, hau da, S zuzen tangentea eta OY ardatza ez direla paraleloak pentsatuko dugu.



Irudian ikusten den A marra etenak, p barnean duen ε–en arku infinitesimal bat adierazten du. A marra etena, y = f (x) funtzio baten bidez definituta dagoela pentsa dezakegu, x–ek balioak P puntuko 2ε luzera infinituki txikia duen $]x_0–\varepsilon,\ x_0+\varepsilon[$ tartean hartzen dituelarik. S zuzen tangentearen ekuazioa ondoko hau da:

$$y = y_0 + f\,'\,(x_0)\,(x–x_0)$$

$x \in\ ]x_0–\varepsilon,\ x_0+\varepsilon[$ balio guztientzat $f\,(x) < [y_0+f\,'\,(x_0)\,(x–x_0)]$ betetzen bada, ε kurba y aldagaiarekiko ganbila da P puntuan, adierazpen grafikoan A S–ren azpitik azaltzen delarik.

$x \in\ ]x_0–\varepsilon,\ x_0+\varepsilon[$ balio guztientzat $f\,(x) > [y_0+f\,'\,(x_0)\,(x–x_0)]$ betetzen bada, ε kurba y aldagaiarekiko ahurra da P puntuan, adierazpen grafikoan A S–ren gainetik azaltzen delarik.

$]x_0–\varepsilon,\ x_0+\varepsilon[$ tartean, x_0–ren alde baterantz $f\,(x) –[y_0+f\,'\,(x_0)\,(x–x_0)]$ kendura positiboa bada, eta x_0–ren beste alderantz negatiboa bada, P ε kurbaren INFLEXIO–PUNTU bat dela esaten da.

Taylor–en formulak dioenez $f\,(x) – [y_0+f\,'\,(x_0)\,(x–x_0)] = \dfrac{f\,''\,(c)}{2!}\ .$

$.\ (x–x_0)^2$; c, x_0 eta x–en artean dagoen zenbaki bat delarik. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) = f\,''\,(x_0)$

zenbakiaren zeinuak erabakitzen du P puntuan y aldagaiarekiko ganbila edo ahurra den.

Horregatik:

* $f''(x_0) > 0$ bada, $f''(c) > 0$ izango da, eta ahurra da P puntuan y aldagaiarekiko, $f(x) > y^0 + f'(x_0)(x-x_0)$ delako.

* $f''(x_0) < 0$ bada, $f''(c) < 0$ izango da, eta ganbila da P puntuan y aldagaiarekiko, $f(x) < y^0 + f'(x_0)(x-x_0)$ delako.

  Oro har, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, $f^{IV}(x_0)$, … seriearen lehenengo zenbaki ez–nuluak ($f^k(x_0)$ deituko diogu) erabakitzen du P puntuan y aldagaiarekiko ε ganbila edo ahurra den.

  Beraz, $1 < n < K$ balioentzat $fn(x_0) = 0$ badira, eta Taylor–en formula aplikatuz:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^k(c)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)] = \frac{f^k(c)}{k!}(x-x_0)^k$$

* K zenbakia bikoitia bada eta $f^k - (x_0) > 0$ bada:

  $\frac{f^k(c)}{k!}(x-x_0)^k > 0$ izango da $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ balio guztientzat, eta beraz, ε ahurra izango da P puntuan.

* K zenbakia bakoitia bada eta $f^k - (x_0) < 0$ bada:

  $\frac{f^k(c)}{k!}(x-x_0)^k < 0$ izango da $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ balio guztientzat, eta beraz, ε ganbila izango da P puntuan.

* K zenbakia bakoitia bada eta $f^k - (x_0) > 0$ bada:

  $\frac{f^k(c)}{k!}(x-x_0)^k > 0$ izango da $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ balioentzat

  $\frac{f^k(c)}{k!}(x-x_0)^k < 0$ izango da $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ balioentzat

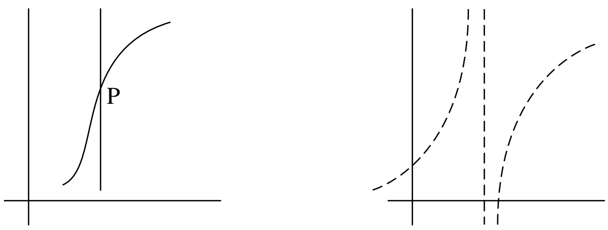
Hau da, P puntuaren eskuineko aldean kokatua dagoen kurbaren zatia S zuzenaren gainetik dago eta P puntuaren ezkerreko aldean kokatua dagoen A kurbaren zatia S zuzenaren azpitik dago. P INFLEXIO–PUNTU bat da.

* K zenbakia bakoitia bada eta $f^k(x_0) < 0$ bada, P INFLEXIO–PUNTUA da. Kasu honetan, P puntuaren eskuineko aldean (ezkerreko aldean hurrunez hurren) kokatua dagoen A kurbaren zatia S zuzenaren azpitik (gainetik hurrenez hurren) dago.

Azalpena:

P puntuan zuzen tangenterik ez baldin badago (bai $f'(x_0)$ definituta ez dagoelako edo S | | OY delako) P puntuan y aldagaiarekiko ahurtasuna eta ganbiltasuna ez daude definituak.

$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \infty$ bada (irudiko B arkua) edo $\lim_{x \to x_0} f'(x) = -\infty$ bada (irudiko D arkua), P kurbaren inflexio–puntua dela esango dugu.



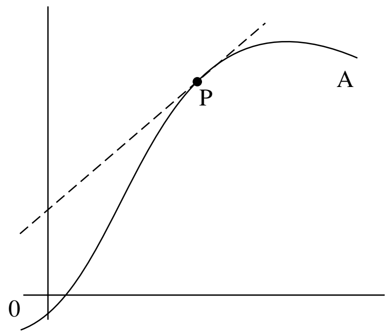
x aldagaiarekiko, ε kurbak dituen ahurtasun eta ganbiltasunaren kontzeptuak, eta y aldagairekiko dituenak antzekoak dira, hau da:

$\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_{p(x_0,y_0)} > 0$ bada, ε, P puntuan x aldagaiarekiko ahurra da, adierazpen grafikoan A (P barnean duen arku infinitesimala) S–ren eskuineko aldean azaltzen delarik.

$\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_{p(x_0,y_0)} < 0$ bada, ε, P puntuan x aldagaiarekiko ganbila da, adierazpen grafikoan A S–ren ezkerreko aldean azaltzen delarik.

Ikus ditzagun orain, ε kurbak P (x_0,y_0) puntu batean KOORDENATU–JATORRIAREKIKO dituen ahurtasun eta ganbiltasun kontzeptuak, edo orokorrago, edozein (a,b) punturekiko dituenak (ahurtasun eta ganbiltasun "polar" deitzen zaie).

Lehenbizi koordenatu–jatorriarekiko ahurtasuna eta ganbiltasuna aztertuko ditugu:



Orain, kurbak P (x_0,y_0) puntuan duen zuzen tangentea ez dela 0 jatorritik pasatzen pentsatuko dugu ($0 \in S$ bada, P puntuarentzat ez daude definituak 0–rekiko ahurtasun eta ganbiltasun kontzeptuak).

S zuzenak, R^2 planoa bi "alde" edo planoerditan banatzen du. P eta 0, S–ren alde berean badaude (desberdinean hurrenez hurren), kurba P puntuan 0–rekiko ganbila (ahurra hurrenez hurren) dela esaten da.

S | | OY bada, hau da, $f'(x_0)$ zenbaki finitua bada ($y = f(x)$ A arku infinitesimala definitzen duen funtzioa delarik, S zuzena eta OY ardatza $(0.y_0 - x_0 f'(x_0)$ puntuan ebakiko dira eta $\sigma = (y_0 - x_0 f'(x_0))\, f''(x_0) =$

$$= \left[\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right]_{(x_0,y_0)}$$ zenbakiaren zeinuak erabakiko du ε kurba P puntuan 0–rekiko ahurra ala ganbila den.

Adibidez, $[(y_0 - x_0 f'(x_0)) f''(x_0)] < 0$ bada:

* edo $[y_0 - x_0 f'(x_0)] > 0 > f''(x_0)$ → A eta O S–ren azpitik daude → S–ren alde berean.

* edo eta, $[y_0 - x_0 f'(x_0)] < 0 < f''(x_0)$ → A eta O S–ren gainetik daude → S–ren alde berean.

Laburtuz, $\left[\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right]_{(x_0,y_0)} < 0$ (>0 hurrenez hurren) bada, ε kurba P puntuan 0–rekiko ganbila (ahurra hurrenez hurren) da.

x eta y letrak beraien artean trukatuz lor daitezkeen $\left[\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right]_{(x_0,y_0)}$ eta $\left[\left(x - y\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)\right]_{(x_0,y_0)}$ bi adierazpenak, zeinu berdineko zenbakiak errepresentatzen dituzte, eta bietariko edozein erabil daiteke ε P puntuan 0–rekiko ahurra ala ganbila den determinatzeko.

Horregatik, ahurtasun eta ganbiltasun polarren defintzioan, x eta y aldagaiak baldintza berdinetan erabiltzen dira batabestearekiko, eta A arkua $x = g(y)$ funtzio bezala hartzen badugu, $S_{x-x_0} = g'(y_0)(y-y_0)$ ekuazioaren bidez definitzen delarik, lehen bezala arrazonatuz, $\left[\left(x - y\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right]_{(x_0,y_0)} < 0$ (>0 hurrenez hurren) bada ε P puntuan 0–rekiko ganbila (ahurra hurrenez hurren) dela ikusiko dugu, $\left[\left(y - x\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right]_{(x_0,y_0)}$ eta $(x - y\frac{dy}{dx})\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)$ adierazpenak zeinu berdina dutela, edo baita $\left[\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right] \cdot \left[\left(x - y\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)\right] > 0$ dela ere. Ondoko biderkaketa eginez froga daiteke:

$$\left[\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right] \cdot \left[\left(x - y\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)\right] = \frac{d^2x}{dy^2} \cdot \frac{dx}{dy} \cdot \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) \geq 0$$

S | | OY bada (S | | OX hurrenez hurren), $\left[\left(y - x\,\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right]_{(x_0,y_0)}$ zenbakia $\left\{\left[\left(x - y\,\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)\right]_{(x_0,y_0)} \text{ zenbakia hurrenez hurren}\right\}$ ez dago definitua.

$\left(y - x\,\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ eta $\left(x - y\,\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ adierazpenetik, ardatzak lekuz aldatuz beste bi adierazpen hauek lortzen dira:

$$\left[(y-b) - (x-a)\,\frac{dy}{dx}\right]\frac{d^2y}{dx^2} \quad ; \quad \left[(x-a) - (y-b)\,\frac{dx}{dy}\right]\frac{d^2x}{dy^2}$$

Adierazpen hauen zeinuak esaten du kurba bat (x,y) puntuan (a,b) puntuarekiko ahurra ala ganbila den ((a,b) "poloarekiko" ahurtasun eta ganbiltasun polar deitzen zaie).

Adibideak:

1.– Izan bedi $xe^y + yx^3 - 2 = 0$ ekuazioa duen ε kurba eta P (2,0) puntua, puntu horretan $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,0)} = -\frac{1}{10}$ eta $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(2,0)} = \frac{531}{500}$ direlarik. Balio honen arabera, P puntuan y ardatzarekiko ganbila dela ikusten da.

2.– Izan bedi $y = x^2 + \sin 2x$ ekuazioa duen ε kurba:

ε kurbaren puntu bat izan daiteke, adibidez

$$P\left(\frac{5\pi}{12}, \frac{1}{2} + \frac{25\pi^2}{144}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2\cos 2x \quad ; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_p = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} = 0{,}88\ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 4\sin 2x \quad ; \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_p = 0$$

Azken balio hau nulua izanik, honek ez du esaten kurba P puntuan y ardatzarekiko ahurra ala ganbila denik, eta indeterminazio hau deribatuen seriearen lehen zenbaki ez–nuluak burutzen du.

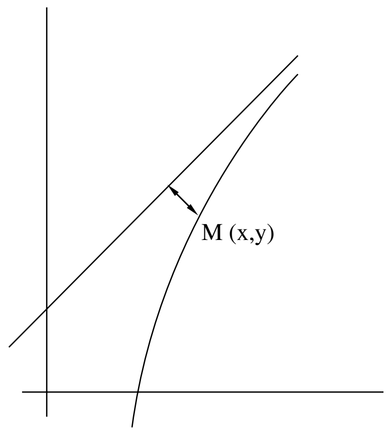
Hirugarrena da. Beraz, ε kurba P puntua ez da ez ahurra eta ez ganbila, hau da, P inflexio–puntua da.

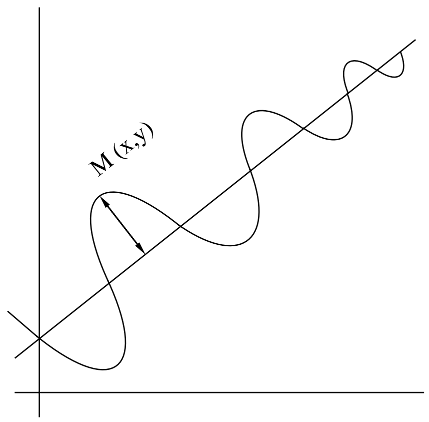
7.10.– ASINTOTAK

Sarritan, y = f (x) kurbaren forma eta beraz dagokion funtzioaren aldaketa aztertzea beharrezkoa da, kurbaren puntu aldakor baten abzisa eta ordenatua (biak batera edo bakarka) INFINITURANTZ jotzen dutenean (kurbaren puntu desplazagarriak infiniturantz jotzean kurba zuzen bati mugagabeki hurbiltzen zaion kasuak garrantzi berezia du (M puntu desplazagarria kurbari jarraituz ∞–rantz higitzen da, M eta koordenatua––jatorriaren arteko distantzia mugagabeki handitzen denean)

a) Definizioa

M puntu higikorrak infiniturantz jotzen duen bitartean, M puntua eta A zuzen baten arteko δ distantziak zerorantz jotzen badu, zuzen horrek KURBAREN ASINTOTA izena hartzen du.





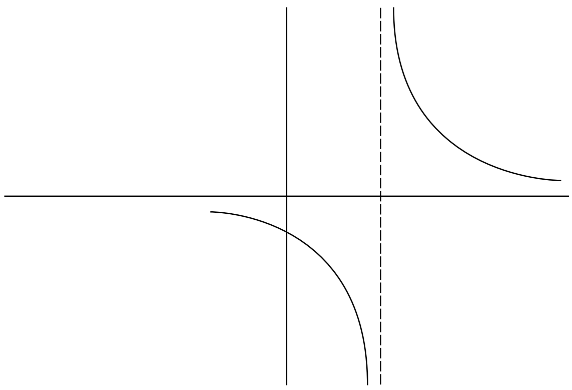
1.– Asintota bertikalak:

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ bada edo $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$ bada eta $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ bada, x = a da y = f (x) kurbaren ASINTOTA.

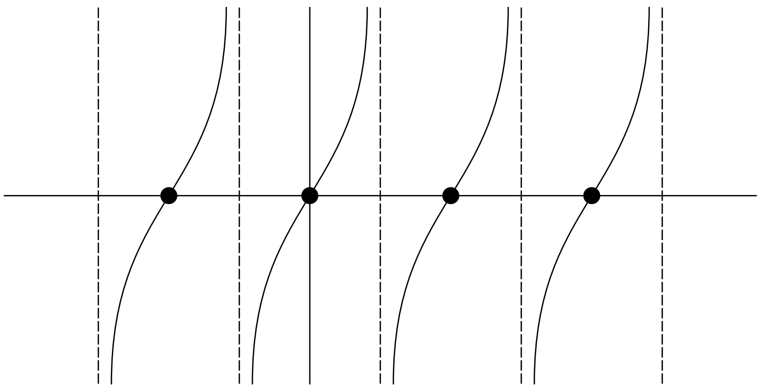
Beraz, asintota bertikalak determinatzeko, beharrezkoa da funtzioak infiniturantz jotzea eragiten duten x = a balioak aurkitzea.

Adibideak:

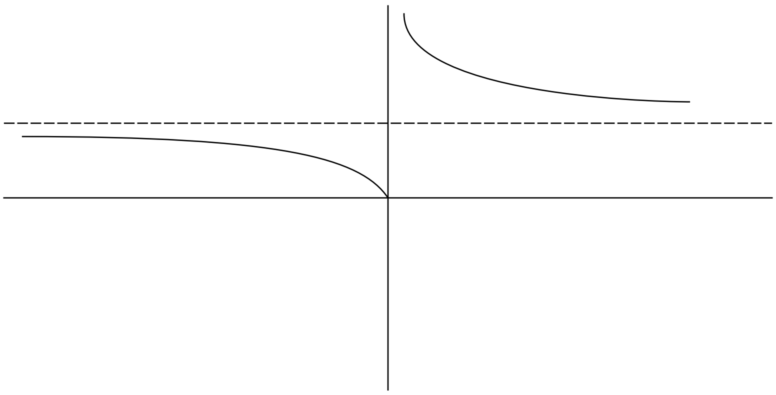
* $y = \dfrac{2}{x-5}$ funtzioak asintota bertikal bat du x = 5 puntuan.



* y = tan x funtzioak infinitu asintota bertikal ditu: x = ± \f(π ;2) , ± \f(3π ;2) , ± $\dfrac{5\pi}{2}$, ...



* $y = e^{1/x}$ funtzioak x = 0 asintota bertikal bat du $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{1/x} = \infty$ delako.

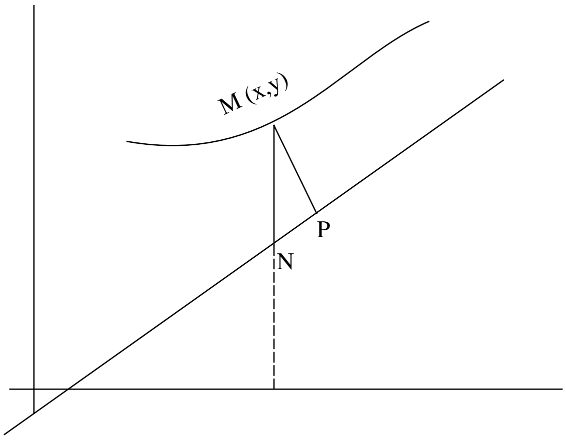


2.– Asintota inklinatuak:

Pentsa dezagun $y = f(x)$ kurbak asintota inklinatu bat duela, eta bere ekuazioa $y = kx + b$ dela.

Orain, k eta b determinatu beharko ditugu.

Izan bedi M (x,y) kurbaren puntu bat, eta N $(x,\overline{y})$ asintotaren puntu bat.



MP segmentuaren luzera, M puntua eta asintotaren arteko distantzia da.

Hipotesiak dioenez (zuzen hori asintota da):

$$\lim_{x \to +\infty} MP = 0$$

Asintotak eta OX ardatzak osatzen duten angeluari α deituko diogu.

NMP triangelutik $NM = \dfrac{MP}{\cos \alpha}$ ateratzen da.

α angelu aldaezina denez gero (ez da $\pi/2$ izango): $\lim\limits_{x \to +\infty} NM = 0$

Alderantziz, berdintasun honetatik $\lim\limits_{x \to +\infty} MP = 0$ atera daiteke. Baina

$NM = |QM-QN| = |y-y-| = |f(x)-(kx+b)|$

$$\lim_{x \to +\infty} NM = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx - b] = 0$$

Beraz, y = Kx + b zuzena asintota bada, berdintasun hori bete egingo da. Alderantziz, K eta b–ren balio konstante batzuentzat berdintasun hori betetzen bada, y = Kx + b zuzena asintota izango da.

Determina ditzagun K eta b:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx - b] = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

$x \to +\infty$ denez, ondoko hau bete beharko du:

$\lim\limits_{x \to +\infty} x \left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$; b konstante denean $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{b}{x} = 0$ da.

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k\right] = 0 \Rightarrow k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Hasierako $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx - b] = 0$ berdintasunetik:

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx]$$

y = Kx + b zuzena asintota baldin bada, K eta b, (1) eta (2) formulen bidez lortzen dira. Alderantziz, (1) eta (2) limiteak existitzen badira, y = Kx + b zuzena asintota izango da. (1) eta (2) limiteetariko bat existitzen ez bada, kurbak ez du asintota inklinaturik izango.

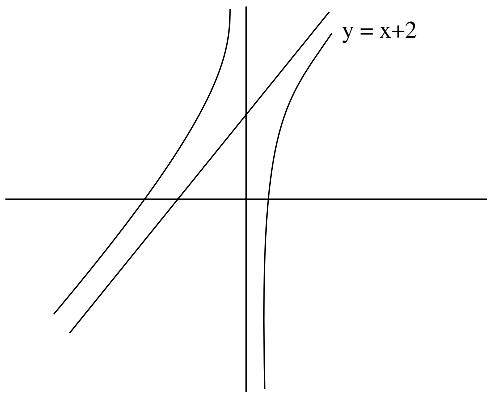
Problema $x \to +\infty$ denean aztertu dugu, baina arrazonamendu guztiak baliagarriak dira $x \to -\infty$ kasurako.

Adibideak:

* $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$ funtzioaren asintotak aurkitu

a) Bertikalak: $x \to 0^-$ denean $y \to +\infty$
$x = 0$ asintota bertikala da.
$x \to 0^+$ denean $y \to -\infty$

b) Inklinatuak:



$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x^2+2x-1)}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \left[1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right] = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2+2x-1}{x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[2 - \frac{1}{x}\right] = 2$$

$y = x + 2$ zuzena asintota inklinatua da.

Asintota eta kurbaren elkarrekiko kokapena aztertzeko, x balio berdinarentzat asintotak eta kurbak hartzen dituzten y ordenatuen kenketa aztertuko dugu:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - (x+2) = -\frac{1}{x}$$

x > 0 balioentzat kenketa negatiboa da eta x < 0 balioentzat positiboa. Beraz, x > 0 denean, kurba asintotaren azpian kokatuta dago eta x < 0 denean kurba asintotaten gainean kokatua dago.

* $y = e^{-x} \sin x + x$ kurbaren asintotak aurkitu.

a) Ez dago asintota bertikalik.

b) Asintota inklinatuak:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim \frac{e^{-x} \sin x + x}{x} = \left[e^{-x} \frac{\sin x}{x} + 1 \right] = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [e^{-x} \sin x + x - x] = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} \sin x = 0$$

$y = x$ zuzena asintota inklinatua da $x \to +\infty$ kasurako. Kurba horrek ez du asintota inklinaturik $x \to -\infty$ kasuan.

Horrela da. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{y}{x}$ limitea ez da existitzen $\frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{x} \sin x + 1$ delako.

7.11.– FUNTZIO–ANALISIAREN ETA ERAIKUNTZA GRAFIKOAREN ESKEMA OROKORRA

Oro har, funtzioen analisia egiteko, hurrengo elementu hauek determinatzea nahikoa izaten da:

1.– Funtzioaren definizio–tartea.

2.– Funtzioaren eten–puntuak. Funtzioa eta koordenatu–ardatzak mozten direneko puntuak.

3.– Funtzioaren gorapen– eta beherapen–tarteak.

4.– Maximo eta minimoak, eta baita funtzioaren balio maximoa eta minimoa ere.

5.– Grafikoaren ahurtasun– eta ganbiltasun–tarteak, eta inflexio–puntuak.

6.– Funtzioaren grafikoaren asintotak.

Azalpenak:

Aztertzen ari garen y = f (x) funtzioa bikoitia bada, hau da, f (–x) = f (x) betetzen bada, nahikoa izango da funtzioaren definizio–tarteko x balio POSITIBOENTZAT funtzioa aztertzea eta grafikoa egitea. x–en balio negatiboentzat grafikoa egiteko, funtzio–pare baten grafikoa ordenatu–ardatzarekiko simetrikoa dela kontutan hartu behar dugu.

Azalpena:

y = f (x) funtzioa bakoitia bada, hau da, f (–x) = –f (x) betetzen bada, nahikoa izango da funtzioaren analisia x–en balio positiboentzat egitea. Funtzio bakoitiaren grafikoa, koordenatu–jatorriarekiko simetrikoa da.

Azalpena:

Funtzio baten propietate batzuk ezagutzeak besteei buruz ondorioak ateratzeko ahalmenak ematen dituenez gero, batzuetan komenigarria izaten da analisia egiteko eramaten den ordena ongi aukeratzea. Adibidez, funtzioa jarraia eta deribagarria dela determinatzen badugu, eta maximo– eta minimo–puntuak aurkitzen baditugu, funtzioaren gorapen– eta beherapen–tarteak ere determinatuak gelditzen dira.

Adibidea:

$y = \frac{x}{1+x^2}$ funtzioa analizatu eta bere grafikoa egin.

1.– Definizio–tartea: $-\infty < x < +\infty$

2.– Funtzioa jarraia da puntu guztietan

3.– Maximo eta minimoak

$$y' = \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

* $x_1 = -1$

$x < -1$ denean $y' < 0$

$x > -1$ denean $y' > 0$

$y_{x=-1} = -1/2$ funtzioak "minimo" bat du $(-1,-1/2)$ puntuan.

* $x_2 = 1$

$x < 1$ denean $y' > 0$

$x < 1$ denean $y' < 0$

$y_{x=1} = 1/2$ funtzioak "maximo" bat du $(1,1/2)$ puntuan.

4.– Gorapen– eta beherapen–tarteak:

$-\infty < x < -1 \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow$ beherakorra

$-1 < x < 1 \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow$ gorakorra

$1 < x < \infty \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow$ beherakorra

5.– Ahurtasuna, ganbiltasuna, inflexio–puntuak.

$$y'' = \frac{2x\,(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0 \qquad \begin{array}{l} x = -\sqrt{3} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{3} \end{array}$$

y'', x–en menpeko bezala aztertzen badugu:

$-\infty < x < -\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ kurba ganbila da.

$-\sqrt{3} < x < 0$ $\Rightarrow$ kurba ahurra da.

$0 < x < \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ kurba ganbila da.

$\sqrt{3} < x < +\infty$ $\Rightarrow$ kurba ahurra da.

$(-\sqrt{3},-\sqrt{3}/4)$, $(0,0)$.$(\sqrt{3},\sqrt{3}/4)$ inflexio–puntuak dira.

6.– Asintotak:

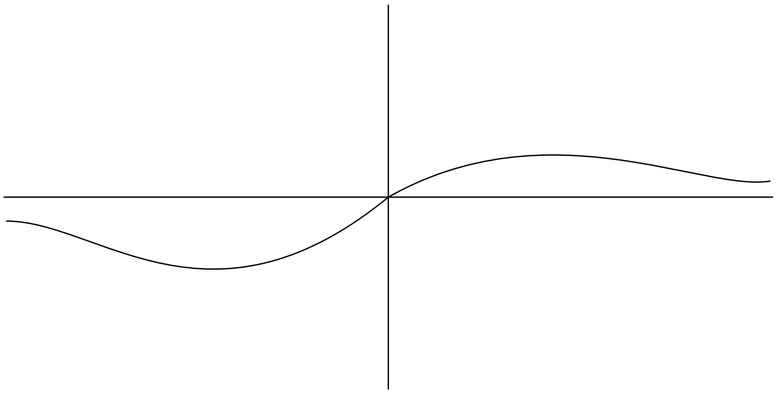
a) Bertikalak: ez daude.

b) Inklinatuak:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0 \qquad b = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0 \qquad b = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

beraz $y = 0$ asintota inklinatua da.



Adibidea:

$y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$ funtzioa analizatu eta bere grafikoa egin.

1.– Definizio–tartea: $-\infty < x < +\infty$

2.– Funtzioa jarraia da puntu guztietan.

3.– Maximo eta minimoak:

$$y' = \frac{4ax - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^2-x^3)^2}} = \frac{4ax - 3x^2}{3\sqrt[3]{[x^2(2a-x)]^2}} = \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{(2a-x)^2}}$$

$y' = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{4}{3}\,a$

$y'\ 0\ \infty \;\Rightarrow\; x = 0, \quad x = 2a$

$x < 0$	balioentzat	$y' < 0$	
			(0,0)–en minimoa
$0 < x < \frac{4}{3}\,a$	"	$y' > 0$	
			$\left(\frac{4}{3}\,a, \frac{2}{3}\,a\sqrt{4}\right)$ maximoa
$\frac{4}{3} < x < 2a$	"	$y' < 0$	
$x > 2a$	"	$y' < 0$	ez maximoa, ez minimoa.

4.– Gorapena eta beherapena:

$-\infty < x < 0 \;\Rightarrow\; y' < 0$ beherakorra

$0 < x < 4/3 \,.\, a \;\Rightarrow\; y' > 0$ gorakorra

$4/3 \,.\, a < x < +\infty \;\Rightarrow\; y' < 0$ beherakorra

5.– Ahurtasuna, ganbiltasuna, inflexio–puntuak.

$$y'' = -\,\frac{8a^2}{9x^{4/3}\,(2a-x)^{5/3}}$$

Ez dago zero puntu batean ere. Baina $x_1 = 0$ eta $x_2 = 2a$ puntuetan etena da.

$x < 0$	balioentzat	$y'' < 0$	
			ez da inflexio–puntua
$0 < x < 2a$	"	$y'' < 0$	
			(2a,0) inflexio–puntua
$2a < x$	"	$y'' > 0$	

6.– Asintotak

a) Bertikalik ez dago.

b) Inklinatuak.

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{2ax^2-x^3}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{2ax^2-x^3}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{2a}{x} - 1} = -1$$

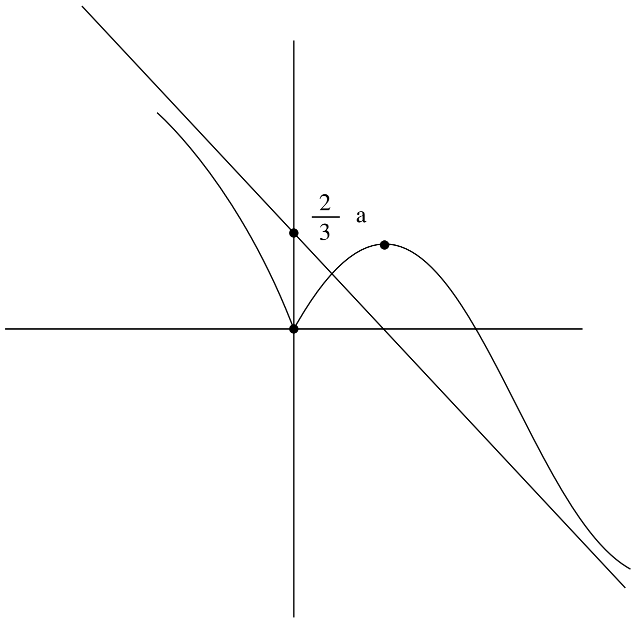
$$b = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{2ax^2-x^3} + x =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2ax^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{(2ax^2-x^3)^2} - x\sqrt[3]{2ax^2-x^3} + x^2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2a}{\frac{4a^2x^4+x^6-4ax^5}{x^6} - \frac{2ax^2-x^3}{x^3} + 1} = \frac{2a}{3}$$

$x \to -\infty$ berdin eginez

"asintota" $y = \frac{2a}{3} - x$



7.12.– ARIKETAK

1.– Bilatu zenbaki bat, bera eta bere karratuaren arteko kendura minimoa izan dadin.

2.– Frogatu zirkulu batean inskriba daitekeen laukizuzenetan azalera eta perimetro handiena duena karratua dela.

3.– Bilatu R erradioko esfera batean inskribatuta dauden zilindroetan bolumen handiena duenaren altuera.

4.– $y^2 = 2px$ parabolaren ardatzean puntu bat hartzen badugu, erpinetik "a" distantziara zein abzisa du parabolen puntuetatik puntu horretara distantzia minimoa duenak?

5.– R erradioko zirkulu batean, moztu sektore zirkular bat, hau biratuta sortzen den inbutuaren bolumena maximoa izan dadin.

6.– Etxe baten teilatuan kanaloi bat egitea nahi da euri–urarentzat. Oinak eta aldeak 10 cm neurtu behar dutela eta bi aldeak inklinazio berdina eduki behar dutela jakinik, zein izango da bolumen maximoa duena?

7.– Igerilaria A puntuan dago laku batean eta bere erropak B puntuan ditu (marrazkian agertzen den bezala). Momentu baten euria hasten da. Uretan v_1 abiadura lortzen badu eta lurrean v_2 abiadura, zein bidetatik joan behar du ahalik eta azkarren heltzeko?

8.– Ibai baten ertzera A eta B bi herrietatik dagoen distantzia 10 km–koa eta 20 km–koa da. AB zuzenkiaren ibaiarekiko proiekzio ortogonalak 20 km ditu. Bi herrien artean ur–gordailu bat egitea nahi dute ibaiaren ertzean. Non ipini beharko dute, ahalik eta hodieria gutxien gastatzeko?

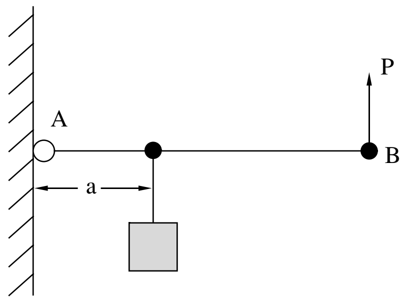
9.– Kono–itxura duen kanpadenda batek bolumen finkoa du. Kalkulatu dimentsioak ahalik eta olana gutxien gastatzeko.

10.– Pentsa dezagun itxasuntzi batek gastatzen duen erregaia, bere abiaduraren kuboarekiko proportzionala dela. Bilatu abiadura merkeena, ibaiaren korrontea aurkako norantzan a km/h–koa denean.

11.– Galdara bat egitea nahi da; "V" bolumen finkokoa. Zilindro batez eta oinetan esferaerdi banaz osatuko da. Pareten lodiera konstantea bada, nolakoa izango da azalera minimoa izan dadin?

12.– R erradioko zilindro baten inguruan, bolumen minimoa duen konoa zirkunskribatu, bien oinak plano berean badaude eta zentru bera badute.

13.– Barra uniforme bat (AB), A–n artikulatua dago eta a distantzia batera Q pisua dauka. B–n egiten den P indarraz orekatzen da eta barraren zentimetro batek m kg pisatzen ditu. Bilatu barraren luzera P minimoa izan dadin.



8. ERA PARAMETRIKOAN DAUDEN FUNTZIOEN AZTERKETA

8.1.– SARRERA

$x = g(t)$ eta $y = f(t)$ funtzioak kontutan hartuko ditugu. t aldagaiak $[t_1, t_2]$ tartean hartzen ditu bere balioak. t–ren balio bakoitzarentzat x–en eta y–ren balio bana lortzen dugu eta hauek OXY planoko puntu batean koordenatuak direla kontutan hartzen badugu, t–ren balio bakoitzarentzat planoko puntu bat lortuko dugu. t–ren balioak t_1–etik t_2–ra aldatuz badoa, puntu horiek kurba bat osatuko dute planoan.

$$\left.\begin{array}{l} x = g(t) \\ y = f(t) \end{array}\right\}$$

kurbaren "ekuazio parametriko" deitzen zaie eta "t"ri parametro.

$x = g(t)$ funtzioak $t = G(x)$ alderantzikoa baldin badu, y x–en funtzio dela ikus daiteke

$$y = f[G(x)]$$

$T = [t_1, t_2]$ multzoari eremu parametriko deituko diogu. Agertzen ez baldin bada, horrela dela dakigulako da.

Adibidea:

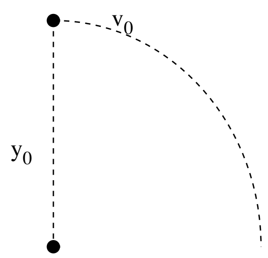
$$\left.\begin{array}{l} x = u(t) = \sqrt{-t^2 - 2t + 8} \\ y = v(t) = \text{arc sin}\,[(t+1)/(2t)] \end{array}\right\}$$ funzioek ε kurba definitzen dute.

T ez da agertzen, baina badakigu $\begin{cases} -t^2 - 2t + 8 \geq 0 \\ -1 \leq (t+1)/2t \leq 1 \end{cases}$ inekuazioak betetzen dituzten t–ren balioek osatzen dutela. Sistema hori ebazten badugu, $T = [-4, -1/3] \cup [1,2]$ dela lortuko dugu.

Metodo hau, mekanikan asko erabiltzen da. OXY planoan puntu material bat higitzen ari bada, eta $x = g(t)$, $y = f(t)$ ezagutzen baditugu, t denbora delarik, ekuazio horiek puntuaren higiduraren ekuazio parametrikoak dira. Bi ekuazioen artean t kentzen badugu, higiduraren ekuazioa $y = F(x)$ edo $H(x,y) = 0$ eran lotuko dugu.

Adibidea:

v_0 abiaduraz eta y_0 altueran horizontalki higitzen den hegazkin batetik jaurtitzen den gorputz baten higidura eta erorketa–puntua aurkitu.



Gorputzaren higidura horizontala eta abiadura konstantea izango dira:

$$x = v_0 t$$

Gorputzaren higidura bertikala, grabitatearen bidez honela adieraziko dugu:

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}$$

Horiek dira higiduraren ekuazio parametrikoak. Hemendik t kentzen badugu:

$$x = v_0 t \Rightarrow t = x/v_0$$

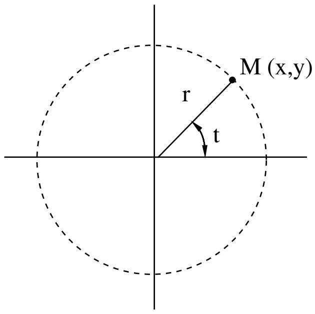
$$y = y_0 - \frac{g}{2}\left[\frac{x_0}{v_0}\right]^2 \Rightarrow y = y_0 - \frac{g}{2\,v_0^2}\,x^2$$

Lortzen dugun ekuazioa, M $(0,y_0)$ erpina duen parabola batena da. OC desplazamenduaren balioa:

$$x = v_0 \sqrt{\frac{2\,y_0}{g}}$$

8.2.– KURBA BATZUEN EKUAZIO PARAMETRIKOA

Zirkunferentzia



M (x,y) zirkunferentziaren puntutik pasatzen den erradioak eta OX ardatzak osatzen duten angeluari t deituko diogu:

$$\left.\begin{array}{l} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{array}\right\} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \qquad \text{t kentzen badiogu:}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = r^2 \cos^2 t \\ y^2 = r^2 \sin^2 t \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

Elipsea:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ dugu eta } x = a \cos t \text{ egiten badugu:}$$

$$\frac{a^2 \cos^2 t}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \cos^2 t + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 (1 - \cos^2 t)$$

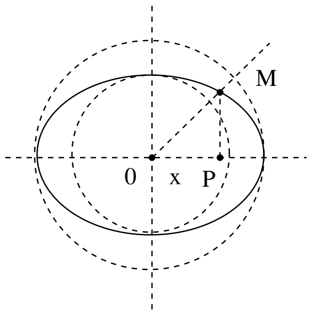
$$\Rightarrow y^2 = b^2 \sin^2 t \Rightarrow y = b \sin t$$

$$\left.\begin{array}{l} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{array}\right\} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \text{ elipsearen ekuazio parametrikoak}$$

Ikus dezagun t–ren esanahia zein den:

Koordenatu–jatorrian erdigunea duten, a eta b erradioko bi zirkunferentzia marraztuko ditugu.

B puntuak eta M (x,y) puntuak abzisa berdina dute. OB eta OX–ek osatzen duten angeluari t deitzen diogu.

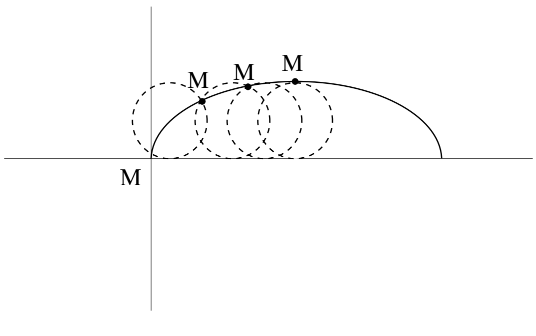


M puntuaren x koordenatuaren balioa OP = a cos t da. Bestalde, CQ = b . sin t, y = b . sin t bigarren ekuazio parametrikoarekin konparatuz, y = CQ.

Beraz, ekuazio parametrikoen t parametroa, OB eta OX–ek osatzen duten angelua da.

Zikloidea

Lerro zuzen batean, biraka ari den, zirkunferentzia baten M puntuak deskribatzen duen kurba da.



Pentsa dezagun hasiera batean M puntua jatorrian dagoela. Zirkunferentziak t biratu eta gero M puntuaren koordenatuak determinatuko ditugu. "a" zirkunferentziaren erradioaren balioa da.

M (x,y) puntuaren x koordenatua: x = OP = OB = PB

Zirkunferentziak, irristatu gabe egiten badu:

$$\left.\begin{array}{l} OB = MB = at \\ pb = MK = a \sin t \end{array}\right\} \quad x = at - a \sin t = a\,(1-\sin t)$$

M (x,y) puntuaren y koordenatua:

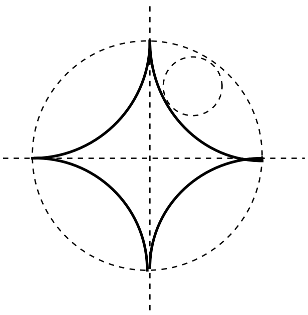
$$y = MP = KB = CB - CK = a - a \cos t = a\,(1 - \cos t)$$

$x = a\,(t - \sin t)$ $y = a\,(1 - \cos t)$	$0 \le t \le 2\pi$

Zikloidearen ekuazio parametrikoak

Astroidea:

a/4 erradioko zirkunferentziaren M puntu batek desbrikatzen duen kurba da, zirkunferentzia hori irristatu gabe "a" erradioko beste zirkunferentzi baten barnean biraka ari denean.



$x = a \cos^3 t$ $y = a \sin^3 t$	$0 \le t \le 2\pi$

Ekuazio parametrikoak

$$\left.\begin{aligned} x^{2/3} &= a^{2/3} \cos^2 t \\ y^{2/3} &= a^{2/3} \sin^2 t \end{aligned}\right\} \quad x^{2/3} + y^{2/3} =$$

$$= a^{2/3} (\cos^2 t + \sin^2 t) \;\Rightarrow\; x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

Kasu partikularrak:

* $\begin{cases} x = x_0 \\ y = g(t) \end{cases}$ erako sistema parametrikoak $x = x_0$ zuzenaren zati bat adierazten du.

Adibidez $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 + \text{cosec } t \end{cases}$

* $\begin{cases} x = f(t) \\ y = y_0 \end{cases}$ erako sistemak $y = y_0$ zuzenaren zati bat adierazten du.

Adibidez $\begin{cases} x = 6/(2+\cos t) \\ y = -1 \end{cases}$

$y = -1$–en zati bat.

8.3.– KURBA BATEKO PUNTUEN KARAKTERIZAZIOA

$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$ sistemak definitzen duen ε kurbaren (x_0,y_0) puntu bati, t–ren balio bakar bat dagokio.

Adibidez: $\begin{cases} x = t^3 - 7t - 2 \\ y = 3t^2 - 6t - 11 \end{cases}$ sistemak definitzen duen kurbako $(-8,-11)$ puntuari $t = 2$ balioa bakarrik dagokio.

Salbuespen bezala, gerta daiteke, ε–ren puntu batzuei parametroaren balio bat baino gehiago egokitzea. Normalean puntu berezi hauek aurkitzeko haztamu edo tanteo neketsua egin behar da. Ikusiko dugun adibidean, nahikoa erraza da puntu hauek aurkitzea:

Izan bedi: $\begin{cases} x = t^3 - 7t - 2 \\ y = 3t^2 - 6t - 11 \end{cases}$

Ordenatu eta abzisa berdinak ematen dituzten t_1 eta t_2 bi balio baldin badaude, ondoko hau bete beharko dute:

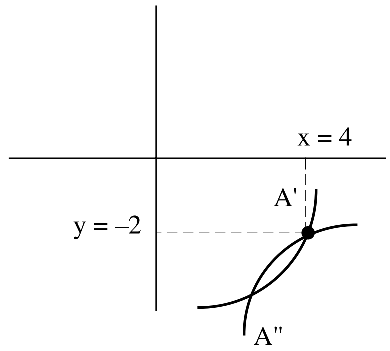
$(t_1^3 - 7t_1 - 2,\ 3t_1^2 - 6t_1 - 11) = t_2^3 - 7t_2 - 2,\ 3t_2^2 - 6t_2 - 11)$ hau da:

$$\left.\begin{array}{l} t_1^3 - 7\ t_1 - 2 = t_2^3 - 7\ t_2 - 2 \\ 3\ t_1^2 - 6\ t_1 - 11 = 3\ t_2^2 - 6\ t_1 - 11 \end{array}\right\}\ \text{edo}$$

$$\left.\begin{array}{l} t_1^3 - t_2^3 - 7\ (t_1 - t_2) = 0 \\ 3\ (t_1^2 - t_1^2) - 6\ (t_1 - t_2) = 0 \end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} (t_1 - t_2)\ (t_1^2 + t_1\ t_2 + t_2^2 - 7) = 0 \\ 3\ (t_1 - t_2)\ (t_1 + t_2 - 2) = 0 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \begin{array}{l} t_1^2 + t_1\ t_2 + t_2^2 - 7 = 0 \\ t_1 + t_2 - 2 = 0 \end{array}$$

Ekuazio sistema hori ebatziz, $\left.\begin{array}{l} t_1 = -1 \\ t_2 = 3 \end{array}\right\}$ eta $\begin{array}{l} t_1 = 3 \\ t_2 = -1 \end{array}$ balioentzat betetzen dela ikusten da. Beraz, t–ren bi balioentzat t = 3 eta t = –1, kurbaren puntu bera lortzen da, eta (4,–2) puntua da.



Irudian, (4,–2) puntuaren inguru bat ikusten da. t = –1 barnean duen I' tarte batek ε kurbaren A' arku bat determinatzen du, eta t = 3 barnean duen I'' tarteak A'' arkua.

Beraz, ε kurbaren puntu–kontzeptua, ez da zenbaki–bikote batera laburtzen; baizik eta, t parametroaren t_0 balio konkretu bat ere barnean du.

Azken adibidean, (4,–2) tokian, ε–en bi "puntu desberdin" gainezartzen dira: bata t = –1 balioari dagokiona, eta bestea T = 3 baliaori dagokiona.

Posizio berdinean, bi, hiru, edo "puntu desberdin" gehiago gainezar daitezke.

8.4.– EREMU PARAMETRIKOAREN LABURKETA

T eremuan ε kurba definitzen duen sistema parametriko bat baldin badugu, gerta daiteke T–ren T_0 zati batek ε kurba osoa determinatzea. Beraz, ε kurba irudikatzeko, T eremu parametrikoa labur daiteke $t \in T_0$ balioak bakarrik kontutan hartuz.

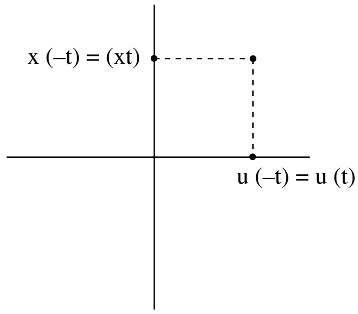
Izan bedi $\begin{cases} x = (t-4)(t-6) \\ y = 4 \cos (t-5) + 10 \end{cases}$ sistema parametrikoa eta bere eremua $T = R$, sistema hau ipin daiteke: $\begin{cases} x = (t-5)^2 - 1 \\ y = 4 \cos (t-5) + 10 \end{cases}$

$t + 5 = z$ aldagai–aldaketa egiten baldin badugu, sistema hau honela gertatzen da: $\begin{cases} x = z^2 - 1 \\ y = 4 \cos z + 10 \end{cases}$

Sistema hau osatzen duten, bi funtzioak bikoitiak dira. Beraz, balio berdinak hartzen dituzte z positibo edo negatiboentzat. Orduan, nahikoa da z positibo kontsideratzea. Horrek hau esan nahi du: $z \geq 0 \Rightarrow t - 5 \geq 0$. Beraz $[5,\infty[$ balioek kurba guztia determinatzen dute. Badaude nahiz eta eremu parametrikoa ez laburtu simetriak sortzen dituzten beste kasu batzuk. Kasu hauetan nahikoa da zati bati begiratzea eta bestea simetriaz irudikatzea. Begiratzen errazenak, "t", "–t"–z ordezkatuz sortzen direnak dira.

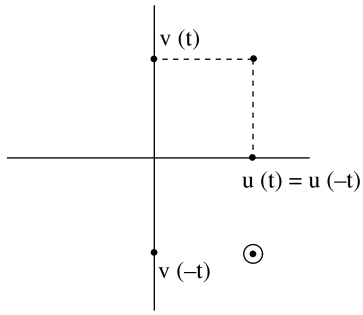
$\left. \begin{array}{l} x = u(t) \\ y = v(t) \end{array} \right\}$ sistema parametrikoan "t", "–t"z ordezkatzean hau gerta daiteke:

1. kasua



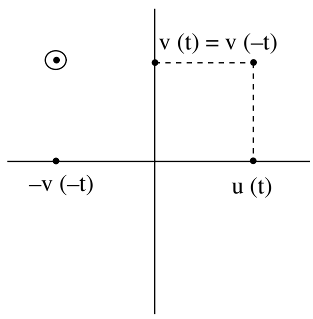
$\left.\begin{array}{l} u(-t) = u(t) \\ v(-t) = v(t) \end{array}\right\}$ puntuak errepikatu egingo dira; sistema labur daiteke.

2. kasua



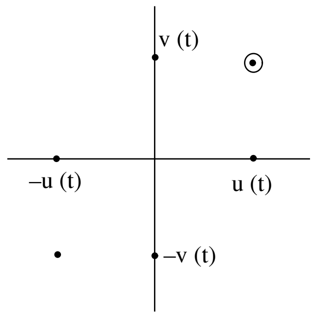
$\left.\begin{array}{l} u(-t) = u(t) \\ v(-t) = -v(t) \end{array}\right\}$ x errepikatu egiten da, y–k alderantzizko zeinua dauka. OX ardatzarekiko simetria dago.

3. kasua



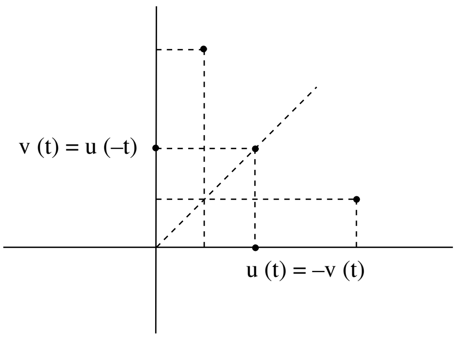
$$\left.\begin{array}{l} u(-t) = -u(t) \\ v(-t) = v(t) \end{array}\right\}$$ x–ek alderantzizko zeinua dauka, y–k zeinu berdina dauka. OY ardatzarekiko simetria dago.

4. kasua



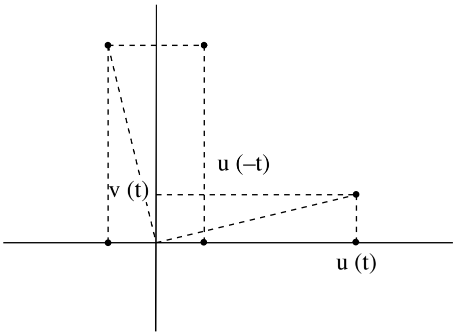
$$\left.\begin{array}{l} u(-t) = -u(t) \\ v(-t) = -v(t) \end{array}\right\}$$ x–ek eta y–k alderantzizko zeinua dute. Jatorri–puntuko simetria dago.

5. kasua



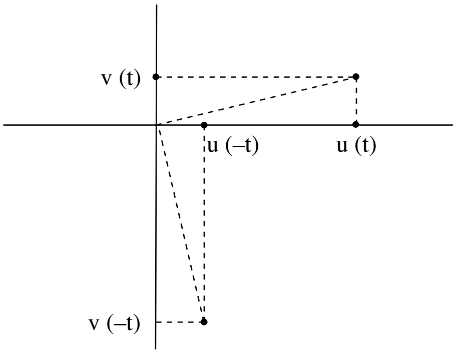
$$\left.\begin{array}{l} u(-t) = v(t) \\ v(-t) = u(t) \end{array}\right\}$$ x,y bihurtzen da eta y,x bihurtzen da. y = x zuzenarekiko simetria.

6. kasua



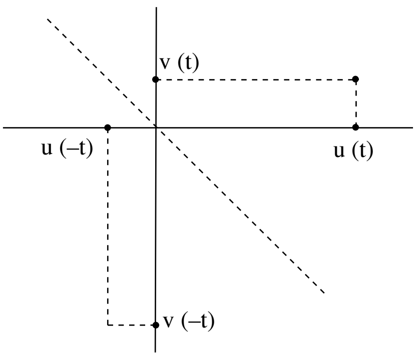
$$\left.\begin{array}{l} u(-t) = -v(t) \\ v(-t) = u(t) \end{array}\right\}$$ x–en ordez –y eta y–ren ordez x. $\pi/2$–ko biraketa.

7. kasua



$$\left.\begin{array}{l} u(-t) = v(t) \\ v(-t) = -u(t) \end{array}\right\}$$ x–en ordez y eta y–ren ordez –x. $-\pi/2$–ko biraketa.

8. kasua



$$\left.\begin{array}{l} u(-t) = -v(t) \\ v(-t) = -u(t) \end{array}\right\}$$ x–en ordez –y eta y–ren ordez x. y = –x zuzenarekiko simetria.

8.5.– PARAMETRIKOKI EMANDAKO FUNTZIOAREN DERIBATUA

Pentsa dezagun funtzioaren adierazpen parametrikoa ondoko hau dela:

$$\left.\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array}\right\} \quad t_0 \le t \le T$$

Horretaz gain, f eta g funtzioek deribatua dutela pentsatuko dugu. Beraz:

$$\left.\begin{array}{l} x'_t = f'(t) \\ y'_t = g'(t) \end{array}\right\} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Bigarren deribatua kalkulatzeko:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\,(y'_t/x'_t)}{dx} = \frac{d(y'_t/x'_t)\,/\,dt}{dx/dt} =$$

$$= \frac{(y''_t \,.\, x'_t - y'_t \,.\, x''_t)\,/x'^2_t}{x'_t} = \frac{y''_t\, x'_t - y'_t\, x''_t}{x'^3_t}$$

Era berean jokatzen da edozein ordenatako deribatuak kalkulatzeko.

Adibidea:

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 \sin t + 2 \cos t \\ y = \cos 2t \end{array}\right\}$$ funtzioaren deribatuak:

$$\left.\begin{array}{l} x' = 4 \cos t - 2 \sin t \\ y' = -2 \sin 2t \end{array}\right\} \quad y'_x = \frac{-2 \sin t}{4 \cos t - 2 \sin t}$$

$$\left.\begin{array}{l} x'' = -4 \sin t - 2 \cos t \\ y'' = -4 \cos 2t \end{array}\right\} \; y''_t =$$

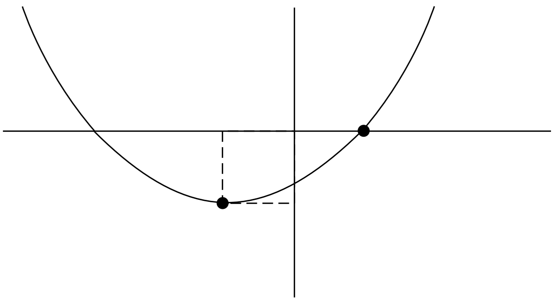
$$= \frac{-4 \cos 2t\,(4 \cos t - 2 \sin t) + 2 \sin 2t\,(-4 \sin t - 2 \cos t)}{(4 \cos t - 2 \sin t)^3} =$$

$$= \frac{-4\,(4 \cos^3 t + 2 \sin^2 t)}{(4 \cos t - 2 \sin t)^3}$$

Gorakortasun– eta beherakortasun–tarteak, eta ahurtasun– eta ganbiltasun–tarteak beraiei dagozkien deribatuekin, berdin kalkulatzen dira.

Lehenengo deribatua zero edo ∞ egiten duten puntuei puntu kritiko deituko diegu. Kontutan hartu maximo edo minimo diren jakiteko ezin dugula lehenengo deribatuaren erizpidea erabili. Adibidez:

$$\left.\begin{array}{l} y = t^2 - 2t \\ x = -2t + 1 \end{array}\right\} \text{puntu kritikoak kalkulatuz:}$$



$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ eginez } \frac{2t-2}{-2} = 0 \;\Rightarrow\; t = 1$$

$(-\infty,1)$ tartean funtzioa gorakorra da.

$(1,\infty)$ tartean funtzioa beherakorra da.

Baina irudian ikusten denez, funtzio horrek minimo bat du $t = 1$ puntuan.

Ariketa proposatuak:

Egin funtzio hauen adierazpen grafikoa:

1) $x = \dfrac{1}{t^2+t}$

$y = \dfrac{1}{t^2-t}$

2) $y = \dfrac{t-2}{t^2-t}$

$x = \dfrac{t}{t^2-1}$

3) $x = \dfrac{-t^3}{t-1}$

$y = \dfrac{-t^2}{t-1}$

4) $x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$y = \dfrac{t+2}{1-t^2}$

5) $x = \dfrac{t}{1-t^2}$

$y = \dfrac{t^2}{1-t}$

6) $x = \tan t$

$y = \dfrac{1}{\sin t}$

7) $x = \tan t$

$y = \dfrac{1}{1-\sin t}$

8) $x = 1 + \cot t$

$y = \dfrac{1}{\sin t}$

9) $x = \dfrac{1}{\sin 2t}$

$y = \dfrac{1}{1-\sin t}$

10) $x = \tan t - \sin t$

$y = \tan t - \cos t$

8.6.– ADAR INFINITUAK

$t = t_0$ puntuan $\lim\limits_{t \to t_0} x$ edo $\lim\limits_{t \to t_0} y$ infinitu badira, funtzio batek adar infinitu bat duela esango dugu. t_0 ere infinitu izan daiteke.

Adar infinitu batek zuzen asintotikoa baldin badu, "adar hiperboliko" deituko diogu, asintota eduki gabe norabide bati jarraitzen bazaio "adar paraboliko" eta baldintza hauek betetzen ez baldin baditu, "adar infinitu" besterik gabe. Zein motatako adarra den nola jakin ikusiko dugu orain.

1.– $\lim\limits_{t \to t_0} x = x_0$ eta $\lim\limits_{t \to t_0} y = \infty$ adar hiperbolikoa da eta berari dagokion asintota $x = x_0$ zuzena.

2.– $\lim\limits_{t \to t_0} x = \infty$ eta $\lim\limits_{t \to t_0} y = y_0$ adar hiperbolikoa da eta berari dagokion asintota $x = y_0$ zuzena.

3.– $\lim\limits_{t \to t_0} x = \infty$ eta $\lim\limits_{t \to t_0} y = \infty$ lau kasu daude:

a) $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y}{x} = m$ eta $\lim\limits_{t \to t_0} (y-mx) = b$ adar hiperbolikoa da eta berari dagokion asintota $y = mx + b$ zuzena.

b) $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y}{x} = m$ eta $\lim\limits_{t \to t_0} (y-mx) = \infty$ adar parabolikoa $y = mx$ zuzenaren norabidean.

c) $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y}{x} = \infty$ adar parabolikoa OY–ren norabidean.

d) bi limiteetako bat existitzen ez bada adarra ez da parabolikoa eta ezta hiperbolikoa ere.

8.7.– KURBAK KOORDENATU POLARRETAN

Koordenatu polarrak

Oro har planoko puntuak, (x,y) bikote baten bidez adierazten dira, x–i abzisa eta y–ri ordenatu deituz. Era honi era cartesiar deituko diogu.

Baina $\forall (x,y) \in R^2$ aldagai aldaketa hau egiten badugu:

$\begin{array}{l} x = \rho \cos \omega \\ y = \rho \sin \omega \end{array}$ puntu bakoitzarentzat infinitu (ω,ρ) daude hau betetzen dutenak, $\rho^2 = x^2 + y^2$ eta $\cos \omega = x/\rho$, $\sin \omega = y/\rho$

ρ positibo bezala hartzen badugu, ω izan daiteke $\omega_0+2k\pi$

ρ negatibo bezala hartzen badugu, $\omega_1+2k\pi$ izan daiteke.

(ω,ρ) bikoteari puntuaren koordenatu polar deituko diogu.

Adibidea: $(-2,2\sqrt{3})$ puntua

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \;\Rightarrow\; \rho^2 = 4 + 12 \;\Rightarrow\; \rho^2 = 16 \;\Rightarrow\; \rho = \pm 4$$

$\rho = 4$ baldin bada $\Rightarrow$ $\cos\omega = -2/4 = -1/2$, $\sin\omega = 2\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/2$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\omega_0 = 2\pi/3$ $\Rightarrow$ $\omega = 2\pi/3+2k\pi$

$\rho = -4$ bezala hartzen badugu: $\cos\omega = -2/-4 = 1/2$, $\sin\omega = 2\sqrt{3}/-4 =$
$= -\sqrt{3}/2$ $\Rightarrow$ $\omega_1 = 11\pi/3+2k\pi$

ρ positibotzat hartzen badugu, koordenatu propioen aurrean egongo gara. ρ negatibo bezala hartzen badugu, koordenatu inpropioak izango dira.

ρ modulua izango da eta ω argumentua.

$\omega_0 \in [-\pi,\pi]$ tartean badago, (ρ,ω)–ri lehenengo irudia deitzen zaio. $\omega_0 \in [0,2\pi]$ tartean badago, (ρ,ω)–ri bigarren irudia deitzen zaio.

$(0,0)$ puntuko koordenatu polarrak $\rho = 0$ eta edozein ω dira.

Kurba baten ekuazio polarra

Izan bedi $f(x,y) = 0$ kurba baten ekuazio cartesiarra.

$\begin{matrix} x = \rho\cos\omega \\ y = \rho\sin\omega \end{matrix}$ aldagai–aldaketa egitean $f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega) = 0$ geratuko da eta hau $g(\rho,\omega) = 0$ adieraziko da. $g(\rho,\omega) = 0$ espresioari kurba–ren ekuazio polar deituko diogu.

Adibidea:

$(x-1)^2 + y^2 = 9$ zirkunferentzia era polarrera pasata:

$$\begin{matrix} x = \rho\cos\omega \\ y = \rho\sin\omega \end{matrix} \quad (\rho\cos\omega - 1)^2 + (\rho\sin\omega)^2 = 9 \;\Rightarrow$$

$\rho^2\cos^2\omega - 2\ \ \cos\omega + 1 + \rho^2\sin^2\omega = 9$ $\Rightarrow$ $\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 8 = 0$ da ekuazio polarra.

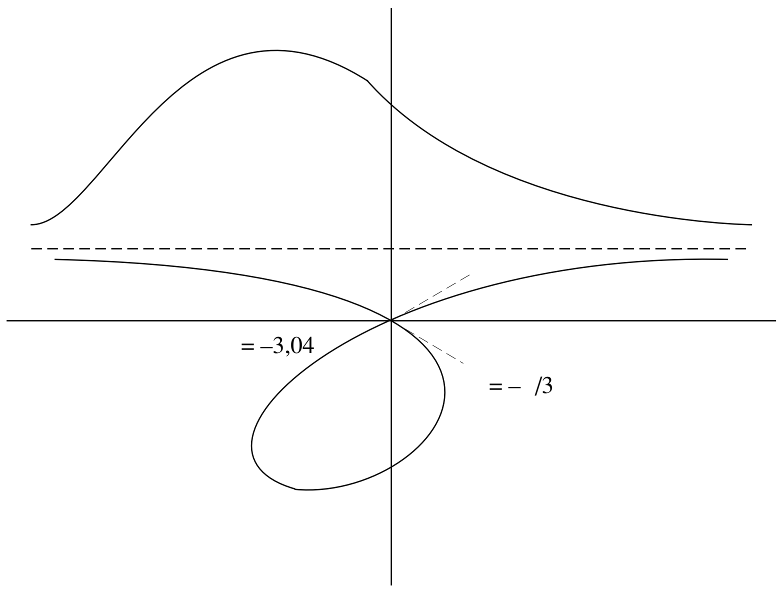
Alderantziz, oso zaila da:

$\rho = \dfrac{1}{\sin \omega} + \omega^2$ era parametrikoan ipinita:

$$x = \left[\frac{1}{\sin \omega} + \omega^2\right] \cos \omega$$

$\omega \in [-\pi,\pi]$ tartean hartzen badugu

$$y = \left[\frac{1}{\sin \omega} + \omega^2\right] \sin \omega$$



1.– $\omega \in\,]0,\pi/2] \;\Rightarrow\; 0 < \dfrac{1}{\sin \omega} + \omega^2 = \rho = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \omega = \text{arc tan}\ \dfrac{y}{x}$

2.– $\omega \in [\pi/2,\pi] \;\Rightarrow\; 0 < \dfrac{1}{\sin \omega} + \omega^2 = \rho \qquad \omega = \pi + \text{arc tan}\ \dfrac{y}{x}$

3.– $\omega \in [-\pi,-3{,}04] \;\Rightarrow\; 0 > \dfrac{1}{\sin \omega} + \omega^2 = \rho = -\sqrt{x^2+y^2}$

$\omega = -\pi + \text{arc tan}\ \dfrac{y}{x}$

4.– $\omega \in [-3{,}04,-\pi/2] \;\Rightarrow\; 0 < \dfrac{1}{\sin \omega} + \omega^2 = \rho \qquad \omega = -\pi + \text{arc tan}\ \dfrac{y}{x}$

5.– $\omega \in [-\pi/2,-\pi/3] \;\Rightarrow\; 0 < \dfrac{1}{\sin\omega} + \omega^2 = \rho \quad \omega = \text{arc tan}\,\dfrac{y}{x}$

6.– $\omega \in [-\pi/3,0] \;\Rightarrow\; 0 > \dfrac{1}{\sin\omega} + \omega^2 = \rho \quad \omega = \text{arc tan}\,\dfrac{y}{x}$

era cartesiarrean ipintzea nahi baldin badugu:
1 eta 5 zatiak era honetara ipin daitezke:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{y:\sqrt{x^2+y^2}} + \left[\text{arc tan}\,\frac{y}{x}\right]^2$$

Bigarren zatia era honetara:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{y:\sqrt{x^2+y^2}} + \left[\pi + \text{arc tan}\,\frac{y}{x}\right]^2$$

Hirugarren zatiko puntuak:

$$-\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{-y:\sqrt{x^2+y^2}} + \left[-\pi + \text{arc tan}\,\frac{y}{x}\right]^2$$

Laugarren zatikoak:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{y:\sqrt{x^2+y^2}} + \left[-\pi + \text{arc tan}\,\frac{y}{x}\right]^2$$

Bostgarren zatikoak

$$-\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{-y:\sqrt{x^2+y^2}} + \left[\text{arc tan}\,\frac{y}{x}\right]^2$$

Adibidea: $\omega - \rho^3 - \rho = 0$

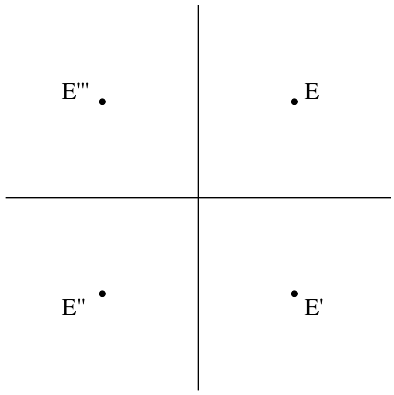
$x = \rho \cos(\rho^3 - \rho)$

$y = \rho \sin(\rho^3 - \rho)$ ezin daiteke era esplizituan ipini.

Beste kasu batzuetan ezin da ez ρ, ez ω isolatu eta ezin da era parametrikoan ere ipini.

Simetria era polarrean

E (ω,ρ) puntu bat baldin badugu eta ω–ren ordez $-\omega$ ipinita puntu hori E' puntura pasatzen da. Horrek, ω–ren ordez $-\omega$ ipintzean, kurba baten modulua berdin geratzen bada kurba hori OX ardatzarekiko simetrikoa dela esan nahi du.



Orain ρ–ren ordez, $-\rho$ ipintzen baldin badugu, E puntua E'' puntura doa. Horrek, kurba batean ρ–ren ordez $-\rho$ ipinita ω berdin garatzen bada kurba hori jatorri–puntuarekiko simetrikoa dela esan nahi du.

ω eta ρ–ren ordez $-\omega$ eta $-\rho$ ipinita E puntua E'''–ra doa. Orduan kurba batean bat aldatzean bestea ere aldatzen bada, OY–rekiko simetrikoa izango da.

Adibideak:

1.– $\rho = \cos\omega - \sec\omega$; ω–ren ordez $-\omega$ ipinita, ez kosinua eta ez sekantea ez dira aldatzen. Beraz, OX ardatzarekiko simetria edukiko dugu.

2.– $\rho = \sin\omega$; ω–ren ordez $-\omega$ ipinita, $\sin\omega$ ere zeinuz aldatzen da. Beraz, OY ardatzarekiko simetria daukagu.

3.– $\omega = \rho^2 + 2$; ρ–ren ordez $-\rho$ ipinita ω ez da aldatzen eta koordenatu–
–jatorriarekiko simetria dauka kurba honek.

ω–ren ordez $-\omega$ ipinita, kurba a angelua biratzen da. "KONTUZ PERIODOAREKIN".

Era polarrean dauden kurben deribatuak

Oso erraza da deribatu bat bere alderantzizkoarekin erlazionatzea. Dakigunez: (dy/dx) . (dx/dy) = 1

d^2y/dx^2 eta d^2x/dy^2 erlazionatzea nahi baldin badugu:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d\,[dx/dy]}{dy} = \frac{d\,[1:(dy/dx)]/dx}{dy/dx} = \frac{(-d^2y/dx^2)/(dy/dx)^2}{dy/dx}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{d^2y}{dx^2}\left[\frac{dy}{dx}\right]^2$$

erlazio hauek era polarrera pasatuta:

$$\frac{d}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{d} = 1 \quad \text{eta} \quad \frac{d^2}{d\omega^2} = -\frac{d^2\omega}{d^2}\left[\frac{d\omega}{d}\right]^2$$

Orain y–ren deribatuak, x–ekiko era polarrekoekin erlazionatuko ditugu.

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\omega \\ y = \rho\sin\omega \end{array}\right| \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\omega}{dx/d\omega} = \frac{\rho\cos\omega + (d\rho/d\omega)\sin\omega}{-\rho\sin\omega + (d\rho/d\omega)\cos\omega} =$$

$$= \frac{\rho\cos\omega + \rho'\sin\omega}{-\rho\sin\omega + \rho'\cos\omega} = \frac{\rho\,\omega'\cos\omega + \sin\omega}{-\rho\,\omega'\sin\omega + \cos\omega}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho.\rho''}{(-\rho\sin\omega + \rho'\cos\omega)^3} = \frac{\rho^2\,\omega'^3 + \rho\omega'' + 2\omega'}{(-\omega'\,\rho\sin\omega + \cos\omega)^3}$$

Alderantziz erlazionatzea askoz zailagoa da.

Kurbaren puntu kritikoak, gorakor–beherakor tarteak eta abar, formula hauek erabiliz kalkulatzen dira.

Asintotak era polarrean

Adar infinituen definizioa gogoratuz eta adar horiek parabolikoak edo hiperbolikoak izateko aurreko gaiaren baldintza berdinak bete behar dituztela kontutan harturik, kasu bakoitzean malda eta koordenatu–jatorrian ordenatua nola kalkulatu ikustea bakarrik falta zaigu.

Lehenbizi $\rho = f(\omega)$ deneko kasua aztertuko dugu:

Kasu honetan ω_0 bat edukiko dugu $\omega \to \omega_0$–rantz doanean $\rho \to \infty$ doanik:

1.– $\cos \omega_0 = 0$ bada, asintota egotekotan bertikala izango da. Beraz $\lim\limits_{\omega \to \omega_0} \rho \cos \omega = x_0$ bada, $x = x_0$ asintota da $x_0 = \infty$ bada, adar parabolikoa dago OY norabidean.

2.– $\cos \omega_0 \neq 0$ izanik asintota baldin badago, $y = ax + b$ izango da eta $a = \lim\limits_{\omega \to \omega_0} (y/x) = \lim (\rho \sin \omega / \rho \cos \omega) = \tan \omega_0$

$$b = \lim_{\omega \to \omega_0} (y - ax) =$$

$$= \lim_{\omega \to \omega_0} (\rho \sin \omega - \tan \omega_0\, \rho \cos \omega) \quad \lim_{\omega \to \omega_0} \frac{\rho \sin (\omega - \omega_0)}{\cos \omega_0}$$

Bigarren kasuan, $\omega = g(\rho)$ $\rho \to \pm\infty$ ω limite finiturik duen ikusi behar dugu eta orduan aurreko kasuan bezala aztertu.

Ariketa proposatuak

Egin funtzio hauen adierazpen grafikoa:

$\rho = \sin 3\omega$	$\rho = \dfrac{1}{\omega\,(\omega - \pi/3)}$
$\rho = \dfrac{1}{\cos 3\omega}$	$\rho = \dfrac{\sin \omega}{\omega}$
$\rho = \cos 2\omega$	$\omega = \rho^2 - 5\rho + 6$
$\rho = \dfrac{1}{\sin 2\omega}$	$\rho = \tan 2\omega$
$\rho = \dfrac{1}{\cos^2 \omega}$	$\rho = \cot 2\omega$

$\rho = \cos \frac{\omega}{3}$

$\rho = \cot \omega - 1$

$\rho = \frac{1}{\sin \omega/3}$

$\rho = \sin^{-1} \omega + \cos^{-1} \omega$

$\rho = \tan \omega$

$\rho = \cos \omega + \cos^{-1} \omega$

$\rho = \frac{1}{\omega - \pi/6}$

$\rho = \sin \omega + \sin^{-1} \omega$

$\rho = \frac{\sin \omega}{1+\sin \omega}$

$\rho = \frac{1}{\sin^2 \omega . \cos \omega}$

$\rho = \frac{\sin \omega}{1 + \sin \omega}$

$\rho = \frac{1}{2 \sin \omega + 1}$

$\rho = \frac{1}{1 - \sin 2\omega}$

$\rho = \frac{\sin \omega - 1}{\cos \omega}$

$\rho = \frac{\cos \omega}{\sin \omega + \cos \omega}$

$\omega = \frac{1}{\rho - 3}$

$\rho = \frac{\sin \omega}{\sin \omega - \cos \omega}$

$\omega = \frac{1}{\rho^2 + \rho - 1}$

$\rho = \frac{\sin \omega + \cos \omega}{\sin \omega - \cos \omega}$

$\rho = \frac{\sin 2\omega}{\cos \omega + \sin \omega}$

$\rho = \frac{\sin 2\omega}{1 + \sin \omega}$

$\rho = \frac{1 + \cos \omega}{1 + \sin \omega}$

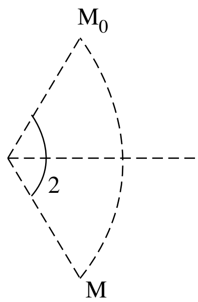
$\rho = \frac{1 + \sin \omega}{1 - \sin \omega}$

$\rho = \frac{1 + \sin \omega}{1 + \cos \omega}$

$$\rho = 1 + \frac{1}{\sin 2\omega}$$

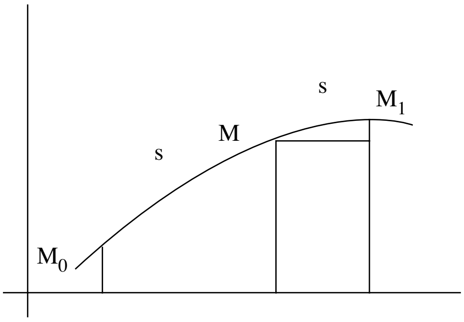
8.8.– KURBADURA

Demagun M_0M $y = f(x)$–en arku bat dela. Orduan, $\lim\limits_{M_0 \to M} \dfrac{M_0M}{\overline{M_0M}} = 1$ hau kasu orokorrean frogatzea zaila da, baina zirkunferentziaren kasuan ez.

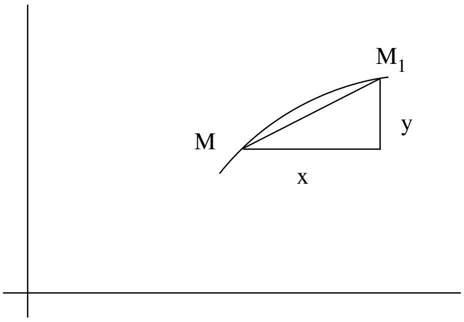


$$\lim_{m \to m_0} \frac{M_0M}{\overline{M_0M}} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{2R\,\alpha}{2R \sin \alpha} = 1$$

Har dezagun $y = f(x)$ kurba bat. x Δx aldatzean, s ere Δs aldatu egiten dela konturatzen gara.



Beraz s x–en funtzio da eta bere deribatua x–ekiko kalkula dezakegu.



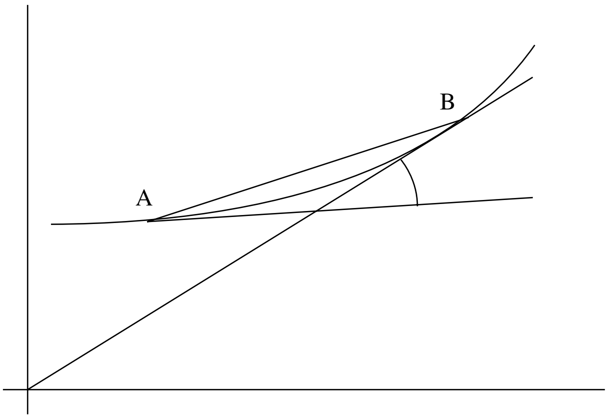
$-M\text{-}M_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ beraz

$$\frac{-M\text{-}M_1}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta x} = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta x^2} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{ds}{dx}$$

Hau erabili daiteke $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ bezala.

Kurbadura era cartesiarrean

Har dezagun y = f (x) kurbaren arku bat. AB $\Delta\alpha$ A eta B–ren ukitzaileek betetzen duten angelua baldin bada,



Batezbesteko kurbadura honela definituko dugu:

$$K_b = \frac{\Delta\alpha}{AB}$$

K_a A puntuko kurbadura honela definituko dugu:

$$\lim_{B \to A} K_b = K_a$$

$$K_b = \frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|} = K = \lim_{s \to 0} \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

α eta s x–en menpe daudenez gero, kalkula dezakegu:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} \quad ; \quad K = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$$ biak x–en funtzio direnez,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha/dx}{ds/dx}$$ baina $\tan\alpha = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \alpha = \arctan\frac{dy}{dx}$ eta

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2y/dx^2}{1+(dy/dx)^2}.$$ Bestalde $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Beraz $K = \dfrac{|d^2y/dx^2|}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}$

Kurbadura era parametrikoan kalkulatzeko ondokoa kontutan hartuko dugu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a'(t)}{b'(t)} \quad \text{eta} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b''a' - b'a''}{a'^3}$$

Beraz, $K = \dfrac{|b''a' - b'a''|}{[a'^2 + b'^2]^{3/2}}$

eta kurba era polarrean badago:

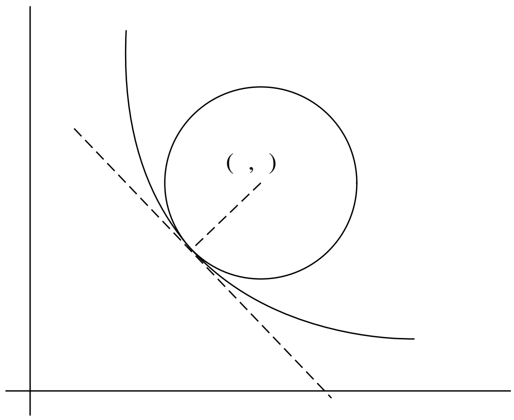
$$K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

Kurbadur erradioa, kurbadur zentrua eta kurbadur zirkulua

Kurbadur erradioa, R = 1/K da.

Kurbadur zentrua puntu horretatik pasatu eta R erradioa duen zirkuluaren zentrua da, eta kurbadur zirkulua aurreko zirkulua da.

Kurbadur zentrua kalkulatzeko kontutan hartuko dugu puntu horretan erradioa eta ukitzailea zuzen elkartzutak izango direla, irudian ikusten den bezala.



Kurbadur zentruaren koordenatuak (α,β) badira, puntu honek ekuazio hau bete behar du:

$$Y - y = \frac{-1}{y'}\ (X-x) \ \Rightarrow\ \beta - y = \frac{-1}{y'}\ (\alpha - x)$$

Gainera (x,y) puntuak kurbadur zirkuluaren ekuazioa bete behar du $\Rightarrow$

$$(\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2 = R^2, \text{ baina } \beta - y = \frac{-1}{y'}\ (\alpha-x) \ \Rightarrow$$

$$(\alpha-x)^2 + \frac{1}{y'}\ (\alpha-x)^2 = R^2 \ \Rightarrow\ \alpha - x = \pm \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\, R \ \Rightarrow$$

$$\alpha = x \pm \frac{y'\,(1+y'^2)}{|y''|} \qquad \beta = y \pm \frac{1+y'^2}{|y''|}$$

y''–ren zeinua kontutan hartuko dugu, zein zeinu ipini jakiteko. y'' > 0 bada, funtzioa ahurra da eta kurbadur zirkulua funtzioaren gainetik dago. Beraz β y baino handiagoa da eta + zeinua ipini behar dugu.

y'' negatiboa bada, funtzioa ganbila da, β y baino txikiagoa da, baina y'' balio absolutu gabe jartzen badugu, formulan berak dauka minus zeinua eta + aukeratu behar dugu. Beraz y–ri beti + zeinua ipinita x–i beti minus jarri behar diogu, eta formulak honela geratzen dira:

$$\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \quad ; \quad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

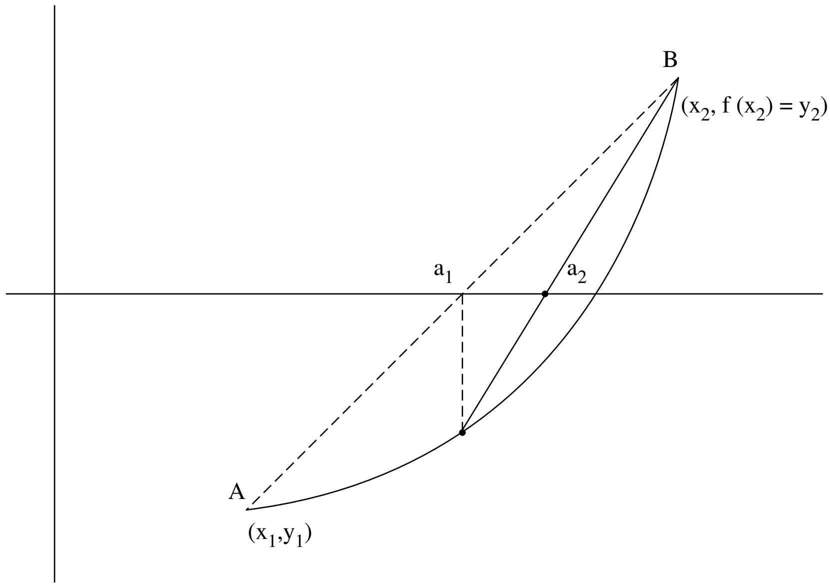
Ekuazioen erroak

Hemen edozein funtzioren erroak kalkulatzeko hurbilketa–metodo batzuk ikusiko ditugu, erro zehatzak ezagutu ezin ditugun kasurako.

1.– Korden metodoa

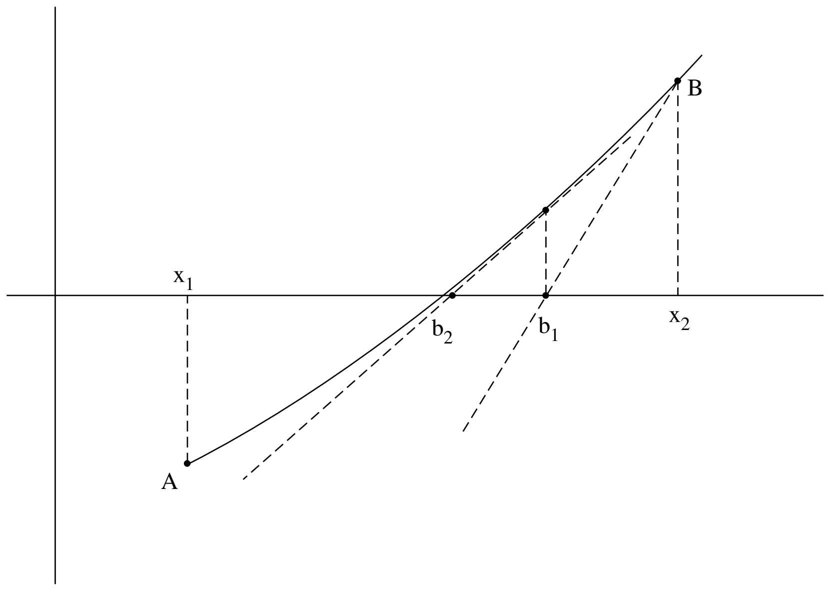
f (x) funtzio bat [a,b] tartean jarraia eta deribagarria bada eta tarte horretako muturretan zeinu desberdineko balioak hartzen baditu, gutxienez erro bat du tarte horren barnean.

Korden metodoa erabiltzeko, erro bakarra dagoela segurtatu behar dugu eta horretarako tartea txikiagotu egingo dugu funtzioa tarte horretan monotonoa izan dadin (muturretan funtzioak zeinu desberdinak hartuz hain zuzen) eta $[x_1,x_2]$ tarte bat edukiko dugu. Irudian ikusten den bezala, A eta B puntuetatik pasatzen den zuzena aurkitzen badugu, $y-y_1 = \frac{(y_2-y_1)(x-x_1)}{(x_2-x_1)}$, zuzen honek abzisa–ardatza a_1 puntuan ebakiko du eta hau izango da erroaren lehen hurbilketa. $a_1 = x_1 - \frac{(x_2-x_1)\,y_1}{y_2-y_1}$ balio hau eta f (a_1) balioa kontutan harturik, beste tarte bat $[a_1,x_2]$ bilatuko dugu, eta errepikatuz, nahi den zehaztasuna lortu arte bilatzen da erroa.



2.– Ukitzailearen metodoa.

Hemen aurreko baldintzez gain bigarren deribatuaren zeinua ere tartean mantendu egiten dela segurtatu behar dugu. Bestela ezin dugu metodoa segurtatu, ikusiko dugunez:



Hemen korda erabili beharrean ukitzailea erabiliko dugu.

Tartearen mutur batean, ukitzailearen ekuazioa $y-y_0 = y'_0\,(x-x_0)$ da eta zuzen honek abzisa–ardatza ebakitzen duen puntuari b_1 deitzen badiogu, b_1–en balioa: $b_1 = x_0 - \dfrac{y_0}{y'_0}$

y"–k zeinua mantentzeak, bi muturretako bat b_1 tarte barruan dagoela segurtatzen digu.

b_1 erroaren lehen hurbilketa da, eta horrela jarraituz, nahi dugun zehaztasuna lortuko dugu.

3.– Metodo konbinatua

Metodo honek bi aurrekoak batera erabiltzen ditu pauso bakoitzean: a_1 eta b_1 aurkitu eta hau erabili tarte berri bezala.

Ariketa proposatuak:

1.– Bilatu funtzio hauen kurbadura, kurbadur erradioa eta kurbadur zentrua.

* $y = \ln x$

* $y = e^x$

* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

* $\begin{cases} x = 3t \\ y = t^2 - 6 \end{cases}$

* $\begin{cases} x = a\,(\cos t + t \sin t) \\ y = a\,(\sin t - t \cos t) \end{cases}$

* $\rho = \cos 3\omega$

2.– Frogatu $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ kurban (lemniskatan) kurbadur erradio bektorearekiko proportzionala dela.

3.– Bilatu $y = ax^2 + bx + c$ parabolaren koefizienteak, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ puntuan ukitzailea eta kurbadura, $y = \sin x$ funtzioaren berdinak eduki ditzan.

4.– $y = f(x)$ funtzioa, honela definiturik dago:

$f(x) = x^3 \qquad -\infty < x \leq 1$

$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad 1 < x < +\infty$

Bila a, b eta c, $y = f(x)$–ek kurbadura jarraia eduki dezan puntu guztietan.

5.– Bila ekuazio hauen erroak:

a) $x e^x = 2$	0,01eko	zehaztasunarekin
b) $x \ln x = 0{,}8$	"	"
c) $x^2 \arctan x = 1$	0,001eko	"

9. INTEGRAL MUGAGABEA

9.1. JATORRIZKO FUNTZIOA

9.2. INTEGRALEN TAULA

9.3. INTEGRAL MUGAGABEAREN PROPIETATEAK

9.4. INTEGRALAK KALKULATZEKO ORDEZKATZE–
–METODOA

9.5. ZATIKAKO INTEGRAZIOA

9.6. FUNTZIO RAZIONALEN INTEGRAZIOA

9.7. HERMITE–REN METODOA

9.8. FUNTZIO IRRAZIONALEN INTEGRALAK

9.9. BINOMIO DIFERENTZIALEN INTEGRALAK

9.10. INTEGRAL TRIGONOMETRIKOAK

9.11. FUNTZIO IRRAZIONALEN INTEGRAZIOA
ALDAKETA TRIGONOMETRIKOAK ERABILIZ

9.12. ARIKETAK

9.1.– JATORRIZKO FUNTZIOA

Orain arte, funtzio bat emanik bere deribatua kalkulatzen saiatu gara. Orain alderantziz egingo dugu. $f(x)$ emanik, $F(x)$ beste funtzio bat lortuko dugu, non $F'(x) = f(x)$.

Definizioa:

[ab] tarte baten puntu guztietan $F'(x) = f(x)$ betetzen baldin bada, $F(x)$, $f(x)$–en jatorrizko funtzioa dela esango dugu.

Adibidea:

$f(x) = 3x^2$ funtzioaren jatorrizko funtzioa $F(x) = x^3$ da.

Baina jatorrizko funtzioa baldin badago, ez da bakarra. $f(x) = 3x^2$–ren jatorrizko funtzioa $F(x) = x^3$ da, baina $F_1(x) = x^3 + 1$ ere $f(x)$–en jatorrizko funtzioa da.

Teorema:

$F_1(x)$ eta $F_2(x)$, $f(x)$–en jatorrizko funtzioak baldin badira, $F_1(x) - F_2(x)$ konstante bat da.

Frogapena:

Jatorrizko funtzioaren definiziotik, ondokoa dakigu:

$F'_1(x) = f(x)$

$F'_2(x) = f(x)$

$F_1(x) - F_2(x) = g(x)$ egiten baldin badugu $\Rightarrow$ $F'_1(x) - F'_2(x) =$ $= g'(x) \Rightarrow f(x) - f(x) = g'(x) \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = \text{kte}$.

Definizioa:

$F(x)$, $f(x)$–en jatorrizko funtzioa baldin bada, $F(x) + C$–ri, $f(x)$–en integral mugagabe deitzen zaio. Integral mugagabea $\int f(x)\,dx$ idazten da.

Definizio honetatik honako hau ateratzen da:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx \quad \text{eta}$$

$$\int d\,F(x) = F(x) + C$$

9.2.– INTEGRALEN TAULA

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + K$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + K$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + K$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + K$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + K$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln(\cos x) + K$$

$$\int e^x\,dx = e^x + K$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + K$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tan } x + K$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x + K$$

9.3.– INTEGRAL MUGAGABEAREN PROPIETATEAK

1. Teorema

$$\int [f_1 (x) + f_2 (x)] \, dx = \int f_1 (x) \, dx + \int f_2 (x) \, dx$$

Frogapena

$$\left(\int [f_1 (x) + f_2 (x)] \, dx\right)' = f_1 (x) + f_2 (x)$$

$$\left(\int f_1 (x) \, dx + \int f_2 (x) \, dx\right)' = (f_1 (x) \, dx)' + (f_2 (x) \, dx)' =$$

$$= f_1 (x) + f_2 (x) \;\Rightarrow$$

$$\left(\int [f_1 (x) + f_2 (x)] \, dx\right) = \int f_1 (x) \, dx + \int f_2 (x) \, dx = \text{kte.}$$

$\Rightarrow$ integral mugagabe bezala berdinak dira.

2. Teorema

$$\int a \, f (x) \, dx = a \int f (x) \, dx$$

Frogapena aurrekoa bezala egiten da.

9.4.– INTEGRALAK KALKULATZEKO ORDEZKATZE–METODOA

Pentsa dezagun f (x) funtzioaren integrala kalkulatzea nahi dugula, $x = \varphi (t)$ aldagai–aldaketa egiten baldin badugu:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)].\varphi'(t)\,dt$$

Hau frogatzeko, bi aldeek deribatu berdina dutela frogatuko dugu:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

Beste aldea x–ekiko deribatuko dugu:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\right)' = \left(\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\right)' \frac{dt}{\in dx} =$$

$$= f[\varphi(t))]\,.\,\varphi'(t)\,.\,\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x)$$

Oharra: Askotan hobe da $t = \varphi(x)$ egitea. $x = \psi(t)$ egin beharrean.

Adibidea:

$$\int \sqrt{\sin x}\,\cos x\,dx$$

$\sin x = t$ aldagai–aldaketa egiten baldin badugu:

$$\cos x\,dx = dt \;\Rightarrow \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{1/2}\,dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + K = \frac{2}{3}\,(\sin x)^{3/2} + K$$

9.5.– ZATIKAKO INTEGRAZIOA

Dakigunez u eta v bi funtzio deribagarriak baldin badira:

$d(u.v) = u.dv + v.du.$ Hau integratuta

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du \;\Rightarrow$$

$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$. Hau da zatikako integrazioaren formula.

Adibidea:

$$\int x \sin x\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} x = u \\ \sin x\,dx = dv \end{array}\right\} \text{ eginda } \quad \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\cos x \end{array} \;\Rightarrow$$

$$\int x \sin x\,dx = -x \cos x + \int \cos x\,dx = -x \cos x + \sin x + K$$

9.6.– FUNTZIO RAZIONALEN INTEGRAZIOA

Edozein funtzio razional bi polinomioren zatidura bezala jar daiteke.

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{b_m x^m + \ldots + b_0}{a_u x^u + \ldots + a_0}$$

1) m < n baldin bada, lau kasu ikusiko ditugu, eta edozein polinomioren zatidura lau kasu horietako batean jar daitekeela frogatuko dugu.

a) $\frac{A}{x-a}$ frakzio honen integrazioa berehalakoa da

$$\int \frac{A}{x-a}\, dx = \begin{matrix} x - a = t \\ dx = dt \end{matrix}$$

$$= A \int \frac{dt}{t} = A \ln t + K = A \ln (x-a) + K$$

b) $\int \frac{A}{(x-a)^K}\, dx = \begin{matrix} x - a = t \\ dt = dx \end{matrix}$

$$= A \int \frac{dt}{t^K} = A \int t^{-K}\, dt = A\, \frac{t^{-K+1}}{-K+1} + K_1 = A\, \frac{(x-a)^{-K+1}}{-K+1} + K_1$$

c) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\, dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B}{x^2 + px + q}\, dx =$

$$= \frac{A}{2} \underbrace{\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}}_{I_1} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+px+q}}_{I_2}$$

I_1: $x^2 + px + q = t$ eginez

$(2x+p)\, dx = dt$

$$\frac{A}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{A}{2} \ln (t) + K = \frac{A}{2} \ln (x^2+px+q) + K$$

I_2: $x^2 + px + q$ honela ipin dezakegu:

$$x^2 + 2\, \frac{p}{2}\, x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (h)^2$$

$x + \frac{p}{2} = t$ eginez

$dx = dt$

$$\int \frac{dt}{t^2+h^2} = \frac{1}{h^2} \int \frac{dt}{\left(\frac{t}{h}\right)^2 + 1} = \frac{1}{h^2} \int \frac{h\,du}{u^2 + 1} =$$

$\frac{t}{h} = u \qquad\qquad dt = h\,du$

$$= \frac{1}{h} \text{ arc tan } u + K = \frac{1}{h} \text{ arc tan } \frac{t}{h} + K =$$

$$= \frac{1}{h} \text{ arc tan } \frac{x + \frac{p}{2}}{h} + K$$

d) $\int \frac{Ax + B}{(x^2+px+q)^K}$. Lehengo funtzioa hartuko dugu:

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^K} = \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + B - \frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^K}$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^K} = \underbrace{\frac{\frac{A}{2}(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^K}}_{I_1} + B - \frac{Ap}{2} \int \underbrace{\frac{dx}{(x^2+px+q)^K}}_{I_2}$$

I_1 aurreko kasuan bezala jokatuz: $x^2 + px + q = t$ egiten da:

$\frac{A}{2} \int \frac{dt}{t^K}$ eta integral hau berehalakoa da.

I_2–an ere aurreko kasuko aldaketa egiten badugu hau lortzen da:

$$\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^K}$$

Aldaketa hau eginez $t = x + \frac{p}{2}$
Orain integrala egingo dugu:

$$\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^K} = \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2 + m^2 - t^2}{(t^2+m^2)^K}\, dt =$$

$$= \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{K-1}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^K}\, dt \qquad (1)$$

Aldatu egingo dugu azken integral hau:

$$\int \frac{t^2\, dt}{(t^2+m^2)^K} = \int \frac{t\, .\, t\, dt}{(t^2+m^2)^K} = \frac{1}{2} \int t\, .\, \frac{d\,(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^K}$$

Hau zatika eginez,

$$\frac{1}{2\,(K-1)} \left[t \frac{1}{(t^2+m^2)^{K-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{K-1}} \right]$$

eta (1) berdintzan ordezkatuz

$$\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^K} = \frac{t}{2m^2\,(K-1)\,(t^2+m^2)^{K-1}} +$$

$$+ \frac{2K-3}{2m^2\,(K-1)} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{K-1}}$$

Hemen agertzen den integralak maila bat gutxiago du, eta horrela jarraitu beharko dugu, bat maila lortu arte.

Adibidea:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\, dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - 2}{(x^2+x+3)^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\, dx - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$

$$= - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+2x+3} - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}$$

$x + 1 = t$ aldaketa egiten baldin badugu:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+2) - t^2}{(t^2+2)^2}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} -$$

$$- \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\, dt = \frac{1}{2}\, \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ arc tan } \frac{t}{\sqrt{2}} -$$

$$- \frac{1}{2} \int \frac{t^2\, dt}{(t^2+2)^2} =$$

Azken integral hau eginez:

$$\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\, dt = - \frac{1}{2}\, \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} =$$

$$= - \frac{t}{2\,(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

arc tan $\frac{t}{\sqrt{2}}$. Honek ondokoa esan nahi du:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ arc tan } \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \Bigg[- \frac{x+1}{2\,(x^2+2x+3)} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ arc tan } \frac{x+1}{\sqrt{2}} + K \Rightarrow$$

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^3}\, dx = - \frac{x+2}{2\,(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ arc tan } \frac{x+1}{\sqrt{2}} + K$$

Lau kasu hauek ikusiz gero, edozein funtzio razional lau kasu hauetako batera laburtuko dugu.

Orain, $m < n$ begiratzen ari garela f–ren deskonposaketa faktoriala eginda, zatidura geratuko da:

$$\frac{Q\,(x)}{f\,(x)} = \frac{Q\,(x)}{(x-\alpha_1)^{n_1}\,(x-\beta_1)^{n_2} \dots (x^2+p_1x+q_1)^{h_1}\,(x^2+p_2x+q_2)^{h_2} \dots}$$

Frakzio hau honela jar dezakegu:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1n_1}}{(x-\alpha_1)^{n_1}} +$$

$$+ \frac{A_{21}}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_{2n_2}}{(x-\alpha_2)^{n_2}} + \dots + \frac{M_{11}x + N_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots$$

$$+ \frac{M_{1h_1}x + N_{1n_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{h_1}} + \dots + \frac{M_2x + N_{2h_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{h_2}} \dots$$

eta integral hauek nola egiten diren oraintxe ikusi dugu.

$m \geq n$ denean lehengo polinomioen zatiketa eginez:

$\frac{Q(x)}{f(x)} = p(x) + \frac{Q_1(x)}{f(x)}$, non Q_1 (x)–en maila f (x)–ena baino txikiagoa da. Beraz, hemendik aurrera aurreko kasuan gaude.

9.7.– HERMITE–REN METODOA

Izendatzaileak erro anikoitzak dituenean Hermite–ren metodoak erraztu egiten du integralaren kalkulua.

Aurreko metodoan konturatu gara $\frac{A}{(x-\alpha)^n}$ –ren integrala $\frac{A}{(x-\alpha)^{n-1}}$ erakoa dela. Bestalde $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ –ren integrala,

$$\frac{M^\alpha x + N^\alpha}{(x^2+px+q)^\alpha} \text{ , non } \alpha \leq n-1 \text{ eta } \int \frac{N^\alpha}{x^2+px+q}\, dx \text{ erakoa da.}$$

Beraz:

$$\int \frac{Q\,(x)}{f\,(x)}\;dx =$$

$$= \frac{Y\,(x)}{(x-\alpha_1)^{n_1-1}\ldots(x-\alpha_1)^2\,.\,(x-\alpha_2)^{n_2-1}\ldots(x-\alpha_2)\,.\,(x^2+p_1x+q_2)^{h_1-1}\ldots}$$

$$\overline{\ldots\,(x^2+p_1x+q_1)^2\,.\,(x^2+p_2x+q_2)^{h_2-1}\,\ldots\,(x^2+p_2x+q_2)^2} \;+\; \int \frac{\bar{x}\,(x)}{p\,(x)}\;dx$$

$(x-\alpha_1)^{n_1-1}\ \ldots\ (x^2+p_2x+q_2)^2 = 0\,(x)$ eginez.

$\bar{y}\,(x)$–en maila O (x)–ena baino bat gutxiago da.

$$p\,(x) = (x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\,\ldots\,(x^2+p_1x+q_1)\,.\,(x^2+p_2x+q_1)$$

erro sinpleak eta x–en maila p (x)–ena baino unitate bat txikiagoa da.

y (x) eta $\bar{x}\,(x)$ kalkulatzen baditugu, integral hau asko errazten da.

Guk honakoa daukagu:

$$\int \frac{Q\,(x)}{f\,(x)}\;dx = \frac{y\,(x)}{O\,(x)} + \int \frac{x\,(x)}{p\,(x)}\;dx$$

Guzti hau deribatuz:

$$\frac{Q\,(x)}{f\,(x)} = \frac{y'\,(x)\,O\,(x) - y\,(x)\,O'\,(x)}{[O\,(x)]^2} + \frac{x\,(x)}{p\,(x)}$$

Bi aldeak gaiz gai berdinduz, y (x) eta $\bar{x}\,(x)$–en koefizienteak lortuko ditugu.

Adibidea:

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} \qquad f\,(x) = (x-1)^2\,(x^2+x+1)^2$$

Beraz:

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{y\,(x)}{(x-1)\,(x^2+x+1)} + \int \frac{x\,(x)}{(x-1)\,(x^2+x+1)}\,dx$$

egiten badugu:

$y\,(x) = Ax^2 + Bx + C$

$x^-\,(x) = ax^2 + bx + d$

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} =$$

$$= \frac{(2Ax+B)(x-1)(x^2+x+1) - (Ax^2+Bx+C)[x^2+x+1+(x-1)(2x+1)]}{(x-1)^2\,(x^2+x+1)^2} +$$

$$+ \frac{ax^2 + bx + c}{(x-1)\,(x^2+x+1)}$$

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{(2Ax+B)\,(x^3-1) - (Ax^2+Bx+C).3x^2}{(x^3-1)^2} +$$

$$+ \frac{ax^2 + bx + c}{(x-1)\,(x^2+x+1)}$$

Izendatzaile berdina ipini eta berdinduz.

$1 = (x^3-1)\;(2Ax+B) - (Ax^2+Bx+C).3x^2 + (x^3-1)\;(ax^2+bx+d)$ koefizientez koefiziente berdinduz:

$a = 0$

$0 = -A + b$

$0 = -2B + d$

$0 = 3C - a$

$0 = -2A - b$

$1 = -B - d$ eta emaitzak hauek dira:

$a = 0 \qquad A = 0 \qquad c = 0 \qquad B = -1/3 \qquad b = 0 \qquad d = -2/3$

Honek zera esan nahi du:

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{-1/3\ x}{x^3-1} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x-1)\ (x^2+x+1)}\ dx$$

eta azken integral honetan erro sinpleak bakarrik daudenez gero, askoz errazagoa da, emaitza

$$\frac{-x}{3\ (x^3-1)} - \frac{2}{9}\ \ln (x-1) + \frac{1}{9}\ \ln (x^2+x+1)\ +$$

$$+\ \frac{2\sqrt{3}}{9}\ \text{arc tan}\ \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + K \quad \text{izanik.}$$

9.8.– FUNTZIO IRRAZIONALEN INTEGRALAK

Atal honetan integra daitezkeen kasuak bakarrik ikusiko ditugu. Beste asko ezin dira funtzio elemental bihurtu eta ezin dira honela egin.

1.– Integratu behar den funtzioa R $(x,x^{m/n},\ldots,x^{r/s})$ erakoa denean, R funtzio razionala denean alegia, $x = t^K$ aldagai–aldaketa egingo dugu, non K berretzaileen izendatzaile berdina bait da. $\Rightarrow dx = Kt^{K-1}$ dt. Beraz x–en berretzaile zatikiarrak t–ren berretzaile oso bihurtzen dira eta integral razionala geratzen da.

Adibidea:

$\displaystyle\int \frac{x^{1/2}\ dx}{x^{3/4}+1}$ 2 eta 4–ren m.k.t. 4 da. Beraz,

$x = t^4 \qquad dx = 4\ t^3\ dt$

$$\int \frac{x^{1/2}\ dx}{x^{3/4}+1} = \int \frac{(t^4)^{1/2}}{(t^4)^{3/4}+1}\ 4\ t^3\ dt =$$

$$= \int \frac{t^2}{t^3+1}\ .\ 4\ t^3\ dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\ dt =$$

$$= 4 \int t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\, dt = 4 \frac{t^3}{3} - 4 \int \frac{t^2}{t^3+1}\, dt =$$

$$= 4 \frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} \ln (t^3+1) + K = \frac{4}{3} [x^{3/4} - \ln (x^{3/4}+1) + K]$$

2.– Integral mota

$$\int R \left[x , \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m/n} , \ldots \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r/s} \right] dx$$ erakoa denean:

$\frac{ax+b}{cx+d} = t^K$ aldagai–aldaketa eginez, non t n … s–ren m.k.t. den:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^K \Rightarrow ax+b = t^K (cx+d) \Rightarrow ax-ct^K x = dt^K-b \Rightarrow$$

$\Rightarrow (a-ct^K)\, x = dt^K-b \Rightarrow x = \frac{dt^K-b}{a-ct^K}$ eta integral hau razional bihurtzen da.

Adibidea:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\, dx = \int \frac{\sqrt{t^2}}{t^2-4}\, 2t\, dt =$$

$x + 4 = t^2$ eginez

$x = t^2 - 4$

$dx = 2t\, dt$

$$= 2 \int \frac{t^2}{t^2-4}\, dt = 2 \int 1 + \frac{4}{t^2-4}\, dt = 2t + 2 \ln \frac{t-2}{t+2} + K =$$

$$= 2 \sqrt{x+4} + 2 \ln \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2} + K$$

3.– $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx\right)$ integral hauek egiteko *Euler–en aldaketak* erabiliko ditugu:

Euler–en 1. aldaketa

$a > 0$ denean

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm \sqrt{a}\, x + t$

$ax^2+bx+c = ax^2+2\sqrt{a}\, xt + t^2$

$x = \dfrac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\, t}$. Beraz dx eta x eta $\sqrt{ax^2+bx+c}$, t–ren funtzio razionalak dira.

Adibidea:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$$

$\sqrt{x^2+c} = -x+t$

$x^2+c = x^2-2xt + t^2$

$x = \dfrac{t^2-c}{2t}$ eta hau razional behurtzen da $\displaystyle\int \frac{\frac{t^2+c}{2t^3}}{\frac{t^2+c}{2t}} = \int \frac{dt}{t}$

Euler–en 2. aldaketa

$c > 0$ denean

$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$ egin dezakegu.

Beraz:

$ax^2+bx+c = x^2t^2+2xt\sqrt{c} + c$

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}$$

eta berdin integrala razional bihurtzen da.

Euler–en 3. aldaketa

ax^2+bx+c polinomioak bi erro ezberdin dituenean: α eta β. Kasu horretan:

$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\, t$ egin dezakegu $\Rightarrow$

$ax^2+bx+c = (x-\alpha)^2\, t^2$

$a\,(x-\beta) = (x-\alpha)\, t^2$

$x = \dfrac{\alpha\beta-\alpha t^2}{a-t^2}$ eta razional bihurtzen da. Hau baliagarria da $a < 0$ edo $a > 0$ denean.

9.9.– BINOMIO DIFERENTZIALEN INTEGRALAK

$x^m\,(a+bx^n)^p\,dx$ espresioei binomio diferentzial deitzen zaie.

Teorema:

Binomio diferentzialen integrala integral razional bezala hiru kasutan bakarrik egin daiteke:

a) p osoa denean

b) $\dfrac{m+1}{n}$ osoa denean

c) $\dfrac{m+1}{n} + p$ osoa denean.

Frogapena:

Frogapenarekin batera kasu bakoitzari dagokion aldagai–aldaketa ikusiko dugu.

$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx \qquad x = z^{1/n}$ eginez:

$$dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}\, dz \Rightarrow$$

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx = \int z^{\frac{m}{n}} (a+bz)^p \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}\, dz =$$

$$= \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bz)^p\, dz. \qquad q = \frac{m+1}{n} - 1$$

1) p osoa bada eta q ez, hau da, $\int R\,(z^{r/s},z)\, ds$ eta aurreko atal batean egina dago.

2) $\dfrac{m+1}{n}$ osoa bada q ere bai. Beraz

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx = \int R\,[z^q,(a+bz)^{-1/n}]\, dz$$

eta aurreko atalean egina dago.

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ osoa baldin bada: p+q osoa da $\Rightarrow$

$$\int z^q (a+bz)^p\, dz = \int z^{q+p} \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p dz$$

eta hau ere razional bihurtzen badakigu.

Adibidea:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int x^3\,(1-x^2)^{-1/2}\, dx$$

p osoa ez denez, $\frac{m+1}{n}$ osoa den begiratuko dugu:

$\frac{3+1}{2} = 2$ osoa da eta bigarren kasuan gaude.

Lehengo $z = x^2$ aldaketa eginda:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int z^{3/2}\,(1-z)^{-1/2}\, \frac{d}{2}\, z^{-1/2}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int z\,(1-z)^{-1/2}\, dz$$

$(1-z) = t^2 \;\Rightarrow\; 1-z = t^2 \;\Rightarrow\; z = t^2-1 \;\Rightarrow\; dz = 2t\, dt \;\Rightarrow$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{1}{2} \int z\,(1-z)^{-1/2}\, dz = \frac{1}{2} \int (t^2-1)\, t^{-1}.2t\, dt =$$

$$= \int (t^2-1)\, dt = \frac{t^3}{3} - t + K = \frac{\sqrt{1-x^2}}{3}\,(-x^2-2) + K$$

9.10.– INTEGRAL TRIGONOMETRIKOAK

Lehen kasua:

$\int R\,(\sin x, \cos x)\, dx$ integratzean $\tan \frac{x}{2} = t$ eginez denak razional bihurtzen dira. Honetarako sin x eta cos x, $\tan \frac{x}{2}$ –ren arabera ipini behar ditugu.

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \Rightarrow$$

$$x = 2 \arctan t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Adibidea:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + K = \ln \tan \frac{x}{2} + K$$

Askotan aldagai–aldaketa hau egitean oso integral konplikatuak irteten dira, baina badaude erraz daitezkeen kasu berezi batzuk.

a) $\int R(\sin x) \,.\, \cos x \, dx$ kasuan $\sin x = t$ eginez laburrago irteten da.

b) $\int R(\cos x) \sin x \, dx$ kasuan $\cos x = t$ eginez erraztu egingo dugu.

c) Funtzioa tan x–en funtzio bada $\tan x = t$ eginez $(1+\tan^2 x)\, dx = dt$ eta laburtu egingo dugu.

d) $\int R(\cos x \sin x)\, dx$–en sin x eta cos x–en berretzaileak bikoitiak badira, $\tan x = t$ eginez integratzea sinpleagoa da.

Adibidea:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\, dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)}{2+\cos x} \sin x \, dx =$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x} \sin x \, dx \qquad \cos x = t \text{ aldaketarekin}$$

$dt = -\sin x \, dx$

$$\int \frac{1-t^2}{2+t} (-dt) = \int \frac{t^2-1}{2+t}\, dt, \text{ hau razionala da.}$$

Bigarren kasua

$$\int \cos^m x \ \sin^n x \ dx$$

a) m bakoitia denean.

sin x = t eginez

cos x dx = dt eta

$$\int \cos^m x \sin^n x \, dx = \int (1-t^2)^{\frac{m-1}{2}} \ t^n \, dt$$

b) n bakoitia denean

cos x = t aldaketarekin

–sin x dx = dt

$$\int \cos^m x \sin^n x \, dx = \int -t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} \ dt$$

c) Biak bikoitiak direnean, kontuan edukiko dugu

$$\left| \begin{array}{l} \sin^2 x = \dfrac{1-\cos^2 x}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos^2 x}{2} \end{array} \right.$$ berretzaile bakoitiak lortu arte.

Adibidea:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos^2 x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos^2 x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int 1 - \cos^2 2x \, dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{4} - \frac{x}{8} + \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx =$$

$$= \frac{x}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 4x}{4} + K = \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + K$$

Hirugarren kasua

$\int \cos mx \cos nx \, dx \qquad \int \sin mx \cos nx \, dx \qquad \int \sin mx \sin nx \, dx$

Hirurak egiteko, kontutan hartuko ditugu formula hauek:

$$\cos mx.\cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m+n) x + \cos (m-n) x]$$

$$\sin mx.\cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m+n) x + \sin (m-n) x]$$

$$\sin mx.\sin nx = \frac{1}{2} [-\cos (m+n) x + \cos (m-n) x]$$

Adibidea:

$$\int \sin 5x \sin 3x = \frac{1}{2} \int [-\cos 8x + \cos 2x] \, dx =$$

$$= -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + K$$

9.11.– FUNTZIO IRRAZIONALEN INTEGRAZIOA ALDAKETA TRIGONOMETRIKOAK ERABILIZ

$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\ dx\right)$ aldaketa trigonometrikoekin ebatz daiteke askotan.

Lehengo $ax^2+bx+c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{2a}\right)$ ipiniko dugu. $x + \frac{b}{2a} = t$ eginez.

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{at^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}$$

1) $a > 0 \qquad c - \frac{b^2}{4a} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = m^2$

$c - \frac{b}{4a} = n^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{m^2t^2+n^2}$

2) $a > 0 \qquad c - \frac{b^2}{4a} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = m^2 \qquad c - \frac{b^2}{4a} = -n^2 \qquad \Rightarrow$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{m^2t^2-n^2}$

3) $a < 0 \qquad c - \frac{b^2}{4a} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = -m^2 \qquad c - \frac{b}{4a} = n^2$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{n^2-m^2t^2}$

4) $a < 0 \qquad c - \frac{b^2}{4a} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{ax^2+bx+c}$ beti zenbaki konplexua da.

1) Integrala $t = \frac{n}{m}$ tan z eginez era trigonometrikoan ipiniko dugu.

2) Integrala $t = \frac{n}{m}$ sec z eginez, era trigonometrikoan ipiniko dugu.

3) $t = \frac{n}{m} \sin t$ eginez, trigonometrikoa izango da integrala.

Adibidea:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$$ Hirugarren motako integrala da.

$x = a \sin z$ eginez $dx = a \cos z \, dz$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \int \frac{a \cos z \, dz}{\sqrt{(a^2-a^2 \sin^2 z)^3}} = \int \frac{a \cos z \, dz}{a^3 \cos^3 z} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{1}{a^2} \tan z + K = \frac{1}{a^2} \frac{\sin z}{\sqrt{1-\sin^2 z}} + K =$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + K$$

9.12.– ARIKETAK

1.– $\int x^5 \, dx$

2.– $\int x + \sqrt{x} \, dx$

3.– $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$

4.– $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x}}$

5.– $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx$

6.– $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$

7.– $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$

8.– $\int e^{5x} \, dx$

9.– $\int \cos 5x \, dx$

10.– $\int \sin ax \, dx$

11.– $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$

12.– $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$

13.– $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$

14.– $\int \frac{dx}{3x-7}$

15.– $\int \frac{dx}{1-x}$

16.– $\int \frac{dx}{5-2x}$

17.– $\int \tan 2x \, dx$

18.– $\int \cot (5x-7) \, dx$

19.– $\int \frac{dx}{\cot 3y}$

20.– $\int \cot \frac{x}{3} \, dx$

21.– $\int \tan \varphi \sec^2 \varphi \, d\varphi$

22.– $\int (\cot e^x) \, e^x \, dx$

23.– $\int \left(\tan 4s - \cot \frac{s}{4}\right) ds$

24.– $\int \sin^2 x \cos x \, dx$

25.– $\int \cos^3 x \sin x \, dx$

26.– $\int x \sqrt{x^2+1} \, dx$

27.– $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{2x^2+3}}$

28.– $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^3+1}}$

29.– $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx$

30.– $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^3 x}$

31.– $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} \, dx$

32.– $\int \frac{\cot x}{\sin^2 x} \, dx$

33.– $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\tan x-1}}$

34.– $\int \frac{\ln (x+1)}{x+1} \, dx$

35.– $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{2 \sin x+1}}$

36.– $\int \frac{\sin 2x}{(2+3 \sin 2x)^3} \, dx$

37.– $\int \frac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^3} \, dx$

38.– $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \, dx$

39.– $\int \frac{\cos 2x}{(2+3 \sin 2x)^3}\, dx$

40.– $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}\, dx$

41.– $\int \frac{\ln^2 x\, dx}{x}$

42.– $\int \frac{\arcsin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

43.– $\int \frac{\arctan x\, dx}{1+x^2}$

44.– $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

45.– $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx$

46.– $\int \frac{x\, dx}{x^2+1}$

47.– $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\, dx$

48.– $\int \frac{\cos x\, dx}{2 \sin x + 3}$

49.– $\int \tan^4 x\, dx$

50.– $\int 2x\, (x^2+1)^4\, dx$

51.– $\int \frac{dx}{x \ln x}$

52.– $\int \frac{dx}{(1+x^2) \arctan x}$

53.– $\int \frac{dx}{\cos^2 x\, (3 \tan x+1)}$

54.– $\int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}\, dx$

55.– $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}$

56.– $\int \frac{\cos 2x}{2+3 \sin 2x}\, dx$

57.– $\int \cos (\ln x) \frac{dx}{x}$

58.– $\int \cos (a+bx)\, dx$

59.– $\int e^{2x}\, dx$

60.– $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$

61.– $\int e^{x/3}\, dx$

62.– $\int a^{x^2}\, x\, dx$

63.– $\int e^{x/a}\, dx$

64.– $\int (e^{2x})^2\, dx$

65.– $\int 3^x e^x \, dx$

66.– $\int e^{-3x} \, dx$

67.– $\int (e^{5x}+a^{4x}) \, dx$

68.– $\int e^{x^2+4x+3} (x+2) \, dx$

69.– $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x} \, dx$

70.– $\int \frac{e^x \, dx}{3+4 e^x}$

71.– $\int \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}} \, dx$

72.– $\int \frac{dx}{1+2x^2}$

73.– $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$

74.– $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$

75.– $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

76.– $\int \frac{dx}{4+x^2}$

77.– $\int \frac{dx}{9x^2+4}$

78.– $\int \frac{dx}{4+x^2}$

79.– $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$

80.– $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}$

81.– $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+a^2x^2}}$

82.– $\int \frac{dx}{a^2x^2-c^2}$

83.– $\int \frac{x^2 \, dx}{5-x^6}$

84.– $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^4}}$

85.– $\int \frac{x \, dx}{x^4+a^4}$

86.– $\int \frac{e^x \, dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

87.– $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$

88.– $\int \frac{\cos x \, dx}{a^2+\sin^2 x}$

89.– $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

90.– $\int \frac{\text{arc cos } x - x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

91.– $\int \frac{x-\text{arc tan } x}{1+x^2}\, dx$

92.– $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\, dx$

93.– $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

94.– $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

95.– $\int \frac{e^x\, dx}{1+e^{2x}}$

96.– $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$

97.– $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,.\,\sin 2x\, dx$

98.– $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\, dx$

99.– $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\, dx$

100.– $\int \frac{\sqrt[3]{\tan^2 x}}{\cos^2 x}\, dx$

101.– $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$

102.– $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

103.– $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$

104.– $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$

105.– $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$

106.– $\int \frac{dz}{2z^2-2z+1}$

107.– $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$

108.– $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+11}\, dx$

109.– $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}\, dx$

110.– $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\, dx$

111.– $\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}\, dx$

112.– $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}\, dx$

113.– $\displaystyle\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}\,dx$

114.– $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cos^2 x+\sin x\cos x+\sin^2 x}$

115.– $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^4}}$

116.– $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^4}}$

117.– $\displaystyle\int \frac{ds}{\sqrt{2as+s^2}}$

118.– $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$

119.– $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$

120.– $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$

121.– $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$

122.– $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

123.– $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$

124.– $\displaystyle\int \frac{x-3}{\sqrt{3+66x-11x^2}}\,dx$

125.– $\displaystyle\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}\,dx$

126.– $\displaystyle\int x\,e^x\,dx$

127.– $\displaystyle\int x\ln x\,dx$

128.– $\displaystyle\int x\sin x\,dx$

129.– $\displaystyle\int \ln x\,dx$

130.– $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$

131.– $\displaystyle\int \ln(1-x)\,dx$

132.– $\displaystyle\int x^n\ln x\,dx$

133.– $\displaystyle\int x\arctan x\,dx$

134.– $\displaystyle\int x\arcsin x\,dx$

135.– $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$

136.– $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\,dx$

137.– $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

138.– $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx$

139.– $\int x \cos^2 x\, dx$

140.– $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

141.– $\int \frac{x \arctan x}{(x^2+1)^2}\, dx$

142.– $\int x \arctan \sqrt{x^2-1}\, dx$

143.– $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\, dx$

144.– $\int \ln (x+\sqrt{1+x^2})\, dx$

145.– $\int \arcsin x \frac{x\, dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

146.– $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\, dx$

147.– $\int x^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$

148.– $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$

149.– $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\, dx$

150.– $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

151.– $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\, dx$

152.– $\int \frac{x\, dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$

153.– $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\, dx$

154.– $\int \frac{x^4\, dx}{(x^2-1)(x+2)}$

155.– $\int \frac{dx}{(x-1)^2 (x-2)}$

156.– $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\, dx$

157.– $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\, dx$

158.– $\int \frac{x^2\, dx}{(x+2)^2 (x+4)^2}$

159.– $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

160.– $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\, dx$

161.– $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\, dx$

162.– $\int \frac{dx}{x^3+1}$

163.– $\displaystyle\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}\,dx$

164.– $\displaystyle\int \frac{4\,dx}{x^4+1}$

165.– $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx$

166.– $\displaystyle\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$

167.– $\displaystyle\int \frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2\,(x^2+1)^2}$

168.– $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-x)\,(x^2-x+1)^2}$

169.– $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$

170.– $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,dx$

171.– $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx$

172.– $\displaystyle\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}\,dx$

173.– $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x^2}$

174.– $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$

175.– $\displaystyle\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}\,dx$

176.– $\displaystyle\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}\,dx$

177.– $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}\,dx$

178.– $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}\,dx$

179.– $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$

180.– $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx$

181.– $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$

182.– $\displaystyle\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$

183.– $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$

184.– $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$

185.– $\displaystyle\int \frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}\,dx$

186.– $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$

187.– $\int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}\,dx$

188.– $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

189.– $\int x^{1/3}\,(2+x^{2/3})^{1/4}\,dx$

190.– $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$

191.– $\int \frac{dx}{x^2\,(1+x^2)^{3/2}}$

192.– $\int \sqrt[4]{(1+x^{1/2})^3}\,dx$

193.– $\int \frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

194.– $\int x^5\,\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$

195.– $\int \sin^3 x\,dx$

196.– $\int \sin^5 x\,dx$

197.– $\int \cos^4 x\,\sin^3 x\,dx$

198.– $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$

199.– $\int \cos^2 x\,dx$

200.– $\int \sin^4 x\,dx$

201.– $\int \cos^6 x\,dx$

202.– $\int \sin^4 x\,\cos^4 x\,dx$

203.– $\int \tan^3 x\,dx$

204.– $\int \cot^5 x\,dx$

205.– $\int \cot^3 x\,dx$

206.– $\int \sec^3 x\,dx$

207.– $\int \tan^4 x\,\sec^4 x\,dx$

208.– $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

209.– $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

210.– $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\,dx$

211.– $\int \sin x \sin 3x \, dx$

212.– $\int \cos 4x \cos 7x \, dx$

213.– $\int \cos 2x \sin 4x \, dx$

214.– $\int \sin \frac{1}{4} x \cos \frac{3}{4} x \, dx$

215.– $\int \frac{dx}{4-5 \sin x}$

216.– $\int \frac{dx}{5-3 \cos x}$

217.– $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} \, dx$

218.– $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} \, dx$

219.– $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x} \, dx$

220.– $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$

221.– $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\tan^2 x}$

222.– $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} \, dx$

10. ZENBAKI KONPLEXUAK

10.1.– ZENBAKI ERREALEN BIKOTE ORDENATUA

a eta b, bi zenbaki erreal badira, bikote ordenatu bat bakarrik dago, non (a,b) eran a ezkerreko osagaia eta b eskuineko osagaia den.

Adibideak: (–1,4); $(0,\sqrt{2})$ ...

Bi bikote ordenatu, (a,b), (c,d), berdinak izan daitezen,

$\left.\begin{array}{l} a = c \\ b = d \end{array}\right\}$ batera gertatu behar du.

10.2.– ZENBAKI KONPLEXUAK

Zenbaki errealen bikote ordenatuen multzoan, barne–eragiketak defini daitezke. Guk bi definituko ditugu: "batuketa" eta "biderkaketa".

(a,b) + (c,d) bi bikote ordenatu badira, batuketa honela definituko dugu:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$$

eta biderkaketa:

$$(a,b) \,.\, (c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$$

Bikote ordenatuen multzoari bi eragiketa hauekin, "eremu konplexu" deitzen zaio eta bere elementuei zenbaki konplexu.

Batuketa eta biderkaketaren adibideak:

$(-1,4) + (3,2) = (2,6)$

$(4,3) \,.\, (-1,2) = (4.\,(-1)-3.2, 4.2-3.\,(-1)) = (-10,9)$

Zenbaki konplexu baten ezker–osagaiari "zati erreal" deitzen zaio eta eskuin–osagaiari "zati irudikari". (1,–2) zenbaki konplexuaren zati erreala "1" da eta zati irudikaria "–2" da.

Bi zenbaki konplexu (a,b), (c,d) konjokatuak direla esaten da, a = c eta b + d = 0 betetzen baldin bada.

Adibidez (–1,3)–ren konjokatua (–1,–3) da.

Zenbaki konplexu baten "modulua" edo "balio absolutua" zera da:

(a,b) zenbaki konplexuaren modulua: mod (a,b) = $\sqrt{a^2 + b^2}$

Askotan mod (a,b) ipini beharrean |(a,b)| forma ere erabiltzen da.

10.3.– ZENBAKI KONPLEXUEN BATUKETAREN PROPIETATEAK

1.– Trukatze–propietatea

(a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b)

2.– Elkartze–propietatea

[(a,b) + (c,d)] + (e,f) = (a,b) + [(c,d) + (e,f)]

3.– Elementu neutroa.

Û (x,y), (0,0) + (x,y) = (x,y) betetzen da eta (0,0)–ri elementu neutro deitzen zaio.

4.– Û (x,y), ∃ (c,d), non (x,y) + (c,d) = (0,0); (c,d)–ri (x,y)–ren aurkako elementu deitzen zaio.

5.– Laburtze–propietatea

(a,b) + (x,y) = (a,b) + (c,d) $\rightarrow$ (x,y) = (c,d)

6.– (a,b) (c,d) bi zenbaki konplexu baldin badira, (x,y) bat bakarrik dago non (a,b) + (x,y) = (c,d)

10.4.– ZENBAKI KONPLEXUEN BIDERKAKETAREN PROPIETATEAK

1.– Trukatze–propietatea

(a,b) . (c,d) = (c,d) . (a,b)

2.– Elkartze–propietatea

[(a,b) . (c,d)] . (e,f) = (a,b) . [(c,d) . (e,f)]

3.– Biderkaketarekiko elementu neutroa

(1,0) elementua da (1,0) . (x,y) = (x,y)

4.– Û (x,y) betetzen da: (0,0) . (x,y) = (0,0)

5.– Bi edozein zenbaki konplexu $\begin{cases} (c,d) \\ (a,b) \neq (0,0) \end{cases}$

emanik, zenbaki konplexu bakar bat dago (x,y), non (a,b) . (x,y) = (c,d) gertatzen den.

(a,b) = (0,0) baldin bada, ez du zentzurik (c,d)-k ere (0,0) izan behar duelako.

6.– Û (a,b) ∃ (x,y) / (x,y) (a,b) = (1,0)

7.– Bi zenbaki konplexuren biderkaketa (0,0) bada, bietako bat gutxienez (0,0) da.

8.– Biderkaketaren banatze–propietatea batuketarekiko

(a,b) [(c,d) + (e,f)] = (a,b) . (c,d) + (a,b) . (e,f)

Propietateak ikusirik honako hau esan dezakegu: (0,0) zenbaki konplexuak eremu errealaren 0 zenbakiaren antzerako portaera duela, eta (1,0)–k 1–en antzekoa. Horregatik (1,0) zenbakiari unitate deituko diogu.

10.5.– ZENBAKI KONPLEXUEN ERA BINOMIKOA

(x,0) erako zenbakiek, x zenbaki errealak bezalako portaera dute. Horregatik hemendik aurrera (x,0) ipini beharrean x ipiniko dugu.

Beste aldaketa bat ere egingo dugu: (0,1) ipini beharrean, i ipiniko dugu. i–ri unitate irudikari deitzen zaio.

i–ren aurkakoak (0,1)–en aurkakoa izan beharko du eta hau (0,–1) da edo (–0,1) = –i.

i–ren alderantzizkoa 1/i edo (0,1)–en alderantzizkoa da, eta hau (0,–1) da. Beraz 1/i = –i.

Hauek kontutan harturik, ondokoa idatz dezakegu:

(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + b (0,1) = a+bi eta idazkera honi era binomiko deitzen zaio.

Zenbaki konplexuen arteko eragiketak binomioen propietateak erabiliz egin daitezke, aurrean definitutako eragiketak erabili beharrean.

Adibideak:

1. $(-2+3i) \,.\, (5-7i) = (-2) \,.\, 5-2 \,.\, (-7i) + 3i \,.\, 5-3 \,.7 \,.i^2 = 11 + 29i$

2. $\dfrac{3-i}{-5-4i} = \dfrac{(3-i) \,.\, (-5+4i)}{(-5)^2-(4i)^2} = \dfrac{-15+5i+12i+4}{25+16} = \dfrac{-11}{41} + \dfrac{17}{41}\, i$

Zenbaki errealen multzoak eta (x,0) zenbakien multzoa ez ditugu bereiztuko. Gainera bi kasuetan, zenbaki errealaren aurrean gaudela esango dugu.

"a+bi" zenbaki konplexuaren "a" osagaiari "zati erreal" deitzen zaio eta "b" osagaiari "zati irudikari".

Ohar bezala aipatu beharra dago zenbaki erreal positiboek bi erro dituztela eta negatiboek ez, baina x zenbaki erreal positiboa baldin bada $-\sqrt{x}\; i$ eta $\sqrt{x}\; i$ bi zenbakien karratua –x da. Beraz, eremu konplexuan zenbaki erreal negatiboek ere bi erro dituzte. Orain arte normalean zenbaki konplexuak zenbaki negatiboen erro bezala sartu izan dira.

10.6.– ZENBAKI KONPLEXUEN ERA TRIGONOMETRIKOA

$\forall$ (a,b) ≠ (0,0) betetzen da:

$$a+bi = \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\, i\right] \text{ baina:}$$

$$\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]^2 + \left[\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\right]^2 = 1 \text{ da. Beraz:}$$

$$\text{Û}\ \mu,\ \exists\ \omega_\mu \ / \ \begin{cases} \mu < \omega_\mu \leq \mu + 2\pi \\ \cos \omega_\mu = a:\sqrt{a^2+b^2} \ \ \sin \omega_\mu = b:\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

ω_μ–ri (a+bi)–ren argumentu deituko diogu [μ, $\mu+2\pi$] tartean.

ω_μ garrantzitsuenak ω_0 eta ω_π dira.

$\sqrt{a^2+b^2}$–ri σ deituta (a+bi) = σ (cos ω + i sin ω) eta hau era trigonometrikoa da.

0+0i zenbakiak ez du argumenturik.

Oharra:

Modulua positibo bezala hartu beharrean negatibo bezala har dezakegu ($-\sqrt{a^2+b^2}$) eta argumentua aldatu egingo da. Era honi "era trigonometriko negatibo" deitzen zaio.

10.7.– ZENBAKI KONPLEXUEN BIDERKAKETA ETA ZATIKETA ERA TRIGONOMETRIKOA ERABILIZ

1.– Biderkaketa:

Bitez bi zenbaki konplexu: $\begin{cases} k_1 (\cos a_1 + i \sin a_1) \\ k_2 (\cos a_2 + i \sin a_2) \end{cases}$

Biderkaketa hau da:

$$[k_1 (\cos a_1 + i \sin a_1) \ . \ (k_2 (\cos a_2 + i \sin a_2)] =$$

$$= k_1.k_2 (\cos a_1.\cos a_2 + i\ .\sin a_1.\cos a_2 + i \cos a_1.\sin a_2 + i^2 \sin a_1.\sin a_2) =$$

$$= k_1.k_2 [(\cos a_1.\cos a_2 - \sin a_1.\sin a_2) + i (\sin a_1.\cos a_2 + \cos a_1.\sin a_2)]$$

$$= k_1 \ . \ k_2 [\cos a_1 + a_2) + i \sin (a_1 + a_2)]$$

Oro har, n biderkagairen biderkadura hau da:

Adibidea:

$$-7\ (\cos 10 + i \sin 10)\ .\ 3\ (\cos -5 + i \sin -5) = -21\ (\cos 5 + i \sin 5)$$

2.– Zatiketa:

$$\frac{k_1\ (\cos a_1 + i \sin a_1)}{k_2\ (\cos a_2 + i \sin a_2)} =$$

$$= \frac{[k_1\ (\cos a_1 + i \sin a_1)]\ .\ [k_2\ (\cos a_2 - i \sin a_2)]}{[k_2\ (\cos a_2 + i \sin a_2)]\ .\ [k_2\ (\cos a_2 - i \sin a_2)]} =$$

$$= \frac{k_1\ .\ k_2\ [\cos (a_1 - a_2) + i \sin (a_1 - a_2)]}{k_2^2} =$$

$$= \frac{k_1}{k_2}\ [\cos (a_1 - a_2) + i \sin (a_1 - a_2)]$$

Adibidea:

$$\frac{25\ (\cos \pi + \sin \pi)}{15\ (\cos \pi + \sin \pi)} = \frac{5}{3}$$

10.8.– ZENBAKI KONPLEXU BATEN BERRETZAILE OSOKO BERREDURA

1.– Era binomikoan. Hiru kasu ikusiko ditugu:

a) Berretzailea zenbaki positiboa da

$(a+bi)^n$–ri Newton–en formula aplikatuz:

$$(a+bi)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}.bi + ... + \binom{n}{n-1} a\ .(bi)^{n-1} + \binom{n}{n} (bi)^n$$

b) $n = 0$

$(a+bi)^0 = 1$ definizioz

c) Berretzailea negatiboa da: –n

$$(a+bi)^{-n} = \left[\frac{1}{(a+bi)}\right]^n = \left[\frac{(a-bi)}{a^2+b^2}\right]^n = \frac{(a-bi)^n}{(a^2+b^2)^n}$$

Adibideak:

$$(-3+2i)^4 = \binom{4}{0} (-3)^4 + \binom{4}{1} (-3)^3 \ (2i) + \binom{4}{2} (-3)^2 \ (2i)^2 + \binom{4}{3} (-3) \ (2i)^3$$

$$+ \binom{4}{4} (2i)^4 = 81 + 4\ (-27)\ (2i) + 6.9.(-4) + 4\ (-3)\ (-8i) + 16$$

$$= 81 - 216i - 216 + 96\ i = -135 - 120i$$

$$(2-3i)^{-5} = \frac{(2+3i)^5}{(4+9)^5} = 13^{-5} \left[\binom{5}{0} \ 32 + \binom{5}{1} 16\ (3i) + \binom{5}{2} 8\ (-9) + \right.$$

$$\left. + \binom{5}{3} 4\ (-27i) + \binom{5}{4} 2\ (81) + \binom{5}{5} 243i\right] =$$

$$= 13^{-5}\ [32 + 240i - 720 - 1080i + 810 + 243i] =$$

$$= 13^{-5}\ [122 - 597i]$$

2. Era trigonometrikoan:

$[k\ (\cos a+i \sin a)]^n$ kalkulatzeko lehen egin duguna egingo dugu, berretzailearen zeinuaren arabera.

$n > 0$

$$[k\ (\cos a+i \sin a)]^n = \prod_n [k\ (\cos a+i \sin a)] = k^n\ [\cos na+i \sin na)]$$

$n = 0$

$$[k\ (\cos a+i \sin a)]^n = 1$$

$n < 0$

$$[k(\cos a + i \sin a)]^n = \frac{1}{[k(\cos a + i \sin a)]^{-n}} =$$

$$= \frac{1(\cos 0 + i \sin 0)}{k^{-n}(\cos(-n)a + i \sin(-n)a)} = k^n[\cos(0 - na) + i \sin(0 - na) =$$

$$= k^n[\cos(-na) + i \sin(-na)$$

Adibideak:

$$[5(\cos 4 + i \ \sin 4)]^4 = 5^4(\cos 16 + i \sin 16 = 625(\cos 16 + i \sin 16)$$

$$[2(\cos 3 + i \sin 3)]^{-2} = 2^{-2}(\cos -6 + i \sin -6) = \frac{1}{4} - (\cos -6 + i \sin -6)$$

10.9.– ZENBAKI KONPLEXU BATEN N–GARREN ERROKETA

Edozein zenbaki konplexuk, 0–k ezik, n–garren "n" erro ditu. 0–k erro bat bakarra du: "0".

Lehenengo zenbaki konplexu baten erro karratuak kalkulatuko ditugu:

$$\sqrt{(a+bi)} = c+di \rightarrow (a+bi) = (c+di)^2 \rightarrow a + bi = (c^2 - d^2) + (2\,cd)\,i$$

$$b = 0 \quad \begin{matrix} c = 0 \rightarrow a = -d^2, & a < 0 \text{ denean bakarrik da posible} \\ d = 0 \rightarrow a = c^2, & a > 0 \text{ denean bakarrik da posible} \end{matrix}$$

$$\text{Baina} \begin{cases} b = 0 \quad a < 0 \ \Rightarrow \ c = 0 \quad d = \pm\sqrt{-a} \\ b = 0 \quad a > 0 \ \Rightarrow \ d = 0 \quad c = \pm\sqrt{a} \end{cases}$$

d errealak direlako.

$b \neq 0$ bada, sistema bat daukagu:

$$\left.\begin{matrix} c^2 - d^2 = a \\ 2cd = b \end{matrix}\right\} \rightarrow d = \frac{b}{2c} \rightarrow c^2 - \frac{b^2}{4c^2} = a$$

$$4c^4 - 4ac^2 - b^2 = 0 \rightarrow$$

$$c^2 = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2+16b^2}}{8} \rightarrow c^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right) \rightarrow$$

$$c = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} \rightarrow \quad c^1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} \rightarrow$$

$$c^2 = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

$d_1 = b/2c_1$ $d_2 = b/2d_2$. Beraz zenbaki konplexu baten erro karratuak bi dira.

Adibidea:

$$\sqrt{(2+3i)} = \begin{cases} \sqrt{1/2\left(2+\sqrt{4+9}\right)} + \left[3/\left(2\sqrt{1/2\left(2+\sqrt{4+9}\right)}\right)\right] i \\ -\sqrt{1/2\left(2+\sqrt{4+9}\right)} - \left[3/\left(2\sqrt{1/2\left(2+\sqrt{4+9}\right)}\right)\right] i \end{cases}$$

Era binomikoan egitekotan, berretzailea handiagotu ahala zailtasuna handiagotuz doa, baina era trigonometrikoak asko errazten du.

σ (cos ω+i sin ω) $\sigma \geq 0$ zenbaki konplexu bat emanik, zenbaki honen edozein erro σ' (cos ω'+i sin ω') idatz daiteke. $\sigma' \geq 0$ bada, σ' eta ω' bilatu behar dira non

$$[\sigma' (\cos \omega'+i \sin \omega')]^n = \sigma (\cos \omega+i \sin \omega)$$

$$[\sigma' (\cos \omega'+i \sin \omega')]^n = \sigma'^n (\cos n\omega+i \sin n\omega) = \sigma (\cos \omega+i \sin \omega)$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma'^n &= \sigma \\ n\omega' &= \omega+2k\pi \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} \sigma' &= \sqrt[n]{\sigma} \\ \omega' &= (\omega+2k\pi)/n \end{aligned}$$

Adibideak:

1.– 3 zenbakiaren erro kubikoak:

$3 = 3\,(\cos 0 + i \sin 0)$

$$\sigma = \sqrt[3]{3}\ ;\ \omega = (0+2k\pi)/3 = \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = 2\pi/3 \\ \omega = 4\pi/3 \end{cases}$$

2.– 2i zenbakiaren erro karraktuak:

$2i = 2\,(\cos \pi/2 + i \sin \pi/2)$

$$\sigma = \sqrt{2}\ ;\ \omega = [(\pi/2) + 2k\pi]/2 = \begin{cases} \omega = \pi/4 \\ \omega = 5\pi/4 \end{cases}$$

3.– 16 (cos π/3+i sin π/3)–en laugarren erroak:

Zenbaki hau era trigonometrikoan dago. Beraz

$$\sigma = 2\ ;\ \omega = [(\pi/3) + 2k\pi]/4 = \begin{cases} \omega = \pi/12 \\ \omega = 7\pi/12 \\ \omega = 13\pi/12 \\ \omega = 19\pi/12 \end{cases}$$

10.10.– MOIVRE–REN FORMULAK

Moivre–ren formulak sin ax eta cos ax, sin x eta cos x–en berretzaileen arabera ipintzeko erabiliko ditugu eta alderantziz.

Badakigu $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$. Bestalde

$$(\cos x + i \sin x)^n = \binom{n}{0} \cos^n x + \binom{n}{1} \cos^{n-1} x \,.\, i \sin x + \ldots + \binom{n}{n} (i \sin x)^n$$

beraz:

$$\cos nx = \binom{n}{0} \cos^n x + \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \,.\, (i \sin x)^2 + \ldots$$

$$\sin nx = \binom{n}{1} \cos^{n-1} x \,.\, (i \sin x) + \ldots$$

Adibidea:

Kalkulatu sin 3x eta cos 3x, sin x eta cos x–en funtziopean

$\cos 3x + i \sin 3x =$

$$= \binom{3}{0} \cos^3 x + \binom{3}{1} i \cos^2 x \ \sin x - \binom{3}{2} \cos x \sin^2 x \ - \binom{3}{3} i \sin^3 x$$

Beraz:

$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$

$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$

Orain $\sin^n x$ eta $\cos^n x$, sin ax eta cos ax–ren funtziopean kalkulatuko ditugu. Horretarako edozein x–entzat "u", cos x+i sin x zenbaki konplexuari "u" deituko diogu.

$$u = \cos x + i \sin x \ \rightarrow u^{-1} = \cos x - i \sin x \rightarrow \begin{cases} u+u^{-1} = 2 \cos x \\ u-u^{-1} = 2i \sin x \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \ (u+u^{-1}) \\ \sin x = \dfrac{1}{2i} \ (u-u^{-1}) \end{cases}$$

$$u = \cos x + i \sin x \ \rightarrow \begin{cases} u^n = \cos nx + i \sin nx \\ u^{-n} = \cos nx - i \sin nx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u^n+u^{-n} = 2 \cos nx \\ u^n-u^{-n} = 2i \sin nx \end{cases}$$

Beraz:

$$\cos^n x = \left[\frac{u+u^{-1}}{2}\right]^n = \frac{1}{2^n} \left[u^n + \binom{n}{1} u^{n-1} u^{-1} + \binom{n}{2} u^{n-2} n^{-2} + \right.$$

$$+ \binom{n}{3} u^{n-3} n^{-3} + \ldots + \binom{n}{n-3} u^3 n^{-(n-3)} + \binom{n}{n-2} u^2 u^{-(n-2)} +$$

$$\left. + \binom{n}{n-1} u \, . \, u^{-(n-1)} + \binom{n}{n} u^{-n}\right]; \ \binom{n}{i} = \binom{n}{n-i} \text{ denez:}$$

$$\cos nx = \binom{n}{0}[u^n+u^{-n}] + \binom{n}{1}[u^{n-2} + u^{-(n-2)}] + \ldots$$

Bestalde:

$$\sin nx = \left[\frac{u-u^{-1}}{2i}\right]^n =$$

$$\frac{1}{(2i)^n}\left[\binom{n}{0} u^n - \binom{n}{1} u^{n-1}+u^{-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} u\, u^{-(n-1)} + \binom{n}{n}u^{-n}\right]$$

Adibidea:

$$\cos^3 x = \left[\frac{u+u^{-1}}{2}\right]^3 =$$

$$= \left[\binom{3}{0} u^3 + \binom{3}{1} u^2\, u^{-1} + \binom{3}{2} u\,.\,u^{-2} + \binom{3}{3} u^{-3}\right] \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\binom{3}{0}[u^3 + u^{-3}] \binom{3}{1} [u + u^{-1}]\right] = \frac{1}{8}(2 \cos 3x + 6 \cos x) =$$

$$= \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}$$

10.11.– FUNTZIO ESPONENTZIAL TRIGONOMETRIKO ETA HIPERBOLIKOAK EREMU KONPLEXUAN

Lehenbizi funtzio esponentzial eta trigonometrikoen eremu errealeko garapenak gogoratuko ditugu, eremu konplexuan ere baliagarriak direlako.

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$$

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \ldots$$

$$\text{ch } x = 1 + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^4 + \ldots$$

Hau kontutan harturik:

$$\cos (a+bi) = 1 - \frac{1}{2!} (a+bi)^2 + \frac{1}{3!} (a+bi)^4 + \ldots$$

eta froga daitezke honako propietate hauek:

a) $e^a e^b = e^{a+b}$

b) $\sin (a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

c) $\cos (a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

d) $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

e) $\text{sh } (a+b) = \text{sh } a \text{ ch } b + \text{ch } a \text{ sh } b$

f) $\text{ch } (a+b) = \text{ch } a \text{ ch } b + \text{sh } a \text{ sh } b$

g) $\text{sh}^2 a - \text{sh}^2 b = 1$

eremu konplexuan ere baliagarriak direla.

Gainera:

$$\sin (a+bi+2\pi) = \sin (a+bi) \cos 2\pi + \cos (a+bi) \sin 2\pi = \sin (a+bi)$$

$$\cos (a+bi+2\pi) = \cos (a+bi) \cos 2\pi - \sin (a+bi) \sin 2\pi = \cos (a+bi)$$

eta funtzio hauek periodikotasuna mantentzen dute eremu konplexuan ere.

Orain funtzio hauen balioa eremu konplexuan nola kalkulatu ikusiko dugu.

Definizioz $e^{bi} = 1 + bi + \frac{(bi)^2}{2!} + \frac{(bi)^3}{3!} + \frac{(bi)^4}{4!} + \ldots =$

$$= 1 + bi - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3 i}{3!} + \frac{b^4}{4!} + \frac{b^5 i}{5!} + ... =$$

$$= \left(1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} + ...\right) + i \left(b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} + ...\right) =$$

= cos b + i sin b, beraz:

$$e^{(a+bi)} = e^a e^{bi} = e^a\, e^{bi} = e^a\,(\cos b + i \sin b)$$

$$\sin bi = bi - \frac{(bi)^3}{3!} + \frac{(bi)^5}{5!} + ... =$$

$$= i\left(b + \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} + ...\right) = i\ \mathrm{sh} b$$

$$\cos bi = 1 - \frac{(bi)^2}{2!} + \frac{(bi)^4}{4!} + \frac{(bi)^6}{6!} + ... =$$

$$\mathrm{sh}\, bi = \frac{1}{2}\,(e^{bi} - e^{-bi}) = \frac{1}{2}\,[(\cos b + i \sin b) - (\cos b - i \sin b)] = i \sin b$$

$$\mathrm{ch}\, bi = \frac{1}{2}\,(e^{bi} + e^{-bi}) = \frac{1}{2}\,[(\cos b + i \sin b) + (\cos b - i \sin b)] = \cos b$$

Beraz:

$$\sin (a+bi) = \sin a \cos bi + \cos a \sin bi = \sin a\ \mathrm{ch}\, b + i \cos a\ \mathrm{sh}\, b$$

$$\cos (a+bi) = \cos a \cos bi - \sin a \sin bi = \cos a\ \mathrm{ch}\, b - i \sin a\ \mathrm{sh}\, b$$

$$\mathrm{sh}\, (a+bi) = \mathrm{sh}\, a\ \mathrm{ch}\, bi + \mathrm{ch}\, a\ \mathrm{sh}\, bi = \mathrm{sh}\, a \cos b + i\ \mathrm{ch}\, a \sin b$$

$$\mathrm{ch}\, (a+bi) = \mathrm{ch}\, a\ \mathrm{ch}\, bi + \mathrm{sh}\, a\ \mathrm{sh}\, bi = \mathrm{ch}\, a \cos b + i\ \mathrm{sh}\, a \sin b$$

Beste funtzio trigonometrikoak eremu errealean bezala sinu eta kosinu–ren arabera definitzen dira.

10.12.– ZENBAKI KONPLEXU BATEN LOGARITMO NEPERTARRA

a+bi zenbaki konplexu bat emanik, edozein c+di zenbaki konplexuri, non e^{c+di} = a+bi den, a+bi–ren logaritmo nepertar deitzen zaio.

Zero ez den edozein zenbaki konplexuk infinitu logaritmo nepertar desberdin dituela ikusiko dugu.

0–k ez du logaritmo nepertarrik. Ez dago zenbaki konplexurik $e^{a+bi} = 0$ beteko duenik.

a+bi $\neq$ 0 baldin bada, c+di zenbaki bat bilatu behar dugu non $e^{c+di} = a+bi \rightarrow e^c (\cos d + i \sin d) = a+bi$. Hau era trigonometrikoan ipinita $\sigma (\cos \omega + i \sin \omega)$ geratzen zaigu $e^c = \sigma$ eta $d = \omega + 2k\pi \rightarrow c = \ln \sigma$. Beraz $c+di = \ln\sigma + i\,(\omega + 2k\pi)$.

Adibidea:

$-4+i4\sqrt{3}$ zenbakiaren logaritmoak kalkulatzeko, hau era trigonometrikoan ipiniko dugu:

$$-4+i4\sqrt{3} = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\ \sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$c = \ln 8\ ;\quad d = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow \ln\left(-4+i\,4\sqrt{3}\right) = \ln 8 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

10.13.– ARIKETAK

1.– Bilatu bi zenbaki konplexu, non beren batura 13, zatiketa zenbaki konplexu irudikaria eta $2\,|a+bi| = 3\,|c+di|$ den.

2.– Bilatu zenbaki konplexu bat $H = (a+bi) \neq 0$, non $H^3 - H^2$ zenbaki erreala eta $(H - H^{-1})$ zenbaki irudikaria den.

3.– Bilatu H (a+bi) $\neq$ 0 zenbaki konplexu bat, non $|H+6+3i| = 5/2$ eta $(\pi/3)\, i$ H/-H–ren logaritmo nepertarra den.

4.– Ipini sin x eta cos x berreduraren arabera:
a) cos 5x
b) sin 3x

c) cos 6x
d) cos 4x

5.– Frogatu berdintasun hauek:
$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

6.– Frogatu desberdintasun hauek:
$|z| \geq |\mathrm{Re}\ z|$

$|z| \geq |\mathrm{Im}\ z|$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

7.– Bila ezazu $z \cdot \bar{z} - 2|z| + 1 = 0$ ekuazioaren erroak.

8.– Sinplifika ezazu expresio hau era trigonometrikoan utziz:
$$\frac{(1+\tan w)^{20}}{(1-\tan w)^{30}}$$

9.– Frogatu $(a+bi)^n$ eta $(a-bi)^n$ zenbaki konplexu konjokatuak direla.

10.– F (x) funtzio polinomiko bat bada, frogatu F (a+bi) eta F (a–bi) zenbaki konplexuak direla.

11.– Frogatu a+bi, f (x) funtzio polinomikoaren erroa baldin bada, a–bi ere erroa dela.

12.– Frogatu "1" zenbakiaren bi edo erro gehiagoren biderkadura "1"–en beste erro bat dela.

13.– Frogatu (a+bi)–ren n–garren erroen biderkadura $(-1)^{u+1}$ (a+bi) dela.

14.– Bilatu (a+bi) zenbaki konplexu bat, non sin (a+bi) = –2+3i

15.– Frogatu a+bi–ren n–garren erroen batura 0 dela n > 2 denean.

16.– Kalkulatu ondoko baturak:
$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) \quad \text{eta} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+kb)$$

11. INTEGRAL MUGATUA

11.1. BATURA-INTEGRALAK

11.2. INTEGRAL MUGATUA

11.3. INTEGRAL MUGATUAREN PROPIETATEAK

11.4. NEWTON-LEIBNIZ-EN FORMULA

11.5. ALDAGAI-ALDAKETA INTEGRAL MUGATUAN

11.6. INTEGRAL INPROPIOAK

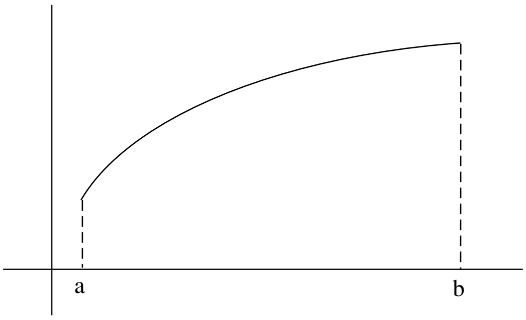
11.7. INTEGRAL MUGATUEN GUTXI GORABEHERAKO KALKULUA

11.8. PARAMETRO BATEN MENPE DAUDEN INTEGRALAK

11.9. INTEGRAL MUGATUEN APLIKAZIOAK

11.1.– BATURA-INTEGRALAK

Izan bedi y = f (x) funtzio jarraia, [a,b] tartean definitua. Tarte horretako bere minimo eta maximoa hurrenez hurren m eta M izendatuko ditugu.



[a,b] tartean n zati egingo ditugu, x_0 ... x_n puntuen bidez, non x_0 = a ... x_n = b ordenatuak bait daude.

Eta
$$\begin{array}{l} x_1 - x_0 \;\;= \Delta x_1 \\ \;.\qquad .\qquad\;\; . \\ \;.\qquad .\qquad\;\; . \\ \;.\qquad .\qquad\;\; . \\ x_n - x_{n-1} = \Delta x_n \text{ egingo dugu.} \end{array}$$

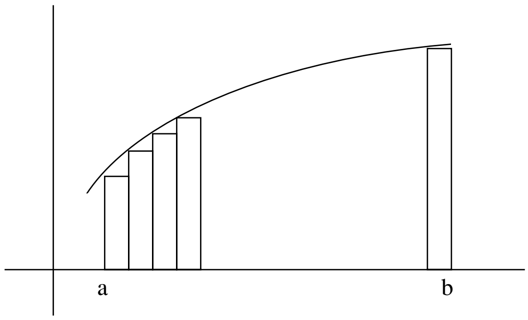
Orain $[x_i,x_{i+1}]$ tarte bakoitzeko maximo eta minimoa aurkituko ditugu: M_{i+1}, m_{i+1} hurrenez hurren, eta hurrengo baturak egin.

$$\underline{S_n} = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 ... + m_n \Delta x_n$$

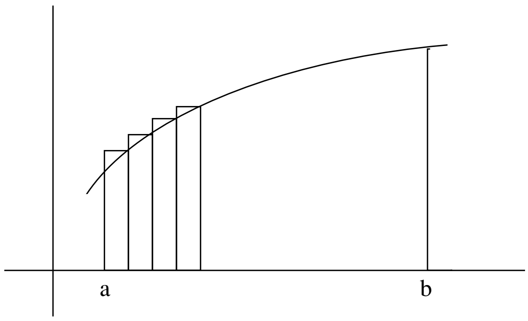
$$\overline{S_n} = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + ... + M_n \Delta x_n$$

$\underline{S_n}$ -ri behe-batura deitzen zaio eta $\overline{S_n}$ -ri goi-batura.

f (x) ≥ 0 denean, $\underline{S_n}$ da eskailera horretako azaleren batura,



eta $\overline{S_n}$ beste eskailera honetako azaleren batura.



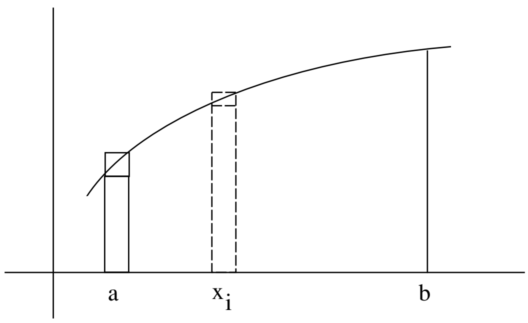
Behe-batura eta goi-baturaren propietate batzuk ikusiko ditugu orain:

a) Beti $m_i \le M_i$ denez, $\underline{S_n} \le \overline{S_n}$

b) $m_1 \ge m$, $m_2 \ge m$ ... $m_n \ge m$ denez $S_n \ge m\,(b–a)$

c) $M_1 \le M$ ... $M_n \le M$ denez, $\overline{S_n} \le M\,(b–a)$

11.2.- INTEGRAL MUGATUA



Aurreko atalean egindako $[x_0,x_1]$ ... $[x_{n-1},x_n]$ tarte bakoitzean ξ_i bat aukeratuko dugu, non

$$x_0 < \xi_1 < x_1 \ \ldots \ x_{n-1} < \xi_n < x_n \text{ den.}$$

$f(\xi_1)$ ... $f(\xi_n)$ kalkulatuko dugu eta

$$S_n = f(\xi_i)\,\Delta x_1 + \ldots + f(\xi n)\,\Delta x_n \quad \text{definituko dugu}$$

eta ondokoa beteko da:

$\underline{S_n} \leq S_n \leq \overline{S_n}$. Beraz, $\Delta x_i \to 0$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \underline{S_n} = \lim_{\Delta x_i \to 0} S_n = \lim_{\Delta x_i \to 0} \overline{S_n}$$

berdinak badira, f (x) funtzioa integragarria dela esango dugu eta

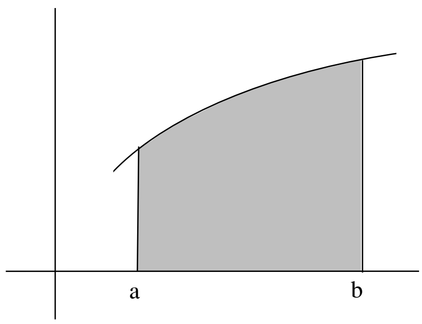
$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{eran adieraziko dugu limite hori.}$$

Limite hori [a,b] tartean funtzioaren integral mugatua dela esango dugu. a eta b dira hurrenez hurren behe-muga eta goi-muga. Ez dugu frogatuko, baina [a,b] tartean jarraia den edozein funtzio, integragarria da tarte horretan.

Funtzio etena denean, ezin da ezer ziurtatu.

$f(x) \geq 0$ betetzen denean.

$\int_a^b f(x)\,dx$ eta f (x)-ek eta $\begin{matrix} x = a \\ x = b \end{matrix}$ zuzenak abzisa-ardatzak mugatzen duten azalera berdinak dira.



$\int_a^b f(x)\,dx$ kalkulatzerakoan a < b dela kontsideratu dugu.

b < a denean, $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Eta a = b denean, $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

11.3.– INTEGRAL MUGATUAREN PROPIETATEAK

1. propietatea

Konstanteak integraletik kanpo atera daitezke, biderkatzen daudenean.

$\int_a^b A\, f(x)\,dx = A \int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_a^b A\, f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} A\, f(\xi_i)\,\Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} A \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i =$$
$$= A \int_a^b f(x)\,dx$$

2. propietatea

Bi edo funtzio gehiagoren baturaren integrala, funtzio horien integralen batura da.

$$\int_a^b (f_1(x) + \ldots + f_p(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \ldots + \int_a^b f_p(x)\,dx$$

Frogapena:

$$\int_a^b (f_1(x)+\ldots+f_p(x))\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f_i\,(x) + \ldots + f_p\,(x)]\,\Delta x_i =$$
$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f_i\,(x)\,\Delta x_i + \ldots + f_p\,(x)\,\Delta x_i] =$$
$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f_i\,(x)\,\Delta x_i + \ldots + \sum_{i=1}^{n} f_p\,(x)\,\Delta x_i\right] =$$
$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_i\,(x)\,\Delta x_i + \ldots + \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_p\,(x)\,\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f_1(x)\,dx + ... + \int_a^b f_p(x)\,dx$$

3. propietatea

f (x) eta g (x), [a,b] tartean definitutako bi funtziok hau betetzen badute: $0 < f(x) \leq g(x)$ Û $x \in [ab]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Frogapena:

$$0 < f(x) \leq g(x) \quad \text{Û}\ x \in [ab] \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

4. propietatea:

Izan bitez m eta M, f (x) funtzioaren balio minimo eta maximoa [a,b] tartean hurrenez hurren.

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)$$

Frogapena:

Hipotesiak esaten duenez:

$$m \leq f(x) \leq M$$

Beraz,

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx \;\Rightarrow\; m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a)$$

5. propietatea:

Izan bedi f (x) funtzio jarraia [a,b] tartean

$$\exists\ \xi \in [a,b] \ / \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)$$

Frogapena:

Aurreko propietatean frogatu dugunez:

$m\,(b–a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; M\,(b–a) \quad \Rightarrow \quad (b–a) > 0$ denez,

$m \;\leq\; \frac{1}{b–a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M$. Baina, funtzioa jarraia denez, [m,M] tarteko balio guztiak hartu behar ditu. Beraz,

$$\exists\, \xi \in \,/\, [a,b] \;/\quad f(\xi) = \frac{1}{b–a} \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = (b–a)\, f(\xi)$$

6. propietatea:

Izan bedi f (x) funtzio jarraia [a,b] tartean eta $c \in \mathbb{R}$ edozein zenbaki. Hortaz,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Frogapena:

a < c < b denean, nahikoa da zatiduran $x_i = c$ egitea.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{j} f(x_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=j}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i \right] = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

c > b denean ordea, a < b < c eta orain frogatu dugunez:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx;\ \text{baina:}$$

$$\int_m^n f(x)\,dx = -\int_n^m f(x)\,dx \;\Rightarrow \int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$c < a \Rightarrow\; c < a < b$ eta

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_c^b f(x)\,dx - \int_c^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

aurreko arrazoi berberagatik:

$$\int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

eta frogatuta dago edozein kasurentzat.

11.4.– NEWTON-LEIBNIZ-EN FORMULA

1. teorema

$\int_a^b f(x)\,dx$ integralean, behe-muga finkoa dela kontsideratuko dugu, baina goi-muga aldakorra dela. Beraz, goi-muga aldatuta integralaren balio desberdinak agertzen dira eta funtzio berri bat edukiko dugu:

$$I\,(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Izan bedi f (x) funtzio jarraia eta $I\,(b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Beraz, $\dfrac{d\,I(b)}{db} = f\,(b)$

Frogapena:

Hau frogatzeko deribaturen definizioa erabiliko dugu:

$$\lim_{\Delta b \to 0} \frac{I(b+\Delta b) - I(b)}{\Delta b}$$

$$I\,(b + \Delta b) = \int_a^{b+\Delta b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{\Delta b + b} f(x)\,dx$$

$$I(b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

$$I(b + \Delta b) - I(b) = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^{\Delta b+b} f(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \;\Rightarrow$$

$I(b + \Delta b) - I(b) = \int_b^{\Delta b} f(x)\, dx$. Batezbesteko teoremagatik,

$$\int_b^{\Delta b+b} f(x)\, dx = (b + \Delta b - b)\, f(\xi);\; \xi \in [b, b+\Delta b] \;\Rightarrow$$

$$\int_b^{\Delta b+b} f(x)\, dx = \Delta b\, f(\xi) \qquad b \in [b, b+\Delta b]$$

$$\lim_{\Delta b \to 0} \frac{\Delta b\, f(\xi)}{\Delta b} = f(b)$$

2. teorema

Izan bedi F (x), f (x)-en jatorrizko funtzio bat.

$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$ (Newton-Leibnizen formula)

Frogapena:

Izan bedi F (x), f (x)-en jatorrizko funtzio bat.

$\int_a^x f(t)\, dt = F(x) + C$ edozein x-entzat.

Beraz, $\int_a^a f(t)\, dt = F(a) + C = 0;\; C = -F(a) \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^x f(t)\, dt = F(x) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

11.5.– ALDAGAI-ALDAKETA INTEGRAL MUGATUAN

Teorema:

$\int_a^b f(x)\, dx$ kontsideratuko dugu, non f (x) [a,b] tarte jarraia den eta $x = \varphi(t)$, φ funtzio honek baldintza hauek betetzen dituelarik:

1) $\varphi(\alpha) = a \quad \varphi(\beta) = b$

2) φ eta φ' jarraiak $[\alpha,\beta]$ tartean.

Beraz, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$

11.6.– INTEGRAL INPROPIOAK

a) Muga infinituak dituzten integralak

Izan bedi f (x) funtzioa, $a \leq x < +\infty$ tartean definitua eta jarraia.

$I(b) = \int_a^b f(x)\,dx$. b aldatuta integrala ere aldatu egiten da. Integrala b-ren funtzio jarraia da.

Definizioa:

$\exists \lim_{b\to+\infty} I(b) = A$. Limite honi, $[a, +\infty)$ tarteko f (x)-en integral inpropioa deitzen zaio.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Integral inpropioa badagoela edo konbergentea dela esaten da. Integral hori dibergentea da limite hori ez dagoenean.

Era berean

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)\,dx$$

Adibidea:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} [\arctan x]_0^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} [\arctan b - \arctan 0] = \lim_{b \to +\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}$$

Kasu askotan nahikoa da integrala konbergentea den ala ez esatea. Hurrengo teoremak horretan lagunduko digute.

1. teorema:

$$\forall\, x \geq \alpha \Rightarrow 0 \leq f\,(x) \leq \varphi\,(x),$$

$\int_{\alpha}^{+\infty} \varphi\,(x)\,dx$ konbergentea izanik $\Rightarrow \int_{a}^{+\infty} f\,(x)\,dx$ konbergentea da, eta $\int_{a}^{+\infty} f\,(x)\,dx \leq \int_{a}^{+\infty} \varphi\,(x)\,dx$

Frogapena:

$$\int_{a}^{+\infty} f\,(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f\,(x)\,dx \quad \text{eta} \quad \int_{a}^{+\infty} \varphi\,(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} \varphi\,(x)\,dx$$

Gainera dakigunez:

$$\int_{a}^{b} f\,(x)\,dx \leq \int_{a}^{b} \varphi\,(x)\,dx \Rightarrow I_f\,(b) \leq I_{\varphi}\,(b) \Rightarrow \lim_{b \to \infty} I_f\,(b) \leq \lim_{b \to \infty} I_{\varphi}\,(b)$$

Adibidea:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)} \qquad 1 \leq x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2(1+e^x)} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)} \leq 1$$

2. teorema:

$\forall x \geq a \Rightarrow 0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ eta $\int_a^{\infty} \varphi(x)\,dx$ dibergentea dela betetzen bada, $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ere dibergentea da.

Frogapena:

Aurreko teorema bezalakoa

Adibidea:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} \left[2\sqrt{x}\right]_1^b = \infty \quad \Rightarrow \quad \int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx \text{ dibergentea}$$

3. teorema:

$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ konbergentea bada $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ere konbergentea da, eta absolutuki konbergente deitzen zaio.

Frogapena:

$f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \geq a$ eta 1. teorema aplikatu.

Adibidea:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx \qquad \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| < \left|\frac{1}{x^3}\right|$$

$[1,\infty]$ tartean $\left|\frac{1}{x^3}\right| = \frac{1}{x^3}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx \text{ absolutuki konbergentea.}$$

b) Funtzio etenen integralak

Izan bedi f (x) funtzio jarraia $a \le x < c$ tartean, baina $x = c$ puntuan definitua ez dagoena. Ezin dugu $\int_a^c f(x)\,dx$ kalkulatu funtzioa [a,c] tartean jarraia ez delako. Baina $\exists$ $b < c$ denean funtzioa jarraia da [a,b] tartean eta $\int_a^b f(x)\,dx$ kalkula dezakegu. Beraz ondokoa definituko dugu:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b \to c^-} \int_a^b f(x)\,dx$$

Integral honi, konbergentea denean, integral inpropio konbergente deitzen zaio eta dibergentea denean integral inpropio dibergente. Funtzioa $c < x \le b$ tartean jarraia denean, era berean definituko dugu:

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{a \to c^+} \int_a^b f(x)\,dx$$

Beraz, f (x) funtzioak [a,b] tartean x_0 etengune bat duenean $\int_a^b f(x)\,dx$ kalkulatzeko bi zatitan banatuko dugu:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx$$

Bi integral hauek konbergenteak direnean, integrala ere konbergentea izango da eta bietatik bat dibergentea denean dibergentea.

1. adibidea:

Kalkulatu $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ funtzioak etengune bat dauka $x = 1$ puntuan. Beraz,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b \to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b \to 1^-} \left[2\sqrt{1-x}\right]_0^b = -2 \lim_{b \to 1^-} \sqrt{1-b} -1 = 2 \text{ eta}$$

integrala konbergentea da.

2. adibidea:

Kalkulatu $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$; $[-1,1]$ tartean $\frac{1}{x^2}$ funtzioa etena da $x = 0$ puntuan.

Beraz,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to 0^-} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0} = \lim_{b \to 0^-} \left[-\frac{1}{b} + 1\right] = \infty$$

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_{0}^{1} = \lim_{b \to 0^+} \left[-1 + \frac{1}{b}\right] = \infty$$ integral hau dibergentea da.

Funtzio batek $[a,b]$ tartean etengune bakarra eduki beharrean gehiago (baina kopuru finitua) baldin baditu, $a_1 \ldots a_n$, era berean zatitzen da tartea.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{a_1} f(x)\, dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\, dx + \ldots + \int_{a_n}^{b} f(x)\, dx$$

Teorema:

Bi funtzio, $f(x)$ eta $g(x)$, $[a,c)$ tartean jarraiak badira eta tarte horretan $0 \leq f(x) \leq g(x)$ betetzen bada,

$$\int_a^c f(x)\, dx \leq \int_a^c g(x)\, dx$$

Frogapena aurreko teoreman bezala egiten da. Hemendik atera ditzakegun ondorioak hauek dira: $\int_a^b f(x)\, dx$ dibergentea bada.

$\int_a^c g(x)\, dx$ ere dibergentea izango da eta $\int_a^c g(x)\, dx$ konbergentea bada $\Rightarrow \int_a^c f(x)\, dx$ ere konbergentea izango da.

Adibidea:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}\,dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+4x^3} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Beraz

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}\,dx < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Eta

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b \to 0^+} \left[\frac{1}{2}\sqrt{x}\right]_b^1 = \lim_{b \to 0^+} \left[\frac{1}{2} - \sqrt{b}\right] = \frac{1}{2}$$

Beraz, beste integrala ere konbergentea da.

11.7.– INTEGRAL MUGATUAREN GUTXI GORABEHERAKO KALKULUA

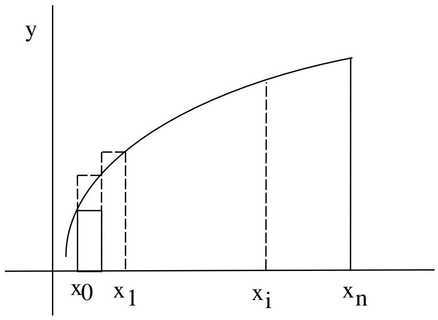
a) Laukizuzenen formula

Izan bedi f (x) funtzio jarrai bat [a,b] tartean. $\int_a^b f(x)\,dx$ kalkulatzeko. [a,b] tartea n zatitan banatuko dugu, $a = x_0, x_1 \dots x_n = b$ puntuen bidez, zatiak berdinak izanik.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$y_0 \dots \; y_n \quad f(x_0) \dots \; f(x_n)$ izango dira eta bi batura egingo ditugu:

$y_0\,\Delta x + \dots + y_{n-1}\,\Delta x$
$y_1\,\Delta x + \dots + y_n\,\Delta x$

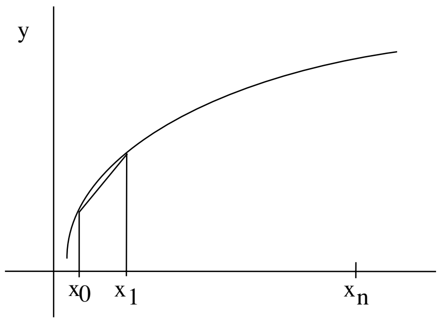


eta

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \Delta x\,(y_0 + \dots + y_{n-1})\\ \int_a^b f(x)\,dx &\approx \Delta x\,(y_1 + \dots + y_n)\end{aligned}\right\}\text{ hau da laukizuzenen formula.}$$

b) Trapezioen formula

Baldintzak, lehengo metodoaren berdinak dira. Baina hemen barruko trapezioen bidez kalkulatzen da azalera.



$$\frac{y_0+y_1}{2}\,\Delta x + \dots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\,\Delta x$$

Beraz,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\,\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\,\Delta x + \dots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\,\Delta x$$

edo $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right)$$

c) Simpson-en formula

Era honetan kalkulatzeko n-k bikoitia izan behar du beti: n = 2 m.

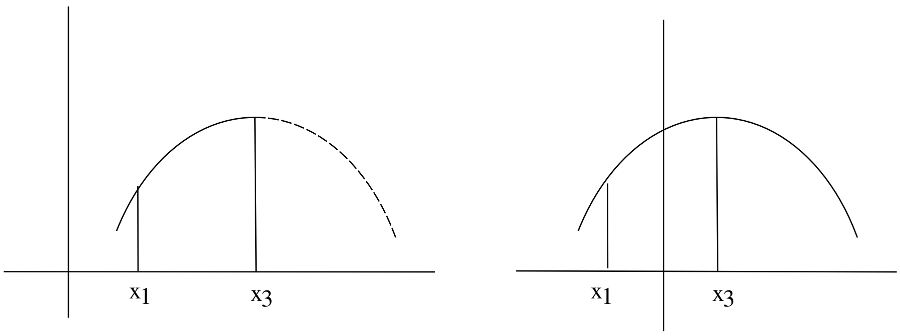
Parabola baten bidez hurbiltzen du azalera. Parabolaren y ekuazioa bada, $= Ax^2 + Bx + C$ A B C baldintza hau betez, kasu bakoitzean kalkula daiteke, baina hau errazten digun teorema bat ikusiko dugu.

Teorema:

$y = Ax^2 + Bx + C$, (x_1,y_1) (x_2,y_2) (x_3,y_3) hiru puntuetatik pasatzen den parabolaren azalera x_1, eta x_3 artean $S = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3)$ da.

$$2h = x_3 - x_1 \text{ izanik eta } x_2 = \frac{x_1+x_3}{2}$$

Frogapena:



Bi azalera hauek berdinak direnez, bigarren irudia erabiliko dugu kalkulatzeko.

$x_1 = -h$ $\qquad y_1 = Ah^2 - Bh + C$
$x_2 = 0$ $\qquad y_2 = C$
$x_3 = h$ $\qquad y_3 = Ah^2 + Bh + C$

Bestetik

$$S = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\, dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} = \frac{h}{3}\ (2Ah^2 + 6C)$$

Baina

$y_1 + y_3 = 2Ah^2 + 2C$

$y_1 + y_3 + 4y_2 = 2Ah^2 + 6C \ \Rightarrow$

$$S = \frac{h}{3}\ (y_1 + 4y_2 + y_3\ )$$

Hau oinarrizko integralean ipinita:

$$\int_{x_0}^{x_2} f\,(x)\, dx \approx \frac{\Delta x}{3}\ (y_0 + 4y_1 + y_2)$$
$$\int_{x_2}^{x_n} f\,(x)\, dx \approx \frac{\Delta x}{3}\ (y_2 + 4y_3 + y_4)$$
$$\int_{x_4}^{x_6} f\,(x)\, dx \approx \frac{\Delta x}{3}\ (y_4 + 4y_5 + y_6)$$
$$\vdots$$
$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} f\,(x)\, dx \approx \frac{\Delta x}{3}\ (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \text{ eta}$$
$$\int_a^b f\,(x)\, dx = \frac{\Delta x}{3}\ (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + y_n)$$
$$= \frac{\Delta x}{3}\ [y_0 + 2\,(y_2 + \ldots + y_{n-2}) + 4\,(y_1 + \ldots + y_{n-1}) + y_n]$$

Ondorioak:

1) Laukien metodoan: $R_n \le \frac{\Delta x}{2}\ (b–a)\ M_1$

$M_1 = \max |f'\,(x)|$

$a \le x \le b$

2) Trapezioen metodoan: $R_n \leq \dfrac{\Delta x^2}{12}$ (b–a) M_2

M_2 = max $||f''(x)||$

$a \leq x \leq b$

3) Simpson-en formulan: $R_n \leq \dfrac{\Delta x^4}{180}$ (b–a) M_3

M_3 = max $|f^{(IV)}(x)|$

$a \leq x \leq b$

d) Txebishev-en metodoa

$\int_a^b f(x)\,dx$ kalkulatzea nahi dugula pentsatuko dugu. Horretarako f (x)-en Lagrange-ren polinomioa aurkituko dugu:

$$P(x) = \frac{(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}\cdot f(x_2) + \ldots + \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}\cdot f(x_n)$$

$$\text{eta} \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx$$

Eta hau izango dugu:

$$\int_a^b p(x)\,dx = C_1\, f(x_1) + \ldots + C_n\, f(x_n)$$

Hau luzea da, pauso bakoitzean integral asko kalkulatu behar ditugulako. Txebishev-ek alderantziz planteatu zuen galdera. $C_1 \ldots C_n$ koefizienteak aurretik determinatuz, $x_1 \ldots x_n$ kalkulatzea.

Errazena $C_1 \ldots C_n$ berdinak direla pentsatzea da. Balio berdin horri C_n deitzen badiogu:

$$\int_a^b f(x)\,dx = C_n\,(f(x_1) + \ldots + f(x_n))$$

f (x) polinomioa denean, balio berdina hartu behar dute bi aldeek, polinomioaren maila (n–1) baldin bada.

Berdintza honetan oinarrituz kalkulatuko ditugu C_1, $x_1 \ldots x_n$

Kalkuluak errazteko integrazio-tartea aldatu egingo dugu aldagai-aldaketa eginez:

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,t$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,t\right) dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt$$

eta beti edozein integral ipin dezakegu beste integral bat bezala [–1,1] tartean kokatuta. Bestetik badakigu f (x) (n–1) mailako polinomioa denean berdinak izan behar dutela:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = C_n\,[f(x_1) + ... + f(x_n)]$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}\,x^{n-1}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x) \quad = \int_{-1}^{1} (a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}\,x^{n-1})\,dx =$$

$$= \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + ... + a_{n-1}\,\frac{x^n}{n}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \begin{cases} 2\left(a_0 + \dfrac{a_2}{3} + ... + \dfrac{a_{n-1}}{3}\right) & \text{n bakoitia} \\ 2\left(a_0 + \dfrac{a_2}{3} + ... + \dfrac{a_{n-2}}{n-1}\right) & \text{n bikoitia} \end{cases}$$

Bestetik,

$$C_n\,[n\,a_0 + a_1\,(x_1 + ... + x_n) + a_2\,(x_1^2 + ... + x_n^2) + a_{n-1}\,(x_1^{n-1} + ... + x_n^{n-1})$$

eta bi aldeak berdinduz:

$$2\left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5}\right) = C_n\,[n\,a_0 + ... + a_{n-1}]$$

Bi aldeak berdinduz, ondokoa daukagu:

$2\ a_0 = C_n\ n\ a_0.$ $\qquad C_n = \frac{2}{n}$

$x_1 + ... + x_n = 0$

$x_1^2 + ... + x_n^2 = \frac{2}{3\ C_n} = \frac{n}{3}$

.

.

.

$x_1^4 + ... + x_n^4 = \frac{2}{5\ C_n} = \frac{n}{5}$

Txebishev-ek, C_n eta x_1, ... x_n tabulatu egin zituen:

n	C_n	$x_1, ... x_n$-ren balioak
3	$\frac{2}{3}$	$x_1 = -x_2 = 0{,}707107 \quad x_2 = 0$
4	$\frac{1}{2}$	$x_1 = -x_4 = 0{,}794654 \quad x_2 = -x_3 = 0{,}187592$
5	$\frac{2}{5}$	$x_1 = -x_5 = 0{,}882498 \quad x_2 = -x_4 = 0{,}374541 \quad x_3 = 0$
6	$\frac{1}{3}$	$x_1 = -x_6 = 0{,}866247 \quad x_2 = -x_5 = 0{,}422519$ $x_3 = -x_4 = 0{,}266635$
7	$\frac{2}{7}$	$x_1 = -x_7 = 0{,}883862 \quad x_2 = -x_6 = 0{,}529657$ $x_3 = -x_5 = 0{,}323912 \quad x_4 = 0$
2	ezin	ezin da.
9	$\frac{2}{9}$	$x_1 = -x_9 = 0{,}911589 \quad x_2 = -x_8 = 0{,}601019$ $x_3 = -x_7 = 0{,}528762 \quad x_4 = -x_6 = 0{,}167906$ $x_5 = 0$

Beraz,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{n}\left[f(x_1) + ... + f(x_n)\right]$$

n-k ezin du 8, edo 9 baino handiago izan, mugak [ab] direnean erro konplexuak azaldu direlako.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left[f(x_1) + ... + f(x_n)\right], \text{ non}$$

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{a}\,x_i$$

Adibidea:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \qquad\qquad x = \frac{1+2}{2} + \frac{2-1}{2}\,t \qquad \text{eginez}$$

$$x = \frac{3+t}{2}$$

$$dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{dt}{x} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{3+t}$$ n = 3 egiten badugu

$$t_1 = 0{,}707107$$

$$t_2 = 0$$

$$t_3 = -0{,}707107$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3+0{,}707107} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3-0{,}707107}\right) = \frac{2}{3} \cdot 1{,}039215 = 0{,}692810$$

11.8.– PARAMETRO BATEN MENPE DAUDEN INTEGRALAK

a) Parametro baten menpe dauden integralen deribazioa

Izan bedi $I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\, dx$; α aldatuta integralaren balioa ere aldatu egingo da eta I α-ren funtzioa da.

1) Pentsa dezagun $f(x\alpha)$ eta $f'_\alpha(x\ \alpha)$ funtzioak $\left.\begin{matrix} x \in [ab] \\ \alpha \in [cd] \end{matrix}\right\}$ tartean jarraiak direla $\int_a^b f(x,\alpha)\, dx$-ren deribatua α-rekiko, hau da:

$$\lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{I(\alpha+\Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} = I'_\alpha(\alpha)$$

$$I(\alpha+\Delta\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx$$

$$I(\alpha+\Delta\alpha) - I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx - \int_a^b f(x,\alpha)\, dx =$$

$$= \int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x,\alpha)\, dx$$

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b \frac{f(x\Delta\alpha+\Delta\alpha) - f(x\alpha)}{\Delta\alpha}\, dx$$

$$\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)}{\Delta\alpha} = f'_\alpha (x, \alpha + \theta\, \Delta\, \alpha)$$

f'_α jarraia den tartea $\Rightarrow f'_\alpha (x, \; \alpha + \theta\, \Delta\, \alpha) = f'_\alpha (x\ \alpha) + \varepsilon$ non

$\varepsilon \to 0 \quad \Delta\alpha \to 0.$

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b (f'_\alpha (x,\alpha)+\varepsilon)\, dx =$$

$$= \int_a^b (f'_\alpha (x,\alpha)+\varepsilon)\, dx + \int_a^b \varepsilon\ dx$$

Limitea hartuz:

$$= \lim_{\Delta\alpha\to 0} \int_a^b (f'_\alpha (x,\alpha)+\varepsilon)\, dx + \int_a^b \varepsilon\ dx =$$

$$= \lim_{\Delta\alpha\to 0} \int_a^b \varepsilon\ dx + \int_a^b f'_\alpha (x,\alpha) = \int_a^b f'_\alpha (x,\alpha)\, dx$$

eta $\left[\int_a^b f\,(x,\alpha)\, dx\right]'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha (x,\alpha)\, dx$

Honi Leibniz-en formula deitzen zaio.

2) Orain pentsa dezagun a eta b ere α-ren funtzio direla.

$$I(\alpha) = \Phi(\alpha, a(\alpha), b(\alpha)) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f\,(x,\alpha)\, dx$$

$$I'(\alpha) = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial a} \cdot \frac{da}{d\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial b} \cdot \frac{db}{d\alpha}$$

Badakigu:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \int_a^b f\,(x,\alpha)\, dx = f\,[b\,(\alpha), \alpha]$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a} = -f\,[a\,(\alpha),\alpha]$$

Orduan

$$I'_\alpha(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\, dx + f[b(\alpha), \alpha]\frac{db}{d\alpha} - f[a(\alpha), \alpha]\frac{da}{d\alpha}$$

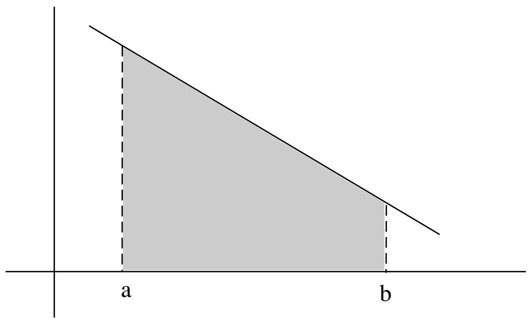
Formula hau erabiltzen da askotan integral asko kalkulatzeko.

11.9. INTEGRAL MUGATUAREN APLIKAZIOAK

a) Azaleren kalkulua integral mugatuan

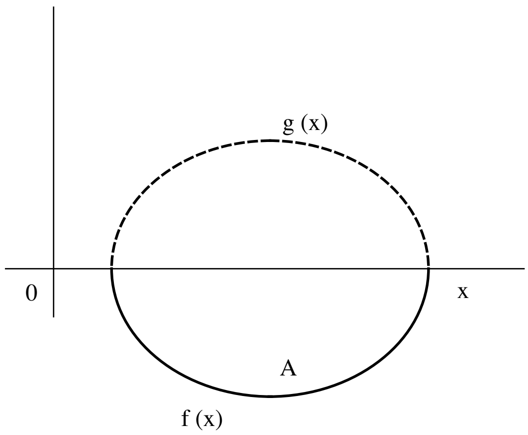
1) Koordenatu cartesiarretan

Aurreko gaian ikusi dugunez, $f(x) \geq 0$ funtzio bat hartuz integralaren esanahi geometrikoa, berak eta abzisa-ardatzak mugatzen duten azalera da.



$$\int_a^b f(x)\, dx = \text{Azalera}$$

[a,b] tartean $f(x) < 0$ denean bere funtzio simetrikoaren bidez kalkulatuko dugu. $g(x) = -f(x)$ da, baina biak azalera berdin mugatzen dute OX ardatzarekin. Beraz



$$A = \int_a^b g\ (x)\ dx = -\int_a^b f\ (x)\ dx$$

Beraz, funtzioak zeinua aldatzen duenean, tartea hiru tartetan $[a\ x_1]$ $[x_1\ x_2]$ $[x_2\ b]$ banatu eta bakoitzarena kalkulatu dugu.

Bi funtzioek mugatzen duten azalera kalkulatzeko

f (x) eta g (x) [a,b] tartean suposatuz

$f\ (x) \geq g\ (x)$ [a,b] tartean egingo duguna hau da:

$$\int_a^b [f\ (x) - g\ (x)]\ dx$$

Hau frogatzeko hiru kasu ikusiko ditugu:

I) $f\ (x) \geq 0 \qquad g\ (x) \geq 0$

II) $f\ (x) \geq 0 \qquad g\ (x) \leq 0$

III) $f\ (x) \leq 0 \qquad g\ (x) \leq 0$

I) $f(x) \geq 0 \qquad g(x) \geq 0$

A kalkulatzeko honakoa egingo dugu:

C – D bezala kalkulatuz:

$C = \int_a^b f(x)\, dx \qquad D = \int_a^b g(x)\, dx \Rightarrow$

$A = C - D = = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

II) $f(x) \geq 0 \qquad g(x) \leq 0$

A kalkulatzeko bi azalera hauek batu egingo ditugu:

A = C + D   eta

$C = \int_a^b f(x)\, dx \qquad D = -\int_a^b g(x)\, dx \;\Rightarrow$

$A = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$

III) $f(x) \leq 0 \qquad g(x) \leq 0$

Kasu honetan g (x)-ek OX-ekin mugatzen duen azalerari, f (x)-ek mugatzen duena kendu behar diogu.

g (x)-ek mugatzen duen azalera hau da:

$$-\int_a^b g\ (x)\ dx$$

eta f (x)-ek mugatzen duena:

$$-\int_a^b f\ (x)\ dx$$

eta guk kalkulatzea nahi dugun azalera, beraz:

$$-\int_a^b g\ (x)\ dx - \left(-\int_a^b f\ (x)\ dx\right) = \int_a^b f\ (x)\ dx - \int_a^b g\ (x)\ dx =$$

$$= \int_a^b [f\ (x) - g\ (x)]\ dx$$

eta hiru kasuetan baliagarria da formula.

2) Koordenatu parametrikotan:

Kurba koordenatu parametrikotan daukagunean, aldagai-aldaketa bezala kontsideratuko dugu:

$$\text{eta}\quad \left.\begin{array}{l} x = g(t) \\ y = h(t) \end{array}\right\}\quad x = g\ (t)\ \text{aldagai-aldaketa daukagunez.}$$

$dx = g'(t)\ dt$ eta $f\ (x)\ y = h\ (t)$

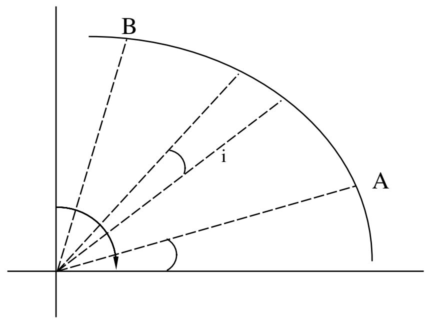
$a = g\ (\alpha)$

$b = g\ (\beta)$ eta $\int_a^b f\ (x)\ dx = \int_\alpha^\beta h\ (t)\ g'(t)\ dt$

Azalera positibo eta negatiboekin berdin-berdin jokatzen da.

3) Koordenatu polarrak

Kurba koordenatu polarretan daukagunean $\rho = f(\theta)$, zatiketa beste era batera egingo dugu. Zatiketa angeluan egingo dugu eta zati baten azalera:



$$\Delta \theta_i = \frac{1}{2} \Delta \theta_i \ \rho_i \, . \, \rho_i$$

izango da. $\Delta \theta_i \, . \, \rho_i$ arkua da.

$$\Delta \theta_i = \frac{1}{2} \Delta \theta_i \ \rho_i^2 \quad ; \quad \Delta \theta_i \rightarrow 0 \text{ eginez}$$

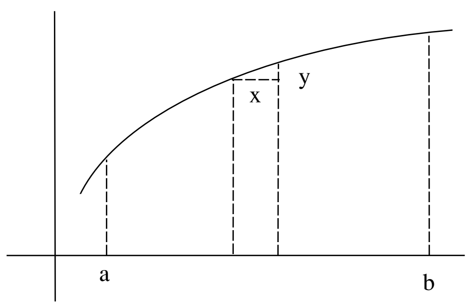
eta batura definizioz azalera guztiena:

$$\lim_{\Delta\theta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \Delta \theta_i \ \rho_i^2 = \frac{1}{2} \lim_{\Delta\theta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\theta_i)^2 \, \Delta \theta_i$$

definizioz da $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\theta$ eta hau azalera da.

b) Kurba baten arku-luzeraren kalkulua tarte batean

1) Koordenatu cartesiarretan



Δx-i dagokion arku-luzeera $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ eginda lor dezakegu hurbilketa eginez.

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\ \Delta x = \sqrt{1+y'^2}\ \ \Delta x$$

eta arku-luzeraren hurbilketa izango da.

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+y'^2}\ \Delta x \quad \Delta x \to 0 \text{ egiten badugu,}$$

arku-luzera zehatza kalkulatuko dugu:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+y'^2}\ \Delta x$$

eta hau definizioz:

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\ dx$$

2) Kurba ekuazio parametrikotan dagoenean

Kasu hau aldagai-aldaketa bezala kontsideratuko dugu.

$x = g\ (t)$
$y = h\ (t)$

Beraz

$$y' = \frac{h'(t)}{g'(t)} \quad \text{eta} \quad dx = g'(t)\ dt$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\left(\frac{h'(t)}{g'(t)}\right)^2} = \frac{\sqrt{(g'(t))^2 + (h'(t))^2}}{g'(t)}$$

Bestetik:

$a = g\ (\alpha)$ eta
$b = g\ (\beta)$

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{g'^2(t)+h'^2(t)}\ \ dt$$

3) Koordenatu polarretan

Aldagai-aldaketa bezala kontsideratuko dugu. Ondokoa kontutan harturik:

$$x = f(\theta) \quad \cos\theta$$

$$y = f(\theta) \quad \sin\theta$$

$$x'(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$$

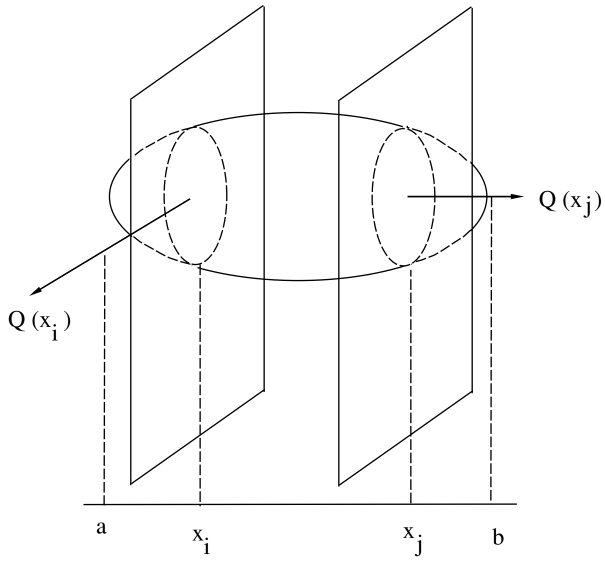
$$y'(\theta) = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$$

$$\begin{aligned} x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 &= f'^2(\theta)\cos^2\theta + f^2(\theta)\sin^2\theta - 2\,f'(\theta)\cos\theta\sin\theta + \\ &+ f'^2(\theta)\sin^2\theta + f^2(\theta)\cos^2\theta + 2\,f'(\theta)\,f(\theta)\cos\theta\sin\theta = \\ &= f'^2(\theta) + f^2(\theta) = \rho'^2 + \rho^2 \end{aligned}$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho'^2+\rho^2}\, d\theta$$

c) Bolumen kalkulua integral mugatuaren bidez

1) Biraketazkoa ez denean



Pentsa dezagun gorputza zatitu egin dugula, eta x bakoitzeko azalera ezagutzen dugula. Q = Q (x). Beraz Δx_i zatia x ardatzean eginda bolumen hori ere zatitu egiten dugu eta $V_i = Q(x_i)\,\Delta x_i$ eta bolumen guztia

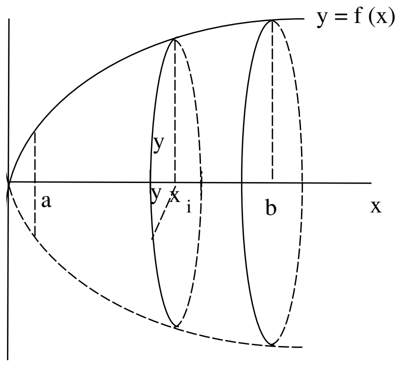
$$V = \sum_{i=1}^{n} Q(x_i)\,\Delta x_i$$

Limiteak hartuz

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(x_i)\,\Delta x_i = \int_a^b Q(x)\,dx$$

2) Bolumena biraketazkoa denean

y = f (x) funtzio bat, x ardatzaren inguruan biratuta sortzen den bolumena kalkulatzeko.

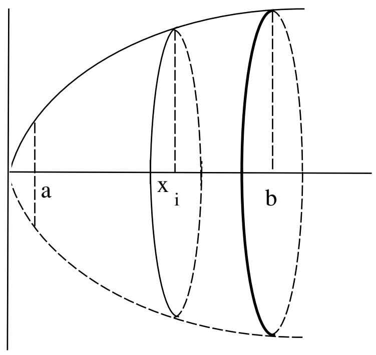


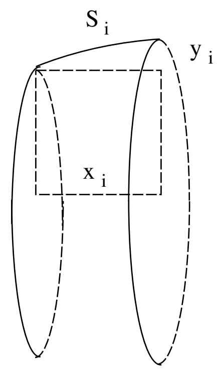
Aurrekoan bezala egingo dugu, baina badakigu x bakoitzari dagokion azalera πy^2 dela, y erradioko bira bat eman dugulako. Beraz, bolumena hau da:

$$\int_a^b \pi\, y^2\, dx = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

d) Biraketazko azaleren kalkulua

y = f (x) kurba bat x ardatzaren inguruan biratzen badugu, sortzen den gainazalaren azalera kalkulatuko dugu.





Azalerari ΔP_i deituta.

$$\Delta P_i = \frac{2\pi y_{i-1} + 2\pi y_i}{2}\ \Delta S_i$$

Gainazala trapezioa delako:

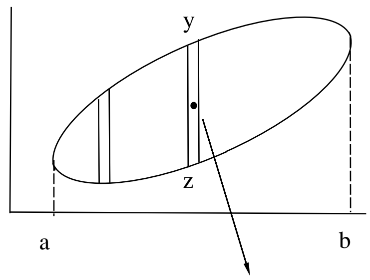
$$\Delta P_i = \pi\ (y_{i-1} + y_i)\ .\ \sqrt{1+y_i^2}\ .\ \Delta x_i$$

$$P = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

e) Grabitate-zentruaren kalkulua integral mugatuaren bidez

Fisikatik badakigu n puntuan grabitate-zentrua (x_z, y_z) honela kalkulatzen dela:

$$x_z = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad y_z = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$



$$\left(x_i \left(\frac{y_i+z_i}{2}\right)\right) = (x_i\ h_i)$$

Gainazal baten grabitate-zentrua kalkulatzea nahi dugunean, gainazala zatitu egingo dugu eta zati bakoitzaren grabitate-zentrua kalkulatu. Gero zati honen masa guztia grabitate-zentruan dagoela kontsideratzen da (definizioak esaten duen bezala). Bestetik $m_i = \delta.\ \Delta A_i$; δ dentsitatea eta ΔA_i zati horren azalera. Beraz

$$x_z \approx \frac{\sum x_i\, \delta\, \Delta A_i}{\sum \delta\, \Delta A_i} \qquad y_z \approx \frac{\sum f(\xi_i)\, \delta\, \Delta A_i}{\sum \delta\, \Delta A_i}$$

$$x_z = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+f'^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2}\, dx} \qquad y_z = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1+f'^2 (x)}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2 (x)}\, dx}$$

non dA azalera diferentzial bat eta h grabitate-zentruaren koordenatua diren.